Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
Ann. I. H. Poincaré – PR 41 (2005) 461–478
ANNALES DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ
PROBABILITÉS ET STATISTIQUES
www.elsevier.com/locate/anihpb

Vervaat et Lévy

Sonia Fourati [a,b]

[a] *LMI de l'INSA de ROUEN, place Emile Blondel 76130 Mont St Aignan, France*
[b] *LPMA des Universités Paris VI et VII, 4, place Jussieu, case 188, 75252 Paris, cedex 05, France*

Reçu le 17 février 2004 ; reçu en forme révisée le 2 novembre 2004 ; accepté le 30 novembre 2004

Disponible sur Internet le 25 mars 2005

Abstract

Vervaat [Ann. Probab. 7 (1979) 141–149] has established a path transformation which gives a correspondence between the bridge and the excursion of a Brownian motion. Chaumont [Bull. Sci. Math. 123 (1997) 377–403] has partly extended this correspondence to the stable case and Miermont [Electron. J. Probab. 6 (14) (2001) 33] to the spectrally positive case. Using the "General Theory of Processes", we show easily the Vervaat correspondence for Lévy processes under the hypothesis of absolute continuity of the resolvent (which is called the ACC hypothesis of Silverstein). Before establishing this correspondence, we give the appropriate definition of the bridge and the excursion for these processes by using potential theory. More precisely, we show that they are elementary transformations of two "Kuznetsov measures".

We present this paper, in its content as well as in its spirit, as a tribute to the work of Paul-André Meyer.

MSC: Levy process; Bridges; Excursions

0. Introduction

Soit $(X_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ un pont Brownien. On pose $m = \inf_{0\leqslant t\leqslant 1} X_t$ et $\rho = \inf\{t;\ X_t = m\}$. Vervaat [12] a montré que le processus $Y := (X_{[t+\rho]} - m)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ (où $[t+\rho] = t + \rho \operatorname{mod}(1)$), est une excursion Brownienne normalisée. Chaumont [3] a généralisé une partie de cette correspondance aux processus stables. Plus récemment, Miermont [9] l'a fait pour les processus de Lévy sans sauts positifs. Nous allons généraliser ce résultat aux processus de Lévy satisfaisant l'hypothèse ACC de Silverstein, c'est-à-dire ceux dont la résolvante est absolument continue.

Pour cela nous allons définir des versions convenables de la loi du pont de Lévy, à durée de vie aléatoire, ainsi que de la mesure d'excursion positive d'un processus de Lévy. Ces deux mesures s'obtiennent très facilement à partir de mesures de Kuznetsov, c'est pourquoi nous commencons par rappeler la définition de ces dernières ainsi que d'autres éléments de la théorie générale des processus de Markov. Scandaleux non, pour un numéro spécial

Adresse e-mail : fourati@ccr.jussieu.fr (S. Fourati).

0246-0203/$ – see front matter
doi:10.1016/j.anihpb.2004.11.001

Meyer ? j'essaie de réparer l'affront en faisant référence aux volumes de « Probabilités et Potentiel » [4] et [5] pour plus de précisions.

1. Notations et rappels

Nous conseillons aux habitués de la théorie des processus de Markov de passer directement au Paragraphe 1.7.

1.1. Mesures de Kuznetsov

On désigne par $\widetilde{\Omega}$ l'espace des fonctions $\widetilde{w}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\delta\}$, ($\delta$ est le point cimetière), telles qu'il existe $\alpha \in [-\infty, +\infty[$ (temps de naissance) et $\beta \in]-\infty, +\infty]$ (temps de mort), avec $\alpha < \beta$, satisfaisant $\widetilde{w}(t) = \delta$ pour $t \in]-\infty, \alpha] \cup [\beta, \infty[$, $\widetilde{w}(t) \in \mathbb{R}$ pour $t \in]\alpha, \beta[$ et $\widetilde{w}$ est càd làg en tout point de $]\alpha, \beta[$. On note X le processus canonique $X_t(\widetilde{w}) = \widetilde{w}(t)$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ la tribu canonique sur $\widetilde{\Omega}$ et ζ la durée de vie ; $\zeta = \beta - \alpha$.

Soit $\{U(x, \mathrm{d}y);\ x \in \mathbb{R}\}$ un noyau potentiel sur $\mathbb{R}$, σ-fini et ν une mesure excessive pour U (toujours supposée σ-finie). D'après Kuznetsov [8], il existe une unique mesure Q sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ telle que l'on ait, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Q\left(\alpha < t < \beta, (X_s)_{s<t} \in \mathrm{d}\omega, X_t \in \mathrm{d}x, \int_t^\beta 1_{X_s \in \mathrm{d}y}\, \mathrm{d}s\right) = Q\big(\alpha < t, (X_s)_{s<t} \in \mathrm{d}\omega, X_t \in \mathrm{d}x\big) U(x, \mathrm{d}y)$$

et

$$Q(\alpha < t < \beta, X_t \in \mathrm{d}x) = \nu(\mathrm{d}x).$$

1.2. L'espace Ω des trajectoires indexées par $]0, \zeta[$

On note Ω le sous-ensemble de $\widetilde{\Omega}$ pour lequel le temps de naissance α est nul (et donc $\zeta = \beta$). On note $\mathcal{F}$ la tribu canonique, X son processus canonique, X^- le processus, défini sur $]0, \zeta[$, régularisé à gauche de X. On note encore θ_t et k_t les opérateurs de translation et de meurtre habituels définis sur Ω à valeurs dans Ω.

On introduit aussi l'opérateur $\hat{\theta}_t$ défini sur l'ensemble $\{w \in \Omega, \zeta(w) \geqslant t\}$, à valeurs dans Ω :

$$\hat{\theta}_t(w) = \big(X^-_{t-s}(w)\big)_{0<s<t}.$$

Remarquons que si $\zeta \geqslant t$ alors $\zeta \circ \hat{\theta}_t = t$. Enfin, on note $\widehat{w}$ la trajectoire retournée de w définie pour les trajectoires w de durée de vie finie :

$$\widehat{w}(t) = \big(X^-_{\zeta-s}(w)\big)_{0<s<\zeta}.$$

Par souci d'économie des lettres de l'alphabet, on notera, pour tout réel x, $U(x, \mathrm{d}w)$ au lieu du $P^x(\mathrm{d}w)$ habituel, la loi du processus de Markov de noyau potentiel $\{U(x, \mathrm{d}y),\ x \in \mathbb{R}\}$ et de loi initiale δ_x, la mesure de Dirac en x. On identifie $U(x, \mathrm{d}w)$ à une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ portée par l'ensemble des trajectoires $\{\omega \in \Omega; \lim_{s\to 0^+} X_s = x\}$. Avec ces notations, on a donc l'égalité de mesures suivante :

$$U\left(x, \int_0^\zeta 1_{X_s \in \mathrm{d}y}\, \mathrm{d}s\right) = U(x, \mathrm{d}y).$$

La famille de lois $\{U(x, \mathrm{d}w),\ x \in \mathbb{R}\}$ sera appelée noyau de transition.

1.3. Mesures markoviennes sur $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ ou $(\Omega, \mathcal{F})$

Les mesures de Kuznetsov que nous construirons dans la suite seront toutes portées par le sous ensemble $\{\alpha > -\infty\}$ de $\widetilde{\Omega}$ formé des trajectoires naissant en un temps fini. À une telle mesure de Kusnetsov, associée à un noyau potentiel U et à une mesure excessive ν, il correspond une unique mesure $\mathbf{Q}$ (σ-finie mais pas finie en général) sur l'espace Ω telle que

$$Q(\theta_\alpha \in \mathrm{d}w, \alpha \in \mathrm{d}t) = \mathbf{Q}(\mathrm{d}w) \cdot \mathrm{d}t.$$

Chacune des mesures Q et $\mathbf{Q}$ est déterminée par l'autre au moyen de l'identité ci-dessus. Par exemple, si ν est la mesure excessive $U(x, \mathrm{d}y)$, alors on a $\mathbf{Q}(\mathrm{d}w) = U(x, \mathrm{d}w)$. De manière générale, on a $\nu(\mathrm{d}y) = \mathbf{Q}(\int_0^\zeta 1_{X_t \in \mathrm{d}y}\, \mathrm{d}t)$. On dira que ν est la *mesure excessive de* $\mathbf{Q}$.

On remarquera que $\mathbf{Q}$ est entièrement caractérisée par sa mesure excessive ν et son noyau potentiel $\{U(x, \mathrm{d}y); x \in \mathbb{R}\}$ (ou son noyau de transition $\{U(x, \mathrm{d}w); x \in \mathbb{R}\}$ par l'identité :

$$\mathbf{Q}\left(\int_0^\zeta 1_{X_t \in \mathrm{d}x} 1_{\theta_t \in \mathrm{d}w}\, \mathrm{d}t\right) = \nu(\mathrm{d}x) U(x, \mathrm{d}w).$$

Une mesure $\mathbf{Q}$ qui vérifie cette identité pour un noyau de transition $\{U(x, \mathrm{d}w);\ x \in \mathbb{R}\}$ et une mesure excessive ν sera dite *markovienne*.

Remarquons que lorsque ν est une mesure potentielle, $\nu = \mu U$ pour une mesure μ, alors μ est la loi de la variable $\lim_{s \to 0^+} X_s$ sous $\mathbf{Q}$. La loi μ et le noyau potentiel U offrent alors une autre caractérisation de la mesure $\mathbf{Q}$, mais ce n'est pas toujours le cas.

En fait toutes les mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$ que nous rencontrerons dans la suite seront portées par l'ensemble des trajectoires admettant une limite réelle à droite de 0. On notera alors X_0 la variable $\lim_{s \to 0^+} X_s$. Ces mesures, sauf éventuellement la loi $\mathbf{P}$ introduite dans le Paragraphe 1.7, seront aussi portées par l'ensemble des trajectoires à durée de vie finie et admettant une limite réelle à gauche de ζ. On notera encore X_ζ^- cette limite. Mais la mesure ν ne sera pas en général une mesure potentielle de U ou de $\widehat{U}$.

