ANNALES DE L'I. H. P.

J.A. SCHOUTEN

La théorie projective de la relativité

Annales de l'I. H. P., tome 5, nº 1 (1935), p. 51-88

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1935__5_1_51_0>

La théorie projective de la relativité

PAR

J. A. SCHOUTEN

INTRODUCTION. — On trouvera dans ce qui suit un résumé de la théorie de la relativité projective telle qu'elle a été développée dans les publications G. F., III, IV, V, VI, VIII (1) en partant de l'idée, due à M. O. VEBLEN et B. HOFFMANN (2), d'une connexion projective qui laisse invariante une quadrique donnée dans les espaces locaux. Comme dans ces publications, nous ferons usage de la méthode des coordonnées homogènes, due à M. van DANTZIG (3) (4) ; la théorie et le calcul ont été cependant beaucoup simplifiés en introduisant directement la signature $- - - - +$ pour le projecteur fondamental $\mathcal{G}_{\lambda\varkappa}$ et en employant les autogéodésiques au lieu des géodésiques induites utilisées dans G. F., III-VI (5). Aussi avons-nous employé le symbolisme de RICCI sous sa forme la plus moderne,

(1) G. F. III désignera, dans le texte, le travail de J. A. SCHOUTEN et D. v. DANTZIG, Generelle Feldtheorie, *Zs. f. Ph.* 78 (1932), 639-667 ; G. F. VI : On projective connexions and their application to the general field-theory, *Annals of Math.* 34 (1933), 271-312 ; G. F. IV : J. A. SCHOUTEN, Zur generellen Feldtheorie — Ableitung des Impulsenergiestromprojektors aus einem Variationsprinzip, *Zs. f. Ph.* 81 (1933), 129-138 ; G. F. V : J. A. SCHOUTEN, Zur generellen Feldtheorie — Raumzeit und Spinraum, *Zs. f. Ph.* 81 (1933), 405-417 ; G. F. VIII : J. A. SCHOUTEN et J. HAANTJES, Autogeodätische Linien und Weltlinien, *Zs. f. Ph.* 89 (1934), 357-369.

(2) O. VEBLEN et B. HOFFMANN, Projective relativity, *Physic. Review* 36 (1930), 810-822 ; B. HOFFMANN, Projective relativity and the quantum-field, *Physic. Rev.* 37 (1931), 88-89.

(3) D. v. DANTZIG, Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume, *Math. Annalen*, 106 (1932), 400-454. Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, I. Einordnung der Affingeometrie, II. X_{n+1} mit eingliedriger Gruppe, Amsterdam, *Proc. Kon. Ak.*, 35 (1932), 524-534, 535-542. On the general projective differential geometry. III. Projective pointfield-algebra and analysis, Amsterdam, *Proc. Kon. Ak.*, 37 (1934) 150-155.

(4) On trouvera, dans O. VEBLEN, *Projektive Relativitätstheorie*, Berlin, J. Springer, 1933, la théorie projective traitée d'un autre point de vue et sans faire usage des coordonnées homogènes.

(5) Les conséquences du choix de l'autre signature $+ - - - +$ se trouvent brièvement esquissées dans les notes au bas de la page.

telle qu'elle est présentée dans un ouvrage de J. A. SCHOUTEN et D. J. STRUIK (1) qui paraîtra sous peu.

Il est démontré que, la signature $- - - - +$ étant donnée, la connexion projective est totalement déterminée par deux conditions géométriques et cinq conditions physiques, savoir :

I. La quadrique est invariante.

II. La connexion induite est identique à la connexion Riemannienne.

III. Les autogéodésiques sont les trajectoires des particules chargées.

IV. L'équation des trajectoires est identique à l'équation de la conservation de l'impulsion et de l'énergie.

V. Les deux bivecteurs $\mathfrak{T}_{\mu\lambda}$ et $\mathfrak{Q}_{\mu\lambda}$ ne diffèrent du bivecteur électromagnétique que par des facteurs constants.

VI. Le plus simple invariant N qu'on puisse déduire de cette connexion, la courbure scalaire, pris comme fonction universelle dans l'équation aux variations, fournit les équations de la gravitation et la seconde équation de MAXWELL sans le terme du courant.

VII. Le plus simple invariant M qu'on puisse déduire de l'équation de Dirac, pris comme fonction universelle, fournit le terme du courant sans aucun terme additionnel.

Quand on écarte la dernière condition il y a une infinité de connexions possibles. Parmi elles se trouvent la connexion utilisée dans la théorie de A. EINSTEIN et W. MAYER (2) ($\mathfrak{T}_{\mu\lambda} = 0$) et celle de la théorie de O. VEBLEN et B. HOFFMANN ($\mathfrak{T}_{\mu\lambda} = \mathfrak{Q}_{\mu\lambda}$), employée par W. PAULI (3) dans son dernier travail. Cependant la théorie de M. PAULI utilise les géodésiques induites ; par conséquent elle ne satisfait pas à la condition IV. (Pour $\mathfrak{T}_{\mu\lambda} = 0$ les deux espèces de géodésiques sont identiques). Quand on emploie les autogéodésiques toutes ces théories satisfont aux conditions I-VI ; de plus, le terme additionnel dans la deuxième équation de MAXWELL est si petit, que pour l'instant toute vérification expérimentale semble absolument impossible.

(1) *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, 2e édition, Noordhoff, Groningen, 1935.

(2) A. EINSTEIN et W. MAYER, Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität, Berlin, *Sitzungsber. Pr. Ak.*, 25 (1931), 541-557.

(3) W. PAULI, Ueber die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten, *Ann. d. Physik*, V, 18 (1933), 305-372.

I. — Notions géométriques

LES COORDONNÉES ET LES ESPACES LOCAUX. — Soient

$$\xi^h, (h, i, j, \cdots, m = 1, 2, 3, 4,)$$

les coordonnées d'un espace à quatre dimensions ; elles peuvent subir toutes les transformations du groupe $\mathfrak{G}_4$, qui comprend toutes les transformations continues et plusieurs fois différentiables. Un espace admettant le groupe $\mathfrak{G}_4$ sera appelé un X_4. Un système de ξ^h, choisi arbitrairement, sera appelé un *point* de X_4.

Désignons par $x^\varkappa$,

$$x^\varkappa, (\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma, \tau = 0, 1, 2, 3, 4),$$

les coordonnées homogènes d'un espace à quatre dimensions, pouvant subir les transformations du groupe $\mathfrak{H}_5$, qui comprend toutes les transformations *homogènes* continues et plusieurs fois différentiables *de degré un*. Un espace admettant le groupe $\mathfrak{H}_5$ sera appelé un H_4. Un système de $x^\varkappa \not\equiv 0$, arbitrairement choisi à un facteur numérique près, sera désigné par $\lfloor x^\varkappa \rfloor$ et est appelé *point* de H_4. Un système de $x^\varkappa$ est appelé *point coté* (1) de H_4. Les points cotés de H_4 peuvent être représentés par les *points* d'un espace auxiliaire X_5, dans lequel les $x^\varkappa$ sont des coordonnées non-homogènes spéciales. Les points de H_4 sont représentés par les courbes de X_5 : $x^\varkappa = \mu c^\varkappa$ avec $c^\varkappa$ = const. Le point $x^\varkappa = 0$ de X_5 n'a pas de représentation dans H_4. Nous faisons correspondre deux à deux les points des espaces X_4 et H_4 de la manière suivante : le système de coordonnées $x^\varkappa$ étant choisi d'une manière quelconque, nous prendrons pour ξ^h des fonctions homogènes arbitraires de degré zéro des $x^\varkappa$. Evidemment, la nature de la relation entre ξ^h et $x^\varkappa$ subsiste quand les $x^\varkappa$ et ξ^h sont soumis à des transformations appartenant aux groupes $\mathfrak{H}_5$ et $\mathfrak{G}_4$, respectivement. Il faut remarquer que, malgré cette identification, les deux espaces X_4 et H_5, n'ont pas les mêmes propriétés géométriques, parce que les groupes $\mathfrak{G}_4$ et $\mathfrak{H}_5$ sont différents.

Poussons maintenant plus loin et identifions les points de X_4

(1) Dans les publications citées dans (1) et (3) page 49, point = Ort = spot, point côté = Punkt = point.

et H_4 avec les points de l'espace-temps physique. Le groupe $\mathfrak{H}_5$ nous permettra alors d'introduire en physique des notions géométriques nouvelles, que la géométrie de X_4, fondement de la théorie de la relativité ordinaire, ne connaît pas. Chaque point de l'espace temps pourra être désigné maintenant soit par ξ^h, soit par $\lfloor x^\varkappa \rfloor$.

Les $d\xi^h$ se transforment linéairement par $\mathfrak{G}_4$ suivant :

$$d\xi^{h'} = A_h^{h'} d\xi^h ; \qquad A_h^{h'} = \frac{\partial \xi^{h'}}{\partial \xi^h}. \tag{1}$$

Pour chaque point de H_4 nous introduisons un E_4 (espace à géométrie affine ordinaire,) dont les coordonnées cartésiennes affines seront désignées par Ξ^h et dont la loi de transformation sera

$$\Xi^{h'} = A_h^{h'} \,\Xi^h. \tag{2}$$

Cet espace est *l'espace local affine* ou le E_4 *local* du point de H_4 envisagé. Un système de Ξ^h est un *point du* E_4 local correspondant. Le point ξ^h du X_4 peut être identifié avec le point $\Xi^h = 0$ du E_4 local ; nous l'appellerons *point de contact.*

De la même façon, les $dx^\varkappa$ se transforment linéairement par $\mathfrak{H}_5$

$$dx^{\varkappa'} = \mathfrak{A}_\varkappa^{\varkappa'} dx^\varkappa ; \qquad \mathfrak{A}_\varkappa^{\varkappa'} = \frac{\partial x^{\varkappa'}}{\partial x^\varkappa}, \tag{3}$$

ce qui nous permet d'introduire, pour chaque point de H_4, un P_4 (espace à géométrie projective ordinaire) avec les coordonnées homogènes *ordinaires* $X^\varkappa$ et la loi de transformation

$$X^{\varkappa} = \mathfrak{A}_\varkappa^{\varkappa'} X^\varkappa. \tag{4}$$

Cet espace est *l'espace local projectif* ou le P_4 local du point de H_4 envisagé. Un système de $X^\varkappa$ est un *point coté* du P_4 local. Jusqu'ici il est naturellement impossible de représenter le E_4 local sur le P_4 local, parce que le E_4 contient un hyperplan à l'infini, qui n'existe pas dans P_4.

LES OBJETS GÉOMÉTRIQUES DE X_4. — Un objet géometrique de X_4 est l'ensemble d'un nombre déterminé de composantes, fonctions des ξ^h, définies dans une région de X_4 (pouvant se réduire à un seul point), se transformant par $\mathfrak{G}_4$ de telle manière, que les nouvelles composantes dépendent uniquement des composantes non transformées et de la loi de transformation des ξ^h. En voici quelques exemples :

1. Scalaire (1) :

$$\overset{(h')}{p} = \overset{(h)}{p}.$$

2. Vecteur contrevariant :

$$v^{h'} = A_h^{h'} v^h.$$

3. Vecteur covariant :

$$w_{i'} = A_{i'}^{i} w_i.$$

4. Affineur, par exemple (2) :

$$v_{j'i'}^{\cdot\cdot h'} = A_{h\, j'i'}^{h'j\,i} v_{ji}^{\cdot\cdot h}.$$

5. A-densité (scalaire) (3) de poids $\mathfrak{k}$:

$$\overset{(h')}{\mathfrak{P}} = \Delta^{-\mathfrak{k}} \overset{(h)}{\mathfrak{P}}; \qquad \Delta = \operatorname{Det}\left(A_h^{h'}\right).$$

6. Affineur-densité, de poids $\mathfrak{k}$, par exemple :

$$\mathfrak{W}_{j'i'}^{\cdot\cdot h'} = \Delta^{-\mathfrak{k}} A_{j'i'h}^{j\,i\,h'} \mathfrak{W}_{ji}^{\cdot\cdot h}.$$

Evidemment, tous les objets 1-6 sont des cas spéciaux des affineurs-densités. Pour les affineurs dont la *valence* (c'est-à-dire le nombre des indices) est plus grande que l'unité, on peut transformer chacun des indices indépendamment des autres et obtenir ainsi des *composantes intermédiaires*, par exemple :

$$\mathfrak{Q}_{j\cdot i}^{\cdot h'} = A_h^{h'} \mathfrak{Q}_{j\cdot i}^{\cdot h} = A_{j\,i}^{j'i'} \mathfrak{Q}_{j'\cdot i'}^{\cdot h'}. \tag{5}$$

(1) Quand les composantes d'un objet géométrique ne comportent pas d'indices, parfois nous lui en ajoutons un, entre parenthèses, au-dessus de la lettre principale, pour désigner le système de référence.

(2) Pour abréger, nous ne répétons pas la lettre A.

(3) Il est bien connu qu'une « A-densité » de poids un n'est autre chose qu'une expression abrégée d'un n-vecteur (affineur alternant de valence n) covariant. Pour les lettres principales des densités nous prenons des lettres gothiques.

Evidemment, les $A_h^{h'}$ et $A_{h'}^h$ sont des composantes intermédiaires de *l'affineur d'identité* :

$$(6) \qquad A_i^h \overset{*}{=} \delta_i^h. \quad (1)$$

Chacun des objets 2-6, défini en un point de X_4 peut être représenté par une figure géométrique dans le E_4 local de ce point ; on peut représenter, par exemple, le vecteur contrevariant v^h par le point $\Xi^h = v^h$, le vecteur covariant w_i par l'hyperplan $w_i \; \Xi^i = 1$, le tenseur (= affineur symétrique) g_{ij} par la quadrique $g_{ij} \; \Xi^i \; \Xi^j = 1$, etc. Il est remarquable de constater que, d'après (*1*), l'élément linéaire $d\xi^h$ est un *vecteur*. Ainsi chaque direction passant par un point ξ^h de X_4 est représentée d'une manière biunivoque par une direction du E_4 local de ξ^h et le domaine infinitésimal entourant le point ξ^h dans X_4, est représenté d'une manière biunivoque sur le domaine entourant le point de contact dans E_4 aux infiniments petits de second ordre près.

