ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Sylvie Monniaux

Unicité dans L^d des solutions du système de Navier-Stokes : cas des domaines lipschitziens

Volume 10, n^{o}1 (2003), p. 107-116.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2003__10_1_107_0>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (http://ambp.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://ambp.cedram.org/legal/). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques

http://www.cedram.org/

ANNALES MATHEMATIQUES BLAISE PASCAL **10**, 107-116 (2003)

Unicité dans L^d des solutions du système de Navier-Stokes : cas des domaines lipschitziens

Sylvie Monniaux[1]

Résumé

On prouve l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes incompressible dans $\mathcal{C}([0,T);L^d(\Omega)^d)$, où Ω est un domaine lipschitzien borné de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$).

1 Introduction

On s'intéresse dans cet article au système de Navier-Stokes incompressible dans des domaines fortement lipschitziens bornés de $\mathbb{R}^d$, avec donnée au bord de Dirichlet et donnée initiale u_0 à divergence nulle :

$$\begin{array}{rcccr} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla\cdot(u\otimes u) + \nabla\pi &=& 0 & \text{dans} & (0,T)\times\Omega \\ \operatorname{div} u &=& 0 & \text{dans} & (0,T)\times\Omega \\ u &=& 0 & \text{sur} & (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) &=& u_0 & \text{dans} & \Omega, \end{array} \tag{1.1}$$

Plus particulièrement, on étudie le problème de l'unicité des solutions u du système (1.1) ayant la régularité $\mathcal{C}([0,T);L^d(\Omega)^d)$, si elles existent. Dans le cas de l'espace tout entier ($\Omega = \mathbb{R}^d$), la preuve de l'unicité de telles solutions est due à G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo dans [5]. D'autres preuves mettant en oeuvre des méthodes originales ont suivi ; on citera en particulier Y. Meyer [9], P.-L. Lions et N. Masmoudi [8] et S. Monniaux [10]. Tous ces résultats sont présentés dans le livre de P.-G. Lemarié-Rieusset [7]. Dans les articles [8] et [10], la méthode utilisée s'adapte au cas des domaines réguliers bornés de $\mathbb{R}^d$; on pourra aussi citer l'article de H. Amann [1]. Le cas des domaines extérieurs à frontière régulière a été étudié par N. Depauw

[1]Ce travail a été effectué lors d'une visite de l'auteur au Center of Mathematics and its Applications, Australian National University, Canberra - Australie.

[3] ; notons que la preuve de [10] s'adapte aussi dans ce cas. On pourra se reporter à la très complète présentation de cet historique par M. Cannone dans [2].

Le cas des domaines lipschitziens est plus délicat. Le semi-groupe de Stokes permettant de donner une expression des solutions du système (1.1) dans les cas précédents n'est pas analytique dans L^p pour tout p ; P. Deuring dans [4] en a donné des contre-exemples. M. Taylor, dans [14], établit la conjecture que le semi-groupe de Stokes est analytique dans L^p pour tout $p \in [\frac{3}{2}, 3]$, s'appuyant sur le caractère borné du projecteur de Leray dans cet intervalle (voir [6]). Mais à ce jour, aucune preuve de ce résultat n'est disponible. Une version faible de l'analyticité en dimension 3 peut être trouvée dans [11]. L'auteur dans [12] a contourné ce problème de non analyticité en utilisant un résultat de Z. Shen [13] pour montrer, en dimension 3, l'unicité des solutions de (1.1) dans la classe des fonctions continues en temps, à valeurs L^3 en variable d'espace. Nous proposons ici une adaptation de cette méthode aux domaines lipschtziens bornés Ω de dimension quelconque $d \geq 3$ afin de montrer l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes (1.1) dans $\mathcal{C}([0,T); L^d(\Omega)^d)$.

Cet article se compose de trois parties. Dans un premier temps, nous rappelons le théorème de Shen ([13], Theorem 5.1.2) qui est la clé de la démonstration proposée ici. Ensuite, nous nous intéressons au problème de Stokes linéaire non autonome : nous donnons les estimations qui seront utiles dans la dernière partie. Enfin, nous établissons le résultat d'unicité annoncé plus haut.

