

ANNALES DE L'I. H. P.

MARCEL BRILLOUIN

**Sur quelques problèmes non résolus de la Physique
Mathématique classique Propagation de la fusion**

Annales de l'I. H. P., tome 1, n° 3 (1930), p. 285-308

http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1930__1_3_285_0

© Gauthier-Villars, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur quelques problèmes non résolus de la Physique Mathématique classique Propagation de la fusion

PAR

MARCEL BRILLOUIN

I

1. — La Physique mathématique classique, celle du XIX^e siècle, pose des problèmes de deux espèces très différentes :

1^o Ceux dans lesquels les domaines dont on étudie le changement de propriétés sont limités par des frontières géométriques données ;

2^o Ceux dans lesquels ce sont ces frontières, soit fixes, soit mobiles, qui sont les véritables inconnues de la question.

Pour les problèmes de la première sorte, on est en possession de méthodes mathématiques variées qui conduisent généralement à la solution requise. Mais pour les seconds, c'est presque aussitôt après la mise en équations qu'on est arrêté, et dépourvu de toute méthode, ou même d'exemples à imiter.

Il suffit de rappeler combien peu d'exemples on a réussi à traiter de la forme des gouttes liquides ; quels détours KIRCHHOFF a dû employer pour l'étude des courbes élastiques.

2. — HELMHOLTZ ayant indiqué la condition d'existence de surfaces de discontinuité permanentes dans les liquides sans viscosité, a formé quelques exemples : KIRCHHOFF a donné d'abord un peu plus de généralité à la méthode mathématique, puis l'a bien présentée, mais, pour les mouvements plans seulement, grâce à des propriétés particulières des fonctions imaginaires. La méthode réussit parce qu'en permutant les rôles des variables géométrique et dynamique, on est ramené en fait à traiter un problème à frontières fixes données — grâce à une représentation conforme. L'intéressant ce [serait l'espace à 3 dimensions, et les surfaces de discontinuité qui naissent des bords d'obstacles limités en tous sens. Ici la permutation des variables géométriques et dynamiques ne sert plus à rien.

Sans discuter ici aucune des questions d'ordre physique que soulève le problème hydrodynamique initial, je me borne à constater l'impuissance en présence du problème mathématique précis que voici :

Étant donné un obstacle, à bords aigus, plongé dans un courant liquide uniforme et constant en amont au loin, trouver la surface de discontinuité permanente émanée des bords aigus, le long de laquelle la vitesse tangentielle est sur la face amont égale à la vitesse du courant, et nulle sur la face aval, où tout le liquide est en repos.

Arrêté dès ce premier pas, le géomètre reste coi en présence du problème d'état variable correspondant et de celui des pales d'hélice, même schématisé au delà de toute vraisemblance.

Au technicien de se débrouiller comme il pourra. C'est une situation peu glorieuse.

3. — Je prends une autre question posée depuis FOURIER, — un siècle — la propagation de la solidification du globe terrestre, supposé en fusion au temps origine, et elle aussi, schématisée au delà de toute vraisemblance, au point de faire perdre à la solution toute utilité géodésique, sauf comme tout premier travail d'approche en vue de problèmes un peu moins éloignés des conditions probables.

C'est ce premier problème que je vais poser, et dont je vais mettre en évidence les difficultés :

Propagation de la fusion de la glace. — Propagation de la solidification d'une croûte sphérique.

Le problème plan le plus simple a été traité il y a un siècle par LAMÉ et CLAPEYRON, dans un court mémoire, lu à l'Académie des Sciences le 10 mai 1830 ⁽¹⁾.

Dès que la température initiale n'est pas uniforme ; ou la température superficielle pas constante ; ou la profondeur totale limitée, les difficultés semblent insurmontables.

Et pour les problèmes sphériques, c'est bien pire.

(1) Publié aux *Annales de Chimie et de Physique* t. XLVII, 1831, p. 250-256.

Malgré son titre « Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide », c'est seulement en paroles qu'il s'agit d'un globe. Le problème réellement traité dans la note finale de deux pages, est celui de la formation d'une croûte solide plane par refroidissement de la surface supérieure à une température constante, le liquide indéfini au-dessous restant à la température constante et uniforme de solidification.

$$z = \beta \sqrt{t}.$$

L'épaisseur croît proportionnellement à la racine carrée du temps ; mais les auteurs ne déterminent pas le coefficient β .

II

4. — *Surfaces isothermes planes.* — Commençons par un problème plan dont Franz NEUMANN (1798-1895) a fourni la solution dans ses *Leçons inédites* de Königsberg au début de sa sixième année de [cours (vers 1835-40 ?) d'après H. WEBER (1).]

La même solution a été donnée par STEFAN, d'une manière indépendante, en 1889, à l'Académie des Sciences de Vienne, et imprimée dans le volume XCVIII des *Sitzungsberichte* de cette académie (*A bth*, II.) p. 473-484 paru en 1890.

Soient :

c_1 la chaleur spécifique de la glace ;

ρ_1 sa densité ;

k_1 sa conductibilité calorique ;

c_2, ρ_2, k_2 , les mêmes grandeurs pour l'eau ;

L la chaleur de fusion de la glace ;

Θ_f la température de fusion ;

z la profondeur depuis la surface libre de référence ($z = 0$) ;

$\Theta_1(z, t)$ la température sur le plan z dans la glace, à l'époque t ;

$\Theta_2(z, t)$ la température dans l'eau.

Pour réduire le problème *mathématique* à ses difficultés essentielles, on le simplifie en laissant de côté des propriétés physiques pourtant importantes :

Simplifications.

On suppose l'eau liquide *immobile* maintenue à la température $\Theta_2 > \Theta_f$ constante, pour z très grand. On néglige les variations de chaleur spécifique, et, ce qui est plus grave, de conductibilité, avec la température. On néglige également la dilatation, c'est-à-dire les variations de densité.

En résumé on traite $c_1, k_1, \rho_1, c_2, \rho_2, k_2$, comme des constantes.

On néglige aussi le changement de densité par fusion. Toute cause de changement de pression ayant été négligée, on peut supposer que la température de fusion Θ_f est une constante, ainsi que la chaleur de fusion L .

(1) *Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik, nach Riemann's Vorlesungen*, Braunschweig, 1901, 4^e édition, t. II, pp. 118-122.

5. — Le problème ayant été ainsi schématisé, les équations sont

$$\text{I} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{dans la glace} & \left(\frac{k_1}{c_1 \rho_1} \right) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \\ \text{dans l'eau} & \left(\frac{k_2}{c_2 \rho_2} \right) \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \end{array} \right.$$

à la surface de jonction $z = \zeta(t)$

$$\text{II} \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_f$$

avec

$$\text{II}' \quad L \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right)_{z=\zeta}$$

On écrit ici ρ (sans distinguer entre la densité liquide ou solide !), dans le 1^{er} membre, où $\left(\rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)$ est l'épaisseur d'eau congelée par seconde.