Il nous arrivera d'associer à une mesure de Kusnetsov Q, sa mesure trace sur le sous-ensemble $\Omega_{[0]}$ de $\tilde{\Omega}$ formé des trajectoires qui sont en vie au temps 0, soit $\Omega_{[0]} := \{\alpha < 0 < \beta\}$ et

$$Q_{[0]}(\mathrm{d}w) := Q(\mathrm{d}w, \alpha < 0 < \beta).$$

Lorsque le temps de naissance α est fini (Q-ps) les deux mesures $Q_{[0]}$ et $\mathbf{Q}$ sont reliées par l'identité

$$Q_{[0]}(\theta_\alpha \in \mathrm{d}w, \alpha \in \mathrm{d}t) = \mathbf{Q}(\mathrm{d}w, \zeta > -t) 1_{t<0}\, \mathrm{d}t.$$

1.4. Retournement et dualité

Tous les couples (mesure excessive ν, noyau potentiel U) qu'on rencontrera dans la suite, admettent un noyau potentiel $\widehat{U}$ en dualité avec U relativement à la mesure ν, c'est à dire que l'égalité de mesures suivante est réalisée :

$$\nu(\mathrm{d}x) U(x, \mathrm{d}y) = \widehat{U}(y, \mathrm{d}x) \nu(\mathrm{d}y).$$

Si $\mathbf{Q}$ est la mesure markovienne de mesure excessive ν et de noyau potentiel U, on dira alors que $\widehat{U}$ est un co-noyau potentiel de $\mathbf{Q}$. On remarquera que la mesure ν est aussi excessive pour $\widehat{U}$ et le couple mesure excessive, co-noyau potentiel (ou co-noyau de transition) détermine entièrement la mesure $\mathbf{Q}$ grâce à l'identité :

$$\mathbf{Q}\left(\int_0^\zeta 1_{\hat{\theta}_t \in \mathrm{d}w} 1_{X_t \in \mathrm{d}x}\, \mathrm{d}t\right) = \widehat{U}(x, \mathrm{d}w) \nu(\mathrm{d}x).$$

Le triplet (noyau potentiel (ou de transition), mesure excessive, co-noyau potentiel (ou de transition)) fournit donc une caractérisation redondante de la mesure $\mathbf{Q}$. Dans la suite, on utilisera à plusieurs reprises l'affirmation suivante :

$\mathbf{Q}$ est une mesure markovienne de noyau potentiel U, de mesure excessive ν et de co-noyau potentiel $\widehat{U}$. Cette affirmation est équivalente à l'identité de mesures suivante :

$$\mathbf{Q}\left(\int_0^{\zeta} 1_{\hat{\theta}_t \in \mathrm{d}w_1} 1_{X_t \in \mathrm{d}x} 1_{\theta_t \in \mathrm{d}w_2}\, \mathrm{d}t\right) = \widehat{U}(x, \mathrm{d}w_1)\nu(\mathrm{d}x)U(x, \mathrm{d}w_2).$$

1.5. *Meurtre en un temps exponentiel indépendant*

Lorsqu'on tue le processus canonique en un temps indépendant, de loi exponentielle de paramètre λ, la mesure $\mathbf{Q}(\mathrm{d}w)$ est transformée en la mesure $\int_0^{+\infty} \mathbf{Q}(k_t \in \mathrm{d}w)\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Dans la suite, on notera cette dernière mesure $\mathbf{Q}(k_{\xi_\lambda} \in \mathrm{d}w)$. On remarquera que le noyau de transition U_λ, la mesure excessive ν_λ et le co-noyau de transition $\widehat{U}^\lambda$ de $\mathbf{Q}(k_{\xi_\lambda} \in \mathrm{d}w)$ sont reliés à ceux de $\mathbf{Q}$ par les relations suivantes : Le noyau $U_\lambda(x, \mathrm{d}w)$ est le noyau de transition associé à la résolvante $U_\lambda(x, \mathrm{d}y)$, ce qui donne :

$$U_\lambda(x, \mathrm{d}w) = U(x, k_{\xi_\lambda} \in \mathrm{d}w).$$

Le co-noyau est donné par l'identité :

$$\widehat{U}^\lambda(x, \mathrm{d}w) = \frac{\widehat{U}(x, \mathrm{d}w \cdot \mathrm{e}^{-\lambda\zeta})}{\widehat{U}(x, \mathrm{e}^{-\lambda\zeta})}.$$

Enfin, la fonction $x \to \widehat{U}(x, \mathrm{e}^{-\lambda\zeta})$ est une densité de la mesure ν_λ relativement à ν.

1.6. *h-transformation*

Nous utiliserons à plusieurs reprises la transformation de processus qui consiste à le tuer le long d'une « fonctionnelle additive brute » $A(\mathrm{d}t)$ (voir [4] Chapitre 15 et [5] Chapitre 18), ces mesures sont appelées mesures de la tribu du futur dans [7] ; Ce type de meurtre signifie qu'on passe d'une mesure markovienne $\mathbf{Q}$ à la mesure $\mathbf{Q}(\int_{]0,\zeta]} 1_{k_t \in \mathrm{d}w} A(\mathrm{d}t))$, qui est aussi markovienne. On rencontrera des fonctionnelles additives brutes $A(\mathrm{d}t)$ de trois types : [f désigne une fonction borelienne positive quelconque, définie sur $\mathbb{R}$, qu'on prolonge, comme toutes celles qu'on rencontrera dans la suite, en lui attribuant la valeur 0 en la valeur cimetière δ].

(a) $A(\mathrm{d}t) = f(X_t^-)\delta_\tau(\mathrm{d}t)$ où δ_τ est la mesure aléatoire (portée par $]0, \zeta]$) égale à la mesure de Dirac au « temps de retour τ » (on rencontrera les temps de retour ζ et $\zeta - \xi_\lambda$).
(b) Le temps local en 0 de X, $L^0(\mathrm{d}t)$.
(c) $A(\mathrm{d}t) = f(X_t^-)\,\mathrm{d}t$.

Pour cette transformation, le triplet (noyau potentiel, mesure excessive, co-noyau potentiel) est transformé de la manière suivante :

Le noyau-potentiel est le h-transformé du noyau U de départ, c'est le noyau U^h défini de la manière suivante :

$$U^h(x, \mathrm{d}y) = U(x, \mathrm{d}y)\frac{h(y)}{h(x)}$$

où h est la fonction, excessive pour U, définie par $h(x) = U(x, A(]0, \zeta]))$.

La mesure excessive est multipliée par la fonction h : $\nu^h(\mathrm{d}y) = h(y)\nu(\mathrm{d}y)$.

Le co-noyau $\widehat{U}$ est inchangé.

On peut rapprocher cette transformation de la mesure **Q** à sa transformation duale qui consiste à remplacer la mesure **Q** par la mesure $\mathbf{Q}(\int_{[0,\zeta[} 1_{\theta_s \in \mathrm{d}w} A(\mathrm{d}s))$ où cette fois A est une mesure aléatoire de la tribu optionnelle. La transformation du triplet (noyau potentiel, mesure excessive, co-noyau potentiel) est celle obtenue en intervertissant les rôles du noyau et du co-noyau dans la transformation précédente.

1.7. L'hypothèse ACC et quelques autres notations

On note **P** la loi d'un processus de Lévy issu de 0, ou d'un processus de Lévy issu de 0 et tué en un temps indépendant de loi exponentielle. Ce processus de Lévy ne variera pas dans la suite et les propriétés qui apparaitront dans les énoncés y feront référence. Par exemple, lorsqu'on dira « $]-\infty, 0[$ est régulier » ou « dans le cas transient » c'est de ce processus qu'on parlera. La première propriété signifie que $\inf\{t;\ X_t < 0\} = 0$ (**P**-ps). La seconde signifie que le noyau $U(0, \mathrm{d}y) = \mathbf{P}(\int_0^\zeta 1_{X_t \in \mathrm{d}y}\, \mathrm{d}t)$ est σ-fini. On remarquera que $U(0, \mathrm{d}y)$ est finie si et seulement si X meurt en un temps fini **P**-ps ; et il est σ-fini sans être fini si X dérive vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ (i.e. $\lim_{t\to+\infty} X_t = +\infty$, **P**-ps, ou $\lim_{t\to+\infty} X_t = -\infty$, **P**-ps, voir [2] Chapitre 1).

On note X^* le processus dual $X_t^* = -X_t$. L'exposant * désignera les objets correspondants pour le processus X^*.

On suppose dans toute la suite, que X vérifie la propriété ACC de Silverstein, c'est à dire que la résolvante $U_\lambda(0, \mathrm{d}y)$ (et le noyau-potentiel $U(0, \mathrm{d}y)$ dans le cas transient) est absoluement continue relativement à la mesure de Lebesgue. En particulier, cette hypothèse exclut les processus de Poisson composés puisque les mesures $U_\lambda(0, \mathrm{d}y)$ chargent dans ce cas le singleton $\{0\}$ d'une masse non nulle.

On rappelle (cf. [2] Chapitre 1) que sous cette hypothèse ACC, il existe une unique fonction, λ-excessive pour X^*, à valeurs dans $[0, +\infty]$, notée u_λ, qui soit une densité de la mesure $U_\lambda(0, \mathrm{d}y)$. Remarquer l'égalité $u^*(x) = u(-x)$.

On note $\mathbf{P}_\lambda$ la loi du processus de Lévy tué en un temps exponentiel indépendant. À titre d'exemple d'usage du vocabulaire et des notations adoptées ici nous donnons, sans démonstration, un résultat classique :

Proposition 1.1. *Pour tout λ strictement positif* (*pour tout λ positif ou nul dans le cas transient*)*, la loi $\mathbf{P}_\lambda$ a pour noyau potentiel le noyau*

$$U_\lambda(x, \mathrm{d}y) = u_\lambda(y - x)\, \mathrm{d}y$$

sa mesure excessive est :

$$u_\lambda(y)\, \mathrm{d}y$$

et son co-noyau potentiel est le noyau :

$$V^{*\lambda}(x, \mathrm{d}y) = \left[u_\lambda^*(y - x)\frac{u_\lambda(y)}{u_\lambda(x)}\right] \mathrm{d}y.$$

Remarque. La probabilité $\mathbf{P}_{\lambda+\mu}$ est la loi, sous $\mathbf{P}_\lambda$, du processus canonique tué en un temps indépendant de loi exponentielle de paramètre μ, autrement dit les mesures $\mathbf{P}_{\lambda+\mu}(\mathrm{d}w)$ et $\mathbf{P}_\lambda(k_{\xi_\mu} \in \mathrm{d}w)$ sont égales. On en déduit (voir le Paragraphe 1.5), les égalités suivantes :

$$V^{*(\lambda+\mu)}(x, \mathrm{d}w) = \frac{V^{*\lambda}(x, \mathrm{d}w \cdot \mathrm{e}^{-\mu\zeta})}{V^{*\lambda}(x, \mathrm{e}^{-\mu\zeta})} \quad \text{et} \quad V^{*\lambda}(x, \mathrm{e}^{-\mu\zeta}) = \frac{u_{\lambda+\mu}(x)}{u_\lambda(x)}.$$

Bien sûr, $V^\lambda(x, \mathrm{d}y)$ désignera le noyau potentiel :

$$V^\lambda(x, \mathrm{d}y) = \left[u_\lambda(y - x)\frac{u_\lambda^*(y)}{u_\lambda^*(x)}\right] \mathrm{d}y.$$

2. Le pont

Théorème 2.1. *Il existe une unique mesure* $\mathbf{Q}$ *sur* $(\Omega,\mathcal{F})$ *telle que pour tout* λ *strictement positif (et aussi pour* $\lambda=0$ *dans le cas transient), la mesure* $\mathbf{Q}(\mathrm{d}w\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\zeta})$ *soit markovienne, de noyau potentiel* V^{λ}*, de mesure excessive* $u_\lambda(x)u_\lambda^*(x)\,\mathrm{d}x$ *et de co-noyau potentiel* $V^{*\lambda}$.