2 Le problème de Stokes avec donnée au bord

Nous allons commencer cette partie en rappelant la propriété de régularité maximale du laplacien dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$) qui nous sera utile dans différentes démonstrations. On note $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$; son action est donnée par la convolution par le noyau de la chaleur $(p_t)_{t>0}$ défini sur $\mathbb{R}^d$ par $p_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 2.1: *Soit $T > 0$ (on autorise aussi le cas $T = +\infty$). Soit $\mathcal{M}_T$ l'opérateur défini sur les fonctions régulières de $(0,T) \times \mathbb{R}^d$ par*

$$\mathcal{M}_T f(t) = \left(\frac{d}{dt} - \Delta\right)^{-1} (-\Delta f)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(-\Delta f)(s)ds, \quad t \in (0,T).$$

Alors pour tous $p, q \in (1, \infty)$, l'opérateur $\mathcal{M}_T$ est borné de $L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^d))$ dans $L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^d))$ et $\|\mathcal{M}_T\|_{\mathcal{L}(L^p(0,T;L^q(\mathbb{R}^d)))}$ est indépendante de T.

Preuve: Ce résultat est classique. On pourra en trouver une démonstration dans [7], Theorem 7.3, page 64. □

Soit maintenant, et dans toute la suite de cet article, Ω un domaine fortement lipschtzien de dimension $d \geq 3$, soit $\tau > 0$. On considère le problème au bord suivant :

$$\begin{array}{rclcc} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + \nabla q & = & 0 & \text{dans} & (0, \tau) \times \Omega \\ \operatorname{div} v & = & 0 & \text{dans} & (0, \tau) \times \Omega \\ v & = & g & \text{sur} & (0, \tau) \times \partial\Omega, \end{array} \tag{2.1}$$

où g est une fonction définie sur $(0, \tau) \times \partial\Omega$. Soit K est la matrice $d \times d$ donnée par l'expression

$$K_{i,j}(t, x) = \delta_{i,j} p_t(x) + \int_t^\infty \frac{\partial^2 p_s}{\partial x_i \partial x_j}(x) ds, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

où p_t, $t > 0$, est le noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$ défini plus haut. Le théorème de Shen ([13], Theorem 5.1.2) établissant l'existence et l'unicité de solution du système (2.1) pour certaines données au bord g s'énonce de la manière suivante :

Théorème 2.2: *On note $L^2_N(\partial\Omega)^d$ l'espace des fonctions $\gamma \in L^2(\partial\Omega)^d)$ telles que $\int_{\partial\Omega} \gamma \cdot N d\sigma = 0$, où N désigne la normale extérieure en un point de $\partial\Omega$. Il existe un opérateur borné $\mathcal{T} : L^2(0, \tau; L^2_N(\partial\Omega)^d) \to L^2(0, \tau; L^2(\partial\Omega)^d)$ tel que pour toute fonction $g \in L^2(0, \tau; L^2_N(\partial\Omega)^d)$, il existe une unique solution $v \in L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ de (2.1) donnée par la formule de potentiel double couche suivante*

$$\begin{aligned} v(t, x) \quad = \quad & \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K}{\partial N(y)}(t - s, y - x)(\mathcal{T} g)(s, y) d\sigma(y) ds \\ & - \int_{\partial\Omega} \frac{y - x}{|y - x|^3}(\mathcal{T} g)(t, y) \cdot N(y) d\sigma(y), \end{aligned} \tag{2.2}$$

pour $x \in \Omega$ et $t \in (0, \tau)$. De plus, il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de g telle que

$$\|v\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \leq \kappa \|g\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega)^d)}. \tag{2.3}$$