Dans le E_4 de chaque point de X_4 il y a 4 vecteurs contrevariants $\underset{i}{e}^h$ et 4 vecteurs covariants $\overset{h}{e}_i$ qui appartiennent au système de coordonnées ξ^h et qui sont définis par les équations

$$(7) \qquad \underset{i}{e}^h \overset{*}{=} \delta_i^h \, ; \qquad \overset{h}{e}_i \overset{*}{=} \delta_i^h.$$

Ces vecteurs sont les *vecteurs de coordonnées*. Ils constituent le *repère local* de ξ^h dans le E_4 local. Chaque système de coordonnées ξ^h, $\xi^{h'}$ etc., a son propre système de repères locaux, qui sera désigné, dorénavant, par (h), (h'), etc.

LES OBJETS GÉOMÉTRIQUES DE H_4. — Dans H_4 nous n'envisagerons, dans ce qui suit, que des objets géométriques ayant des composantes qui sont des fonctions *homogènes* des $x^\varkappa$, définies dans une région du H_4 auxiliaire pouvant d'ailleurs se réduire à une des courbes de X_5 données par $x^\varkappa = \mu c^\varkappa$. Ces objets sont définis par rapport au groupe $\mathfrak{H}_5$, de la même manière que les objets de X_4 par rapport au groupe $\mathfrak{G}_4$. Ainsi, les transformations doivent être définies par rapport à *deux* groupes,

(1) Le signe $\overset{*}{=}$ signifie que l'égalité n'est valable que pour le ou les systèmes de coordonnées pour lesquelles elle est effectivement écrite.

le groupe des transformations des *coordonnées* $\mathfrak{H}_5$, et le groupe des transformations des *points cotés* $\mathfrak{F}$:

(8) $$'x^{\varkappa} = \rho x^{\varkappa}.$$

Voici quelques exemples :

1'. Scalaire :

$$\mathfrak{H}_5 : \qquad \overset{(\varkappa')}{p} = \overset{(\varkappa)}{p}.$$

$$\mathfrak{F} : \qquad '\overset{(\varkappa)}{p} = \overset{(\varkappa)}{p}.$$

2'. Point coté :

$$\mathfrak{H}_5 : \qquad v^{\varkappa'} = A_{\varkappa}^{\varkappa'} v^{\varkappa}.$$

$$\mathfrak{F} : \qquad 'v^{\varkappa} = \rho v^{\varkappa}.$$

Le point correspondant est désigné par $\lfloor v^k \rfloor$

3'. Hyperplan coté :

$$\mathfrak{H}_5 : \qquad w_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} w_{\lambda}.$$

$$\mathfrak{F} : \qquad 'w_{\lambda} = \rho^{-1} w_{\lambda}.$$

L'hyperplan correspondant est désigné par $\lfloor w_{\lambda} \rfloor$.

4'. Projecteur (1), par exemple :

$$\mathfrak{H}_5 : \qquad v^{\varkappa'}_{\cdot\lambda'\mu'} = A_{\varkappa\ \lambda'\mu'}^{\varkappa'\lambda\ \mu} v^{\varkappa}_{\cdot\lambda\mu}.$$

$$\mathfrak{F} : \qquad 'v^{\varkappa}_{\cdot\lambda\mu} = \rho^{-1} v^{\varkappa}_{\cdot\lambda\mu}.$$

5'. P-densité (scalaire) (2) de poids $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{H}_5 : \qquad \overset{(\varkappa')}{\mathfrak{h}} = \Delta^{-\mathfrak{k}} \overset{(\varkappa)}{\mathfrak{h}}.$$

$$\mathfrak{F} : \qquad '\overset{(\varkappa)}{\mathfrak{h}} = \rho^{-(n+1)\mathfrak{k}} \overset{(\varkappa)}{\mathfrak{h}}.$$

6'. Projecteur-densité, de poids $\mathfrak{k}$, par exemple :

$$\mathfrak{H}_5 : \qquad \mathfrak{B}^{\varkappa'}_{\cdot\lambda'\mu'} = \Delta^{-\mathfrak{k}} A_{\varkappa\ \lambda'\mu'}^{\varkappa'\lambda\ \mu} \mathfrak{B}^{\varkappa}_{\cdot\lambda\mu}.$$

$$\mathfrak{F} : \qquad '\mathfrak{B}^{\varkappa}_{\cdot\lambda\mu} = \rho^{-(n+1)\mathfrak{k}-1} \mathfrak{B}^{\varkappa}_{\cdot\lambda\mu}.$$

(1) La lettre A n'est écrite qu'une seule fois, pour abréger.

(2) Une « P-densité » de poids un n'est autre chose que l'expression abrégée d'un projecteur alternant de valence n covariant.

Evidemment, tous les objets 1′–6′ sont des cas spéciaux des projecteurs-densités. Les *composantes intermédiaires* s'en déduisent comme dans X_4. Comme auparavant, les $\mathfrak{A}_{\varkappa}^{\varkappa'}$ et $\mathfrak{A}_{\varkappa'}^{\varkappa}$ sont des composantes intermédiaires du projecteur d'identité :

$$\mathfrak{A}_{\lambda}^{\varkappa} \stackrel{*}{=} \delta_{\lambda}^{\varkappa}. \tag{9}$$

Dans cet exposé nous emploierons presque toujours des projecteurs-densités pour lesquels l'excédent, défini (pour les systèmes holonomes), par : excédent = degré — valence contrevariante + valence covariante + $\mathfrak{k}$ $(n + 1)$, est égal à zéro [1].

Chacun des objets 2′-6′, défini dans un point de H_4 (c'est-à-dire sur une courbe du système ($x^{\varkappa} = \mu c^{\varkappa}$) dans X_5) est représenté par une figure géométrique cotée dans le P_4 local de ce point. Par exemple, le point coté $v^{\varkappa}$ est représenté par le point coté $X^{\varkappa} = v^{\varkappa}$ et quand on introduit dans P_4 les coordonnées de hyperplans U_{λ} (bien connues dans la géométrie projective ordinaire), w_{λ} est représenté par l'hyperplan coté $U_{\lambda} = w_{\lambda}$. Il est remarquable de constater *que les* $x^{\varkappa}$ *eux-mêmes sont les composantes d'un point coté de* P_4 parce que, d'après le théorème de EULER, on a

$$x^{\varkappa'} = \mathfrak{A}_{\varkappa}^{\varkappa'} x^{\varkappa}. \tag{10}$$

Cette propriété n'a pas de correspondant ou d'analogue dans la géométrie de X_4. En outre, *l'élément linéaire* $dx^{\varkappa}$ *n'est pas un point coté du* P_4 *local,* parce que la transformation par $\mathfrak{F}$:

$$d'x^{\varkappa} = \rho(dx^{\varkappa} + x^{\varkappa} d \log \rho) \tag{11}$$

est plus compliquée que celle d'un point coté. Nous utiliserons la relation (*10*) pour identifier un point $\lfloor \underset{\circ}{x}^{\varkappa} \rfloor$ de H_4 au point $\lfloor X^{\varkappa} \rfloor = \lfloor \underset{\circ}{x}^{\varkappa} \rfloor$ du P_4 local de $\underset{\circ}{x}^{\varkappa}$, que nous appelons le *point de contact* de P_4. L'élément linéaire $dx^{\varkappa}$ en $\underset{\circ}{x}^{\varkappa}$ fixe uniquement une direction dans P_4 passant par le point de contact ; on a ainsi une représentation biunivoque des directions passant par $\underset{\circ}{x}^{\varkappa}$ en H_4 et des directions de P_4 passant par

(1) Les points et hyperplans de coordonnées, défini sur page 57 et 59 forment la seule exception de cette règle.

le point de contact ; le point $\mathfrak{x}^{\varkappa} + dx^{\varkappa}$ de H_4 n'est cependant pas représenté par un point fixe dans P_4, mais par un point variable, dépendant des transformations de $\mathfrak{F}$, et se déplaçant sur la droite qui passe par le point de contact, déterminée par la direction précédente.

En utilisant le point de contact on peut maintenant représenter les objets 2′-6′ (ayant des excédents égaux à zéro) au moyen d'une figure constituée par des points (et non par des points *cotés*) dans P_4 (1). Par exemple, le point coté $v^{\varkappa}$ peut être représenté par l'ensemble des deux *points*

$$[x^{\varkappa}], \qquad [x^{\varkappa} + v^{\varkappa}] \tag{12}$$

et l'hyperplan coté w_{λ} par l'homographie

$$X^{\varkappa} \to \left(A_{\lambda}^{\varkappa} - x^{\varkappa} w_{\lambda}\right) X^{\lambda}. \tag{13}$$

Par cette méthode, on obtient une représentation simple purement géométrique de tous les objets 2′-6′ dans le P_4 local.

Dans chaque point du H_4, il y a 5 points cotés $\underset{\lambda}{e}^{\varkappa}$ et 5 hyperplans cotés $\overset{\varkappa}{e}_{\lambda}$, qui appartiennent au système de coordonnées $x^{\varkappa}$, et sont définis par les équations

$$\underset{\lambda}{e}^{\varkappa} \overset{*}{=} \delta_{\lambda}^{\varkappa}\,; \qquad \overset{\varkappa}{e}_{\lambda} \overset{*}{=} \delta_{\lambda}^{\varkappa}. \tag{14}$$

Ce sont les *points* et *hyperplans de coordonnées* (2). Ils constituent le *repère local* de $x^{\varkappa}$ dans le P_4 local. Chaque système de coordonnées $x^{\varkappa}$, $x^{\varkappa'}$, etc. a son propre système de repères locaux, qui sera désigné dans le texte par $(\varkappa)$, $(\varkappa')$, etc.

Il existe des objets géométriques qui comportent aussi bien des indices $h, i, \ldots$ que des indices $\varkappa, \lambda, \ldots$ Ce sont les *objets de jonction*, qui appartiennent aussi bien au X_4 qu'au H_4. L'exemple le plus simple est le projecto-affineur :

$$\mathfrak{E}_{\lambda}^{h} = \partial_{\lambda} \xi^{h}. \tag{15}$$

(1) Cf. D. v. DANTZIG, l. c. 1934.
(2) Leurs excédents ne sont pas égaux à zéro.

Au moyen de l'équation

$$\mathfrak{E}^{[1}_{[0} \cdots \mathfrak{E}^{4]}_{3} \mathfrak{A}^{\varkappa}_{4]} = \mathfrak{a}\, x^{\varkappa} \tag{16}$$

on déduit de $\mathfrak{E}^h_\lambda$ une quantité invariante $\mathfrak{a}$, qui est une « P–densité » de poids + *1* et une « A–densité » de poids — *1* ; on en déduit que les P–densités et les A–densités ont *la même signification géométrique*.

L'objet $\mathfrak{E}^h_\lambda$ adjoint uniquement à chaque point coté de P_4 un vecteur contrevariant de E_4 :

$$'v^h = \mathfrak{E}^h_\lambda v^\lambda, \tag{17}$$

et à chaque vecteur covariant de E_4 un hyperplan coté de P_4

$$'w_\lambda = \mathfrak{E}^h_\lambda w_h, \tag{18}$$

mais il ne détermine pas une représentation biunivoque.

Les repères anholonomes dans X_4. — Etant donné des champs de vecteurs v^h, w_i dans X_4 on peut introduire d'autres composantes par les équations

$$v^{h'} = A^{h'}_h v^h ; \qquad w_{i'} = A^i_{i'} w_i ; \qquad \mathrm{Det}\left(A^{h'}_h\right) \neq 0 ; \qquad A^h_{j'} A^{j'}_i = A^h_i, \tag{19}$$

où maintenant les 16 paramètres $A^{h'}_h$ sont des fonctions arbitraires des ξ^h. En général, les nouvelles composantes de $d\xi^h$

$$(d\xi)^{h'} = A^{h'}_h d\xi^h \tag{20}$$

ne sont pas des différentielles exactes de n fonctions $\xi^{h'}$. Pour que ce cas exceptionnel se présente, il faut et il suffit que les $\overset{A}{\Omega}{}^{h'}_{j'i'}$ définis par les équations

$$\overset{A}{\Omega}{}^{h'}_{j'i'} \overset{*}{=} A^{j\,i}_{j'i'} \partial_{[j} A^{h'}_{i]} \qquad ((h) \text{ holonome}) \tag{21}$$

soient identiquement nuls.

$\overset{A}{\Omega}{}^{h'}_{j'i'}$ est appelé *l'objet d'anholonomie affine*. Si les $(d\xi)^{h'}$ se déduisent d'un système de coordonnées $\xi^{h'}$, le repère (h') défini par

$$\underset{i'}{e}^{h'} \overset{*}{=} \delta^{h'}_{i'} ; \qquad \overset{h'}{e}_{i'} \overset{*}{=} \delta^{h'}_{i'} \tag{22}$$

sera appelé *holonome*, et, dans le cas contraire, *anholonome*. Ainsi, les composantes de l'objet $\overset{A}{\Omega}$ sont nulles pour chaque repère holonome et il y a des composantes différentes de zéro pour chaque repère anholonome. En physique, après avoir introduit une métrique dans X_4, on préfère utiliser, en général, un système de repères anholonomes constitué par des vecteurs réels, orthogonaux et de longueur ou de durée égale à *1*.