Démonstration. On fixe λ réel strictement positif quelconque et on note : $\mathbf{Q}^\lambda(\mathrm{d}w):=\mathbf{Q}(\mathrm{d}w\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\zeta})$. La mesure $u_\lambda(x)\,\mathrm{d}x$ étant λ-excessive pour le processus de Lévy X, on en déduit facilement que la mesure $u_\lambda(x)u_\lambda^*(x)\,\mathrm{d}x$ est excessive pour le noyau potentiel V^λ. On peut donc associer sa mesure de Kuznetov Q^λ. D'autre part, $V^{*\lambda}$ est clairement en dualité avec V^λ relativement à la mesure $u_\lambda(x)u_\lambda^*(x)\,\mathrm{d}x$. Comme $\mathbf{P}_\lambda^*$ et $\mathbf{P}_\lambda$ sont des mesures de probabilité portées par l'ensemble des trajectoires naissant au temps 0, leurs co-noyaux respectifs, $V^\lambda(x,\mathrm{d}w)$ et $V^{\lambda *}(x,\mathrm{d}w)$, sont des mesures de probabilité portées par l'ensemble des trajectoires qui meurent en un temps fini [remarquer qu'elles meurent à la position 0], pour presque tout x. Ce sont respectivement les noyaux et co-noyaux sous Q^λ et la mesure excessive de Q^λ est absoluement continue. La mesure Q^λ est donc portée par l'ensemble des trajectoires naissant et mourant en des temps finis (et à la position 0).

On a vu (cf. Paragraphe 1.3) qu'on peut alors associer à Q^λ une mesure $\mathbf{Q}^\lambda$ sur $(\Omega,\mathcal{F})$ de telle sorte que l'égalité suivante soit vraie : $Q^\lambda(\theta_\alpha\in \mathrm{d}w,\alpha\in \mathrm{d}s)=\mathbf{Q}^\lambda(\mathrm{d}w)\cdot \mathrm{d}s$. La mesure $\mathbf{Q}^\lambda$ a la propriété de l'énoncé.

Reste à vérifier qu'on peut « recoller » la famille de mesures $(\mathbf{Q}^\lambda;\ \lambda>0)$ en une seule mesure $\mathbf{Q}$, de telle manière que pour tout λ, on ait :

$$\mathbf{Q}(\mathrm{d}w\cdot \mathrm{e}^{-\lambda\zeta})=\mathbf{Q}^\lambda(\mathrm{d}w).$$

On se convaincra facilement que cela découle du théorème de limite projective de Kolmogorov à partir de l'identité des mesures $\mathbf{Q}^{\lambda+\mu}(\mathrm{d}w)$ et $\mathbf{Q}^\lambda(\mathrm{d}w\,\mathrm{e}^{-\mu\zeta})$ pour tous λ,μ strictement positifs. Pour établir cette égalité, il suffit d'identifier les deux mesures suivantes

$$\mathbf{Q}^\lambda\left(\mathrm{e}^{-\mu\zeta}\int_0^\zeta 1_{\hat\theta_t\in \mathrm{d}w_1}1_{X_t\in \mathrm{d}x}1_{\hat\theta_t\in \mathrm{d}w_2}\right)$$

et

$$V^{*(\lambda+\mu)}(x,\mathrm{d}w_1)u_{\lambda+\mu}(x)u_{\lambda+\mu}^*(x)V^{\lambda+\mu}(x,\mathrm{d}w_2)\,\mathrm{d}x.$$

On obtient cette égalité de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^\lambda\left(\mathrm{e}^{-\mu\zeta}\int_0^\zeta 1_{\hat\theta_t\in \mathrm{d}w_1}1_{X_t\in \mathrm{d}x}1_{\theta_t\in \mathrm{d}w_2}\right)&=\mathbf{Q}^\lambda\left(\int_0^\zeta \mathrm{e}^{-\mu\cdot t}1_{\hat\theta_t\in \mathrm{d}w_1}1_{X_t\in \mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\mu\cdot(\zeta-t)}1_{\theta_t\in \mathrm{d}w_2}\right)\\&=\mathbf{Q}^\lambda\left(\int_0^\zeta \mathrm{e}^{-\mu\cdot\zeta\circ\hat\theta_t}1_{\hat\theta_t\in \mathrm{d}w_1}1_{X_t\in \mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\mu\cdot\zeta\circ\theta_t}1_{\theta_t\in \mathrm{d}w_2}\right)\\&=V^{*\lambda}(x,\mathrm{d}w_1\,\mathrm{e}^{-\mu\zeta})u_\lambda^*(x)u_\lambda(x)V^\lambda(x,\mathrm{d}w_2\,\mathrm{e}^{-\mu\zeta})\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Les identités suivantes, vues dans la remarque du paragraphe précédent :

$$V^{*(\lambda+\mu)}(x,\mathrm{d}w)=\frac{V^{*\lambda}(x,\mathrm{d}w\cdot \mathrm{e}^{-\mu\zeta})}{V^{*\lambda}(x,\mathrm{e}^{-\mu\zeta})}\quad \text{et}\quad V^{*\lambda}(x,\mathrm{e}^{-\mu\zeta})=\frac{u_{\lambda+\mu}(x)}{u_\lambda(x)}$$

et les identités duales permettent alors de conclure. □

Remarques. (1) $\mathbf{Q}^*(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}(\mathrm{d}\widehat{w}) = \mathbf{Q}(-\mathrm{d}w)$.

(2) Sous $\mathbf{Q}$, les trajectoires naissent à l'instant 0 à la position 0 et meurent en un temps fini à la position 0. [On a vu cette propriété pour la mesure Q^1 au cours de la démonstration, elle est donc encore vraie, par translation, pour la mesure $\mathbf{Q}^1$, et aussi pour $\mathbf{Q}$, puisque $\mathbf{Q}^1(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}(\mathrm{d}w\,\mathrm{e}^{-\zeta})$.]

On renvoie au paragraphe « longue digression » le lecteur qui voudrait se familiariser avec cette notion de pont et connaitre le lien avec les autres ponts de la littérature.

Voici une proposition dont nous aurons besoin dans la suite et qui donne une forme d'absolue continuité type (co-) Girsanov de $\mathbf{Q}^\lambda$ relativement à la mesure $\mathbf{P}_\lambda$.

Proposition 2.2. *Pour tout réel strictement positif λ et pour toute variable aléatoire ξ_μ indépendante et de loi exponentielle de paramètre μ, la mesure $\mathbf{Q}^\lambda(k_{\zeta-\xi_\mu} \in \mathrm{d}w, \xi_\mu < \zeta)$ est absoluement continue relativement à $\mathbf{P}_\lambda(k_{\zeta-\xi_\mu} \in \mathrm{d}w, \xi_\mu < \zeta)$ et admet pour densité la variable aléatoire $u^*_\lambda(X_{\zeta-\xi_\mu})$.*

Démonstration. Pour identifier les deux mesures (évidemment markoviennes), $\mathbf{Q}^\lambda(k_{\zeta-\xi_\mu} \in \mathrm{d}w, \xi_\mu < \zeta)$ et $\mathbf{P}_\lambda(k_{\zeta-\xi_\mu} \in \mathrm{d}w, \xi_\mu < \zeta \cdot u^*(X_{\zeta-\xi_\mu}))$, on va comparer leurs co-noyaux et leurs lois finales. La première mesure, notons-la $\widetilde{\mathbf{Q}}$, est obtenue à partir de $\mathbf{Q}^\lambda$ en tuant le processus canonique le long de la « fonctionnelle additive brute » $\delta_{\zeta-\xi_\mu}(\mathrm{d}t)$. Elle admet donc pour co-noyau potentiel le même que celui de $\mathbf{Q}^\lambda$ (voir Paragraphe 1.6), c'est à dire $V^{*\lambda}(x, \mathrm{d}y)$. La seconde, notons-la $\widetilde{\mathbf{P}}$, est obtenue à partir de $\mathbf{P}_\lambda$ en tuant le processus canonique le long de la fonctionnelle additive brute $u^*_\lambda(X^-_t) \cdot \delta_{\zeta-\xi_\mu}(\mathrm{d}t)$, elle a donc même co-noyau que $\mathbf{P}_\lambda$, c'est à dire encore $V^{*\lambda}(x, \mathrm{d}y)$. Reste à identifier les deux lois finales. Calculons la loi finale sous $\widetilde{\mathbf{Q}}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{Q}}(X^-_\zeta \in \mathrm{d}x) &= \mathbf{Q}^\lambda\left(\int_0^\zeta 1_{X_s\in \mathrm{d}x}\,\mu \cdot \mathrm{e}^{-\mu\zeta\circ\hat\theta_s}\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \mu\mathbf{Q}^\lambda\left(\int_0^\zeta 1_{X_s\in \mathrm{d}x}\,V^{\lambda *}(X_s, \mathrm{e}^{-\mu\zeta})\,\mathrm{d}s\right) = \mu\frac{u_{\lambda+\mu}(x)}{u_\lambda(x)}\mathbf{Q}^\lambda\left(\int_0^\zeta 1_{X_s\in \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \mu\cdot u_{\lambda+\mu}(x)u^*_\lambda(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

La cinquième égalité vient de l'identité $V^{\lambda *}(x, \mathrm{e}^{-\mu\zeta}) = u_{\lambda+\mu}(x)/u_\lambda(x)$ vue dans la remarque du paragraphe précédent. Calculons loi finale de $\widetilde{\mathbf{P}}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}}(X^-_\zeta \in \mathrm{d}x) &= u^*_\lambda(x)\mathbf{P}_\lambda(X_{\zeta-\xi_\mu} \in \mathrm{d}x, \xi_\mu < \zeta) = u^*_\lambda(x)\mathbf{P}(\xi_\mu < \zeta)\mathbf{P}(X_{\xi_{\mu+\lambda}} \in \mathrm{d}y) \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot u^*_\lambda(x)\cdot(\lambda+\mu)\cdot u_{\lambda+\mu}(x)\,\mathrm{d}x = \mu\cdot u^*_\lambda(x)u_{\lambda+\mu}(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