Le second membre représente, l'excès de la chaleur enlevée par conductibilité du côté « glace » sur la chaleur apportée du côté « eau ».

Même dans ces conditions physiquement simplifiées à l'excès, on pourrait être curieux de savoir comment l'épaisseur de glace varie avec le temps, pour une distribution initiale, $\Theta_0(z)$, *arbitraire* des températures dans toute la profondeur ($z > 0$) avec une loi de variation $\Theta_s(t)$ *arbitraire* de la température superficielle.

Ce problème n'a pas été traité.

6. — Le problème traité, parce que des intégrales de l'équation de la chaleur déjà données par FOURIER et LAPLACE vers 1820⁽¹⁾, s'y sont trouvées adaptées, est le suivant.

Etat initial : pas de glace, $\zeta = 0$; température initiale de l'eau *uniforme* $\Theta_0(z) = \Theta_\infty$ quelconque supérieure à la température de fusion.

Au temps $t = 0$, on établit brusquement la température $\Theta_s < \Theta_f$ à la surface libre $z = 0$, et on la maintient *constante* en absorbant toute la chaleur que la solidification de la glace apporte par conductibilité à la surface libre.

Ainsi, la solution s'applique au cas où, au-dessus d'un lac profond,

1) Voir note finale.

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

dont toute l'eau est à [une même température quelconque (+ 5°, + 10°, + 15°, par exemple), arrive brusquement de l'air au-dessous de zéro dont la température se maintient exactement fixe (— 10°, par exemple).

Il s'est formé instantanément une mince couche de glace, dont la face libre est à Θ_s (— 10°) et dont la face en contact avec l'eau est remontée aussitôt à la température de fusion Θ_f .

7. — La solution est

$$\text{III} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1(z, t) - \theta_f = [\theta_s - \theta_f] \left[\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1 t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1}}\right)} \right] \\ \theta_2(z, t) - \theta_f = [\theta_\infty - \theta_f] \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2 t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2}}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2}}\right)} \end{array} \right.$$

en [posant, suivant une notation qui rappelle qu'il s'agit de la fonction des erreurs.

$$\text{(III')} \quad \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du, \dots \begin{cases} \operatorname{erf}(0) = 0 \\ \operatorname{erf}(\infty) = 1 \end{cases}$$

La surface de contact eau glace, est au point

$$\text{IV} \quad z = \zeta = \alpha \sqrt{t};$$

α doit être tiré de l'équation

$$\text{IV'} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{\frac{k_1 c_1 \rho}{\pi}} \frac{\theta_s - \theta_f}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1}}\right)} e^{-\frac{\alpha^2}{4} \frac{c_1 \rho}{k_1}} \\ -\sqrt{\frac{k_2 c_2 \rho}{\pi}} \frac{\theta_\infty - \theta_f}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2}}\right)} e^{-\frac{\alpha^2}{4} \frac{c_2 \rho}{k_2}} \end{array} \right\} = \frac{L_f \rho}{2} \cdot \alpha$$

Pour que la solidification progresse vers les z positifs, il faut que les températures extrêmes Θ_s , Θ_∞ soient telles que l'équation donne une valeur de α positive.

La discussion de l'équation en α n'a été entreprise ni par Neumann, ni par Stefan, ni par H. Weber.

Pour une matière donnée il y figure 5 grandeurs caractéristiques de cette matière :

$$\frac{c_1 \rho}{k_1}, \quad \frac{c_2 \rho}{k_2}, \quad k_1, \quad k_2, \quad kL\rho.$$

Il faudrait dresser le tableau numérique des α , en fonction des deux données qui restent arbitraires :

$$\theta_s - \theta_f < 0, \quad \theta_\infty - \theta_f > 0.$$

On peut adopter pour l'eau, comme ordre de grandeur (CGS)

$$\frac{0,50}{0,004}, \quad \frac{1}{0,00125}, \quad 0,004, \quad 0,00125, \quad 80.$$

L'équation en $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est alors

$$\left. \begin{aligned} &0,045(\theta_f - \theta_s) \frac{e^{-125 \frac{\alpha^2}{4}}}{\operatorname{erf}\left(11 \frac{\alpha}{2}\right)} \\ &- 0,035(\theta_\infty - \theta_f) \frac{e^{-800 \frac{\alpha^2}{4}}}{1 - \operatorname{erf}\left(28 \frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned} \right\} = 142 \left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

En se donnant un certain nombre de valeurs de α , on obtiendra un nombre égal de relations linéaires entre $\theta_f - \theta_s$ et $\theta_\infty - \theta_f$.

On tracera les droites correspondantes, avec leur cote α . Si le réseau ainsi tracé est assez serré, on déterminera à vue, d'après la position du point donné $\theta_f - \theta_s$, $\theta_\infty - \theta_f$ pour chaque problème particulier — la cote de la droite du faisceau sur laquelle il se trouverait. D'où le coefficient de $\sqrt{t}$ dans la propagation de la fusion.]

Répartition des droites : Calculs et tracés de M. COULOMB.

$$45 \frac{e^{-125 \frac{\alpha^2}{4}}}{\operatorname{erf}\left(11 \frac{\alpha}{2}\right)} (\theta_f - \theta_s) - 35 \frac{e^{-800 \frac{\alpha^2}{4}}}{1 - \operatorname{erf}\left(28 \frac{\alpha}{2}\right)} (\theta_\infty - \theta_f) = 142000 \frac{\alpha}{2}$$

ou

$$AX - BY = C$$

I. — α petit.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots \right).$$

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Si on se contente d'abord du premier ordre d'approximation, pour voir l'allure du faisceau, on obtient les droites

$$\frac{3,63}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} X - 35 Y = 142\,000 \left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

qui enveloppent la parabole $Y = -13\sqrt{-X}$ (fig. 1).

Exemple : Pour $\alpha = 0,01$ on obtient $726 X - 35 Y = 710$ au lieu de $726 X - 40,6 Y = 710$ (voir tableau I).

Une bonne approximation est obtenue par la formule

$$\frac{3,63}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} X - 35 \left(1 + 31,6 \frac{\alpha}{2}\right) Y = 142\,000 \frac{\alpha}{2},$$

où 2 erreurs de signe contraire sont commises sur le coefficient de Y .

Exemple : Elle donne pour $\alpha = 0,01$: $726 X - 40,5 Y = 710$.

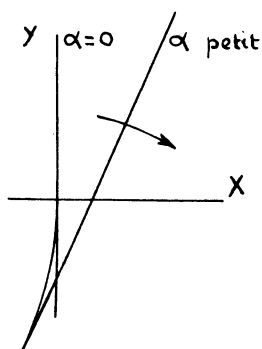


Fig. 1.