LES REPÈRES ANHOLONOMES DANS H_4. — De la même façon on peut introduire d'autres composantes des champs de points cotés $v^{\varkappa}$, et des hyperplans cotés w_{λ} dans H_4, par les équations

$$(23) \qquad v^{\varkappa'} = \mathcal{A}_{\varkappa}^{\varkappa'} v^{\varkappa}\,; \qquad w_{\lambda'} = \mathcal{A}_{\lambda'}^{\lambda} w_{\lambda}\,; \qquad \operatorname{Det}\left(\mathcal{A}_{\varkappa}^{\varkappa'}\right) \neq 0\,; \qquad \mathcal{A}_{\mu'}^{\varkappa} A_{\lambda}^{\mu'} = A_{\lambda}^{\varkappa},$$

les $A_{\varkappa}^{\varkappa'}$ étant choisi arbitrairement et d'un degré $-\mathfrak{g}$ en $x^{\varkappa}$. *Les nouvelles composantes* $v^{\varkappa'}$ *sont de degré* $(1 - \mathfrak{g})$. Les points cotés du nouveau repère

$$(24) \qquad \underset{\lambda'}{e}{}^{\varkappa'} \overset{*}{=} \delta_{\lambda'}^{\varkappa'}\,; \qquad \overset{\varkappa'}{e}_{\lambda'} \overset{*}{=} \delta_{\lambda'}^{\varkappa'},$$

ayant des composantes par rapport au système $(\varkappa)$ de degrés respectivement égaux à $+\mathfrak{g}$ ou $-\mathfrak{g}$:

$$(25) \qquad \underset{\lambda'}{e}{}^{\varkappa} \overset{*}{=} \mathcal{A}_{\lambda'}^{\varkappa}\,; \qquad \overset{\varkappa'}{e}_{\lambda} \overset{*}{=} \mathcal{A}_{\lambda}^{\varkappa'}$$

nous appellerons le système de repères $(\varkappa')$ *un système anholonome de degré* $\mathfrak{g}$ (1).

Afin que le système de repères introduit soit *holonome*, c'est-à-dire que les $(dx)^{\varkappa'}$

$$(26) \qquad (dx)^{\varkappa'} = \mathcal{A}_{\varkappa}^{\varkappa'} dx^{\varkappa}$$

soient les différentielles des $(n + 1)$ fonctions $x^{\varkappa'} = \mathcal{A}_{\varkappa}^{\varkappa'} x^{\varkappa}$, il faut que

$$(27) \qquad \overset{P}{\Omega}{}_{\mu'\lambda'}^{\varkappa'} \overset{*}{=} \mathcal{A}_{\mu'\lambda'}^{\mu\lambda} \partial_{[\mu} \mathcal{A}_{\lambda]}^{\varkappa'} \overset{*}{=} 0. \qquad ((\varkappa) \text{ holonome})$$

(1) Par conséquent, pour un système anholonome on aura :
excédent = degré + $(1 - \mathfrak{g})$ [— valence contrevariante + valence covariante + $\mathfrak{k}(n + 1)$].

$\overset{\mathrm{P}}{\Omega}{}^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'}$ est *l'objet d'anholonomie projective* (1). Mais cette condition *ne suffit pas*, parce que

$$(28) \qquad \begin{aligned} \mathcal{A}^{\varkappa'}_{\varkappa}\, dx^{\varkappa} &= d\left(\mathcal{A}^{\varkappa'}_{\varkappa}\, x^{\varkappa}\right) - x^{\varkappa}\, dx^{\mu}\, \partial_{\mu} \mathcal{A}^{\varkappa'}_{\varkappa} \\ &= d\left(\mathcal{A}^{\varkappa'}_{\varkappa}\, x^{\varkappa}\right) - dx^{\mu}\, x^{\varkappa}\, \partial_{\varkappa} \mathcal{A}^{\varkappa'}_{\mu} \end{aligned}$$

ou

$$(29) \qquad (1 - \mathfrak{g})\mathcal{A}^{\varkappa'}_{\varkappa}\, dx^{\varkappa} = d\left(\mathcal{A}^{\varkappa'}_{\varkappa}\, x^{\varkappa}\right).$$

Il faut ajouter la condition $\mathfrak{g} = 0$, *d'où il suit que les repères d'un degré $\neq 0$ sont toujours anholonomes*. Ce résultat est très important, parce qu'en relativité projective l'emploi de repères projectifs anholonomes ne peut pas être évité sans que de grands inconvénients en résultent.

INTRODUCTION D'UN HYPERPLAN DANS LES P_4 LOCAUX. — Quand on se donne un champ d'hyperplans dans les espaces locaux on peut fixer une représentation biunivoque des P_4 locaux sur les E_4 locaux, par la condition que l'hyperplan donné soit représenté par l'hyperplan à l'infini.

Soit

$$(30a) \qquad q_{\lambda} X^{\lambda} = 0$$

l'équation des hyperplans et soit

$$(30b) \qquad q_{\lambda} x^{\lambda} = -\chi\,; \qquad \chi = \text{réel et constant.}$$

La manière la plus commode de trouver l'expression analytique de la représentation consiste à introduire un système de repères anholonomes (a), $(a, b, \ldots, g = 0, 1, 2, 3, 4)$ dans H_4, adjoint à un système de repères (h) $(h, \ldots, m = 1, 2, 3, 4)$ holonomes ou anholonomes en X_4 et déterminé par les équations

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}^{h}_{\lambda} &\overset{*}{=} \mathcal{E}^{h}_{\lambda}, \\ \mathcal{A}^{0}_{\lambda} &\overset{*}{=} -q_{\lambda}. \end{aligned} \right.$$

(1) Dans G. F. III-VI nous avons écrit $\Omega^{\varkappa}_{\lambda\mu}$ au lieu de $\Omega^{\varkappa}_{\mu\lambda}$.

Le système (a) est de degré $+1$. Par conséquent, le degré des composantes v^a, w_b d'un point coté ou d'un hyperplan coté dont l'excédent est égal à zéro *est nul*. Les $\mathcal{A}_b^{\varkappa}$ se trouvent en résolvant les équations

$$(32)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{A}_i^{\varkappa}\mathcal{A}_{\varkappa}^{h} \overset{*}{=} A_i^h; & \mathcal{A}_i^{\varkappa} q_{\varkappa} = 0, \\ \mathcal{A}_0^{\varkappa} \overset{*}{=} \chi^{-1} x^{\varkappa}; & \end{array}\right.$$

ils satisfont à :

$$(33)\qquad \mathcal{A}_b^{\varkappa}\mathcal{A}_{\lambda}^{b} = \mathcal{A}_{\lambda}^{\varkappa}; \qquad \mathcal{A}_{\lambda}^{a}\mathcal{A}_b^{\lambda} = \mathcal{A}_b^a \overset{*}{=} \delta_b^a.$$

Les composantes de $\overset{P}{\Omega}$ par rapport à (a) sont

$$(34)\qquad \overset{P}{\Omega}{}_{cb}^{a} \overset{*}{=} -\chi^{-1} q_{cb} x^a + \mathcal{A}_{cbh}^{jia}\overset{A}{\Omega}{}_{ji}^{h}; \qquad q_{\mu\lambda} = \partial_{[\mu} q_{\lambda]}.$$

Le vecteur v^h de E_4 correspond de manière biunivoque au point coté

$$(35)\qquad v^{\varkappa} = \mathcal{A}_h^{\varkappa} v^h$$

sur l'hyperplan $\lfloor q_\lambda \rfloor$ et ce point a les composantes v^h, $v^0 = 0$ par rapport au système (a). L'ensemble des *vecteurs contrevariants* de E_4 est représenté donc par les *points cotés* situés sur $\lfloor q_\lambda \rfloor$ dans P_4. De même, le vecteur w_i de E_4 correspond, d'une manière biunivoque, à l'hyperplan coté

$$(36)\qquad w_\lambda = \mathcal{A}_\lambda^i w_i$$

passant par le point de contact et ayant comme composantes w_i, $w_0 = 0$ par rapport au système (a). L'ensemble des *vecteurs covariants* de E_4 est représenté donc par les hyperplans cotés passant par le point de contact. L'affineur d'identité A_i^h correspond d'une manière biunivoque au projecteur

$$(37)\qquad A_\lambda^{\varkappa} = \mathcal{A}_j^{\varkappa}\mathcal{A}_\lambda^j = \mathcal{A}_\lambda^{\varkappa} + \chi^{-1} q_\lambda x^{\varkappa},$$

avec les composantes

$$(38)\qquad A_i^h \overset{*}{=} \delta_i^h; \qquad A_0^h \overset{*}{=} 0; \qquad A_i^0 \overset{*}{=} 0; \qquad A_0^0 \overset{*}{=} 0$$

par rapport au système (a).

Il nous faut encore déduire une représentation biunivoque des *points* de P_4 sur les *points* de E_4. On l'obtient en remarquant que chaque vecteur de E_4 est le rayon vecteur d'un point bien déterminé de E_4 et que chaque point coté de P_4 sur $\lfloor q_\lambda \rfloor$ est la différence d'un point coté bien déterminé de P_4 et de $x^\varkappa$. Appelons

$$p^0 = - q_\lambda p^\lambda \tag{39}$$

le *poids* (1) (d'après MÖBIUS) du point coté $p^\varkappa$; le poids de $x^\varkappa$ sera χ. Représentons maintenant le point de E_4, ayant comme rayon vecteur v^h, par le point $\lfloor p^\varkappa \rfloor$ de P_4 donné par l'équation

$$\frac{p^\varkappa}{p^0} - \frac{x^\varkappa}{\chi} = \mathfrak{A}_h^\varkappa v^h, \tag{40}$$

dans laquelle un point coté de $\lfloor q_\lambda \rfloor$ est écrit sous la forme d'une différence de deux points cotés de poids un. Cette représentation étant fixée, nous pouvons *identifier* P_4 et E_4, et l'addition, ainsi que la subtraction des points, se réduit simplement au calcul bien connu de MÖBIUS. Il va sans dire, qu'après cette identification les affineurs ne sont autre chose que des projecteurs spéciaux, à savoir les projecteurs dont toutes les composantes d'indice zéro par rapport au système (a) sont nulles ; en d'autres termes, les projecteurs qui s'annulent par chaque transvection avec $x^\varkappa$ ou q_λ, ou encore, les projecteurs qui ne changent pas par une transvection avec $A_\lambda^\varkappa$. On déduit de cette remarque qu'on peut écrire maintenant toutes les équations entre les affineurs de H_4 soit par rapport aux repères affines ayant les indices $h, \ldots, m$, soit par rapport aux repères projectifs ayant les indices $\varkappa, \ldots \tau$ ou $a, \ldots, g$. Le résultat de la transvection d'un projecteur avec des $A_\lambda^\varkappa$ sur chaque indice, par exemple :

$$P'^{\cdot\,\lambda\mu}_{\varkappa} = A^{\rho\lambda\mu}_{\varkappa\sigma\tau}\, P^{\cdot\,\sigma\tau}_{\rho}. \tag{41}$$

est un *affineur* qui s'appelle la *partie affinorielle* de $P^{\cdot\lambda\mu}_{\varkappa}$.

INTRODUCTION D'UNE QUADRIQUE DANS LES P_4 LOCAUX. — Intro-

(1) Ce « poids » est toute autre chose que le poids d'une densité.

duisons dans les P_4 locaux une quadrique non dégénérée au moyen des équations

$$\text{(42 a)} \qquad \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} X^\lambda X^\varkappa = 0$$

et soit

$$\text{(42 b)} \qquad \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} x^\lambda x^\varkappa = -\chi^2\,(^1)\,; \quad \mathfrak{G} = \mathrm{Det}\,(\mathfrak{G}_{\lambda\varkappa}) \neq 0,$$

χ^2 étant une constante positive (1). $\mathfrak{G}_{\lambda\varkappa}$ est appelé le *projecteur fondamental.* On peut élever et abaisser les indices au moyen des $\mathfrak{G}_{\lambda\varkappa}$ et $\mathfrak{G}^{\lambda\varkappa}$, définis par

$$\text{(43)} \qquad \mathfrak{G}_{\lambda\mu}\mathfrak{G}^{\mu\varkappa} = \delta_\lambda^\varkappa,$$

tout comme dans la géométrie riemannienne. Introduisons le point coté

$$\text{(44)} \qquad q^\lambda = \chi^{-1} x^\lambda$$

de façon qu'on ait :

$$\text{(45)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} q^\lambda q^\varkappa = -1 \\ q_\lambda x^\lambda = -\chi\,; \qquad q_\lambda q^\lambda = -1\,; \qquad q^0 = +1. \end{cases}$$

A l'aide de q_λ, on introduit l'hyperplan à l'infini et P_4 est identifié avec E_4 ainsi que nous venons de l'expliquer,

Si le point $\lfloor n^\varkappa \rfloor$ est situé sur la quadrique, on a

$$\text{(46)} \qquad \left(\frac{n^\lambda}{n^0} - q^\lambda\right)\left(\frac{n^\varkappa}{n^0} - q^\varkappa\right)\mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} = -\frac{2}{n^0}\, n^\lambda q_\lambda - 1 = +1\,;$$

la quadrique définit donc une métrique euclidienne pour les vecteurs pour lesquels elle figure comme « sphère » de rayon égal à $+\ 1$. L'intersection de la quadrique avec l'hyperplan $\lfloor q_\lambda \rfloor$ est la « sphère » isotrope à l'infini.