Preuve: L'existence et le caractère borné de l'opérateur $\mathcal{T}$ ainsi que l'expression (2.2) ont été montrés par Shen dans [13], Theorem 5.1.2. Il reste à prouver la propriété d'intégrabilité de la solution v donnée par (2.2) et l'inégalité (2.3). Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{D}((0,\tau)\times\Omega)^d$; il nous faut estimer la quantité

$$\int_0^\tau \int_\Omega v(t,x)\cdot\varphi(t,x)dxdt$$

par la norme de g dans $L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega)^d)$ multipliée par la norme de φ dans l'espace dual de $L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$, c'est-à-dire $L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)$. D'après (2.2) et l'expression de K en fonction du noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_\Omega v(t,x)\cdot\varphi(t,x)dxdt\\
=&\int_0^\tau\int_\Omega dxdt\\
&\sum_{i=1}^d\Bigg\{\varphi_i(t,x)\Bigg(\int_0^t\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^d\frac{\partial K_{i,j}}{\partial N(y)}(t-s,y-x)(\mathcal{T}g)_j(s,y)d\sigma(y)ds\\
&-\int_{\partial\Omega}\frac{y_i-x_i}{|y-x|^d}[(\mathcal{T}g)(t,y)\cdot N(y)]d\sigma(y)\Bigg)\Bigg\}\\
=&\int_0^\tau\int_\Omega dxdt\\
&\sum_{i=1}^d\Bigg\{\varphi_i(t,x)\Bigg(\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial p_{t-s}}{\partial N(y)}(y-x)(\mathcal{T}g)_i(s,y)d\sigma(y)ds\\
&+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^d\frac{\partial}{\partial N(y)}\left[\int_{t-s}^\infty\frac{\partial^2 p_r}{\partial x_i\partial x_j}(y-x)dr\right](\mathcal{T}g)_j(s,y)d\sigma(y)ds\\
&-\int_{\partial\Omega}\frac{y_i-x_i}{|y-x|^d}[(\mathcal{T}g)(t,y)\cdot N(y)]d\sigma(y)\Bigg)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Si on note encore φ la fonction de $(0,\tau)\times\mathbb{R}^3$ qui vaut φ sur $(0,\tau)\times\Omega$ et 0 ailleurs, en échangeant l'ordre d'intégration, cette dernière égalité devient

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \int_\Omega v(t,x)\cdot\varphi(t,x)dxdt \\
= \;& \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)ds \\
& \sum_{i=1}^d (\mathcal{T}g)_i(s,y)\left[\frac{\partial}{\partial N(y)}\left(\int_s^\tau e^{(t-s)\Delta}\varphi_i(t,\cdot)dt\right)(y)\right. \\
& \left.+\frac{\partial}{\partial N(y)}\int_s^\tau\left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}\left\{\int_{t-s}^\infty e^{r\Delta}\varphi_j(t,\cdot)dr\right\}(y)\right)dt\right] \\
& -\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}(\mathrm{div}\ (-\Delta I_d)^{-1}\varphi(t,\cdot))(y)(\mathcal{T}g)(t,y)\cdot N(y)d\sigma(y)dt \\
= \;& \int_0^\tau\int_{\partial\Omega}(\mathcal{T}g)(s,y)\cdot(N(y)\cdot\nabla)[(-\Delta I_d)^{-1}\mathbb{P}\mathcal{M}^*\varphi](s,y)d\sigma(y)dt \\
& -\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}(\mathrm{div}\ (-\Delta I_d)^{-1}\varphi(t,\cdot))(y)[(\mathcal{T}g)(t,y)\cdot N(y)]d\sigma(y)dt,
\end{aligned}$$

où I_d est l'identité sur $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray ($\mathbb{P} = I_d+\nabla(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}$; c'est la projection sur les fonctions à divergence nulle) et $\mathcal{M}^*$ est l'opérateur dual de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{+\infty}I_d$ ($\mathcal{M}_{+\infty}$ est l'opérateur de régularité maximale défini dans la Proposition 2.1). Des propriétés du laplacien dans $\mathbb{R}^d$ nous déduisons les estimations suivantes

$$\|\mathrm{div}\ (-\Delta I_d)^{-1}\varphi\|_{L^2(0,\tau;W^{1,\frac{2d}{d+1}}(\mathbb{R}^d)^d)} \le C_1\|\varphi\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}$$

et

$$\|\nabla[(-\Delta I_d)^{-1}\mathbb{P}\mathcal{M}^*\varphi]\|_{L^2(0,\tau;W^{1,\frac{2d}{d+1}}(\mathbb{R}^d)^d)} \le C_2\|\varphi\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}.$$