La deuxième égalité provient de l'absence de mémoire de la loi exponentielle. □

3. L'excursion positive

Nous renvoyons à [2] (Chapitre 6) pour les détails sur les objets et les résultats préliminaires que nous introduisons maintenant. L'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ étant muni de la probabilité $\mathbf{P}$, on note I le processus minimum passé ($I_t := \inf\{X_s;\ s \leqslant t\}$). C'est un processus défini sur l'intervalle $[0, \zeta[$, comme X. Il est bien connu que le processus $X - I$ est fortement markovien. On note L un temps local en 0 de ce processus : c'est une fonctionnelle additive du processus $X - I$, portée par l'ensemble $\{t \in [0, \zeta[;\ X_t - I_t = 0\}$. Elle est définie à une constante multiplicative près. Si cet ensemble est discret, (c'est le cas lorsque $]-\infty, 0[$ n'est pas régulier), L désigne la somme des masses de Dirac sur chaque élément de cet ensemble (multipliée par une constante strictement positive quelconque). La célèbre factorisation de Wiener–Hopf nous donne, pour une constante strictement positive c dépendant du temps local L choisi, l'égalité suivante ($S_t = \sup\{X_s;\ s \leqslant t\}$) :

$$\mathbf{P}\Biggl(\int\limits_{[0,\zeta[} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uI_t} L(\mathrm{d}t)\Biggr) \cdot \mathbf{P}\Biggl(\int\limits_{[0,\zeta[} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uS_t} L^*(\mathrm{d}t)\Biggr) = c \int\limits_0^{+\infty} \mathbf{P}\bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}uX_t}\bigr)\,\mathrm{d}t.$$

On remarquera l'égalité $L^*(w, \mathrm{d}t) = L(-w, \mathrm{d}t)$. On suppose dans la suite que $c = 1$, ce qu'on peut toujours faire quitte à remplacer L par$L/\sqrt{c}$ et L^* par $L^*/\sqrt{c}$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert complémentaire, dans $]0, \zeta[$, de l'adhérence de l'ensemble $\{t \in [0, \zeta[;\ X_t - I_t = 0\}$. Les mesures $N(\mathrm{d}w)$ et $H^*(\mathrm{d}y)$ sont les mesures, sur Ω et sur $\mathbb{R}_+$ respectivement, déterminées par les équations suivantes :

$$H^*(\mathrm{d}y) = \mathbf{P}\Biggl(\int\limits_{[0,\zeta[} 1_{-I_t \in \mathrm{d}y} L(\mathrm{d}t)\Biggr),$$

$$\mathbf{P}\Biggl(\sum_{]g,d[\in\mathcal{C}} 1_{-I_g \in \mathrm{d}y} 1_{(X_{g+s} - I_g)_{0<s<d-g} \in \mathrm{d}w}\Biggr) = N(\mathrm{d}w) H^*(\mathrm{d}y).$$

Cette identité, alliée à celle de la factorisation de Wiener–Hopf citée plus haut permet d'obtenir l'égalité des mesures suivante :

$$N\Biggl(\int\limits_0^{\zeta} 1_{X_t \in \mathrm{d}y}\,\mathrm{d}t\Biggr) = H(\mathrm{d}y).$$

Si X meurt en un temps fini ou s'il dérive vers $+\infty$, alors $\mathcal{C}$ a une dernière composante $]\rho, \zeta[$. Le temps ρ est un temps où X ou X^- vaut sa valeur minimale. Comme le processus de Poisson composé est exclus, cet instant est unique (voir [2] Chapitre 6). On remarquera aussi que $m = X_\rho$ si $]0, +\infty[$ est régulier et $m = X^-_\rho$ si $]-\infty, 0[$ est régulier.

On note U^0 le noyau potentiel du processus obtenu en tuant le processus de Lévy X au temps T_0 de son premier passage en dessous de 0 ($T_0 = \inf\{t > 0;\ X_t < 0\}$).

Lemme 3.1 (Silverstein).

(1) *La mesure $H(\mathrm{d}y)$ est absoluement continue relativement à la mesure de Lebesgue et on peut choisir pour densité une fonction excessive h de U^{0*}.*
(2) *Le noyau potentiel de N est U^0, sa mesure excessive est $H(\mathrm{d}y)$ et son co-noyau potentiel est le suivant* :

$$V_+^*(x, \mathrm{d}y) = U^{0*}(x, \mathrm{d}y)\frac{h(y)}{h(x)}.$$

(3) *Si X meurt en un temps fini ou s'il dérive vers $+\infty$, alors V_+^* est aussi le co-noyau potentiel de la loi de $(X_{t+\rho} - m)_{t>0}$.*

Démonstration. Par souci de complétion nous donnons un plan de démonstration. La solution de l'exercice donné au lecteur consciencieux est dans Silverstein [11]. Néanmoins, il pourra remarquer la simplification qu'apporte la factorisation de Wiener–Hopf.

(a) On obtient facilement le noyau potentiel de la mesure N de la manière suivante : Pour un $\epsilon > 0$ fixé quelconque, on prend le temps d'arrêt $T = \inf\{t;\ t - g_t > \epsilon\}$ (où $g_t = \sup\{s \in [0, t[;\ X_s - I_s = 0\}$). On identifie la loi sous $\mathbf{P}(\mathrm{d}w|T < +\infty)$ du processus $(X_{T+s} - I_T)_{s>0}$ tué au premier temps où il devient négatif, avec la mesure $N((X_{s+\epsilon})_{s>0} \in \mathrm{d}w|\zeta > \epsilon)$. La propriété de Lévy de X donne clairement que la loi du premier processus a le même noyau potentiel que $(X_t)_{0<t<T_0}$, c'est à dire U^0. Le noyau U^0 est donc aussi le noyau potentiel de la loi du second. Un argument de recollement permet alors d'en déduire que U^0 est encore le noyau potentiel de la mesure markoviennne N.

(b) Le fait que la résolvante, $U_\lambda(x, \mathrm{d}y) = u_\lambda(y - x)\,\mathrm{d}y$, soit absoluement continu, donne facilement que le noyau $U^0(x, \mathrm{d}y)$ l'est aussi. En utilisant les temps d'arrêt T puis l'argument de recollement vu dans la partie (a), on en déduit aisemment que la mesure excessive de N, c'est à dire $H(\mathrm{d}y)$ est encore absolument continue.

(c) Déterminons maintenant le co-noyau potentiel de N. Notons h une densité de la mesure $H(\mathrm{d}y)$ et h^* la densité duale, on montre facilement l'égalité suivante :

$$U^0(x, \mathrm{d}y) = \left(\int_0^{+\infty} h(x - z)h^*(y - z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y.$$

Cette identité met en évidence la dualité des noyaux $U^{0*}(y, \mathrm{d}x)\frac{h(x)}{h(y)}$ est du noyau $U^0(x, \mathrm{d}y)$ relativement à la mesure $h(y)\,\mathrm{d}y$, qui est la mesure excessive de N. On en déduit d'une part, de manière très classique en théorie du potentiel que, quitte à changer de densité h, on peut choisir h excessive pour le noyau-potentiel U^{0*} et que d'autre part, le noyau $U^{0*}(y, \mathrm{d}x)\frac{h(x)}{h(y)}$ est le co-noyau de la mesure N (voir Paragraphe 1.4).

(d) Reste à établir le point (3) du lemme. Il suffit pour cela de remarquer que la loi de $(X_{t+\rho} - m)_{t>0}$ est une h-transformation de $N(\mathrm{d}w)$ (ce qui est d'ailleurs bien connu, son noyau de transition est celui de $(X_t)_{0<t<T_0}$ conditionné par l'évènement $\{T_0 = +\infty\}$). Son co-noyau est donc le même que celui de N (voir Paragraphe 1.7). □

On note bien sûr

$$V_+(x, \mathrm{d}y) = U^0(x, \mathrm{d}y)\frac{h^*(y)}{h^*(x)}.$$

L'énoncé qui suit ressemble fort au théorème [7] de Silverstein.

Théorème 3.2. *Il existe une unique mesure $\mathbf{Q}^+$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ de noyau potentiel V_+, de mesure excessive $h(y)h^*(y)\,\mathrm{d}y$ et de co-noyau potentiel V_+^*.*

Démonstration. La mesure excessive de N, $h(y)\,\mathrm{d}y$, est une mesure excessive pour le noyau potentiel de N, U^0. De cela, et de l'égalité de définition de V_+ ci-dessus, on déduit que la mesure $h(y)h^*(y)\,\mathrm{d}y$ est excessive pour le noyau V_+. En associant la mesure de Kusnetsov correspondant à la mesure excessive $h(y)h^*(y)\,\mathrm{d}y$ et au noyau V_+, puis en la translatant par son temps de naissance α, on obtient la mesure $\mathbf{Q}^+$ (cf. Paragraphes 1.1 et 1.3). □

Remarques. (1) $\mathbf{Q}^{+*}(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}^+(\mathrm{d}\widehat{w})$.

(2) La mesure $\mathbf{Q}^+$ est portée par les trajectoires à valeurs strictement positives sur leur intervalle de vie ouvert $]0, \zeta[$. Si $]0, +\infty[$ est régulier alors les trajectoires naissent à la position 0 ($\mathbf{Q}^+$-ps) et si $]-\infty, 0[$ est régulier alors elles meurent à la position 0 ($\mathbf{Q}^+$-ps).

On établit ces deux dernières assertions de la manière suivante : On prouve d'abord facilement que si $]0, +\infty[$ est régulier alors la mesure N est portée par l'ensemble des trajectoires naissant en la position 0. Les mesures de probabilités $V_+^*(x, \mathrm{d}w)$ forment le co-noyau de transition de N, elles sont donc portées (pour $h(x)\,\mathrm{d}x$ presque tout x au moins), par l'ensemble des trajectoires mourant à la position 0. Comme la mesure $\mathbf{Q}^+$ a le même co-noyau potentiel que N et une mesure excessive absoluement continue par rapport à celle de N, les trajectoires naissent à la position 0 aussi sous $\mathbf{Q}^+$. Par dualité, on obtient que, si $]-\infty, 0[$ est régulier alors, sous $\mathbf{Q}^+$, les trajectoires meurent à la position 0.

Pour le calcul des lois initiales et finales sous $\mathbf{Q}^+$ dans les autres cas, nous renvoyons au paragraphe « longue digression ».

(3) Chaumont [3] a construit cette mesure d'excursion « conditionnée à mourir à l'instant t » dans le cas stable.

Pour tout $\lambda > 0$, on note $\mathbf{Q}^{\lambda+}$ la mesure obtenue à la place de $\mathbf{Q}^+$ lorsqu'on remplace la loi $\mathbf{P}$ par $\mathbf{P}_\lambda$.