Du projecteur $\mathfrak{G}_{\lambda\varkappa}$ on peut déduire deux tenseurs de rang *4*

$$\text{(47)} \qquad \begin{cases} g_{\lambda\varkappa} = \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} + q_\lambda q_\varkappa \\ g^{\lambda\varkappa} = \mathfrak{G}^{\lambda\varkappa} + q^\lambda q^\varkappa \end{cases}$$

(1) Dans G. F., III-VI nous avons écrit $\mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} x^\lambda x^\varkappa = -\omega^2$ et laissé indéterminé le signe de ω^2.

qui s'appellent les *tenseurs fondamentaux* et qui déterminent la métrique des vecteurs. De (*47*) on déduit

$$g_{\lambda\rho} g^{\rho\varkappa} = A_\lambda^\varkappa = \mathcal{A}_\lambda^\varkappa + q_\lambda q^\varkappa. \tag{48}$$

Il est évident que $g_{\lambda\varkappa}$ donne lieu à une géométrie riemannienne dans le H_4, que nous supposons identique à la géométrie riemannienne de l'espace-temps. Nous admettons que pour cette dernière géométrie la signature est $- - - +$ (1). Le E_4 local devient un R_4, c'est-à-dire un espace à géométrie métrique plane. Les composantes de $\mathfrak{G}_{\varkappa\lambda}$ et $g_{\varkappa\lambda}$ par rapport au système (*a*) satisfont aux équations

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{G}_{oo} = -1\,; & g_{oo} = 0 \\ \mathfrak{G}_{oi} = \mathfrak{G}_{io} = 0\,; & g_{oi} = g_{jo} = 0 \\ \mathfrak{G}_{ih} = g_{ih}. & \end{array}\right. \tag{49}$$

Les composantes g_{ih} dépendent du choix du système (*h*). Quand on prend dans X_4 un système anholonome avec des vecteurs de coordonnées réels et de longueur (ou durée) *1*, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{G}_{11} = g_{11} = \mathfrak{G}_{22} = g_{22} = \mathfrak{G}_{33} = g_{33} = -1 \\ \mathfrak{G}_{44} = g_{44} = +1. \end{array}\right. \tag{50}$$

Ainsi $\mathfrak{G}_{\lambda\varkappa}$ a la signature $- - - - +$ (2), et cette signature est invariante pour les transformations réelles des coordonnées. La quadrique est une « sphère » avec un rayon de longueur égale à 1 dans le R_4 local, ce qui signifie qu'une droite réelle passant par le point de contact coupe la sphère en deux points réels, quand la droite peut être prise comme axe de coordonnées dans l'espace, et en deux points complexes quand elle peut être prise comme axe de temps.

Connexions projectives dans H_4. — Les dérivées ordinaires $\partial_\mu v^\varkappa$ par rapport à un système holonome ou anholonome (3) ne forment

(1) Dans G. F., III-VI nous avons supposé que la signature est $+++-$. Remarquons que dans l'équation (46) $\mathfrak{G}_{\varkappa\lambda}$ peut être remplacé par $g_{\varkappa\lambda}$ parce que

$$\left(\frac{n^\varkappa}{n^0} - q^\varkappa\right) q_\varkappa = 0.$$

(2) $+ - - - +$ pour $\chi^2 < 0$.

(3) Quand $(\varkappa)$ est anholonome et $(\varkappa')$ holonome ∂_μ est défini par $\partial_\mu = \mathcal{A}_\mu^{\mu'} \partial_{\mu'}$.

pas les composantes d'un projecteur. Cependant, comme dans le cas affine, on peut introduire une dérivation covariante par l'équation

(51) $$\begin{cases} \nabla_\mu v^\varkappa = \partial_\mu v^\varkappa + \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} v^\lambda, \\ \nabla_\mu w_\lambda = \partial_\mu w_\lambda - \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} w_\varkappa, \end{cases}$$ (1)

avec la condition suivante pour la transformation de l'objet géométrique $\Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda}$:

(52 *a*) $\mathfrak{H}_5$: $$\Pi^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'} = A^{\varkappa'\mu\lambda}_{\varkappa\mu'\lambda'} \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} + A^{\varkappa'}_{\varkappa} \partial_{\mu'} A^{\varkappa}_{\lambda'},$$

condition valable pour tous les systèmes holonomes ou anholonomes (2) et

(52 *b*) $\mathfrak{F}$: $${}'\Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} = \rho^{-1} \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda}.$$

On voit que l'excédent de la dérivée covariante d'un projecteur dont l'excédent est nul, est également égal à zéro. Comme dans la géométrie affine

(53) $$S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} \equiv \Pi^{\varkappa}_{[\mu\lambda]} + \overset{P}{\Omega}{}^{\varkappa}_{\mu\lambda} \overset{h}{=} \Pi^{\varkappa}_{[\mu\lambda]}$$

est un projecteur ; quand $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = 0$, on dit que la connexion est *symétrique*. Nous rencontrons cependant ici deux autres projecteurs, qu'on ne trouve pas dans la géométrie affine, savoir

(54) $$\begin{cases} \mathfrak{X}^{\varkappa}_{\cdot\lambda} = x^\mu \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} + A^{\varkappa}_{\lambda} \\ \mathfrak{Q}^{\varkappa}_{\cdot\mu} = \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} x^\lambda + A^{\varkappa}_{\mu} = \nabla_\mu x^\varkappa = \chi \nabla_\mu q^\varkappa. \end{cases}$$

Une autre différence remarquable est, qu'en général, il n'existe pas de *différentielle covariante*, parce que $dx^\varkappa$ n'est pas un point coté et, par suite, $dx^\mu \nabla_\mu P^{\varkappa\lambda}_{\cdot\cdot\nu}$ par exemple, n'est pas, en général, un projecteur. La différentielle covariante n'existant pas, il n'y a plus de

(1) Nous écrivons $\Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ au lieu de $\Pi^{\nu}_{\lambda\mu}$, comme nous l'avons écrit dans G. F., III-VI-VIII, en accord avec les notations plus modernes employées dans le livre cité page 50 note (1) Ainsi le $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ dans (53) est écrit $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ dans G. F., III-VI-VIII.

(2) Les repères anholonomes étant employés le plus fréquemment, nous donnons ici la plupart des formules dans leur forme générale, de façon qu'elles puissent être employées aussi dans le cas anholonome. Dans les formules qui ne sont valables que pour les systèmes holonomes on écrit $\overset{h}{=}$ au lieu de $=$.

déplacement parallèle (ou de pseudo-parallélisme), parce que ce déplacement est défini précisément en annulant la différentielle covariante. On peut démontrer que la différentielle covariante existe seulement quand $\mathfrak{E}^{\varkappa}_{.\lambda} = 0$, mais ce cas est écarté en relativité projective, parce que le projecteur $\mathfrak{E}^{\varkappa}_{.\lambda}$ ne peut y être nul : il joue, au contraire, un rôle important dans toute la théorie.

Néanmoins, il existe des *géodésiques*. Rappelons que $dx^{\varkappa}$ fixe une direction dans le P_4 local, mais ne correspond pas à un point fixe sur la droite qui passe par le point de contact dans cette direction. Il est donc toujours possible de définir, à un facteur près, une différentielle covariante, dans une direction donnée, quand on connaît un point particulier sur cette droite différent de $\lfloor x^{\varkappa} \rfloor$. Soit $\lfloor r^{\varkappa} \rfloor$ le point en question ; $dx^{\varkappa}$ peut être écrit d'une seule manière, sous la forme

$$dx^{\varkappa} = \varepsilon x^{\varkappa} + \eta r^{\varkappa}, \tag{55}$$

ε et η étant des infiniments petits, qui ne sont pas des scalaires, mais se transforment d'une manière bien déterminée pour les transformations du groupe $\mathfrak{F}$. On peut alors prendre la composante $\eta r^{\varkappa}$ comme élément linéaire et définir le pseudo-parallélisme par rapport au point $\lfloor r^{\varkappa} \rfloor$, par la relation covariante

$$r^{\mu} \nabla_{\mu} p^{\varkappa} = 0. \tag{56}$$

Ainsi, une connexion projective ne détermine pas un seul déplacement parallèle, mais une infinité de déplacements pour chaque direction, dépendant du choix du point $\lfloor r^{\varkappa} \rfloor$. Alors, si $p^{\varkappa}$ est un point coté dans le P_4 local d'un $\lfloor \mathfrak{x}^{\varkappa} \rfloor$ donné, on connaîtra nécessairement le point $\lfloor p^{\varkappa} \rfloor$ lui-même et on pourra définir la géodésique partant de $\lfloor \mathfrak{x}^{\varkappa} \rfloor$ dans la direction de $\lfloor x^{\varkappa} \rfloor$ à $\lfloor p^{\varkappa} \rfloor$, par l'équation

$$p^{\mu} \nabla_{\mu} p^{\varkappa} = 0 \text{ (1)}. \tag{57}$$

En effet, on déduit de cette équation la valeur $p^{\varkappa} + dp^{\varkappa}$ en $\mathfrak{x}^{\varkappa} + dx^{\varkappa}$:

$$\left\{ \begin{aligned} dp^{\varkappa} &= dx^{\mu} \partial_{\mu} p^{\varkappa} = \varepsilon x^{\mu} \partial_{\mu} p^{\varkappa} + \eta p^{\mu} \partial_{\mu} p^{\varkappa} \\ &= \varepsilon p^{\varkappa} - \eta p^{\mu} p^{\lambda} \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} \end{aligned} \right. \tag{58}$$

(1) D. v. Dantzig, l. c. Math. Ann. 1932, a appelé un champ $\lfloor p^{\varkappa} \rfloor$ qui satisfait à l'équation (57) « geodätisches Ortfeld » et les géodésiques définies par (57), l. c. Amst. Proc. 1932 S. 532 « pseudogeodätische Linien ».

et ce processus, répété à l'infini, fournit successivement tous les éléments de la géodésique cherchée. Les géodésiques ainsi obtenues s'appellent *autogéodésiques*, leur construction étant basée sur l'emploi du point $\lfloor p^\varkappa \rfloor$ lui-même. Il va sans dire que par chaque point et par chaque direction donnés passent ∞^1 autogéodésiques et que la forme d'une telle courbe ne dépend que de la situation du point $\lfloor p^\varkappa \rfloor$ dans le P_4 local de $\underset{0}{x}^\varkappa$.

Lorsqu'on se donne une quadrique dans les P_4 locaux, on peut prendre le point $r^\varkappa$ sur l'hyperplan polaire $\lfloor q_\lambda \rfloor$ de $\lfloor x^\varkappa \rfloor$.

Puisque

$$(59) \qquad \begin{cases} (dx)^\varkappa = A^\varkappa_\lambda (dx)^\lambda - q_\lambda (dx)^\lambda q^\varkappa \\ \qquad\;\; = \mathfrak{A}^\varkappa_h \mathfrak{E}^h_\lambda (dx)^\lambda - q_\lambda (dx)^\lambda q^\varkappa \\ \qquad\;\; = \mathfrak{A}^\varkappa_h (d\xi)^h - q_\lambda (dx)^\lambda q^\varkappa, \end{cases}$$

on prend dans ce cas comme élément linéaire au lieu de $(dx)^\varkappa$ l'élément linéaire vectoriel $(d\xi)^h$ de X_4, écrit en coordonnées homogènes :

$$(60) \qquad (d'x)^\varkappa = \mathfrak{E}^\varkappa_h (d\xi)^h$$

et l'équation des géodésiques devient :

$$(61) \qquad (d'x)^\mu \nabla_\mu p^\varkappa = 0.$$

Nous appelons ces courbes les *géodésiques induites*, parce qu'elles sont, en quelque sorte, « induites » par la quadrique (1). Les autres géodésiques, les autogéodésiques, existent toujours, même dans le cas où la connexion ne dépend nullement d'une quadrique.

LA CONNEXION RIEMANNIENNE EN COORDONNÉES PROJECTIVES. — Introduisons un projecteur fondamental $\mathfrak{G}_{\varkappa\lambda}$ et supposons qu'on ait déduit le tenseur fondamental $g_{\lambda\varkappa}$ ainsi que les composantes g_{ij} par rapport au système (a), adjoint aux systèmes de repères holonomes ou anholonomes (h) de X_4. Par rapport au système (h) la connexion Rieman-

(1) Ce sont ces géodésiques que nous avons utilisées dans G. F., III et G. F., VI et qui figurent aussi dans les communications de O. Veblen (1933) et W. Pauli (1933). Les autogéodésiques que nous employons ici sont les mêmes que les géodésiques de la théorie de la relativité à cinq dimensions de T. Kaluza et O. Klein.

nienne, de tenseur fondamental g_{ih}, est donnée par les équations [1]

$$(62)\quad \begin{cases} \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_j w_i = \partial_j w_i - \Gamma_{ji}^h w_h \\ \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_j v^h = \partial_j v^h + \Gamma_{ji}^h v^i \end{cases}$$

dans lesquelles

$$(63)\quad \Gamma_{ji}^h = \tfrac{1}{2} g^{hk}\left(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ji}\right) - \overset{\mathrm{A}}{\Omega}{}_{ji}^{h} + g_{jk} g^{hl} \overset{\mathrm{A}}{\Omega}{}_{il}^{k} + g_{ik} g^{hl} \overset{\mathrm{A}}{\Omega}{}_{jl}^{k}.$$

Cette connexion est une connexion de *vecteurs*, c'est-à-dire de points cotés situés sur $\lfloor q_\lambda \rfloor$.

Nous en déduisons une connexion projective, désignée par $\overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu$, en exigeant que la dérivée covariante des vecteurs $v^\varkappa$ ou w_λ soit identique à la dérivée riemannienne. Par rapport au système (a), on a

$$(64)\quad \begin{cases} \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_j v^h \overset{*}{=} \partial_j v^h + \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{ji}^{h} v^i = \partial_j v^h + \Gamma_{ji}^h v^i \\ \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_0 v^h \overset{*}{=} q^b \partial_b v^h + \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{0i}^{h} v^i = \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{0i}^{h} v^i = 0 \;{}^{2)} \\ \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_j v^0 \overset{*}{=} \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{ji}^{0} v^i = 0 \\ \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_0 v^0 \overset{*}{=} \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{0j}^{0} v^j = 0, \end{cases}$$

et des équations analogues pour $\overset{\mathrm{R}}{\nabla}_c w_b$, d'où l'on déduit

$$(65)\quad \begin{cases} \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{ji}^{h} \overset{*}{=} \Gamma_{ji}^h\,; & \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{0i}^{h} \overset{*}{=} 0\,; & \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{j0}^{h} \overset{*}{=} 0 \\ \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{ji}^{0} \overset{*}{=} 0\,; & \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{00}^{h} \overset{*}{=} 0\,; & \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{0i}^{0} \overset{*}{=} 0. \end{cases}$$

On voit que $\overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{00}^{0}$ et $\overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}_{j0}^{0}$ ne sont pas encore déterminés. Néanmoins (*34*) et (*53*) montrent que

$$(66)\quad \overset{\mathrm{R}}{S}{}_{ji}^{\cdot\cdot 0} \overset{*}{=} -q_{ji}\,; \qquad q_{\mu\lambda} = \partial_{[\mu} q_{\lambda]},$$

c'est-à-dire que la connexion riemannienne en coordonnées homo-

(1) Quand (h) est anholonome et (h') holonome, ∂_j est défini par $\partial_j = A_j^{j'} \partial_{j'}$.