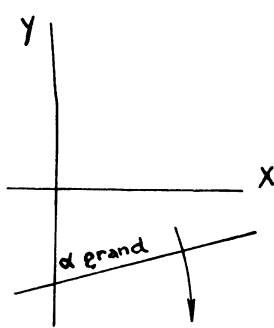


Fig. 2

II. — α grand

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \dots\right)$$

On obtient de même au premier ordre d'approximation

$$45 e^{-125 \frac{\alpha^2}{4}} X - 1790 \frac{\alpha}{2} e^{-16 \frac{\alpha^2}{4}} Y = 142\,000 \frac{\alpha}{2}$$

ou sensiblement

$$Y = -79 e^{+16 \frac{\alpha^2}{4}}.$$

La droite s'éloigne rapidement à l'infini en devenant parallèle à ox (fig. 2).

Exemple : $\alpha = 0,4$ donne (par le calcul complet) :

$$0,328 X - 224 Y = 56800.$$

On voit avec quelle rapidité la droite s'éloigne. Ce cas n'offrant aucun intérêt pratique, nous ne chercherons pas de formule d'approximation.

Tableau applicable à la glace :

On peut restreindre à $0 < X < 20^\circ$, $0 < Y < 80^\circ$. D'où :

α	A	B	C
0,01	726	40,6	710
0,02	359	45,8	1 420
0,03	236	53,0	2 130
0,04	175	59,4	2 840

Points ayant servi à la construction des graphiques.

$\alpha = 0,01$	$Y = 0$ $X = 1,0$	$Y = 80$ $X = 5,5$	Cotes en dixièmes de degré.
$\alpha = 0,02$	$Y = 0$ $X = 4,0$	$Y = 80$ $X = 14,4$	
$\alpha = 0,03$	$Y = 0$ $X = 9,0$	$X = 20$ $Y = 48,9$	
$\alpha = 0,04$	$Y = 0$ $X = 16,2$	$X = 20$ $Y = 11,1$	

C'est à l'aide de ces nombres qu'a été construit le graphique. Dans leur partie utile, les droites sont tracées en trait plein ; leur prolongement, en traits interrompus, a servi à tracer l'enveloppe. Celle-ci est assez bien définie pour permettre de tracer sans erreur notable, la droite qui passe par un point quelconque $\Theta_1 - \Theta_s$, $\Theta_\infty - \Theta_1$, donné et de la coter en α , par interpolation à vue (par exemple sur

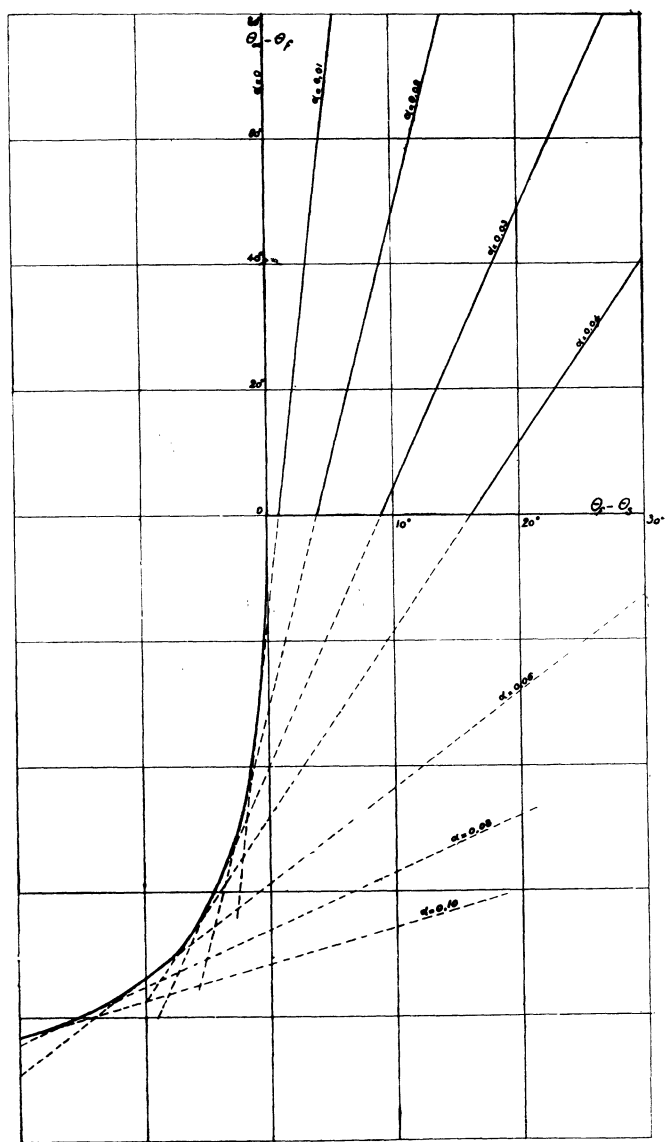


Fig. 3. — Eau et glace : $\theta_\infty - \theta_f$ en ordonnée ; $\theta_f - \theta_s$ en abscisse.

l'arc de cercle tracé du point de contact avec l'enveloppe comme centre). Partant de cette valeur de α , l'équation fournira par approximations très rapides la valeur exacte avec 3 ou 4 chiffres si on le juge utile.

8. — STEFAN a résolu le problème un peu différent dans lequel une colonne de glace infinie du côté négatif, à température uniforme Θ_g , est subitement mise en contact avec une colonne d'eau infinie, à température uniforme Θ_e . La face de contact prend subitement la température de fusion Θ_f , la face extrême, $z = -\infty$, de la glace est maintenue à Θ_g , et la température de l'eau au loin ($z = +\infty$) reste Θ_∞ .

Les températures sont partout données par

$$(V) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta - \theta_f &= (\theta_g - \theta_f) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1 t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1}}\right) + 1} \\ \theta - \theta_f &= (\theta_e - \theta_f) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2 t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2}}\right) - 1} \end{aligned} \right.$$

avec la propagation

$$(V') \quad \zeta = \alpha \sqrt{t}$$

et la condition thermique

$$(VI) \quad \left\{ \begin{aligned} L_p \alpha &= -k_1 \frac{(\theta_g - \theta_f)}{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1}}\right)} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 c_1 \rho}{4k_1}} \\ &+ k_2 \frac{\theta_e - \theta_f}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2}}\right) - 1} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 c_2 \rho}{4k_2}}. \end{aligned} \right.$$

9. — Arrivons aux problèmes plans, avec distribution initiale *arbitraire* des températures.

Commençons par le problème général plan.

Une couche de glace d'épaisseur l_1 est surmontée d'une couche d'eau d'épaisseur l_2 .

Dans l'état initial, la température de la glace est $\Phi^I(z)$, et celle de l'eau $\Phi^II(z)$. A la surface plane de contact, la température commune est la température de fusion Θ_f .

On fait varier d'une manière connue en fonction du temps les températures $\Theta^I(-l_1, t)$, $\Theta^II(+l_2, t)$, des plans extrêmes $z = -l_1$, $z = +l_2$.

On cherche comment progresse la surface de fusion, et comment varie la distribution des températures.