D'après les propriétés de l'opérateur de trace sur $\partial\Omega$ et les injections de Sobolev appropriées, on obtient alors

$$\|Tr_{\partial\Omega}[\mathrm{div}\ (-\Delta I_d)^{-1}\varphi]\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega))} \le C_1'\|\varphi\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}$$

et

$$\|Tr_{\partial\Omega}(N(\cdot)\cdot\nabla)[(-\Delta I_d)^{-1}\mathbb{P}\mathcal{M}^*\varphi]\|_{L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega)^d)} \le C_2'\|\varphi\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}.$$

Ces deux dernières estimations ainsi que l'expression du produit scalaire de v par φ nous permettent alors de conclure.

$\square$

3 Estimations des solutions du problème linéaire non autonome

Nous nous intéressons maintenant au problème de Stokes non autonome suivant

$$\begin{array}{rcccr} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla\pi & = & f & \text{dans} & (0,\tau)\times\Omega \\ \operatorname{div} u & = & 0 & \text{dans} & (0,\tau)\times\Omega \\ u & = & 0 & \text{sur} & (0,\tau)\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) & = & 0 & \text{dans} & \Omega. \end{array} \tag{3.1}$$

Nous allons déterminer dans le théorème suivant pour quelles fonctions f ce système (3.1) admet une solution u avec de “bonnes" propriétés.

Théorème 3.1: *Pour tout $r \in [\frac{2d}{d+1}, 2[$, pour tout $f \in L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)$, il existe une solution $u \in L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ unique de (3.1) vérifiant*

$$\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \le \omega_r(\tau)\|f\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)}, \tag{3.2}$$

où $\omega_r(\tau) = O(\tau^{\frac{d+1}{4}-\frac{d}{2r}})$.

Preuve: L'idée est ici d'étendre le problème à $\mathbb{R}^d$ tout entier, puis de se ramener à un problème au bord du type (2.1). Soit $r \in [\frac{2d}{d+1}, 2[$ et $f \in L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)$. On étend f à $\mathbb{R}^d$ tout entier de telle façon que l'extension notée $\tilde f$ vérifie

$$\|\tilde f\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\mathbb{R}^d)^d)} \le c\|f\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)},$$

où c est une constante indépendante de f. On note alors

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{P}(-\Delta I_d)^{-\frac12}(\mathcal{M}_\tau I_d)(-\Delta I_d)^{-\frac12}\tilde f \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}(-\Delta I_d)^{\frac12}(I_d - \mathcal{M}_\tau I_d)(-\Delta I_d)^{-\frac12}\tilde f \end{aligned}$$

où l'opérateur de régularité maximale $\mathcal{M}_\tau$ a été défini dans la Proposition 2.1. On a donc $U \in L^2(0,\tau;W^{1,r}(\mathbb{R}^d)^d) \cap W^{1,2}(0,\tau;W^{-1,r}(\mathbb{R}^d)^d)$ et il existe une constante $\gamma_r > 0$ indépendante de f et de τ telle que

$$\|U\|_{L^2(0,\tau;W^{\frac{d}{r}-\frac{d-1}{2},r}(\mathbb{R}^d)^d)} \le \gamma_r \tau^{\frac{d+1}{4}-\frac{d}{2r}}\|f\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)}.$$

Les propriétés de l'opérateur de trace ainsi que les injections de Sobolev nous montrent alors que $T_{\partial\Omega}U \in L^2(0,\tau;L^2(\partial\Omega)^d)$, de norme contrôlée indépendamment de τ par la norme de f dans $L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)$. On considère alors l'unique v donné par (2.2) du Théorème 2.2 avec $g = T_{\partial\Omega}U$. Ainsi, en notant R_Ω la restriction à Ω des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$, la fonction $u = R_\Omega U - v$ est l'unique solution de (3.1) cherchée. Finalement, (3.2) découle de l'injection de Sobolev suivante

$$W^{\frac{d}{r}-\frac{d-1}{2},r}(\Omega)^d \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d$$

en dimension d. Ce qui termine la démonstration du Théorème 3.1. $\square$

4 Unicité des solutions continues en temps, à valeurs dans L^d

Tous les outils sont maintenant en place pour démontrer l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes (1.1).