(2) Le degré des composantes v^h et w_i est zéro.

gènes *ne peut jamais être symétrique quand* $q_{\mu\lambda}$ *n'est pas nul.* Pour fixer les paramètres indéterminés, il suffit de se donner $\overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu q^\varkappa$ ou $\overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu q_\lambda$. Si

$$(67)\qquad \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu q^\varkappa = \mathfrak{V}_\mu^{\cdot\varkappa}\,; \qquad \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu q_\lambda = \mathfrak{U}_{\mu\lambda},$$

on aura

$$(68)\qquad \begin{cases} \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}^{o}_{oo} \overset{*}{=} \mathfrak{V}_o^{\cdot o} \overset{*}{=} \mathfrak{U}_{oo}, \\ \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}^{o}_{jo} \overset{*}{=} \mathfrak{V}_j^{\cdot o} \overset{*}{=} \mathfrak{U}_{jo}, \\ \mathfrak{U}_c^{\cdot h} \overset{*}{=} 0\,; \qquad \mathfrak{V}_{ci} \overset{*}{=} 0. \end{cases}$$

Adoptons maintenant l'hypothèse la plus simple, d'après laquelle :

$$(69)\qquad \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu q^\varkappa = 0\,; \qquad \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu q_\lambda = 0.$$

Dans ce cas :

$$(70)\qquad \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}^{a}_{cb} \overset{*}{=} \mathcal{A}^{jia}_{cbh}\,\Gamma^h_{ji},$$

d'où, en appliquant les formules (*34*) et (*53*)

$$(71)\qquad \begin{aligned} \overset{\mathrm{R}}{S}{}_{cb}^{\cdot\cdot a} &\overset{*}{=} \mathcal{A}^{jia}_{cbh}\,\Gamma^h_{[ji]} - \chi^{-1} q_{cb} x^a + \mathcal{A}^{jia}_{cbh} \overset{\mathrm{A}}{\Omega}{}^h_{ji}, \\ &\overset{*}{=} - q_{cb} q^a. \end{aligned}$$

et donc, puisque l'équation est invariante :

$$(72)\qquad \overset{\mathrm{R}}{S}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = - q_{\mu\lambda} q^\varkappa.$$

Naturellement, la connexion riemannienne doit comporter une différentielle covariante. La différentielle

$$(73)\qquad dx^\mu \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu v^\varkappa = dx^\sigma A^\mu_\sigma \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu v^\varkappa.$$

est, en effet, covariante, parce que $x^\mu \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu v^\varkappa$ s'annule et $dx^\sigma A^\mu_\sigma$ se transforme comme un point coté par le groupe $\mathfrak{F}$:

$$(74)\qquad d\,'x^\sigma A^\mu_\sigma = \rho(dx^\sigma + x^\sigma d \log \rho) A^\mu_\sigma = \rho dx^\sigma A^\mu_\sigma.$$

Le déplacement parallèle qu'on obtient en annulant la différentielle covariante, laisse invariantes, d'une part la quadrique, parce que

$$(75) \qquad \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_{\mu} \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} = 0,$$

et aussi, d'autre part, le point de contact, à cause de (*69*), l'hyperplan $[q_\lambda]$ et la sphère isotrope dans $[q_\lambda]$.

De (75), on déduit par un procédé bien connu (1) que

$$(76) \qquad \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}^{\varkappa}_{\mu\lambda} = \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} + \overset{\mathrm{R}}{S}{}_{\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \overset{\mathrm{R}}{S}{}^{\varkappa}_{\cdot\mu\lambda} + \overset{\mathrm{R}}{S}{}^{\varkappa}_{\cdot\lambda\mu},$$

$\left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\}$ étant le symbole de CHRISTOFFEL relatif à $\mathfrak{G}_{\lambda\varkappa}$. Par conséquence, on a, à cause de (*72*) :

$$(77) \qquad \overset{\mathrm{R}}{\Pi}{}^{\varkappa}_{\mu\lambda} = \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} - q_{\mu\lambda} q^{\varkappa} - q^{\varkappa}_{\cdot\lambda} q_{\mu} - q^{\varkappa}_{\cdot\mu} q_{\lambda}.$$

LES CONNEXIONS PROJECTIVES DÉTERMINÉES PAR LA QUADRIQUE FONDAMENTALE. — On peut se demander si la quadrique détermine d'autres connexions plus générales que la connexion riemannienne. Naturellement, il faut, dans ce cas, imposer la condition suivante :

I. — *La quadrique est invariante pour chaque déplacement déduit de la connexion, quel que soit le choix du point particulier sur la droite de* $dx^{\varkappa}$.

Pour que cette condition soit remplie il faut et il suffit que

$$(78) \qquad r^{\mu} \nabla_{\mu} \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} :: \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} \qquad (:: = \text{proportionnel à})$$

pour chaque choix de r^{μ}, c'est-à-dire que

$$(79) \qquad \nabla_{\mu} \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa} = s_{\mu} \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa},$$

s_{μ} étant un hyperplan coté encore indéterminé. De cette équation on déduit facilement

$$(80) \qquad \begin{cases} 1] \quad \mathfrak{L}_{(\lambda\varkappa)} = -\,{}^1\!/_2 s \chi \mathfrak{G}_{\lambda\varkappa}\,; \\ 2] \quad q_{\varkappa} \mathfrak{Q}^{\varkappa}_{\cdot\lambda} = {}^1\!/_2 \chi s_{\lambda}\,; \\ s = -\, s^{\circ} = q^{\lambda} s_{\lambda} \qquad \text{(par définition).} \end{cases}$$

Chaque connexion projective ∇ fixe uniquement une autre connexion

(1) J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci Kalkul* (1924), p. 73, (voir note (1) page 65).

$\overset{A}{\nabla}$, appelé *connexion affine induite* et telle que $\overset{A}{\nabla}$ appliqué à un affineur fournisse la partie affine du résultat de l'application de ∇ au même affineur et, en outre, que $\overset{A}{\nabla}_\mu q^\varkappa = 0$, $\overset{A}{\nabla}_\mu q_\lambda = 0$:

$$(81)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\overset{A}{\nabla}_\mu v^\varkappa = A^{\tau\varkappa}_{\mu\rho} \nabla_\tau v^\rho \,; \qquad q_\rho v^\rho = 0, \\ &\overset{A}{\nabla}_\mu w_\lambda = A^{\tau\sigma}_{\mu\lambda} \nabla_\tau w_\sigma \,; \qquad q^\sigma w_\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

D'où l'on déduit que :

$$(82)\qquad A^{\varkappa\tau\sigma}_{\rho\mu\lambda} \overset{A}{S}{}_{\tau\sigma}^{\cdot\cdot\rho} = A^{\tau\sigma\varkappa}_{\mu\lambda\rho} S_{\tau\sigma}^{\cdot\cdot\rho},$$

qui exprime que la partie affinorielle de $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ est déterminée par $\overset{A}{S}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$.

De (*53*) et (*54*) il s'ensuit que :

$$(83)\qquad q^\mu S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = {}^1\!/_2 \chi^{-1} \left(\mathfrak{L}^{\varkappa}_{\cdot\lambda} - \mathfrak{Q}^{\varkappa}_{\cdot\lambda} \right).$$

Puisque à cause de (*54*) et (*79*),

$$(84)\qquad \partial_\mu q_\lambda - \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda} q_\varkappa = \nabla_\mu q_\lambda = \chi^{-1} \mathfrak{Q}_{\lambda\mu} + q_\lambda s_\mu,$$

on a

$$(85)\qquad S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} q_\varkappa = q_{\mu\lambda} + \chi^{-1} \mathfrak{Q}_{[\mu\lambda]} + q_{[\mu} s_{\lambda]}.$$

En combinant convenablement (*82*), (*83*) et (*85*), on déduit que

$$(86)\qquad \begin{aligned} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = A^{\varkappa\rho\sigma}_{\tau\mu\lambda} \overset{A}{S}{}_{\sigma\rho}^{\cdot\cdot\tau} - q^\varkappa \left(q_{\mu\lambda} + \chi^{-1} \mathfrak{Q}_{[\mu\lambda]} + q_{[\mu} s_{\lambda]} \right) \\ - \chi^{-1} q_{[\mu} \left(\mathfrak{L}^{\varkappa}_{\cdot\lambda]} - \mathfrak{Q}^{\varkappa}_{\cdot\lambda]} \right) + \chi^{-1} q_{[\mu} \mathfrak{Q}_{\lambda]\sigma} q^\sigma q^\varkappa. \end{aligned}$$

Cela étant, nous imposons la condition suivante :

II. — *La connexion affine induite doit être identique à la connexion riemannienne de $g_{\lambda\varkappa}$.*

Pour cela il faut que :

$$(87)\qquad 0 = \overset{R}{\nabla}_\mu g_{\lambda\varkappa} = A^{\tau\sigma\rho}_{\mu\lambda\varkappa} \nabla_\tau (\mathcal{G}_{\sigma\rho} + q_\sigma q_\rho) = A^{\tau}_{\mu} s_\tau g_{\lambda\varkappa}$$

d'où il résulte que

$$(88)\qquad s_\mu = - s q_\mu.$$

En outre, le premier terme de (*86*) s'annule à cause de (*72*) et on trouve :

$$(89)\quad S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = -\chi^{-1} q_{[\mu}\left(\mathfrak{L}_{\cdot\lambda]}^{\varkappa} - \mathfrak{Q}_{\cdot\lambda]}^{\varkappa}\right) - q^{\varkappa}\left[q_{\mu\lambda} + \chi^{-1}\mathfrak{Q}_{[\mu\lambda]} + \chi^{-1} q_{[\mu}\mathfrak{Q}_{\lambda]\sigma} q^{\sigma}\right]$$

et (1)

$$(90)\quad \Pi_{\mu\lambda}^{\varkappa} = \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} + S_{\cdot\mu\lambda}^{\varkappa} + S_{\cdot\lambda\mu}^{\varkappa} + {}^{1}/_{2}s\left(q_{\mu\cdot}\mathfrak{b}_{\lambda}^{\varkappa} + q_{\lambda\cdot}\mathfrak{b}_{\mu}^{\varkappa} - q^{\varkappa}\mathcal{G}_{\lambda\mu}\right),$$

équation qui donne $\Pi_{\mu\lambda}^{\varkappa}$ en fonction de $\mathcal{G}_{\lambda\varkappa}$, de ses dérivés, $\mathfrak{L}_{\cdot\lambda}^{\varkappa}$, $\mathfrak{Q}_{\cdot\sigma}^{\varkappa}$, q_{λ} et $q_{\mu\lambda}$. Des deux équations (*77*) (*90*) on déduit

$$(91)\quad \Pi_{\mu\lambda}^{\varkappa} - \overset{R}{\Pi}{}_{\mu\lambda}^{\varkappa} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} + S_{\cdot\mu\lambda}^{\varkappa} + S_{\cdot\lambda\mu}^{\varkappa} + q_{\mu\lambda}q^{\varkappa} + q_{\cdot\lambda}^{\varkappa}q_{\mu} + q_{\cdot\mu}^{\varkappa}q_{\lambda}$$
$$+ {}^{1}/_{2}s\left(q_{\mu\cdot}\mathfrak{b}_{\lambda}^{\varkappa} + q_{\lambda}\mathfrak{b}_{\mu}^{\varkappa} - q^{\varkappa}\mathcal{G}_{\lambda\mu}\right),$$

relation valable pour tout système holonome ou anholonome.

Les deux conditions géométriques que nous avons imposées ne suffisent pas pour déterminer uniquement la connexion. Les projecteurs $\mathfrak{L}_{\cdot\lambda}^{\varkappa}$ et $\mathfrak{Q}_{\cdot\lambda}^{\varkappa}$ doivent satisfaire aux équations (80.1) et (80.2), mais ils ne sont pas complètement déterminés par ces équations.

II. Applications physiques

Les autogéodésiques et les trajectoires. — Dans cette seconde partie nous fixons la connexion projective encore indéterminée, par des conditions physiques. Naturellement, la première condition à imposer qui se présente à l'esprit est la suivante :

III. — *Les autogéodésiques sont les trajectoires dans l'espace-temps des particules chargées électriquement. La durée du rayon vecteur de* $\lfloor x^{\varkappa} \rfloor$ *à* $\lfloor p^{\varkappa} \rfloor$ *ne dépend que du quotient* $\frac{e}{m}$ *et reste constante le long de la trajectoire.*

Ces trajectoires sont données dans la géométrie riemanienne par les équations bien connues

$$(92)\quad \frac{d}{d\tau}\frac{(d\xi)^h}{d\tau} + \Gamma_{ji}^{h}\frac{(d\xi)^j}{d\tau}\frac{(d\xi)^i}{d\tau} = -\frac{e}{mc}\mathfrak{F}_{j}^{\cdot h}\frac{(d\xi)^j}{d\tau};$$
$$c^2 d\tau^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2.$$

(1) *Der Ricci Kalkül*, p. 75, (voir note (1) page 65).