Voici une manière de poser le problème mathématique qui conduit à un système de cinq équations intégrales :

Posons

$$(VII) \quad N\left(z - \gamma, \frac{tk_1}{c_1\rho}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c_1\rho}{tk_1}} e^{-\frac{(z-\gamma)^2 c_1\rho}{4k_1 t}}.$$

L'équation de conductibilité a , comme on sait, (LAPLACE, FOURIER) pour intégrale générale

$$(VIII) \quad \Theta_I(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^I(\gamma) N\left(z - \gamma, \frac{tk_1}{c_1\rho}\right) d\gamma$$

où $\Phi^I(z)$ représente la distribution initiale des températures $\Theta, (z, 0)$, tout le long de la colonne $-\infty \leq z \leq \infty$.

Pour une barre de glace (I) limitée, $-l_1 \leq z \leq 0$, la fonction Φ^I est donnée, et connue, seulement dans l'intervalle $-l_1 \rightarrow 0$; en dehors de cet intervalle elle est inconnue. Ce sont les fonctions

$$(IX) \quad \begin{cases} \Phi = \Psi_-^I(\gamma) & -\infty \leq z \leq -l_1, \\ \Phi = \Psi_+^I(\gamma) & 0 \leq z \leq \infty \end{cases}$$

que je vais prendre comme inconnues ainsi que les fonctions analogues relatives à la colonne d'eau (II), qui s'étend de 0 à $+l_2$.

$$(X) \quad \Theta_{II}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{II}(\gamma) N\left(z - \gamma, \frac{tk_2}{c_2\rho}\right) d\gamma$$

avec Φ^{II} donné le long de la colonne $0 \leq z \leq l_2$ et inconnu en dehors

$$(XI) \quad \begin{cases} \Phi^{II} = \Psi_-^{II}(\gamma) & -\infty \leq z \leq 0 \\ \Phi^{II} = \Psi_+^{II}(\gamma) & l_2 \leq z \leq \infty. \end{cases}$$

Pour déterminer ces quatre fonctions Ψ ainsi que la loi de propagation
(XII) $z = \zeta(t)$

de la surface de fusion, on aura les *cinq* conditions [aux extrémités libres fixes, et à la surface de jonction mobile :

Extrémités fixes : températures données en fonction du temps, depuis $t = 0$

$$(XIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta I(-l_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\gamma) N\left(-l_1 - \gamma, \frac{tk_1}{c_1\rho}\right) d\gamma \\ \Theta II(l_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi II(\gamma) N\left(l_2 - \gamma, \frac{tk_2}{c_2\rho}\right) d\gamma. \end{array} \right.$$

Surface de jonction ; température de fusion Θ_f , constante :

$$(XIV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_f = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi I(\gamma) N\left(\zeta(t) - \gamma, \frac{tk_1}{c_1\rho}\right) d\gamma \\ \Theta_f = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi II(\gamma) N\left(\zeta(t) - \gamma, \frac{tk_2}{c_2\rho}\right) d\gamma. \end{array} \right.$$

Equation calorimétrique

$$(XV) \quad \left\{ \begin{array}{l} L\rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} = k_1 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi I(\gamma) N'\left(\zeta(t) - \gamma, \frac{tk_1}{c_1\rho}\right) d\gamma \\ \quad \quad \quad - k_2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi II(\gamma) N'\left(\zeta(t) - \gamma, \frac{tk_2}{c_2\rho}\right) d\gamma \end{array} \right.$$

en posant

$$N' = \frac{\partial N}{\partial z} = -2 \cdot \frac{(z - \gamma)c\rho}{4kt} \times N\left(z - \gamma, \frac{tk}{c\rho}\right).$$

Les deux premières équations (XIII), aux extrémités fixes, sont de types connu. Mais l'introduction de $\zeta(t)$ à la place de z dans les noyaux, N_1, N_2, N_1', N_2' , dans les trois équations de la surface de jonction, fournit, pour la détermination des 4 fonctions $\Psi_I^-, \Psi_I^+, \Psi_{II}^-, \Psi_{II}^+$, et de $\zeta(t)$ un type d'équation intégrale, non étudié jusqu'ici, du moins à ma connaissance.

Le problème est posé ; il serait bien désirable qu'on sût le résoudre.

10. — Essayons d'appliquer la méthode précédente au Problème de STEFAN.

ETAT INITIAL

Glace $-\infty < z < 0, \quad \Theta(z, 0) = \Theta_f \text{ constante}$

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Alors :

$$\begin{array}{l} \text{Eau} \quad \begin{array}{l} \Phi_1 = \theta_g; \quad \Psi_+ \text{ est inconnue,} \quad \Psi_- = 0 \\ 0 \leq z < \infty \quad \theta(z, 0) = \theta_e \text{ constante} \\ \Phi_2 = \theta_e, \quad \Psi_- \text{ est inconnue,} \quad \Psi_+ = 0. \end{array} \end{array}$$

L'extension infinie des deux colonnes supprime deux fonctions inconnues.

EXTRÉMITÉS

$$\begin{array}{l} z = -\infty, \quad \theta_1 = \theta_g \\ z = +\infty, \quad \theta_2 = \theta_e \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{constantes} \end{array} \right.$$

A une époque t quelconque, la température de la glace sera donnée par

$$\theta_1(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\theta_g \int_{-\infty}^{-\frac{z}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1 t}}} e^{-\beta^2} d\beta + \int_{-\frac{z}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1 t}}}^{\infty} \Psi_+ \left(z + 2\beta \sqrt{\frac{k_1 t}{c_1 \rho}} \right) e^{-\beta^2} d\beta \right]$$

et celle de l'eau par

$$\theta_2(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\theta_e \int_{-\frac{z}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2 t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta + \int_{-\frac{z}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2 t}}}^{-\frac{z}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2 t}}} \Psi_- \left(z + 2\beta \sqrt{\frac{k_2 t}{c_2 \rho}} \right) e^{-\beta^2} d\beta \right]$$

Les conditions aux extrémités sont satisfaites d'elles-mêmes, ce qui supprime deux des équations de condition. Restent les deux conditions, thermométrique et calorimétrique à la surface mobile de contact :

$$\begin{array}{l} \theta_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\theta_g \int_{-\infty}^{-\frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1 t}}} e^{-\beta^2} d\beta + \int_{-\frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1 t}}}^{\infty} \Psi_+ \left(\zeta(t) + 2\beta \sqrt{\frac{k_1 t}{c_1 \rho}} \right) e^{-\beta^2} d\beta \right] \\ \theta_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\theta_e \int_{-\frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2 t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta + \int_{-\infty}^{-\frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2 t}}} \Psi_- \left(\zeta(t) + 2\beta \sqrt{\frac{k_2 t}{c_2 \rho}} \right) e^{-\beta^2} d\beta \right] \end{array}$$

avec

$$L\rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\begin{array}{l} \frac{k_1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\theta_g - \Psi_+(0)}{2\sqrt{k_1 t}} \sqrt{c_1 \rho} e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_1 \rho}{4k_1 t}} - \int_{-\frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1 t}}}^{\infty} \frac{\partial \Psi_+}{\partial z} \left(\zeta(t) + 2\beta \sqrt{\frac{k_1 t}{c_1 \rho}} \right) e^{-\beta^2} d\beta \right] \\ - \frac{k_2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\theta_e - \Psi_-(0)}{2\sqrt{k_2 t}} \sqrt{c_2 \rho} e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_2 \rho}{4k_2 t}} - \int_{-\infty}^{-\frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2 t}}} \frac{\partial \Psi_-}{\partial z} \left(\zeta(t) + 2\beta \sqrt{\frac{k_2 t}{c_2 \rho}} \right) e^{-\beta^2} d\beta \right] \end{array} \right)$$