Proposition 3.3. *Pour tout $\lambda > 0$, les mesures $\mathbf{Q}^{\lambda+}(\mathrm{d}w)$ et $\mathbf{Q}^+(\mathrm{d}w\,\mathrm{e}^{-\lambda\zeta})$ sont égales.*

Démonstration. Il est clair que la mesure d'excursion N_λ, obtenue à la place de N lorsqu'on remplace $\mathbf{P}$ par $\mathbf{P}_\lambda$, est la loi du processus canonique X sous N tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre λ. De même, la fonction h^* est remplacée par la fonction h^*_λ, excessive pour le noyau potentiel du processus $(X_t)_{0<t<T_0}$ sous $\mathbf{P}_\lambda$ et telle que la mesure $h^*(y)\,\mathrm{d}y$ vérifie les égalités :

$$h^*_\lambda(y)\,\mathrm{d}y = \mathbf{P}_\lambda\left(\int_0^\zeta 1_{-I_t\in\mathrm{d}y} L(\mathrm{d}t)\right) = \mathbf{P}\left(\int_0^\zeta \mathrm{e}^{-\lambda t} 1_{-I_t\in\mathrm{d}y} L(\mathrm{d}t)\right).$$

On déduit alors facilement du Paragraphe 1.5 l'expression du co-noyau de N_λ, $V^{*\lambda}_+$ en fonction de V^*_+ et par dualité l'expression de V^λ_+ en fonction de V_+ :

$$V^{*\lambda}_+(x,\mathrm{d}w) = \frac{V^*_+(x,\mathrm{d}w\,\mathrm{e}^{-\lambda\zeta})}{V^*_+(x,\mathrm{e}^{-\lambda\zeta})}, \qquad V^*_+(x,\mathrm{e}^{-\lambda\zeta}) = \frac{h_\lambda(x)}{h(x)},$$
$$V^{\lambda}_+(x,\mathrm{d}w) = \frac{V_+(x,\mathrm{d}w\,\mathrm{e}^{-\lambda\zeta})}{V_+(x,\mathrm{e}^{-\lambda\zeta})}, \qquad V_+(x,\mathrm{e}^{-\lambda\zeta}) = \frac{h^*_\lambda(x)}{h^*(x)}.$$

On montre ensuite l'égalité des mesures markoviennes $\mathbf{Q}^{\lambda+}(\mathrm{d}w)$ et $\mathbf{Q}^+(\mathrm{d}w\,\mathrm{e}^{-\lambda\zeta})$ en identifiant leurs noyaux, co-noyaux et mesures excessives (comme dans la démonstration du Théorème 2.1). □

4. La transformation de Vervaat

La transformée de Vervaat d'une trajectoire w, qu'on note $\phi(w)$, est définie pour les trajectoires naissant à l'instant 0 et mourant en un temps fini et pour lesquels il existe un unique temps (noté ρ) pour lequel le processus X ou X^- vaut sa valeur minimale (notée m). Cette transformation ϕ prend ses valeurs dans l'ensemble $\Omega_{[0]}$ des trajectoires en vie au temps 0, elle est caractérisée comme suit (Fig. 1) :

$$X_t(\phi) = X_{\zeta+t} - m \quad \text{si } \rho - \zeta < t < 0,$$
$$X_t(\phi) = X_t - m \quad \text{si } 0 < t < \rho,$$
$$X_t(\phi) = \delta \quad \text{si } t \notin]\rho - \zeta, \rho[.$$

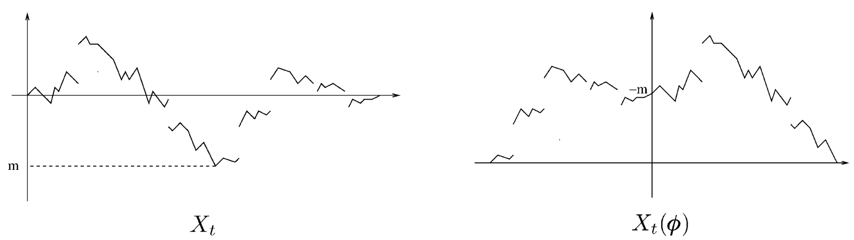

Fig. 1.

Rappelons (voir Paragraphe 1.3) que les mesures $Q^+_{[0]}$ et $\mathbf{Q}^+$ se déduisent l'une de l'autre par l'identité : $Q^+_{[0]}(\theta_\alpha \in \mathrm{d}w, \alpha \in \mathrm{d}t) = \mathbf{Q}^+(\mathrm{d}w, \zeta > -t)1_{t<0}\,\mathrm{d}t$. D'autre part, on a vu au paragraphe précédent que, sous $\mathbf{P}_\lambda$, l'instant ρ où X ou X^- prend sa valeur minimale est unique, la Proposition 2.2 permet d'en déduire que c'est encore vraie sous $\mathbf{Q}^\lambda$ et donc sous $\mathbf{Q}$. La fonction ϕ est donc bien définie $\mathbf{Q}$-ps. Voici l'énoncé de la correspondance de Vervaat :

Théorème 4.1. *Les mesures $\mathbf{Q} \circ \phi$ et $Q^+_{[0]}$ sont égales et on a la correspondance suivante entre les mesures $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}^+$:*

$$\mathbf{Q}\big((X_s - m)_{0<s<\rho} \in \mathrm{d}w_1, -m \in \mathrm{d}x, (X_{s+\rho} - m)_{0<s<\zeta-\rho} \in \mathrm{d}w_2\big)$$
$$= \mathbf{Q}^+\left(\int_0^\zeta 1_{(X_s)_{0<s<u} \in \mathrm{d}w_2} 1_{X_u \in \mathrm{d}x} 1_{(X_{s+u})_{0<s<t-u} \in \mathrm{d}w_1}\,\mathrm{d}u\right).$$

La preuve de ce théorème s'appuie sur les résultats préliminaires qui suivent.

4.1. Résultats préliminaires

Proposition 4.2. *Sous $\mathbf{P}_1$, les processus post-minimum $(X_{s+\rho})_{s>0}$ et pré-minimum $(X_s)_{0<s<\rho}$ sont conditionnellement indépendants sachant la valeur du minimum m et le noyau $\{V_1^+(x, \mathrm{d}w);\ x \in]0, +\infty[\}$ est une loi conditionnelle du processus $(X_t - m)_{0<t<\rho}$ sachant $-m$.*

Démonstration. L'indépendance conditionnelle des processus post-minimum et pré-minimum est un résultat bien connu dû à Millar [10] (voir aussi [2] Chapitre 6). Pour caractériser la loi conditionnelle $\mathbf{P}_1((X_t - m)_{0<t<\rho} \in \mathrm{d}w| - m)$, on prend la (co)-propriété de Markov forte en ζ du processus $(X_{\rho+t} - m)_{t>0}$ en utilisant l'assertion (3) du Lemme 3.1 :

$$\mathbf{P}_1\big((X_{\rho+t} - m)_{t>0} \in \mathrm{d}w|X^-_\zeta - m\big) = V_1^{+*}(X^-_\zeta - m, \mathrm{d}w).$$

En utilisant le fait que $(X^-_\zeta - X^-_{\zeta-t})_{t>0}$ a même loi que X sous $\mathbf{P}_1$, on en déduit le (co)-résultat cherché. □

Rappels brefs de théorie générale des processus. La rédaction de cette partie prend à la lettre la conviction (le voeu ?) de Paul-André Meyer qui, parlant de la TGP, dit : « Ces travaux sont destinés à rester, j'en suis persuadé, et de la meilleure manière qui soit : en devenant des « trivialités », que l'on utilise comme on respire ». Pour les asthmatiques, on renvoie à [7] où l'on trouvera un résumé un peu plus détaillé de ce dont on a besoin ici. Rappelons que la tribu co-prévisible $\widehat{\mathcal{P}}$ (cf. Azéma [1]) est la tribu sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ engendrée par les processus de la forme $t \mapsto X_{s+t}$ où s est un réel positif quelconque. La tribu co-optionnelle $\widehat{\mathcal{O}}$ est engendrée par le processus càg làd dont le régularisé à droite est dans $\widehat{\mathcal{P}}$. Etant donnée une mesure $\mathbf{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, portée par l'ensemble des trajectoires de durée de vie finie et telle que la mesure $\mathbf{Q}(\int_0^\zeta 1_{X_t \in \mathrm{d}y}\,\mathrm{d}t)$ soit σ-finie, on peut définir un opérateur de projection duale sur $\widehat{\mathcal{O}}$ (resp. sur $\widehat{\mathcal{P}}$) agissant sur les mesures aléatoires σ-finie et à valeurs dans les mesures aléatoires de $\widehat{\mathcal{O}}$ (resp. de $\widehat{\mathcal{P}}$). Les mesures aléatoires de $\widehat{\mathcal{O}}$ sont habituellement appelées « fonctionnelles additives brutes » et celles de $\widehat{\mathcal{P}}$ les « fonctionnelles additives brutes co-prévisibles », on pourra revenir au Paragraphe 1.6 pour des exemples de telles mesures. On notera $A^{\widehat{\mathcal{O}}}$ (resp. $A^{\widehat{\mathcal{P}}}$) la projection duale de la mesure aléatoire A sur $\widehat{\mathcal{O}}$ (resp. sur $\widehat{\mathcal{P}}$). On reprend la notation L du temps local en 0 du processus $X - I$ et on définit la mesure aléatoire suivante :

$$\hat{L}(w, \mathrm{d}t) = L\big(\widehat{w}, \zeta(w) - \mathrm{d}t\big).$$

On remarquera que le fait que L soit portée par l'ensemble $\{t \in [0,\zeta[;\ X_t - I_t = 0\}$ implique que $\hat{L}(w, \mathrm{d}t)$ est portée par l'ensemble $\{t \in]0,\zeta];\ X_t^- - J_t^- = 0\}$, où J désigne le processus des minimums futurs : $J_t = \inf\{X_s;\ s > t\}$ et J^- son processus régularisé à gauche. On constatera encore que l'instant du minimum ρ vérifie $X_\rho^- = J_\rho^- = m$ si $]-\infty, 0[$ est régulier et $X_\rho = J_\rho = m$ si $]0, +\infty[$ est régulier. La mesure aléatoire $\hat{L}(\mathrm{d}t)$ est toujours une mesure aléatoire de $\widehat{\mathcal{O}}$ et même de $\widehat{\mathcal{P}}$ si $]0, +\infty[$ est régulier.