Dans l'équation des autogéodésiques

$$p^{\mu}\nabla_{\mu}p^{\varkappa} = 0 \tag{93}$$

le point coté $p^{\varkappa}$ peut être décomposé en un vecteur et un multiple de $q^{\varkappa}$:

$$p^{\varkappa} = p^{0}(li^{\varkappa} + q^{\varkappa})\,;\; p^{0} = -\,p^{\varkappa}q_{\varkappa} \tag{94}$$

où

$$i^{\varkappa} = \frac{1}{c}\frac{(d'x)^{\varkappa}}{d\tau} = \frac{1}{c}A^{\varkappa}_{\lambda}\frac{(dx)^{\lambda}}{d\tau} = \frac{1}{c}\mathfrak{A}^{\varkappa}_{h}\frac{(d\xi)^{h}}{d\tau}\,; \quad q_{\varkappa}i^{\varkappa} = 0. \tag{95}$$

est le vecteur bien connu de la vitesse d'univers (1) écrit en coordonnées homogènes, p^{0} est un coefficient indéterminé et l est la durée du rayon vecteur de $p^{\varkappa}$ (2), qui doit être constante le long de la trajectoire. D'après (84) et (93), on a (3)

$$p^{\mu}\nabla_{\mu}(p^{0}) = -\,p^{\varkappa}p^{\mu}\nabla_{\mu}q_{\varkappa} = -\,\chi^{-1}p^{\lambda}p^{\mu}\mathfrak{Q}_{\lambda\mu} + s(p^{0})^{2}. \tag{96}$$

En appliquant l'opérateur $p^{\mu}\nabla_{\mu}$ à l'équation

$$\mathfrak{g}_{\lambda\varkappa}p^{\lambda}p^{\varkappa} = (p^{0})^{2}(l^{2} - 1), \tag{97}$$

on obtient

$$0 = (p^{0})^{2}lp^{\mu}\nabla_{\mu}l = p^{0}(l^{2} - 1)\Big(\chi^{-1}\mathfrak{Q}_{\mu\lambda}p^{\mu}p^{\lambda} - \frac{1}{2}s\,(p^{0})^{2}\Big), \tag{98}$$

relation valable pour chaque choix de l, d'où il résulte

$$p^{\lambda}p^{\mu}\mathfrak{Q}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\chi s(p^{0})^{2}. \tag{99}$$

En substituant (94) dans (93) on obtient à cause de (96) :

$$\begin{aligned} 0 &= p^{\mu}\nabla_{\mu}p^{0}(li^{\varkappa} + q^{\varkappa}) = p^{0}lp^{\mu}\nabla_{\mu}i^{\varkappa} + \chi^{-1}p^{0}\mathfrak{Q}^{\varkappa}_{.\mu}p^{\mu} + p^{\mu}p^{\varkappa}\nabla^{\mu}lg(p^{0}) \\ &= (p^{0})^{2}l^{2}i^{\mu}\nabla_{\mu}i^{\varkappa} + (p^{0})^{2}l\chi^{-1}\mathfrak{L}^{\varkappa}_{.\lambda}i^{\lambda} + (p^{0})^{2}l\chi^{-1}\mathfrak{Q}^{\varkappa}_{.\lambda}i^{\lambda} \\ &\quad + \chi^{-2}(p^{0})^{2}b^{\varkappa} + q^{\varkappa}p^{\mu}\nabla_{\mu}(p^{0}) + \frac{1}{2}ls(p^{0})^{2}i^{\varkappa}. \end{aligned} \tag{100}$$

(1) Dans G. F., III-VI nous avons écrit $\frac{l}{c}i^{\varkappa}$ au lieu de $li^{\varkappa}$; donc $\frac{1}{c}i^{\varkappa}$ est le vecteur vitesse dans ce cas.

(2) l est une constante sans dimensions physiques.

(3) Il faut écrire $\nabla_{\mu}(p^{0})$ pour la dérivée covariante de p^{0} parce que $\nabla_{\mu}p^{0}$ a une autre signification, à savoir :

$$\nabla_{\mu}p^{0} = \mathfrak{A}^{0}_{\varkappa}\nabla_{\mu}p^{\varkappa}.$$

où

$$(101) \qquad \begin{cases} b^\varkappa = \chi \mathfrak{Q}^{\varkappa}_{.\mu} q^\mu = \chi \mathfrak{F}^{\varkappa}_{.\mu} q^\mu \\ b^\mu q_\mu = {}^1/_2 \chi^2 s \quad \text{(à cause de (80)).} \end{cases}$$

La transvection du second membre de (100) avec $q_\varkappa$ est identiquement nulle à cause de (96) ; donc (100) est équivalent à sa partie vectorielle :

$$(102) \qquad 0 = i^\mu \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_\mu i^\varkappa + \frac{\chi^{-1}}{l} (\mathfrak{F}'^{\varkappa}_{.\lambda} + \mathfrak{Q}'^{\varkappa}_{.\lambda}) i^\lambda + \frac{\chi^{-2}}{l^2} b'^\varkappa + {}^1/_2 \frac{s}{l} i^\varkappa,$$

dans laquelle $\mathfrak{F}'^{\varkappa}_{.\lambda}$, $\mathfrak{Q}'^{\varkappa}_{.\lambda}$ et $b'^\varkappa$ sont les parties affinorielles de $\mathfrak{F}^{\varkappa}_{.\lambda}$, $\mathfrak{Q}^{\varkappa}_{.\lambda}$ et $b^\varkappa$:

$$(103) \qquad \mathfrak{F}'^{\varkappa}_{.\lambda} = \mathrm{A}^{\varkappa\sigma}_{\rho\lambda} \mathfrak{F}^{\rho}_{.\sigma} ; \; \mathfrak{Q}'^{\varkappa}_{.\lambda} = \mathrm{A}^{\varkappa\sigma}_{\rho\lambda} \mathfrak{Q}^{\rho}_{.\sigma} ; \; b'^\varkappa = \mathrm{A}^\varkappa_\lambda b^\lambda.$$

Les équations (102) écrites par rapport au système (a) :

$$(104) \qquad 0 = i^j \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_j i^h + \frac{\chi^{-1}}{l} (\mathfrak{F}'^{h}_{.j} + \mathfrak{Q}'^{h}_{.j}) i^j + \frac{\chi^{-2}}{l^2} b'^h + {}^1/_2 \frac{s}{l} i^h.$$

doivent être comparées aux équations des trajectoires (92), qu'on peut écrire sous la forme

$$(105) \qquad i^j \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_j i^h = - \frac{e}{mc^2} \mathcal{F}_j^{\cdot h} i^j.$$

Pour que ces deux équations soient exactement équivalentes il faut que b'^h soit nul ; il s'ensuit, en tenant compte de (80) et (101), que

$$(106) \qquad \begin{aligned} b^\varkappa &= - {}^1/_2 \chi^2 s q^\varkappa, \\ \mathfrak{Q}_{ab} p^a p^b &= (p^0)^2 l^2 \mathfrak{Q}_{\varkappa\lambda} i^\varkappa i^\lambda + {}^1/_2 (p^0)^2 \chi s. \end{aligned}$$

et, par conséquent, en vertu de (99)

$$(107) \qquad \mathfrak{Q}'_{(ij)} = 0,$$

d'où

$$(108) \qquad \frac{e}{mc^2} \mathcal{F}_j^{\cdot h} i^j = \frac{\chi^{-1}}{l} (\mathfrak{F}'^{h}_{.j} + \mathfrak{Q}'^{h}_{.j}) i^j + \frac{1}{2} \frac{s}{l} g_{ij} i^i i^j i^h.$$

équation qui doit être satisfaite quels que soient les i^h choisis (1). Il s'ensuit que

$$(109) \qquad \frac{k}{c}\,\mathcal{F}_{ji} = -\,\chi^{-1}(\mathfrak{L}'_{[ji]} + \mathfrak{Q}'_{[ji]}),$$

relation dans laquelle nous avons introduit la constante indéterminée k, par (2)

$$(110) \qquad l = k\,\frac{mc}{e}.$$

Des équations (80), (101) et (107) on déduit facilement que

$$(111) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_{\lambda\varkappa} = \mathfrak{L}'_{[\lambda\varkappa]} - {}^1/_2 s\chi g_{\lambda\varkappa} + {}^1/_2 s\chi q_\lambda q_\varkappa \\ \mathfrak{Q}_{\lambda\varkappa} = \mathfrak{Q}'_{[\lambda\varkappa]} + {}^1/_2 s\chi q_\lambda q_\varkappa. \end{cases}$$

LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ET DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT. — Dans la théorie de la relativité ordinaire le vecteur mci^h représente l'énergie et l'impulsion cinétiques ; l'énergie et l'impulsion potentielles sont représentées par le vecteur $\frac{e}{c}\,\varphi^h$, φ^h étant le vecteur potentiel, déterminé à un vecteur gradient additif près. Dans la théorie projective un vecteur gradient est un objet tout particulier. En général, un gradient est un hyperplan coté ; on peut donc représenter l'énergie totale par un point coté, somme du vecteur $mci^\nu + \frac{e}{c}\,\varphi^\varkappa$ et d'un point coté gradient arbitraire. S'il est possible de choisir ce point gradient de manière que le point coté de l'énergie totale se confonde avec le point coté $p^\varkappa$, l'équation des trajectoires sera en même temps l'équation de la conservation de l'énergie et de l'impulsion totale. Nous imposons la condition que cette identification soit possible et nous la formulons de la manière suivante :

IV. — *Le point coté*

$$(112) \qquad p^\varkappa = p^\circ(li^\varkappa + q^\varkappa),$$

(1) Quand on prend les géodésiques induites en lieu des autogéodésiques, on trouve (G. F., VI, p. 297) :

$$\frac{k}{c}\mathcal{F}_{ji} = -\,\chi^{-1}\mathfrak{Q}_{ji}.$$

(2) Lorsqu'on ne fixe pas le signe de χ^2, on voit d'après (109) et aussi d'après l'équation de la note (1) de cette page, que le produit $k\chi$ est toujours réel.

ne diffère du vecteur d'énergie totale

(113) $$mci^{\varkappa} + \frac{e}{c}\varphi^{\varkappa},$$

que par un gradient.

Il s'ensuit, premièrement, que

(114) $$\begin{cases} p^0 = \dfrac{mc}{l} \\ p^{\varkappa} = mci^{\varkappa} + \dfrac{e}{k}q^{\varkappa}. \end{cases}$$

Donc p^0 est constante, d'où, en vertu de (96) et (99)

(115) $$s = 0,$$

et en vertu de (111)

(116) $$\begin{cases} \mathfrak{L}_{\lambda\varkappa} = \mathfrak{L}'_{[\lambda\varkappa]} \\ \mathfrak{Q}_{\lambda\varkappa} = \mathfrak{Q}'_{[\lambda\varkappa]}. \end{cases}$$

en d'autres termes, $\mathfrak{L}_{\lambda\varkappa}$ et $\mathfrak{Q}_{\lambda\varkappa}$ *sont des bivecteurs.*

Deuxièmement, il faut que

(117) $$\mathfrak{F}_{\mu\lambda} = 2\partial_{[\mu}\varphi_{\lambda]} = 2\,\frac{m}{e}\frac{c^2}{l}\,\partial_{[\mu}q_{\lambda]} = 2\frac{c}{k}\,q_{\mu\lambda}.$$

et cette condition est remplie quand

(118) $$\mathfrak{L}_{\mu\lambda} + \mathfrak{Q}_{\mu\lambda} = -\,2\chi q_{\mu\lambda} = -\,\chi\frac{k}{c}\mathfrak{F}_{\mu\lambda}.$$

Dans ces conditions, le point coté $p^{\varkappa}$ dans les espaces locaux des points d'une trajectoire n'a plus rien de mystérieux ; ce point n'est autre chose que la représentation géométrique de l'énergie totale. La raison de l'indétermination dont est affecté le potentiel φ_{λ} apparaît très clairement : elle découle du fait que le vrai potentiel, bien déterminé, $\frac{c}{k}\,q_{\lambda}$, n'est pas un vecteur, mais un hyperplan coté, et que la théorie affine, dans l'impossibilité de représenter cet hyperplan, ne peut mieux faire que de recourir à un vecteur indéterminé φ_{λ}, ne différant de $\frac{c}{k}\,q_{\lambda}$ que par un gradient.

LES DEUX BIVECTEURS $\mathfrak{L}_{\mu\lambda}$ ET $\mathfrak{Q}_{\mu\lambda}$. — Nous avons vu que les deux quantités $\mathfrak{L}_{\mu\lambda}$ et $\mathfrak{Q}_{\mu\lambda}$ sont des bivecteurs et que leur somme est le bivecteur électromagnétique, à un facteur constant près. Or, il n'y a, en physique, qu'un seul bivecteur, le bivecteur électromagnétique $\mathcal{F}_{\mu\lambda}$; il faut donc imposer la condition supplémentaire suivante :

V. — *Le bivecteur $\mathfrak{P}_{\mu\lambda}$ et $\mathfrak{Q}_{\mu\lambda}$ ne diffère du bivecteur électromagnétique $\mathcal{F}_{\mu\lambda}$ que par des facteurs constants :*

$$(119) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{\mu\lambda} = -\chi p q_{\mu\lambda} = -{}^1/{}_2\chi p \dfrac{k}{c}\mathcal{F}_{\mu\lambda} \\ \mathfrak{Q}_{\mu\lambda} = -\chi q q_{\mu\lambda} = -{}^1/{}_2\chi q \dfrac{k}{c}\mathcal{F}_{\mu\lambda}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans (89) et (91), on trouve

$$(120) \quad S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = (q-1)q_{\mu\lambda}q^{\varkappa} + (q-p)q_{[\mu}q_{\lambda]}^{\cdot\varkappa}$$

et

$$(121) \quad \Pi_{\mu\lambda}^{\varkappa} = \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} + (q-1)q_{\mu\lambda}q^{\varkappa} + (1-p)q_{\mu}q_{\lambda}^{\cdot\varkappa} + (1-q)q_{\lambda}q_{\mu}^{\cdot\varkappa}.$$

Donc, la condition V réduit le choix de la géométrie à adopter, à la détermination des constantes p, q et k.