On resterait encore bien embarrassé pour tirer ζ *methodiquement* de ces équations, si leur forme ne suggérait *d'essayer* $\zeta = \alpha\sqrt{t}$. et aussi — à tout hasard — de prendre Ψ_{II} constante, et Ψ_{I} constante, à choisir convenablement, s'il n'apparaît pas d'impossibilité.

Il faut alors

$$\begin{aligned}\theta_r &= \frac{1}{2} \theta_g \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha \sqrt{c_1 \rho}}{2\sqrt{k_1}} \right) \right] + \frac{1}{2} \Psi_+ \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha \sqrt{c_1 \rho}}{2\sqrt{k_1}} \right) \right] \\ \theta_r &= \frac{1}{2} \theta_e \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha \sqrt{c_2 \rho}}{2\sqrt{k_2}} \right) \right] + \frac{1}{2} \Psi_- \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha \sqrt{c_2 \rho}}{2\sqrt{k_2}} \right) \right].\end{aligned}$$

Puis

$$\frac{L_0 \rho \alpha}{2} = \begin{cases} \frac{k_1 \sqrt{c_1 \rho}}{\sqrt{\pi} \sqrt{k_1}} (\theta_g - \Psi_+) e^{-\frac{\alpha^2 c_1 \rho}{4k_1}} - 0 \\ - \frac{k_2 \sqrt{c_2 \rho}}{\sqrt{\pi} \sqrt{k_2}} (\theta_e - \Psi_-) e^{-\frac{\alpha^2 c_2 \rho}{4k_2}} + 0 \end{cases}$$

en supprimant le facteur commun $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

C'est précisément l'équation VI de STEFAN pour la détermination de α (§ 8).

11. — Le problème de NEUMANN se présente un peu autrement parce que la colonne de matière est limitée au plan $z = 0$, et s'étend seulement du côté positif.

Pour une telle colonne de matière, si elle restait homogène, il faudrait connaître la distribution initiale $\Theta(z, 0)$ des températures sur la colonne $0 \leq z \leq \infty$ et la loi de variation $\Theta(0, t)$ des températures à l'extrémité en fonction du temps $0 \leq t < \infty$.

On aurait alors, comme on sait

$$(XVI) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta(z, t) &= \int_0^\infty \theta(\gamma, 0) \frac{e^{-\frac{(z-\gamma)^2 c \rho}{4kt}} - e^{-\frac{(z+\gamma)^2 c \rho}{4kt}}}{2\sqrt{\pi kt}} \sqrt{c \rho} d\gamma \\ &+ \int_0^t \theta(0, \tau) e^{-\frac{z^2 c \rho}{4k(t-\tau)}} \frac{z \sqrt{c \rho}}{2\sqrt{\pi k} (t-\tau)^{3/2}} d\tau. \end{aligned} \right.$$

Dans le problème de NEUMANN je regarderai $\Theta^{\text{II}}(0, t)$ comme une fonction inconnue, pour l'eau. Pour la glace, au contraire, qui va naître à partir de l'origine, c'est la distribution initiale $\Theta^{\text{I}}(z, 0)$ qui est inconnue, et la température à l'origine $\Theta^{\text{I}}(0, t)$ qui est donnée.

Les conditions thermométrique et calorimétrique à la surface mobile de jonction vont fournir les trois équations intégrales nécessaires pour déterminer ces deux fonctions $\Theta^I(z, 0)$, $\Theta^II(0, t)$ et la loi de progression $z = \zeta(t)$ de la surface de solidification :

Je poserai :

$$\begin{array}{lll} \Theta^I(0, t) = \Phi^I(t), & \Theta^I(z, 0) = \Psi^I(z) & \text{glace} \\ \Theta^II(0, t) = \Psi^II(t), & \Theta^II(z, 0) = \Phi^II(z) & \text{eau} \end{array}$$

Les Φ sont données ; les Ψ inconnues.

$$(XVII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{\pi k_1 t}} \int_0^\infty \Psi^I(\gamma) \left[e^{-\frac{(\zeta(t) - \gamma)^2 c_1 \rho}{4 k_1 t}} - e^{-\frac{(\zeta(t) + \gamma)^2 c_1 \rho}{4 k_1 t}} \right] d\gamma \\ \quad + \frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{\pi k_1}} \int_0^t \Phi^I(\tau) e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_1 \rho}{4 k_1 (t - \tau)}} \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \\ \Theta_{II} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{\pi k_2 t}} \int_0^\infty \Phi^II(\gamma) \left[e^{-\frac{(\zeta(t) - \gamma)^2 c_2 \rho}{4 k_2 t}} - e^{-\frac{(\zeta(t) + \gamma)^2 c_2 \rho}{4 k_2 t}} \right] d\gamma \\ \quad + \frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{\pi k_2}} \int_0^t \Psi^II(\tau) e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_2 \rho}{4 k_2 (t - \tau)}} \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \end{array} \right.$$

Puis

$$(XVIII) \quad I_\rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} -k_1 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{c_1 \rho}{k_1 t} \right)^{3/2} \int_0^\infty \Psi^I(\gamma) \left[(\zeta(t) - \gamma) e^{-\frac{(\zeta(t) - \gamma)^2 c_1 \rho}{4 k_1 t}} - (\zeta(t) + \gamma) e^{-\frac{(\zeta(t) + \gamma)^2 c_1 \rho}{4 k_1 t}} \right] d\gamma \\ -k_1 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{c_1 \rho}{k_1} \right)^{3/2} \zeta(t)^2 \int_0^t \Phi^I(\tau) e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_1 \rho}{4 k_1 (t - \tau)}} \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \\ \quad + \frac{\sqrt{k_1 c_1 \rho}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_1 \rho}{4 k_1 (t - \tau)}} \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \\ +k_2 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{c_2 \rho}{k_2 t} \right)^{3/2} \int_0^\infty \Phi^II(\gamma) \left[(\zeta(t) - \gamma) e^{-\frac{(\zeta(t) - \gamma)^2 c_2 \rho}{4 k_2 t}} - (\zeta(t) + \gamma) e^{-\frac{(\zeta(t) + \gamma)^2 c_2 \rho}{4 k_2 t}} \right] d\gamma \\ +k_2 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{c_2 \rho}{k_2} \right)^{3/2} \zeta(t)^2 \int_0^t \Psi^II(\tau) e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_2 \rho}{4 k_2 (t - \tau)}} \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \\ \quad - \frac{\sqrt{k_2 c_2 \rho}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_2 \rho}{4 k_2 (t - \tau)}} \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \end{array} \right.$$

Le cas général paraît encore moins abordable que dans le problème de STEFAN.