Théorème 4.1: *Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions de* (1.1) *dans l'espace $\mathcal{C}([0,T); L^d(\Omega)^d)$. Alors $u_1 = u_2$ sur* $[0,T)$.

Remarque: En dimension $d = 3$, ce théorème a déjà été démontré dans [12].

Preuve: Pour montrer que $u_1 = u_2$, nous appliquons la méthode classique qui consiste à montrer que leur différence $u = u_1 - u_2$ est nulle sur un petit intervalle partant de 0. La continuité des solutions implique que l'ensemble des t pour lesquels $u(t) = 0$ est fermé dans $[0,T)$. D'autre part, la preuve qui suit montre que cet ensemble est non vide et ouvert. On en déduit alors que $u = 0$ sur $[0,T)$. Comme le domaine Ω est borné et $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([0,T); L^d(\Omega)^d)$, on a aussi $u_1, u_2 \in L^2(0,T; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$; en effet, pour $d \geq 3$, on a $\frac{2d}{d-1} \leq d$. Le but de la démonstration suivante est de montrer que la norme de u dans $L^2(0,\tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ est nulle pour un $\tau > 0$.

Dans un premier temps, soit $p \in]\frac{2d}{d-1}, \frac{2d}{d-2}[$ et $u_{0,\varepsilon} \in L^p(\Omega)^d$ à choisir plus tard. Le système (1.1) vérifié par u_1 et u_2 devient pour u

$$\begin{array}{rcllr}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla \pi & = & -\nabla \cdot (u \otimes u_1 + u_2 \otimes u) & \text{dans} & (0,T) \times \Omega \\
\operatorname{div} u & = & 0 & \text{dans} & (0,T) \times \Omega \\
u & = & 0 & \text{sur} & (0,T) \times \partial\Omega \\
u(0,\cdot) & = & 0 & \text{dans} & \Omega.
\end{array} \tag{4.1}$$

On pose $f = -\nabla \cdot (u \otimes u_1 + u_2 \otimes u)$ et on décompose cette distribution en trois parties : $f = f_1 + f_2 + f_3$ avec $f_1 = -\nabla \cdot (u \otimes (u_1 - u_0) + (u_2 - u_0) \otimes u)$,

$f_2 = -\nabla\cdot(u\otimes(u_0-u_{0,\varepsilon})+(u_0-u_{0,\varepsilon})\otimes u)$ et $f_3 = -\nabla\cdot(u\otimes u_{0,\varepsilon}+u_{0,\varepsilon}\otimes u)$. On a les propriétés suivantes pour tout $\tau\in(0,T]$:

$$f_1, f_2 \in L^2(0,\tau;W^{-1,\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d) \quad \text{et} \quad f_3\in L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)$$

où r est défini par la relation $\frac{1}{r}=\frac{1}{d}+\frac{1}{p}$: $r\in]\frac{2d}{d+1},2[$. On a de plus les estimations

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)} \quad \leq \quad & \|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)}\cdot \\ & \left[\|u_1-u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)}+\|u_2-u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)}\right],\end{aligned}$$

$$\|f_2\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)} \leq 2\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)}\|u_0-u_{0,\varepsilon}\|_{L^d(\Omega)^d}$$

et

$$\|f_3\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r}(\Omega)^d)} \leq 2\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)}\|u_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)^d}.$$

D'après le Théorème 3.1 de la partie précédente (appliqué à chacune des f_i, $i=1,2,3$) et l'estimation (3.2), il existe alors une unique solution $u\in L^2(0,T;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ vérifiant pour tout $\tau\in(0,T]$