L'ÉQUATION AUX VARIATIONS DU CHAMP. — Dans une théorie bien construite, il faut que les équations du champ puissent être dérivées d'un principe de variation, portant sur une fonction universelle qui soit un invariant, de préférence l'invariant le plus simple. Or, l'invariant le plus simple de notre géométrie est la courbure scalaire N, définie par les équations

$$(122) \quad \begin{cases} N_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = -2\partial_{[\nu}\Pi_{\mu]\lambda}^{\varkappa} - 2\Pi_{[\nu|\tau|}^{\varkappa}\Pi_{\mu]\lambda}^{\tau} \\ N = N_{\varkappa\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}\mathcal{G}^{\mu\lambda}. \end{cases}$$

Nous sommes donc conduits à imposer la condition que :

VI. — *Les équations déduites de*

$$(123) \quad \delta\int \mathfrak{N}dx^0, \cdots, dx^4 = 0; \qquad \mathfrak{N} = N\sqrt{\mathfrak{G}}$$

(où $x^{\varkappa}$ et χ restent constantes et où l'on fait varier les $\mathcal{G}_{\varkappa\lambda}$) *donnent, en même temps, les équations de la gravitation et celles de l'électromagnétisme, y compris la seconde équation de* MAXWELL (1) *dans le vide.*

(1) La première équation de Maxwell est déjà une conséquence de (117).

En effectuant la variation, on est conduit aux équations [1]

$$(124)\quad K_{ij} - {}^1/_2 K g_{ij} - 2\,\frac{q^2 - 2pq + 2p}{q^2}\,\frac{k^2}{c^2}\left(\mathfrak{F}_i{}^{;h}\mathfrak{F}_{jh} - {}^1/_4 \mathfrak{F}_{hl}\mathfrak{F}^{hl} g_{ij}\right) = 0$$

$$(125)\quad 2(q^2 - 2pq + 2p)\,\frac{k}{qc}\,\overset{\mathrm{R}}{\nabla}_j \mathfrak{F}_i{}^{;j} = 0$$

dans lesquelles K_{ji} et K sont le tenseur et le scalaire de courbure bien connus de la géométrie riemannienne. (125) est la seconde équation de MAXWELL dans le vide, si

$$(126)\quad \begin{cases} q^2 - 2pq + 2p \neq 0 \\ q \neq 0. \end{cases}$$

Comparons (124) avec l'équation de l'énergie et d'impulsion :

$$(127)\quad K_{ji} - \frac{1}{2} K g_{ji} - \frac{\varkappa}{c^2}\left(\mathfrak{F}_i{}^{;h}\mathfrak{F}_{jh} - {}^1/_4 \mathfrak{F}_{hl}\mathfrak{F}^{hl} g_{ij}\right) = 0,$$

$\varkappa$ = constante de la gravitation. On voit qu'il faut et qu'il suffit que

$$(128)\quad 2(q^2 - 2pq + 2p)k^2 = \varkappa q^2,$$

d'où il suit que

$$(129)\quad q^2 - 2pq + 2p > 0, \qquad [2]$$

et

$$(130)\quad k = \frac{q}{\sqrt{q^2 - 2pq + 2p}}\sqrt{\frac{\varkappa}{2}}.$$

L'ÉQUATION ORDINAIRE DE DIRAC DANS LA THÉORIE PROJECTIVE. — Il est bien connu que dans la théorie de la relativité ordinaire on peut obtenir le terme du courant dans la deuxième équation de MAXWELL en ajoutant à N une autre fonction universelle M, qui se déduit des équations de l'onde matérielle de DIRAC. Exposons d'abord cette méthode en utilisant le langage de la théorie projective.

L'équation

$$(131)\quad \alpha^{(\varkappa}\alpha^{\lambda)} = \mathfrak{g}^{\varkappa\lambda},$$

définit un système associatif hypercomplexe de seize nombres engendré par les cinq nombres α^0, α^1..., α^4. Ces cinq nombres hypercom-

(1) G. F., VI, p. 308.
(2) Quand on prend $\chi^2 < 0$, il faut que $k^2 < 0$ et $q^2 - 2pq + 2p < 0$.

plexes peuvent être représentés par des affineurs co-contrevariants, de valence deux, dans un espace local auxiliaire à quatre dimensions, l'espace du spin (1) :

$$\alpha^{0A}_{..B},\ \alpha^{1A}_{..B},\ \alpha^{2A}_{..B},\ \alpha^{3A}_{..B},\ \alpha^{4A}_{..B}. \tag{132}$$

Dans ce cas, on a donc deux transformations à prendre en considération : les transformations affines du système de repères (a) dans les espaces locaux projectifs, d'une part, et de l'autre les transformations affines et homogènes du système de repères (A) dans les espaces locaux du spin. Ces transformations sont absolument indépendantes les unes des autres ; nous imposons, évidemment, la condition que toutes nos équations soient invariantes par rapport à ces deux types de transformations. On définira les vecteurs et les affineurs de l'espace du spin à la manière ordinaire, par rapport au groupe des transformations de (A), et on les appellera *spinvecteurs* et *spineurs*. La grandeur

$$\alpha^{\varkappa A}_{..B}, \tag{133}$$

est un *projectospineur*, qui appartient à l'espace local projectif par son indice $\varkappa$ et à l'espace local du spin par ses indices A et B. Dans l'espace du spin les transformations permises ne sont pas seulement les transformations réelles des coordonnées, mais aussi toutes les transformations à coefficients complexes du groupe homogène affine. Ce fait nous conduit à la conséquence suivante. La transformation des spinvecteurs ordinaires étant donnée par les équations

$$\psi^{A'} = \alpha^{A'}_{A}\psi^{A} ; \qquad \eta_{B'} = \alpha^{B}_{B'}\eta_{B}, \qquad (2) \tag{134}$$

on peut définir un autre type de spinvecteurs appelés *spinvecteurs de seconde espèce* qui se transforment, comme les précédents, à cela près que les coefficients de la transformation $\bar{\alpha}^{\bar{A}'}_{\bar{A}}$, $\bar{\alpha}^{\bar{B}}_{\bar{B}'}$ sont les conjuguées complexes des $\alpha^{A'}_{A}$, $\alpha^{B}_{B'}$ (3) :

$$\bar{\zeta}^{\bar{A}'} = \bar{\alpha}^{\bar{A}'}_{\bar{A}}\bar{\zeta}^{\bar{A}} ; \qquad \theta_{\bar{B}'} = \bar{\alpha}^{\bar{B}}_{\bar{B}'}\theta_{\bar{B}}. \tag{135}$$

(1) G. F., V.

(2) α^{A}_{B} est le *spineur d'identité*.

(3) $\bar{\alpha}^{\bar{A}}_{\bar{A}}$ est le *spineur d'identité de seconde espèce*.

Il est évident que les conjuguées complexes des composantes d'un spinvecteur ordinaire sont les composantes d'un spinvecteur de seconde espèce et *vice-versa*. En outre, il existe encore des spineurs (et spineurs-densités) qui comportent en même temps des indices surlignés et des indices simples, par exemple :

$$\sigma^{\bar{A}'}_{\cdot\, B'\bar{C}'} = \alpha^{B}_{B'}\,\bar{\alpha}^{\bar{A}'\bar{C}}_{\bar{A}\bar{C}'}\,\sigma^{\bar{A}}_{\cdot\, B\bar{C}}. \tag{136}$$

Ces spineurs sont appelés des *spineurs d'Hermite*. Les conjuguées complexes des composantes d'un spineur d'HERMITE sont les composantes d'un autre spineur d'HERMITE, qui s'appelle le spineur conjugué du premier. Les lettres principales de deux spineurs conjugués sont toujours les mêmes, mais l'une est surlignée et l'autre ne l'est pas. Les spineurs d'HERMITE les plus importants sont les spineurs covariants ou contrevariants, symétriques ou alternés. Cette propriété (qu'il faut bien se garder de confondre avec la propriété de la symétrie ou d'alternance des spineurs ordinaires) est définie par les équations

$$\rho_{A\bar{B}} = \pm\, \bar{\rho}_{\bar{B}A}\ ; \qquad \tau^{A\bar{B}} = \pm\, \bar{\tau}^{\bar{B}A}. \tag{137}$$

Quand on multiplie un spineur d'HERMITE symétrique par $\sqrt{-1}$, il résulte un spineur alterné et *vice-versa*.

W. PAULI a démontré qu'il existe dans l'espace du spin un spineur d'HERMITE symétrique invariant $\omega_{\bar{A}B}$ de rang 4, que nous appelons le *tenseur d'Hermite fondamental* covariant de l'espace du spin ([1]). De $\omega_{A\bar{B}}$ on déduit le *tenseur fondamental contrevariant* $\overset{-1}{\omega}{}^{A\bar{B}}$:

$$\omega_{\bar{B}C}\,\overset{-1}{\omega}{}^{C\bar{A}} = \bar{\alpha}^{\bar{A}}_{\bar{B}}\ ; \qquad \overset{-1}{\omega}{}^{A\bar{C}}\,\omega_{\bar{C}B} = \alpha^{A}_{B} \tag{138}$$

On peut déduire $\omega_{A\bar{B}}$ des $\alpha^{\varkappa}$ par l'équation

$$\bar{\alpha}^{\varkappa\bar{A}}_{\cdot\cdot\,\bar{B}} = \omega_{\bar{B}C}\,\alpha^{\varkappa C}_{\cdot\cdot\, D}\,\overset{-1}{\omega}{}^{D\bar{A}}. \tag{139}$$ ([2])

On peut démontrer que les spino-affineurs

$$\begin{cases} \omega\alpha_{\lambda} = \omega_{\bar{A}C}\,\alpha_{\lambda\cdot B}^{\cdot C}\ ; \qquad \alpha_{\lambda}\overset{-1}{\omega} = \alpha_{\lambda\cdot C}^{\cdot A}\,\overset{-1}{\omega}{}^{C\bar{B}} \\ \omega\alpha_{[\varkappa\lambda\mu\nu]} = \omega_{\bar{A}C}\,\alpha_{[\varkappa\cdot|D|}^{\cdot C}\,\alpha_{\lambda\cdot|E|}^{\cdot D}\,\alpha_{\mu\cdot|F|}^{\cdot E}\,\alpha_{\nu]\cdot B}^{\cdot F}\ ; \qquad \alpha_{[\varkappa\lambda\mu\nu]}\overset{-1}{\omega} \end{cases} \tag{140}$$

(1) *Loc. cit.*, p. 347 ; la forme d'Hermite correspondant à ce spineur se trouve déjà chez E. CARTAN, *Les groupes réels, simples et continus, Ann. de l'école Norm. Sup.* 31 (1914) 263-355 ; le spineur a été redécouvert indépendamment par V. BERGMANN, *Bemerkungen zur allgemeinrelativistischen Fassung der Quantentheorie*, Berl. Sitzungsber, 1932, p. 347-354.

(2) W. PAULI, *l. c.*, p. 3, voir aussi G. F., V, p. 413-417. Voir aussi J. A. SCHOUTEN et J. HAANTJES, Konforme Feldtheorie II ; R_6 und Spinraum. *Ann. d. Pisa* 1934.

sont symétriques et que les spino–affineurs

$$\left\{\begin{array}{ll} {}^{\omega}\alpha_{[\lambda\mu]}\,; & \alpha_{[\lambda\mu]}{}^{\omega^{-1}} \\ {}^{\omega}\alpha_{[\lambda\mu\nu]}\,; & \alpha_{[\lambda\mu\nu]}{}^{\omega^{-1}} \end{array}\right. \tag{141}$$

sont alternés [1].

Dans l'espace-temps euclidien l'équation de DIRAC s'écrit en coordonnées homogènes,

$$\alpha^{\mu}\left(\frac{h}{i}\partial_{\mu} - \frac{e}{c}\varphi_{\mu} + mcq_{\mu}\right)\psi^{A} = 0 \tag{142}$$

ψ^{A} étant le spinvecteur qui représente l'onde matérielle ; en présence d'un champ de gravitation il faut remplacer ∂_{μ} par un symbole ∇_{μ} de différentiation covariante des spinvecteurs. Cette différentiation covariante se déduit de la condition que la dérivée de $\alpha^{\varkappa C}_{\cdot\cdot A}$ soit nulle.

On constate le fait remarquable qu'il existe une seule différentiation possible pour les densités contrevariantes de poids 1 /4 des spinvecteurs et pour les densités covariantes de poids — 1 /4 des spinvecteurs, tandis que la différentiation covariante des spinvecteurs eux-mêmes reste indéterminée. Cette indétermination ne donne lieu cependant à aucune difficulté : il faut simplement prendre toujours une densité de spinvecteur ψ^{A} de poids + 1 /4 pour représenter l'onde matérielle, et considérer $\alpha^{\varkappa C}_{\cdot\cdot A}$ comme un spineur de poids + 1 /4 en C et de poids — 1 /4 en A. Les paramètres $\Lambda^{A}_{B\mu}$ de la différentiation d'une densité de spinvecteur ψ^{A}, de poids 1 /4, satisfont à l'équation

$$\Lambda^{A}_{A\mu} = 0. \tag{143}$$

A l'aide de cette équation et de

$$0 = \nabla_{\mu}\alpha^{\varkappa A}_{\cdot\cdot B} = \partial_{\mu}\alpha^{\varkappa A}_{\cdot\cdot B} + \Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda}\alpha^{\lambda A}_{\cdot\cdot B} + \Lambda^{A}_{C\mu}\alpha^{\varkappa C}_{\cdot\cdot B} - \Lambda^{C}_{B\mu}\alpha^{\varkappa A}_{\cdot\cdot C} \tag{144}$$

on déduit facilement que

$$\Lambda^{A}_{B\mu} = -\,{}^{1}/_{4}\Pi^{\varkappa}_{\mu\lambda}\alpha^{\lambda\cdot A}_{\cdot\varkappa\cdot B} + {}^{1}/_{4}\alpha^{\varkappa A}_{\cdot\cdot C}\partial_{\mu}\alpha^{\cdot C}_{\varkappa\cdot B}. \tag{145}$$

(1) G. F., V, p. 413, Les équations (140) et (141) ne sont plus valables quand on prend la signature + — — — +.