12. — Examinons donc le cas où les fonctions données sont des constantes. Tous calculs faits, il vient

$$\begin{aligned}\theta_r &= \Phi_I + (\Psi_I - \Phi_I) \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1 t}} \right) \\ \theta_r &= \Phi_{II} + (\Psi_{II} - \Phi_{II}) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta(t)}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2 t}} \right) \right]\end{aligned}$$

et

$$L\rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sqrt{\frac{k_1 c_1 \rho}{\pi t}} (\Psi_I - \Phi_I) e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_1 \rho}{4 k_1 t}} + \sqrt{\frac{k_2 c_2 \rho}{\pi t}} (\Psi_{II} - \Phi_{II}) e^{-\frac{\zeta(t)^2 c_2 \rho}{4 k_2 t}}$$

Avec

$$\zeta(t) = \alpha \sqrt{t}$$

ces trois équations deviennent

$$\begin{aligned}\theta_r &= \Psi_I \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1}} \right) + \Phi_I \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho}{k_1}} \right) \right] \\ \theta_r &= \Phi_{II} \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2}} \right) + \Psi_{II} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c_2 \rho}{k_2}} \right) \right]\end{aligned}$$

et, en supprimant le facteur $\frac{1}{\sqrt{t}}$,

$$\frac{L\rho \alpha}{2} = \sqrt{\frac{k_1 c_1 \rho}{\pi}} (\Psi_I - \Phi_I) e^{-\frac{\alpha^2 c_1 \rho}{4 k_1}} + \sqrt{\frac{k_2 c_2 \rho}{\pi}} (\Psi_{II} - \Phi_{II}) e^{-\frac{\alpha^2 c_2 \rho}{4 k_2}}$$

ce qui reproduit la solution même de NEUMANN (§ 7), (IV).

13. — On peut se demander s'il n'y aurait pas avantage à choisir z comme fonction inconnue de t et de Θ , la surface de contact étant caractérisée par la valeur constante Θ_I , et les extrémités, par les fonctions données $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$; constantes dans l'exemple traité par NEUMANN ou par STEFAN.

Ce changement de la variable indépendante et de la fonction donne, sans difficulté, les équations *non linéaires*

$$\begin{aligned}\frac{k_1}{c_1 \rho} \frac{\partial^2 z_1}{\partial \Theta^2} &= \frac{\partial z}{\partial t} \left(\frac{\partial z_1}{\partial \Theta} \right)^2 && \text{glace} \\ \frac{k_2}{c_2 \rho} \frac{\partial^2 z_2}{\partial \Theta^2} &= \frac{\partial z}{\partial t} \left(\frac{\partial z_2}{\partial \Theta} \right)^2 && \text{eau}\end{aligned}$$

et à la surface de contact $\Theta = \Theta_1$

$$z_1(t) = z_2(t)$$

$$\frac{1}{k_2} \frac{\partial z_2}{\partial \Theta_2} = \frac{1}{k_1} \frac{\partial z_1}{\partial \Theta_1} = \frac{L\rho}{k_1 k_2} \frac{\partial z_1}{\partial \Theta_1} \frac{\partial z_2}{\partial \Theta_2} \frac{\partial z}{\partial t}.$$

La transformation qui fixe les limites des domaines de z_1 et de z_2 , ne facilite en rien la solution.

Et si on présente à un mathématicien, ces nouvelles équations, il songe à les ramener à une forme linéaire, plus facile à étudier quand on ne se préoccupe pas des conditions limites, — et fournit les équations mêmes qui m'ont servi de point de départ (I, § 5) !

14. — Mur homogène. — On appelle *mur* l'espace compris entre deux plans parallèles. Soit H la distance des deux plans. Supposons donnée la distribution initiale de température $\Theta(z, 0)$ en fonction de z , dans l'intervalle $0 - H$. Pour être maître des conditions frontières, je choisis la solution qui maintient la température *zéro* pour $z = 0$ et, aussi pour $z = H$:

$$\Theta(z, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c\rho}{\pi k t}} \int_0^H \Theta(\gamma, 0) \cdot \mathfrak{W}(\gamma, H) d\gamma$$

en posant

$$\mathfrak{W}(\gamma, H) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(z-\gamma-nH)^2 c\rho}{4kt}} - e^{-\frac{(z+\gamma+nH)^2 c\rho}{4kt}} \right)$$

dont les termes se compensent deux à deux pour $z = 0$ et pour $z = H$. A cette intégrale, il faut ajouter celles qui proviennent des frontières

$$\Theta(z, t) = \int_0^t \Theta(0, \tau) e^{-\frac{z^2 c\rho}{4k(t-\tau)}} \times \frac{z\sqrt{c\rho}}{2\sqrt{\pi k}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}$$

$$+ \int_0^t \Theta(H, \tau) e^{-\frac{(z-H)^2 c\rho}{4k(t-\tau)}} \times \frac{(z-H)\sqrt{c\rho}}{2\sqrt{\pi k}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}$$

qui donnent 0 pour l'état initial.

Il paraît inutile d'écrire les équations de problème de fusion ; la forme du noyau $\mathfrak{W}$, ne permettra évidemment pas de deviner, comme NEUMANN et STEFAN, la loi de propagation $\zeta(t)$ de la surface de fusion, même dans les cas les plus simples où $\Theta(\gamma, 0)$, $\Theta(0, \tau)$, $\Theta(H, \tau)$ seraient des constantes.

III

15. — *Problème sphérique isotrope.* — Arrivons au problème sphérique, qui, seul, présente avec le problème terrestre assez d'analogies géométriques, pour guider, — si on savait le résoudre — les vues qualitatives, et un peu quantitatives, sur la marche de la consolidation profonde de notre globe.

Malheureusement tous les essais sont restés infructueux.

Le problème qui semble le plus simple, serait le problème analogue à celui de NEUMANN. Dans un milieu liquide infini à température uniforme, on refroidit instantanément *un point* à une température inférieure à la température de congélation, et on maintient cette température constante. Il se formera un petit noyau solide sphérique ; on demande comment il se développe ; comment croît avec le temps, le rayon de sa surface de congélation.

Si on essaie d'imiter la solution de NEUMANN, on se trouve aussitôt arrêté, parce que la solution sphérique analogue est

$$\frac{1}{r} \left[A + B \operatorname{Erf} \cdot \frac{r}{2} \sqrt{\frac{c\rho}{kt}} \right] + A' ;$$

le dénominateur r gêne toute la suite.