Lemme 4.3. *Si* $]0, +\infty[$ *est régulier et sous* $\mathbf{P}_1$*, on a* :

$$L^{\widehat{\mathcal{P}}}(\mathrm{d}t) = \frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)}\,\mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad \delta_\rho^{\widehat{\mathcal{P}}}(\mathrm{d}t) = \frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)} \cdot \hat{L}(\mathrm{d}t).$$

Si $]-\infty, 0[$ *est régulier et sous* $\mathbf{P}_1$*, on a* :

$$L^{\widehat{\mathcal{O}}}(\mathrm{d}t) = \frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)}\,\mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad \delta_\rho^{\widehat{\mathcal{O}}}(\mathrm{d}t) = \frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)} \cdot \hat{L}(\mathrm{d}t).$$

Démonstration. Supposons d'abord $]0, +\infty[$ régulier. On montre que la propriété de Markov forte de X implique que les projections, et projections duales, sur les tribus optionnelles habituelles $\mathcal{O}$ et $\widehat{\mathcal{P}}$ commutent et donc en particulier que la projection duale $L^{\widehat{\mathcal{P}}}$ de L, qui est une mesure aléatoire de $\mathcal{O}$, est une mesure de $\mathcal{O}$ et de $\widehat{\mathcal{P}}$, autrement dit c'est une fonctionnelle additive de X. Pour montrer que cette fontionnelle additive est égale à $\frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)}\,\mathrm{d}t$, il suffit que, pour toute fonction mesurable positive f, les termes $\mathbf{P}_1[\int_0^\zeta f(X_t) L^{\widehat{\mathcal{P}}}(\mathrm{d}t)]$ et $\mathbf{P}_1[\int_0^\zeta f(X_t) \frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)}\,\mathrm{d}t]$ soient égaux.

Le processus $f(X)$ est un processus $\widehat{\mathcal{P}}$-mesurable, le premier terme vaut donc : $\mathbf{P}_1[\int_0^\zeta f(X_t) L(\mathrm{d}t)]$, qui vaut encore $\int_0^\infty f(-y) h_1^*(y)\,\mathrm{d}y$ par définition de la mesure $h_1^*(y)\,\mathrm{d}y$. Le second terme vaut aussi cela par définition du noyau potentiel U_1 et de la fonction u_1 $(U_1(0, \mathrm{d}y) = u_1(y)\,\mathrm{d}y)$.

La deuxième assertion du lemme est une égalité entre deux mesures aléatoires qui sont deux fontionnelles additives du processus de Markov (X, J). En effet, ρ étant un temps d'arrêt de la tribu $\mathcal{O} \vee \sigma(J)$, $(\rho = \inf\{t;\ X_t = J_t\})$, qui décrit le passé du processus (X, J) (voir [7]), la projection duale sur la tribu $\widehat{\mathcal{P}}$ est donc une fonctionnnelle additive du processus de Markov (X, J) et il est évident que la seconde mesure aléatoire en est une aussi. De plus, ces deux mesures aléatoires sont toutes deux portées par l'ensemble aléatoire $\{t,\ X_t = J_t\}$, elles sont donc confondues si et seulement si pour toute fonction mesurable positive f, les termes $\mathbf{P}_1[\int_0^\zeta f(X_t)(\delta_\rho)^{\check{\mathcal{P}}}(\mathrm{d}t)]$ et $\mathbf{P}_1[\int_0^\zeta f(X_t)\frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)}\hat{L}(\mathrm{d}t)]$ sont égaux. Le processus $f(X)$ est $\mathcal{O}$-mesurable, cette égalité est donc vérifiée dès que les projections duales sur $\mathcal{O}$ des mesures aléatoires $\delta_\rho^{\widehat{\mathcal{P}}}(\mathrm{d}t)$ et $\frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)}\hat{L}(\mathrm{d}t)$ sont confondues. Calculons la première projection duale : Les projections duales sur les tribus $\widehat{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{O}$ commutent (cf. [7]) et la projection duale de δ_ρ sur $\mathcal{O}$ est $\mathbf{P}_1(L[0,\zeta[)^{-1} \cdot L$ (cette dernière projection duale est bien connue et on peut la réobtenir de la même manière que les autres). On déduit de cela l'égalité : $(\delta_\rho^{\widehat{\mathcal{P}}})^{\mathcal{O}} = \mathbf{P}_1(L[0,\zeta[)^{-1} \cdot L^{\widehat{\mathcal{P}}}$ et on vient calculer $L^{\widehat{\mathcal{P}}}$. On a donc :

$$(\delta_\rho^{\widehat{\mathcal{P}}})^{\mathcal{O}} = \mathbf{P}_1\big(L[0,\zeta[\big)^{-1} \cdot \frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour la seconde projection duale, on remarque d'abord que $\hat{L}$ est non seulement une mesure de la tribu $\widehat{\mathcal{P}}$, mais de la tribu plus petite engendrée par les processus $t \mapsto X_{s+t} - X_t$ où s parcourt la demi-droite des réels positifs. La propriété d'accroissements indépendants de X implique que la projection duale sur $\mathcal{O}$ de $\hat{L}$ (cf. [7]) est nécessairement la mesure $\mathbf{P}_1(\hat{L}[0,\zeta[) \cdot 1_{]0,\zeta[}\,\mathrm{d}t$.

D'autre part, le fait que $(X^-_\zeta - X^-_{\zeta-t})$ ait même loi que X sous $\mathbf{P}_1$, donne l'égalité $\mathbf{P}_1(\hat{L}[0,\zeta[) = \mathbf{P}_1(L^*[0,\zeta[)$. D'autre part, la factorisation de Wiener–Hopf sous $\mathbf{P}_1$ donne l'égalité :

$$\mathbf{P}_1\left(\int_{[0,\zeta[} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uI_t} L(\mathrm{d}t)\right) \cdot \mathbf{P}_1\left(\int_{[0,\zeta[} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uS_t} L^*(\mathrm{d}t)\right) = \mathbf{P}_1\left(\int_{[0,\zeta[} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uX_t}\,\mathrm{d}t\right).$$

Cette égalité donne, pour $u=0$, la suivante : $\mathbf{P}_1(L[0,\zeta[) \cdot \mathbf{P}_1(L^*[0,\zeta[) = 1$. On en déduit l'égalité suivante :

$$\hat{L}^{\mathcal{O}}(\mathrm{d}t) = \mathbf{P}_1\big(L[0,\zeta[\big)^{-1} 1_{]0,\zeta[}\,\mathrm{d}t.$$

En multipliant cette égalité par le processus $h_1^*(-X_t)/u_1(X_t)$, on en déduit l'identité des projections duales annoncées :

$$(\delta_\rho^{\widehat{\mathcal{P}}})^{\mathcal{O}} = \left[\frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)}\hat{L}(\mathrm{d}t)\right]^{\mathcal{O}}.$$

Lorsque $]-\infty,0[$ est régulier, il suffit de reprendre le raisonnement précédent en remplacant le processus (X,J) par son régularisé à gauche (X^-,J^-), la tribu optionnelle $\mathcal{O}$ par la tribu prévisible $\mathcal{P}$, la tribu co-prévisible $\widehat{\mathcal{P}}$, par la tribu co-optionnelle $\widehat{\mathcal{O}}$. □

Corollaire 4.4. *Les propriétés de la Proposition* 4.2 *et du Lemme* 4.3 *restent vraies sous la mesure* $\mathbf{Q}^1$.

Démonstration. Le lecteur se convaincra facilement que la Proposition 2.2 d'absolue continuité de $\mathbf{Q}^1(k_{\zeta-\xi_\mu} \in \mathrm{d}w, \xi_\mu < \zeta)$ relativement à $\mathbf{P}_1(k_{\zeta-\xi_\mu} \in \mathrm{d}w, \xi_\mu < \zeta)$ avec une densité appartenant à la tribu de queue $\sigma(X^-_{\zeta-\xi_\mu})$ permet de passer de manière standard des propriétés précédentes sous la loi $\mathbf{P}_1$ aux mêmes sous la mesure $\mathbf{Q}^1$. □

Corollaire 4.5. $\mathbf{Q}^1(-m \in \mathrm{d}y) = h_1(y)h_1^*(y)\,\mathrm{d}y$.

Démonstration. Supposons que $]0,+\infty[$ est régulier. D'après le corollaire précédent, on a sous $\mathbf{Q}^1$:

$$\delta_\rho^{\widehat{\mathcal{P}}}(\mathrm{d}t) = \frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)} \cdot \hat{L}(\mathrm{d}t).$$

D'autre part, en utilisant l'identité des mesures $\mathbf{Q}^{1*} = \hat{\mathbf{Q}}^1$, on obtient à partir de l'identité : $L^{\widehat{\mathcal{O}}}(\mathrm{d}t) = \frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)} \cdot \mathrm{d}t$, la suivante :

$$\hat{L}^{\mathcal{O}}(\mathrm{d}t) = \frac{h_1(-X_t)}{u_1^*(X_t)} \cdot \mathrm{d}t$$

on en déduit la valeur de la double projection duale :

$$(\delta_\rho^{\widehat{\mathcal{P}}})^{\mathcal{O}}(\mathrm{d}t) = \frac{h_1^*(-X_t)}{u_1(X_t)} \cdot \frac{h_1(-X_t)}{u_1^*(X_t)} \cdot \mathrm{d}t.$$

On obtient alors la suite d'égalités pour toute fonction mesurable positive f :

$$\mathbf{Q}^1\big(f(-m)\big) = \mathbf{Q}^1\big(f(-X_\rho)\big) = \mathbf{Q}^1\left(\int_0^\zeta f(-X_t)\delta_\rho(\mathrm{d}t)\right) = \mathbf{Q}^1\left(\int_0^\zeta f(-X_t)(\delta_\rho^{\widehat{\mathcal{P}}})^{\mathcal{O}}(\mathrm{d}t)\right)$$

$$= \mathbf{Q}^1\left(\int_0^\zeta f(-X_t)\frac{h_1^*(-X_t)h_1(-X_t)}{u_1(X_t)\cdot u_1^*(X_t)} \cdot \mathrm{d}t\right) = \int_0^{+\infty} f(y)h_1^*(y)h_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

La dernière égalité est dûe au fait que la mesure excessive sous $\mathbf{Q}^1$ est $u_1(y)u_1^*(y)\,\mathrm{d}y$.

Dans le cas où $]-\infty,+0[$ est régulier, on reprend la démonstration précédente en faisant les adaptations indiquées dans la démonstration du Lemme 4.3. □

4.2. fin de la démonstration du Théorème 4.1

Le Corollaire 4.4 précédent nous donne que, sous $\mathbf{Q}^1$, les processus post-minimum et pre-minimum sont conditionnellement indépendants relativement à la loi du minimum m. La loi du pré-minimum sachant la valeur de m est encore donnée par ce corollaire et la loi du post minimum est obtenu par dualité en utilisant l'identité des mesures $\mathbf{Q}^{1*}(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}^1(\mathrm{d}\widehat{w})$. Enfin, la loi de m est donnée par le Corollaire 4.5.