Quand on remplace $\Pi_{\mu\lambda}^{\varkappa}$ par $\overset{R}{\Pi}{}_{\mu\lambda}^{\varkappa}$ on trouve les paramètres

$$\overset{R}{\Lambda}{}_{B\mu}^{A} = - {}^1\!/_4 \overset{R}{\Pi}{}_{\mu\lambda}^{\varkappa} \alpha^{\lambda\cdot A}_{\cdot\varkappa\cdot B} + {}^1\!/_4 \alpha^{\varkappa A}_{\cdot\cdot C} \partial_\mu \alpha^{\cdot C}_{\varkappa\cdot B} \tag{146}$$

qui définissent une connexion riemannienne.

En fin de compte, l'équation ordinaire de DIRAC s'écrit en coordonnées homogènes en supprimant les indices de l'espace du spin

$$\alpha^\mu\left(\frac{h}{i}\overset{R}{\nabla}_\mu - \frac{e}{c}\varphi_\mu + mcq_\mu\right)\psi = \alpha^\mu\left(\frac{h}{i}(\partial_\mu + \overset{R}{\Lambda}_\mu) - \frac{e}{c}\varphi_\mu + mcq_\mu\right)\psi = 0. \tag{147}$$

En introduisant le système de repères (*a*) il est facile d'écrire cette équation sous sa forme quadridimensionnelle bien connue.

L'ÉQUATION DE DIRAC GÉNÉRALISÉE. — L'opérateur $\overset{R}{\nabla}_\mu$ est un opérateur de géométrie riemannienne et il est probable que dans notre théorie projective il devra être remplacé par ∇_μ ; on obtient ainsi pour l'équation des ondes

$$\alpha^\mu\left(\frac{h}{i}\nabla_\mu - \frac{e}{c}\varphi_\mu + mcq_\mu\right)\psi = \alpha^\mu\left(\frac{h}{i}(\partial_\mu + \Lambda_\mu) - \frac{e}{c}\varphi_\mu + mcq_\mu\right)\psi = 0. \tag{148}$$

Pour la différence des premiers membres des équations (147) et (148) on trouve, en tenant compte de (91), (115), (120), (145) et (146)

$$\begin{aligned} \frac{h}{i}\alpha^\mu(\nabla_\mu - \overset{R}{\nabla}_\mu) = \frac{h}{i}\alpha^\mu(\Lambda_\mu - \overset{R}{\Lambda}_\mu) &= {}^1\!/_4 \frac{h}{i}(p - 2q)\alpha^{\mu\lambda\varkappa} q_\lambda q_{\mu\varkappa} \\ &= {}^1\!/_4 \frac{h}{i}(p - 2q)\alpha^{[\mu\lambda\varkappa]} q_\lambda q_{\mu\varkappa} \end{aligned} \tag{149}$$

d'où l'on déduit que le passage à une théorie projective modifie les résultats connus relatifs aux quanta seulement dans le cas où $p - 2q \neq 0$.

L'ÉQUATION VARIATIONNELLE DU CHAMP ET DE L'ONDE MATÉRIELLE. — Dans la théorie ordinaire, on obtient l'invariant universel en multipliant le premier membre de l'équation (147) par $\frac{2\varkappa}{c}\bar{\psi}\omega$:

$$\overset{R}{M} = \frac{2\varkappa}{c}\bar{\psi}\omega\alpha^\mu\left(\frac{h}{i}\overset{R}{\nabla}_\mu - \frac{e}{c}\varphi_\mu + mcq_\mu\right)\psi. \tag{150}$$

Cet invariant n'est pas réel, mais la solution de l'équation aux variations est réelle parce que $\overset{R}{M}$ est « pratiquement réel », autrement dit parce que la partie imaginaire de $\overset{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}$ est une divergence (1). En effet, $\omega\alpha^{\mu}$ étant symétrique, on a

$$(151)\quad \overset{\mathrm{R}}{\mathrm{M}} - \overline{\overset{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}} = \frac{2\varkappa}{c}\frac{h}{i}\left(\bar{\psi}\omega\alpha^{\mu}\overset{\mathrm{R}}{\nabla}_{\mu}\psi + \psi\overline{\omega\alpha^{\mu}}\overset{\mathrm{R}}{\nabla}_{\mu}\bar{\psi}\right) = \frac{h}{i}\frac{2\varkappa}{c}\overset{\mathrm{R}}{\nabla}_{\mu}(\bar{\psi}\omega\alpha^{\mu}\psi).$$

L'invariant fondamental de la théorie projective devra être évidemment

$$(152)\qquad \mathrm{M} = \frac{2\varkappa}{c}\bar{\psi}\omega\alpha^{\mu}\left(\frac{h}{i}\nabla_{\mu} - \frac{e}{c}\varphi_{\mu} + mcq_{\mu}\right)\psi.$$

Montrons que M est aussi « pratiquement réel ». On a :

$$(153)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M} - \overset{\mathrm{R}}{\mathrm{M}} &= +\frac{1}{4}\frac{2\varkappa}{c}\frac{h}{i}\bar{\psi}\omega(p - 2q)\alpha^{[\mu\lambda\varkappa]}q_{\lambda}q_{\mu\varkappa}\psi \\ &= \frac{1}{4}\frac{2\varkappa}{c}\frac{k}{2c}(p - 2q)\frac{h}{i}\bar{\psi}\omega\alpha^{[\mu\lambda\varkappa]}\psi\chi^{-1}x_{\lambda}\mathcal{F}_{\mu\varkappa}. \end{aligned}\right.$$

$\omega\alpha^{[\mu\lambda\varkappa]}$ étant alterné, l'expression $\bar{\psi}\omega\alpha^{[\mu\lambda\varkappa]}\psi$ est purement imaginaire, donc $\mathrm{M} - \overset{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}$ est réel (2).

L'équation variationelle

$$(154)\qquad \delta\int(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})dx^0dx^1dx^2dx^3dx^4 = 0\,; \qquad \mathfrak{M} = \mathrm{M}\sqrt{\mathfrak{G}}$$

conduit aux équations

$$(155)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{K}_{ij} - {}^{1}/_{2}\mathrm{K}g_{ij} - \frac{\varkappa}{c^2}\left(\mathcal{F}_{j}^{\cdot h}\mathcal{F}_{ih} - {}^{1}/_{4}\mathcal{F}_{hl}\mathcal{F}^{hl}g_{ji}\right) \\ &+ \frac{\varkappa}{c^2}\left\{\mathfrak{R}\frac{h}{i}\,e\bar{\psi}\omega\alpha'_{(j}\left(\overset{\mathrm{R}}{\nabla}_{i)} - \frac{ie}{hc}\varphi_{i)}\right)\psi - \frac{p - 2q}{2q}\frac{hk}{i}\mathcal{F}_{l(i}\bar{\psi}\alpha'^{l}{}_{\cdot j)}\alpha^0\psi\right\} = 0\,(^3). \end{aligned}\right.$$

$$(156)\quad \overset{\mathrm{R}}{\nabla}_{j}\mathcal{F}_{i}^{\cdot j} - e\bar{\psi}\omega\alpha'_{i}\psi + \frac{p - 2q}{2q}\frac{hk}{i}\overset{\mathrm{R}}{\nabla}^{l}\bar{\psi}\omega\alpha'_{[l}\alpha'_{i]}\alpha^0\psi = 0 \qquad (\alpha'_{\lambda} = \mathrm{A}_{\lambda}^{\varkappa}\alpha_{\varkappa}).$$

La deuxième équation est identique à la seconde équation de MAXWELL complète, au terme contenant le facteur $(p - 2q)$ près. Donc, pour que :

(1) H. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 2e édition, p. 188.

(2) Quand on prend la signature $+ - - - +$, $\mathrm{M} - \overset{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}$ n'est plus réel et il faut prendre $p - 2q = 0$ pour rendre M pratiquement réel.

(3) $\mathfrak{R}$ signifie : " partie réelle de ".

VII. — *L'équation variationelle* (154) *conduise à la seconde équation de Maxwell sans aucun terme additionnel,* il faut et il suffit que

$$(157)\qquad p - 2q = 0.$$

En vertu de cette équation et de (118) on a

$$(158)\qquad p = \frac{4}{3}\,; \qquad q = \frac{2}{3}$$

et par conséquent (120)

$$(159)\qquad S_{\mu\lambda\varkappa} = -\frac{1}{3}q_{\mu\lambda}q_{\varkappa} - \frac{1}{3}q_{\lambda\varkappa}q_{\mu} - \frac{1}{3}q_{\lambda}q_{\varkappa\mu} = -\,q_{[\mu\lambda}q_{\varkappa]} = S_{[\mu\lambda\varkappa]}.$$

Donc, $S_{\mu\lambda\varkappa}$ est *alterné.*

Une connexion pour laquelle $S_{\mu\lambda\varkappa}$ est alterné a une propriété très remarquable. Les parties symétriques $\Pi_{(\mu\lambda)}^{\varkappa}$ de $\Pi_{\mu\lambda}^{\varkappa}$ (pour des systèmes holonomes) constituent une nouvelle connexion et l'on démontre facilement qu'afin que pour cette connexion la dérivée de $G_{\varkappa\lambda}$ s'annulle, il faut et il suffit que $S_{\mu\lambda\varkappa}$ soit alterné. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, les autogéodésiques sont identiques aux autogéodésiques de la géométrie symétrique.

Résumons les résultats du calcul précédent sur une figure. Dans le plan p, q les cas correspondants aux points de l'hyperbole et de la droite $q = 0$ doivent être écartés par la condition VI, et les parties hachurées par la condition que M soit « pratiquement » réel. La condition III conduit à la droite $p + q = 2$ quand on prend les autogéodésiques et à la droite $q = 2$ quand on prend les géodésiques induites. La condition VII conduit à la droite $p - 2q = 0$. La théorie de. A. Einstein et W. Mayer (rendue projective) est représentée par la droite $p = 0$, la théorie de O. Veblen et B. Hoffmann est représentée par le point Q: $p = 1, q = 1$ (connexion symétrique) et ce point représente aussi la théorie de W. Pauli (loc. cit., 1933). Le point P est le seul point qui remplisse toutes nos conditions I-VII. On voit que les autogéodésiques sont préférables, parce que les géodésiques induites conduisent à une droite qui pénètre dans la partie défendue du plan et qui coupe la droite $p - 2q = 0$ en un point S (permis) qui appartient à la signature peu vraisemblable $+ - - - +$. En outre, le point Q, symbolisant la connexion symétrique, se trouve sur la droite $p + q = 2$. Au point R il n'y a plus de différence entre les deux espèces de géodésiques (parce que $\mathfrak{L}^{\varkappa}_{.\lambda} = o$), mais ce point est moins bon parce qu'il ne donne ni la symétrie, ni les équations de MAXWELL sans terme additionnel. Le point Q, au contraire, permet la symétrie et il est possible que la nature ait une telle préférence pour les géométries symétriques qu'elle accepte même des termes additionnels dans les équations de MAXWELL pour sauver la symétrie. C'est là le point de vue de M. PAULI. Il faut cependant rappeler que la connexion riemannienne elle-même n'est pas symétrique lorsqu'on l'exprime en langage projectif, ce qui nous prévient qu'il ne faut pas exagérer outre mesure la valeur de la symétrie.

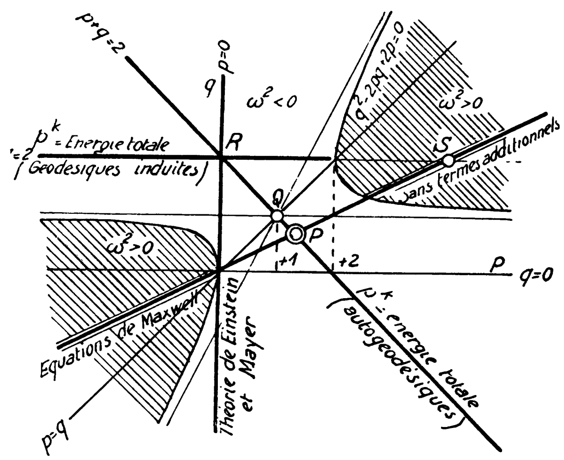

FIG. 1 [1].

Les termes additionnels dans l'équation (156) sont extrêmement petits ; ils contiennent, en effet, le facteur

$$k = \frac{q}{\sqrt{q^2 - 2pq + 2p}} \sqrt{\frac{\varkappa}{2}} \tag{160}$$

qui est très petit pour tous les points qui ne sont pas situés dans le voisinage immédiat de l'hyperbole. Cela fait qu'il est bien improbable que l'expérience puisse nous permettre de décider s'il faut ajouter ces termes aux équations. Il n'est cependant pas exclus qu'en dévelop-

(1) Dans cette figure lire χ au lieu de ω.

pant la théorie relativiste des quanta on arrive à trouver des arguments assez forts pour pouvoir choisir définitivement entre P et Q.

La théorie projective réalise d'une manière assez satisfaisante l'unification des théories de la gravitation et de l'électromagnétisme, mais elle est incapable de les relier à la théorie des ondes matérielles, parce que les deux fonctions M et N ne découlent pas d'un seul et même principe. C'est là un défaut grave ; la théorie actuelle ne représente donc qu'une première approximation, et il est clair qu'il faut introduire un principe nouveau si l'on veut aboutir à l'unification complète de toutes ces théories physiques.

Conférences faites à l'Institut Henri Poincaré en février 1934.

Manuscrit reçu le 27 mars 1934.

Le Gérant: E. SCHNEIDER.

Imprimerie des PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE,
Paris-Saint-Amand (France). — 3-1-1935.