16. — Le problème sphérique isotrope utile, analogue au problème plan, est celui dans lequel la surface $r = R$ d'une sphère d'eau, ayant à l'origine du temps une distribution de température isotrope favorable, serait portée brusquement à une température Θ_R inférieure à la température de solidification, la température au centre étant maintenue constante Θ_0 .

On aura dans la glace

$$(XIX) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_1}{c_1 \rho} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \\ \text{dans l'eau} \\ \frac{k_2}{c_2 \rho} \left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \end{array} \right.$$

et à la jonction $r = R(t)$

$$(XX) \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_r \text{ constante}$$

avec

$$(XXI) \quad \left(+ k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right)_{r=R} = L \rho \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Il y aurait fusion, si $\frac{\partial R}{\partial t}$ était positif. Pour que l'épaisseur solidifiée croisse avec le temps, il faut que les températures extrêmes θ_0 , θ_R et l'état initial soient choisis de telle sorte que $\frac{\partial R}{\partial t}$ soit négatif.

Dans le problème de fusion, les fonctions données sont

$$\begin{array}{ll} \theta_1(R, t) & \text{glace} \\ \theta_2(\gamma, 0) & \text{eau} \end{array}$$

et les fonctions cherchées :

$$\begin{array}{ll} \theta_1(\gamma, 0) & \text{glace} \\ \theta_2(R, t) & \text{eau} \end{array}$$

$R(t)$ figure dans les équations XX et XXI, d'une manière qui ôte tout espoir d'en obtenir l'expression par une voie simple.

17. — La formation d'équations intégrales équivalentes — analogues à celles du problème général du mur plan § 14 — est intéressante en elle-même.

La masse est supposée initialement liquide. On refroidit la surface extérieure R , au-dessous du point de fusion ; et on cherche la marche de la surface de séparation du solide et du liquide vers le centre.

Les noyaux utiles sont un peu plus compliqués que pour le problème plan.

Je pose

$$(XXII) \quad N_1\left(\gamma, r, \frac{k_1}{c_1 \rho_1}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_1 \rho_1}{k_1 \pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{(\gamma-r-nR)^2 c_1 \rho_1}{4 k_1 t}} - e^{-\frac{(\gamma+r-nR)^2 c_1 \rho_1}{4 k_1 t}} \right)$$

Pour $r = 0$, N est évidemment nul, et linéaire en r pour r très petit. $\frac{N}{r}$ est donc fini à l'origine, et convient au cas où il n'y a pas de source de chaleur au centre.

A la surface libre, pour $r = R$, N est également nul, un terme n du premier groupe étant compensé par le terme $(n + 2)$ du second groupe.

N est le noyau qui correspond à l'état initial, donné seulement de 0 à R .

Pour la température superficielle donnée, je pose

$$(XXIII) \quad M_I\left(r, t - \tau, \frac{k_1}{c_1 \rho_1}\right) \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_1^2}{\pi k}} \frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{(r-R)^2 c_1 \rho_1}{4 k_1 (t - \tau)}} - e^{-\frac{(r+R)^2 c_1 \rho_1}{4 k_1 (t - \tau)}} \right]$$

avec 2 termes seulement.

M_I est toujours nul au centre, et linéaire en r , au voisinage, ce qui laissera la température finie au centre.

Mêmes formes N_{II} , M_{II} (avec $\frac{k_2}{c_2 \rho_2}$) pour l'eau centrale.

18. — Je prends pour la glace (I) :

$$(XXIV) \quad \Theta_I(r, t) = \frac{1}{r} \int_0^R \gamma \Psi_I(\gamma, 0) N_I d\gamma + \frac{1}{r} \int_0^t R \Phi_I(R, \tau) M_I d\tau.$$

La température superficielle est donnée $\Phi_I(R, t)$; mais comme la glace n'existait pas encore au temps $t = 0$, la température initiale $\Psi_I(r, 0)$ est une inconnue du problème.

Pour l'eau (II) il y a permutation des fonctions connue et inconnue. La distribution initiale $\Phi_{II}(r, 0)$ est connue ; mais la température à la surface R , qui cesse d'être liquide dès le début, $\Psi_{II}(R, t)$ est une inconnue du problème.

J'écris donc

$$(XXV) \quad \Theta_{II}(r, t) = \frac{1}{r} \int_0^R \gamma \Phi_{II}(\gamma, 0) N_{II} d\gamma + \frac{1}{r} \int_0^t R \Psi_{II}(R, \tau) M_{II} d\tau.$$

Les fonctions Ψ_I , Ψ_{II} et $\mathcal{R}(t)$ devront être déterminées par ces deux équations XXIV, XXV, dont les 4 noyaux sont connus, et par les 3 équations XX, XXI, à la surface de solidification $r = \mathcal{R}(t)$.

La solution du problème plan n'a été devinée que dans le cas où l'épaisseur liquide initiale était infinie, ce qui réduisait à un seul terme chacun des noyaux équivalents à N et M . Mais si l'épaisseur d'eau à congeler était finie, la condition thermique à la 2^e surface introduirait dans le problème plan un développement en série comme noyau, — et l'impuissance du mathématicien resterait la même que dans le problème sphérique.

Même dans le cas le plus simple : température initiale de l'eau Φ_{II} uniforme et température superficielle de la glace Φ_I constante, — la complication des noyaux, et l'ignorance sur les fonctions Ψ_{II} , Ψ_I , nous laissent complètement désarmés.

19. — Peut être serait-il moins difficile d'attaquer les 5 équations d'une manière un peu différente, parce que les fonctions inconnues seraient moins engagées sous des signes algébriques. Ce serait de se donner arbitrairement une loi de propagation de la solidification $\mathfrak{R}(t)$, et de chercher à quel groupe d'états initiaux et de températures à la surface R, cette loi $\mathfrak{R}(t)$ serait adaptée. On pourrait évidemment choisir, en outre, l'une des 4 fonctions Φ, Ψ ; par exemple prendre Φ_1 (température superficielle de la glace) constante.

20. — La présence des deux fonctions inconnues Ψ_I, Ψ_{II} , semble une complication.

On pourrait évidemment tirer des intégrales de la chaleur, une forme de solution satisfaisant directement aux équations XX, c'est-à-dire, fournissant l'état du liquide intérieur à une surface isotherme (Θ) mobile $(\mathfrak{R}(t))$, et l'état de la glace entre la même surface isotherme mobile et la sphère R maintenue à température connue. Mais je n'ai réussi à formuler de cette manière rien qui mérite d'être transcrit.

21. — *Conclusion.* — Voici donc un problème celui de la propagation isotrope de la solidification par conductibilité, inattaquable par les méthodes que les mathématiciens ont déjà fournies aux physiciens.

Toutes les difficultés proprement physiques du problème ont été supprimées. Il ne reste que le squelette de la question. Mais, le fait que le corps est limité, soit entre 2 plans, soit entre le centre et le rayon R, impose aux noyaux N, M, une forme compliquée qui interdit toute divination.