En rassemblant tout cela, on obtient une description de la mesure $\mathbf{Q}^1$ par les lois des processus pré et post-minimum et de la variable aléatoire m, c'est à dire le résultat du Théorème 4.1 pour le processus de Lévy de loi $\mathbf{P}_1$. Puisque $\mathbf{Q}^1(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}(\mathrm{d}w\,\mathrm{e}^{-\zeta})$ et $\mathbf{Q}^{1+}(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}^+(\mathrm{d}w\,\mathrm{e}^{-\zeta})$, cela se traduit par l'identité, vraie pour toute variable aléatoire z :

$$\mathbf{Q}(z\circ\phi\cdot\mathrm{e}^{-\zeta}) = Q^+_{[0]}(z\cdot\mathrm{e}^{-\zeta}).$$

En remplaçant la variable z par $z\,\mathrm{e}^{\zeta}$ et en remarquant l'égalité $\zeta\circ\phi=\zeta$, on obtient, l'identité $\mathbf{Q}(z\circ\phi) = Q^+_{[0]}(z)$.

5. Longue digression

Le but de cette partie est de faire le lien entre les deux mesures markoviennes introduites ici, le pont $\mathbf{Q}$ d'une part et l'excursion positive $\mathbf{Q}^+$ d'autre part avec les notions similaires qui existent dans la littérature ou qui sont naturelles. Les démonstrations seront réduites à leur plus simple expression.

5.1. Connaitre le pont…

La première proposition fait le lien entre notre pont $\mathbf{Q}$ et le pont de Lévy au sens donné par Fitzsimmons, Pitman et Yor [6]. Ce dernier pont meurt en un temps déterministe t et il est construit sous l'hypothèse, strictement plus forte que l'hypothèse ACC, que le semi-groupe du processus de Lévy $(P_t(x,\mathrm{d}y))$ est absoluement continu. Avant cela, proclamons l'affirmation de la bible DM page 5 : « Une longue expérience montre que la théorie du potentiel se traite de manière beaucoup plus naturelle et agréable à partir des noyaux U_p, qui « adoucissent » les irrégularités de $P_t f$ en la variable t, qu'à partir du semi-groupe lui-même ». J'ajouterai qu'à l'adjectif de randomisatrice, je renverrai l'apostrophe de déterminisateurs. J'avoue faire subir à mes Markovs les pires des tortures à commencer par les tuer, de la à aliener leur homogénéité en les faisant mourir en des temps déterministes….

On rappelle d'abord le résultat de Wittmann [13] (il traite les semi-groupes de Markov en général, nous adaptons ici ses résultats aux processus de Lévy), on peut choisir les densités $p_t\in[0,+\infty]$ de telle manière que l'identité de fonctions $p_s * p_t = p_{s+t}$ ait lieu pour tous réels positifs s et t.

Proposition 5.1 (Fitzsimmons–Pitman–Yor). *Il existe un noyau de mesures de probabilité sur* $(\Omega,\mathcal{F})$ $(\mathbf{Q}_t;\ t\in\,]0,+\infty[)$

$$\mathbf{Q}(\mathrm{d}w,\zeta\in\mathrm{d}t) = \mathbf{Q}_t(\mathrm{d}w)\cdot p_t(0)\,\mathrm{d}t$$

et, pour tout t tel que $p_t(0)>0$ et sous $\mathbf{Q}_t$, le processus canonique est fortement markovien inhomogène, il meurt au temps t, il prend ses valeurs dans l'espace $\mathbf{E}_t=\{x\in\mathbb{R};\ p_s(-x)>0,$ pour tout $s\in[0,t[\}$ et il admet pour semi-groupe de transition sur cet espace, celui défini pour $0<u<v<t$ et $x\in\mathbf{E}_t$ de la manière suivante :

$$P_{u,v}(x,\mathrm{d}y) = \frac{p_{v-u}(y-x)\,p_{t-v}(-y)}{p_{t-u}(-x)}\,\mathrm{d}y.$$

Démonstration. Pour identifier les mesures $\mathbf{Q}(\mathrm{d}w, \zeta \in \mathrm{d}t)$ et $\mathbf{Q}_t(\mathrm{d}w) \cdot p_t(0)\,\mathrm{d}t$, on identifiera leur transformée de Laplace en t, ce qui revient à établir l'égalité pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbf{Q}(\mathrm{d}w \cdot \mathrm{e}^{-\lambda\zeta}) = \int_0^\infty \mathbf{Q}_t(\mathrm{d}w) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} p_t(0)\,\mathrm{d}t.$$

Les deux mesures de cette dernière égalité font du processus canonique un processus de Markov (éventuellement inhomogène en temps). En conséquence, il suffit d'identifier les valeurs de $\mathbf{Q}(z \cdot \mathrm{e}^{-\lambda\zeta})$ et $\int_0^\infty \mathbf{Q}_t(z) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} p_t(0)\,\mathrm{d}t$ pour les variables aléatoires z de la forme suivante (f et g sont deux fonctions mesurables positives, μ_1 et μ_2 sont deux réels positifs quelconques) :

$$z = \int_0^\zeta\int_0^\zeta f\big(X_s(w)\big)\,\mathrm{e}^{-\mu_1 s} g\big(X_u(w)\big)\,\mathrm{e}^{-\mu_2 u} 1_{s<u}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u.$$

Cette vérification est élémentaire. □

Rappelons que 0 *est régulier* signifie que $\inf\{t > 0;\ X_t = 0\} = 0$. Cette propriété implique que $u_\lambda(0)$ est fini pour tout $\lambda > 0$ et qu'il existe un unique temps local en 0 (on le note L^0), qui vérifie que pour tout $\lambda > 0$: $u_\lambda(0) = \mathbf{P}(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} L^0(\mathrm{d}t))$ (cf. [2] Chapitre 3).

Proposition 5.2. *Si* 0 *est régulier alors les mesures* $\mathbf{Q}(\mathrm{d}w)$ *et* $\mathbf{P}(\int_0^{+\infty} 1_{k_t \in \mathrm{d}w}\,\mathrm{d}L_t^0)$ *sont égales.*

Démonstration. Du fait de l'identité $\mathbf{Q}^1(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}(\mathrm{d}w\,\mathrm{e}^{-\zeta})$, il suffit de montrer que les mesures $\mathbf{Q}^1$ et $\mathbf{P}(\int_0^{+\infty} 1_{k_t \in \mathrm{d}w}\,\mathrm{e}^{-t} L^0(\mathrm{d}t))$ sont égales. Pour identifier ces deux mesures (évidemment markoviennes) sur Ω, on compare leurs co-noyaux potentiel et leurs mesures excessives. La seconde mesure est obtenue à partir de la probabilité $\mathbf{P}_1$ en tuant le processus canonique le long de la « fonctionnelle additive brute » égale au temps local $L^0(\mathrm{d}t)$. Elle a donc le même co-noyau potentiel que $\mathbf{P}_1$, c'est à dire le noyau V_1^*. C'est aussi le co-noyau de $\mathbf{Q}^1$ d'après le Théorème 2.1. Comparons maintenant les mesures excessives. La mesure $\mathbf{P}(\int_0^{+\infty} 1_{k_t \in \mathrm{d}w}\,\mathrm{e}^{-t} L^0(\mathrm{d}t))$ est la h-transformée de $\mathbf{P}_1$ où la fonction h est la fonction $x \to U^1(x, L^0]0, \zeta])$ (cf. Paragraphe 1.7). Cette fonction vaut $u_1^*(x)$ (voir [2] Chapitre 3). La mesure excessive de $\mathbf{P}_1$ étant $u_1(x)\,\mathrm{d}x$, on obtient (toujours selon le Paragraphe 1.7) que la mesure excessive de $\mathbf{P}(\int_0^{+\infty} 1_{k_t \in \mathrm{d}w}\,\mathrm{e}^{-t} L^0(\mathrm{d}t))$ est $u_1(x)u_1^*(x)\,\mathrm{d}x$. C'est aussi la mesure excessive de $\mathbf{Q}^1$. □

5.2. Connaitre l'excursion positive…

Nous avons vu que si $]0, +\infty[$ est régulier alors, sous $\mathbf{Q}^+$, les trajectoires naissent à la position 0 et que si $]-\infty, 0[$ est régulier alors elles meurent à la position 0. Voici les lois initiale ou finale dans les autres cas. On note π la mesure de Lévy de X.

Proposition 5.3. *Si* $]0, +\infty[$ *n'est pas régulier alors* $\mathbf{Q}^+(X_0 \in \mathrm{d}x) = 1_{x>0} h^*(x)\pi(\mathrm{d}x)$.
Si $]-\infty, 0[$ *n'est pas régulier alors* $\mathbf{Q}^+(X_\zeta^- \in \mathrm{d}x) = 1_{x>0} h(x)\pi(-\mathrm{d}x)$.

Démonstration. On établit facilement que si $]0, +\infty[$ n'est pas régulier alors, sous N, la variable aléatoire X_0 est strictement positive et sa loi est $1_{x>0}\pi(\mathrm{d}x)$. On peut donc caractériser la mesure markovienne N par cette loi initiale et son noyau-potentiel U^0. Sa mesure excessive, $h(y)\,\mathrm{d}y$, vérifie donc :

$$h(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} U^0(x, \mathrm{d}y)\pi(\mathrm{d}x).$$

En multipliant cette égalité par la fonction h^* et en utilisant l'égalité de définition du noyau V^+ : $V^+(x,\mathrm{d}y) = U^0(x,\mathrm{d}y)\frac{h^*(y)}{h^*(x)}$, on en déduit l'égalité : $h(y)h^*(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} V^+(x,\mathrm{d}y)[h^*(x)\pi(\mathrm{d}x)]$.

Les mesures markoviennes $\mathbf{Q}^+$ et $\int_0^{+\infty} V^+(x,\mathrm{d}w)[h(x)\pi(\mathrm{d}x)]$ ont donc même noyau potentiel, V^+, et même mesure excessive, $h(y)h^*(y)\,\mathrm{d}y$, elles sont donc égales. On en déduit que la mesure $h(x)1_{x>0}\pi(\mathrm{d}x)$ est bien la loi initiale sous $\mathbf{Q}^+$. La deuxième assertion de la proposition découle de la première et de l'identité $\mathbf{Q}^{+*}(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}^+(\mathrm{d}\widehat{w})$. □

La proposition suivante donne un lien entre notre mesure $\mathbf{Q}^+$ et la mesure N.