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \quad \leq \quad & \omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau)\left[\|f_1\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,\frac{2d}{d+1}})}+\|f_2\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,\frac{2d}{d+1}})}\right] \\ & +\ \omega_r(\tau)\|f_3\|_{L^2(0,\tau;W^{-1,r})}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a une estimation de u de la forme :

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \\ \leq \quad & \Big(\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau)\left[\|u_1-u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)}+\|u_2-u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)}\right] \\ & +2\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau)\|u_0-u_{0,\varepsilon}\|_{L^d(\Omega)^d}+2\omega_r(\tau)\|u_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)^d}\Big)\cdot\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)}.\end{aligned}$$

On choisit maintenant $u_{0,\varepsilon}\in L^p(\Omega)^d$ de telle façon que

$$2\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau)\|u_0-u_{0,\varepsilon}\|_{L^d(\Omega)^d}<\frac{1}{4}.$$

D'autre part, comme u_1 et u_2 sont continues en temps et valent u_0 en 0, on a

$$\lim_{\tau\to 0}\|u_1-u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)}=\lim_{\tau\to 0}\|u_2-u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)}=0.$$

De plus, comme $r \in]\frac{2d}{d+1}, 2[$, on a

$$\lim_{\tau \to 0} \omega_r(\tau) = 0.$$

Il existe donc $\tau > 0$ tel que

$$\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau) \left[\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)} + \|u_2 - u_0\|_{L^d(\Omega)^d} \right] + 2\omega_r(\tau)\|u_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)^d} < \frac{1}{4}.$$

Ainsi pour le τ choisi, on a

$$\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)}.$$

Ce qui implique que $u = 0$ sur $[0, \tau)$, et ceci termine la démonstration. $\square$

Bibliographie

[1] H. Amann. On the strong solvability of the Navier-Stokes equations. *J. Math. Fluid Mech.*, 2:16–98, 2000.

[2] M. Cannone. Mr 2002j:76036. *Mathematical Reviews, American Mathematical Society*, 2002.

[3] N. Depauw. Solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles dans un domaine extérieur. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 17:21–68, 2001.

[4] P. Deuring. The Stokes resolvent in 3D domains with conical boundary points : nonregularity in L^p-spaces. *Adv. Differential Equations*, 6:175–228, 2001.

[5] G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo. Unicité dans $L^3(R^3)^3$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16:605–667, 2000.

[6] E. Fabes, O. Mendez, and M. Mitrea. Boundary layers on Sobolev-Besov spaces and Poisson's equation for the Laplacian in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 159:323–368, 1998.

[7] P.-G. Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem.* Chapman & Hall, Boca Raton, 2002. CRC Research Notes in Mathematics 431.

[8] P.-L. Lions and N. Masmoudi. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes system in L^N. *Comm. Partial Differential Equations*, 26:2211–2226, 2001.

[9] Y. Meyer. Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations. In *Current developments in mathematics, 1996 (Cambridge, MA)*, pages 105–212. Int. Press, Boston, MA, 1997.

[10] S. Monniaux. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes equation and maximal L^p-regularity. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 328:663–668, 1999.

[11] S. Monniaux. Existence of solutions in critical spaces of the Navier-Stokes system in 3D bounded Lipschitz domains. Preprint, 2002.

[12] S. Monniaux. On uniqueness for the Navier-Stokes system in 3D-bounded Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 195:1–11, 2002.

[13] Z. Shen. Boundary value problems for parabolic Lamé systems and a nonstationary linearized system of Navier-Stokes equations in Lipschitz cylinders. *Amer. J. Math.*, 113:293–373, 1991.

[14] M. Taylor. Incompressible fluid flows on rough domains. In *Semigroups of operators: theory and applications (Newport Beach, CA, 1998)*, pages 320–334. Birkhäuser, Basel, 2000. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 42.

Sylvie Monniaux
Université Aix-Marseille 3
LATP - UMR 6632 - Case cour A
Av. Escadrille Normandie-Niemen
13397 Marseille Cédex
France
sylvie.monniaux@univ.u-3mrs.fr