Surtout, *l'inconnue est le déplacement d'une frontière mobile.* Aucune des méthodes en usage parmi les mathématiciens, ne s'adapte (même sans exigences de rigueur) à l'attaque de semblables problèmes.

M. B.

Note I. — Pour toutes les formules utilisées dans cet article, — dues à FOURIER et LAPLACE, — ou POISSON — il est commode de se reporter à un memento très bien établi par sir W. THOMSON vers 1850 pour son usage personnel : « Compendium of the Fourier mathematics for the conduction of heat in solids... » *Mat. Phys. Papers*, t. II, p. 41 à 60 ; voir aussi p. 63-65.

On consultera avec intérêt :

LAPLACE. — Mém. sur divers points d'analyse, *Journal de l'Ec. Pol.*, XV^e cahier (en particulier p. 235-244, et en général : *Œuvres*).

FOURIER. — *Théorie de la Chaleur et Œuvres*.

POISSON. — *Théorie Mathém. de la Chaleur et Œuvres*.

RIEMANN-WEBER (1901). — *Die partiellen Differentialgleichungen der Mat. Phys.*, t. II.

J'ai mis à contribution ces diverses sources pour constituer le *Memento* qui suit.

A. — DÉBIT DE CHALEUR DONNÉ A LA FRONTIÈRE

Plan. — Une source plane *instantanée*, qui fournit à l'époque $t = 0$ la quantité de chaleur q par unité de surface, à un solide primitivement à la température uniforme Θ_0 — et cesse aussitôt — produit dans ce solide une distribution de température

$$\theta(x, t) - \theta_0 = q \frac{e^{-\frac{x^2 c_p}{4kt}}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c_p}{kt}}.$$

Point. — Une source ponctuelle (à l'origine) *instantanée*, qui fournit la quantité totale de chaleur Q et cesse aussitôt, produit dans tout le solide primitivement à Θ_0 une distribution isotrope de températures

$$\theta(r, t) - \theta_0 = \frac{Q}{c_p} \times \frac{e^{-\frac{r^2 c_p}{4kt}}}{8\pi^{3/2}} \left(\frac{c_p}{kt}\right)^{3/2}.$$

Sphère. — Une source sphérique (rayon R) *instantanée*, qui fournit la quantité totale de chaleur Q , et cesse aussitôt, produit dans tout le solide primitivement à Θ_0 , une distribution isotrope

$$\theta(r, t) - \theta_0 = \frac{Q}{c_p} \frac{e^{-\frac{(r-R)^2 c_p}{4kt}} - e^{-\frac{(r+R)^2 c_p}{4kt}}}{8\pi^{3/2} R r} \times \sqrt{\frac{c_p}{kt}}.$$

Grâce aux deux exponentielles, la température à l'origine ($r = 0$) reste finie et égale à

$$\theta_0 + \frac{Q}{8} \left(\frac{c_p}{\pi kt}\right)^{3/2} e^{-\frac{R^2 c_p}{4kt}}.$$

B. — TEMPÉRATURE DONNÉE A LA FRONTIÈRE

Plan. — Le plan $x = 0$, primitivement à la température 0 est porté brusquement à la température Θ_1 .

La température était 0 partout. La température devient

$$\theta = \Theta_1 \cdot \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} \sqrt{\frac{c_p}{k}} e^{-q^2} dq \right].$$

Renversons la température Θ_1 au bout du temps τ très court. Après ce renversement, la température à l'origine ($x = 0$) est redevenue zéro, et elle est partout

$$\theta = \Theta_1 e^{-\frac{x^2 c_p}{4kt}} \times \frac{x}{2} \sqrt{\frac{c_p}{kt}} \frac{\tau}{t}.$$

(forme obtenue d'une tout autre manière par W. THOMSON en 1855, t. II, p. 65.

On tire facilement de là, que si, dans le milieu indéfini à 0°, le plan $x = X$ est porté aux températures $\Theta_1(X, \tau)$ à partir du temps $\tau = 0$, la température d'un plan x quelconque, à l'époque t est

$$\theta(x, t) = \frac{|x - X|}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c_p}{k}} \int_0^t \Theta_1(X, \tau) e^{-\frac{c_p(x-X)^2}{4k(t-\tau)}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

C. — ÉTAT INITIAL DONNÉ

Plans. — La solution est due à LAPLACE (*Mém. sur divers points d'Analyse*).

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x + 2q \sqrt{\frac{kt}{c_p}}\right) e^{-q^2} dq.$$

L'état initial $\Theta(x, 0)$ est $F(x)$, comme on le vérifie facilement. On s'assure facilement aussi — en dérivant sous le signe $\int$ et intégrant par parties la dérivée par rapport au temps, — que l'équation aux dérivées partielles est satisfaite.

Espace indéfini du côté $x > 0$. — La température initiale n'est connue que du côté positif ; d'autre part, il est commode, pour le libre choix

de la condition frontière, de rendre constamment nulle la température à l'origine. C'est ce qu'on obtient en prenant $F(-x) = -F(x)$,

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[- \int_{-\infty}^x \sqrt{\frac{c_0}{kt}} F\left(x - 2q \sqrt{\frac{kt}{c_0}}\right) e^{-q^2} dq + \int_{-\frac{x}{2}\sqrt{\frac{c_0}{kt}}}^{\infty} F\left(x + 2q \sqrt{\frac{kt}{c_0}}\right) e^{-q^2} dq \right]$$

ou, ce qui revient au même :

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_0}{\pi kt}} \int_0^{\infty} F(\gamma, 0) \left[e^{-\frac{(x-\gamma)^2 c_0}{4kt}} - e^{-\frac{(x+\gamma)^2 c_0}{4kt}} \right] d\gamma.$$

Remarque. — Cette transformation de l'exposant, avec changement de la variable d'intégration (ou v. v.) est constamment utilisée pour reconnaître les valeurs limitées des intégrales, dans la théorie de la chaleur.

On passe sans difficulté de cette dernière forme au noyau N du mur homogène § 14.

Sphère. — La distribution isotrope ne fait connaître les températures initiales $F(\gamma, 0)$ que pour $r > 0$. On prendra donc, si l'espace a une étendue infinie

$$\theta = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{c_0}{\pi kt}} \int_0^{\infty} \gamma F(\gamma, 0) \left[e^{-\frac{(r-\gamma)^2 c_0}{4kt}} - e^{-\frac{(r+\gamma)^2 c_0}{4kt}} \right] d\gamma.$$

La température reste finie à l'origine, où il n'a y pas de source de chaleur.

Si la sphère est limitée par une surface de rayon R, l'espace intérieur ($0 \leq r \leq R$) est comparable au mur plan. D'où la forme de série pour le noyau relatif à l'état initial (§ 17, § 18).

(Deux conférences données à l'Institut H. Poincaré le 13 et 16 Mai 1929 et rédigées par M. Coulomb).