Proposition 5.4.

$$N(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}^+\left(\int_0^{\zeta} 1_{k_t\in \mathrm{d}w}\big[b(X_t)\,\mathrm{d}t + d\delta_\zeta(\mathrm{d}t)\big]\right)$$

avec

$$b(x) = \frac{\pi(]-\infty,-x[)}{h^*(x)} \quad \textit{et} \quad d = \frac{1}{h^*(0)}.$$

Démonstration. On sait (cf. [2] Chapitre 6) que si notre processus X *rampe vers le bas*, c'est à dire si la fonction $x \mapsto \mathbf{P}^x(X_{T_0} = 0)$ est strictement positive pour tout $x > 0$, alors elle est égale à $x \mapsto \frac{h^*(x)}{h^*(0)}$. D'autre part, il est facile de voir que la mesure $N'(\mathrm{d}w) = N(\mathrm{d}w 1_{X^-_\zeta = 0})$ est dans ce cas une mesure non nulle et c'est la h-transformée de N, avec pour fonction h la fonction $\frac{h^*}{h^*(0)}$ (voir Paragraphe 1.5), son noyau potentiel est donc le noyau V^+ et sa mesure excessive est le produit de la mesure excessive de N par la fonction $\frac{h^*}{h^*(0)}$, c'est donc la mesure $\frac{1}{h^*(0)} \cdot h^*(x)h(x)\,\mathrm{d}x$. Ce noyau potentiel et cette mesure excessive sont celles de la mesure markovienne $\frac{1}{h^*(0)} \cdot \mathbf{Q}^+$. Les mesures N' et $\frac{1}{h^*(0)}\mathbf{Q}^+$ sont donc égales.

Reste à comparer (que le processus X rampe vers le bas ou pas) la mesure $N(\mathrm{d}w \cdot 1_{X^-_\zeta > 0})$ et la mesure $\mathbf{Q}^+(\int_0^\zeta 1_{k_t\in\mathrm{d}w} \frac{\pi(]-\infty,-X_t[)}{h^*(-X_t)}\,\mathrm{d}t)$. Il suffit pour cela de comparer les co-noyaux potentiels et les lois finales de ces deux mesures markoviennes. Ce qui se fait facilement. □

La dernière proposition compare la mesure des « excursions au dessus de 0 », σ-finie lorsque X est transient, qu'on peut définir de la manière suivante :

$$M^+(\mathrm{d}w) = \mathbf{P}\left(\sum_{]g,d[\in\mathcal{C}} 1_{(X_{s+g})_{0<s<d-g}\in \mathrm{d}w}\right)$$

où $\mathcal{C}$ désigne cette fois l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert aléatoire formé des temps où les processus X et X^- sont strictement positifs : $\{t \in]0,\zeta[;\ X_t > 0 \text{ et } X^-_t > 0\}$.

Proposition 5.5. *Dans le cas transient,*

$$M^+(\mathrm{d}w) = \mathbf{Q}^+\left(\int\int_{0\leqslant s<t<\zeta} 1_{k_t\circ\theta_s\in\mathrm{d}w}\big[a(X_s)\,\mathrm{d}s + c\delta_0(\mathrm{d}s)\big]\cdot\big[b(X_t)\,\mathrm{d}t + d\delta_\zeta(\mathrm{d}t)\big]\right)$$

avec

$$a(x) = \frac{1}{h(x)}\int_x^{+\infty} u(x-y)\pi(\mathrm{d}y) \quad \textit{et} \quad c = \frac{1}{h(0)},$$

$$b(x) = \frac{\pi(]-\infty, -x[)}{h^*(x)} \quad et \quad d = \frac{1}{h^*(0)}.$$

Démonstration. Nous allons établir l'égalité des mesures M^+ et $N(\int_0^\zeta 1_{\theta_s \in \mathrm{d}w}[a(X_s)\,\mathrm{d}s + c\delta_0(\mathrm{d}s)])$. Il suffira alors d'appliquer la proposition précédente pour obtenir le résultat. Comparons d'abord les mesures $M^+(\mathrm{d}w 1_{X_0=0})$ et $\frac{1}{h(0)} \cdot N$ (remarquer que ces deux mesures sont nulles si X ne rampe pas vers le haut). On va le faire en identifiant leur co-noyaux et leur mesures excessives respectives : A l'aide d'un argument de dualité, on voit aisement que le co-noyau potentiel sous M^+ est le h-transformé de U^{0*} avec pour fonction h la fonction $\mathbf{P}^{*x}(X_{T_0} = 0)$, c'est la fonction $\frac{h}{h(0)}$. Ce noyau n'est autre que V^{+*}. C'est aussi celui de N ou de $\frac{1}{h(0)} \cdot N$. On calcule aussi facilement la mesure excessive de $M^+(\mathrm{d}w 1_{X_0=0})$, c'est le produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$ par la fonction égale en x, et pour tout $x > 0$, à $\mathbf{P}^{*x}(X_{T_0} = 0)$, c'est à dire $1_{x>0}\frac{h(x)}{h(0)}$. Cette mesure excessive est aussi celle de la mesure $\frac{1}{h(0)} \cdot N$. Les mesures $M^+(\mathrm{d}w 1_{X_0=0})$ et $\frac{1}{h(0)} \cdot N$ sont donc bien égales.

Reste à comparer les mesures $M^+(\mathrm{d}w 1_{X_0>0})$ et $N(\int_0^\zeta 1_{\theta_s \in \mathrm{d}w} a(X_s)\,\mathrm{d}s)$. Ceci se fait aisement en comparant leurs lois initiales et leurs noyaux potentiels. □

6. En guise de conclusion…

Le lecteur pourra s'amuser à établir une version de la correspondance de Vervaat, pour un processus de Markov réel général, en adaptant de manière canonique les méthodes employées ici. On se donne deux résolvantes $(U_\lambda(x, \mathrm{d}y); \lambda > 0, x \in \mathbb{R})$ et $(U^*_\lambda(x, \mathrm{d}y); \lambda > 0, x \in \mathbb{R})$, absolument continues relativement à une mesure μ et en dualité par rapport à celle-ci. Plus précisemment, pour tout $\lambda > 0$, il existe deux fonctions u_λ et u^*_λ telles que pour tout x la fonction $y \mapsto u_\lambda(y, x)$ (respectivement $y \mapsto u^*_\lambda(y, x)$) soit excessive pour U_λ (respectivement pour U^*_λ) et qui soit une densité de U^*_λ (respectivement de U_λ) relativement à μ.

Le pont du Paragraphe 2 est remplacé par la famille de ponts $(\mathbf{Q}^x;\ x \in \mathbb{R})$ où la mesure $\mathbf{Q}^x$ est portée par l'ensemble des trajectoires naissant à l'instant 0, à la position x et mourant en un temps fini, à la position x. Pour tout $\lambda > 0$, la mesure $\mathbf{Q}^x(\mathrm{d}w\, \mathrm{e}^{-\lambda\zeta})$ est markovienne, de noyau potentiel $U_\lambda(y, \mathrm{d}z)\frac{u_\lambda(z,x)}{u_\lambda(y,x)}$, de co-noyau potentiel $U^*_\lambda(y, \mathrm{d}z)\frac{u^*_\lambda(z,x)}{u^*_\lambda(y,x)}$ et de mesure excessive $u_\lambda(y, x)u^*_\lambda(y, x)\mu(\mathrm{d}y)$.

On prend l'hypothèse supplémentaire que U_λ et U^*_λ sont fortement markoviens et qu'il existe une mesure diffuse ν telle que les lois de la valeur minimum sous $U_\lambda(x, \mathrm{d}w)$ et $U^*_\lambda(x, \mathrm{d}w)$ soient absoluement continues relativement à ν (pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$). Pour tout réel y, on note U^y et U^{*y} les noyaux potentiel des processus de Markov de résolvante U_λ et U^*_λ respectivement, tués au temps $T_y = \inf\{t;\ X_t < y\}$. On peut alors construire deux fonctions $x \mapsto h(x, y)$ et $x \mapsto h^*(x, y)$ excessives pour U^y et U^{*y} respectivement, et une mesure markovienne, $\mathbf{Q}^{+y}$, portée par les trajectoires naissant à l'instant 0, à la position y et mourant en un temps fini, à la position y (et prenant des valeurs strictement supérieures à y dans leur intervalle de vie ouvert $]0, \zeta[$). Le noyau potentiel de $\mathbf{Q}^{+y}$ est $U^y(x, \mathrm{d}z)\frac{h(z,y)}{h(x,y)}$, son co-noyau potentiel est $U^{*y}(x, \mathrm{d}z)\frac{h^*(z,y)}{h^*(x,y)}$ et sa mesure excessive est $h(x, y)h^*(x, y)\mu(\mathrm{d}x)$. De plus, les familles $(\mathbf{Q}^x,\ x \in \mathbb{R})$ et $(\mathbf{Q}^{+y},\ y \in \mathbb{R})$ sont reliées par l'égalité des mesures suivante :

$$\mathbf{Q}^x\big((X_s)_{0<s<\rho} \in \mathrm{d}w_1, m \in \mathrm{d}y, (X_{s+\rho})_{0<s<\zeta-\rho} \in \mathrm{d}w_2\big)\mu(\mathrm{d}x)$$

$$= \mathbf{Q}^{+y}\left(\int_0^\zeta 1_{(X_s)_{0<s<u} \in \mathrm{d}w_2} 1_{X_u \in \mathrm{d}x} 1_{(X_{s+u})_{0<s<\zeta-u} \in \mathrm{d}w_1}\,\mathrm{d}u\right)\nu(\mathrm{d}y).$$

Références

[1] Azéma, Théorie générale des processus et retournement du temps, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973).
[2] J. Bertoin, Lévy Processes, Cambridge University Press, 1996.
[3] L. Chaumont, Excursion normalisée, méandre et pont pour les processus de Lévy stables, Bull. Sci. Math. 123 (1997) 377–403.
[4] C. Dellacherie, P.-A. Meyer, Probabilités et Potentiel, Tome 4, Hermann, 1975.
[5] C. Dellacherie, B. Maisonneuve, P.-A. Meyer, Probabilités et Potentiel, Tome 5, Hermann, 1992.
[6] P. Fitzsimmons, J. Pitman, M. Yor, Markovian Bridges: Construction, Palm Interpretation, and Splicing, Birkhäuser, 1995, Seminar on Stochastic Processes.
[7] Fourati, Points de croissance et théorie générale des processus, Probab. Theory Related Fields 110 (1998) 13–49.
[8] Kuznetsov, Construction of Markov processes with random birth and death, Theory Probab. Appl. 18 (1974) 539–575.
[9] Miermont, Ordered additive coalescences and fragmentations associated to Levy processes with no positive jumps, Electron. J. Probab. 6 (14) (2001) 33.
[10] Millar, Zero-one laws and the minimum of a Markov process, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977) 365–391.
[11] Silverstein, Classification of coharmonic and coinvariant functions for a Lévy process, Ann. Probab. 8 (1980) 539–575.
[12] Vervaat, A relation between Brownian bridge and Brownian excursion, Ann. Probab. 7 (1979) 141–149.
[13] Wittmann, Natural densities of Markov transition probabilities, Probab. Theory Related Fields 73 (1) (1986).