Ann. I. H. Poincaré – PR 39, 3 (2003) 487–503

10.1016/S0246-0203(02)00021-3/FLA

UN TCL AVEC VITESSE POUR LA MARCHE ALÉATOIRE GAUCHE SUR LE GROUPE AFFINE DE R^d

A CLT WITH RATE OF CONVERGENCE FOR THE LEFT RANDOM WALK ON THE AFFINE GROUP ON R^d

Christophe CUNY

IRMAR, Université de Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

Reçu le 7 août 2001, revisé le 21 mai 2002

RÉSUMÉ. – L'objectif de ce papier est d'obtenir un TCL avec vitesse pour la marche aléatoire gauche sur le groupe affine de $\mathbf{R}^d$. Nous nous plaçons sous des hypothèses faibles ne permettant pas d'obtenir la quasi-compacité de l'opérateur de transition associé à la marche. La méthode consiste à se ramener au cas d'une martingale et à utiliser des résultats récents de C. Jan [5].

ABSTRACT. – The purpose of this paper is to obtain a CLT with rate for the left random walk on the affine group of $\mathbf{R}^d$. We make weak assumptions under which the operator associated with the random walk is not quasi-compact. The method consists in using recent results of C. Jan [5] about the CLT for martingales.

MSC: 50F05; 60G42; 60J10

1. Introduction

L'objectif de ce papier est d'obtenir un TCL avec vitesse pour la marche aléatoire gauche sur le groupe affine de $\mathbf{R}^d$. Comme le font remarquer X. Milhaud et A. Raugi [8], ce cadre englobe le cas des processus auto-régressifs.

Notre étude est faite sous des hypothèses plus faibles que celles apparaissant dans la littérature sur ce thème (voir par exemple X. Milhaud et A. Raugi [8] ou H. Hennion et L. Hervé [3,4]). Comme nous le verrons par la suite, cette restriction impose l'utilisation d'une méthode différente et donne des vitesses inférieures. Notons que, lorsque les hypothèses de [8,3] ou [4] sont satisfaites, nos vitesses restent inférieures aux leurs.

E-mail address: cuny@maths.univ-rennes1.fr (C. Cuny).

Ainsi, notre résultat, quoique plus général, n'est pas optimal sous ces hypothèses particulières.

Ce travail entre dans le cadre d'une thèse effectuée sous la direction d'Albert Raugi que je remercie vivement ici.

1.1. Notations

Soit G l'ensemble : $G = GL_d(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^d$, où $GL_d(\mathbf{R})$ désigne le groupe des matrices inversibles d'ordre d, et nous écrirons $g = (A(g), b(g))$, $A(g) \in GL_d(\mathbf{R})$, $b(g) \in \mathbf{R}^d$.

Muni du produit :

$$g.g' = \big(A(g)A(g'), b(g) + A(g)b(g')\big).$$

G est un groupe, appelé groupe affine sur $\mathbf{R}^d$. Il opére de façon naturelle sur $\mathbf{R}^d$ par :

$$g \cdot x = b(g) + A(g)x \quad \forall (g, x) \in G \times \mathbf{R}^d.$$

Etant donnée une mesure de probabilité μ sur les boréliens de G, nous considérons l'espace de probabilité Ω défini par :

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \big(G, \mathcal{B}(G), \mu\big)^{\otimes \mathbf{N}^*},$$

où $\mathcal{B}(G)$ désigne la tribu borélienne sur G. Nous notons $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ les applications coordonnées et $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 1}$ la fitration naturelle associée. Pour tout x de $\mathbf{R}^d$ nous définissons les suites de variables aléatoires $(X_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\widehat{X}_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ par :

$$X_0(x) = \widehat{X}_0(x) = x,$$
$$X_n(x) = Y_n \ldots Y_1 \cdot x \quad \widehat{X}_n(x) = Y_1 \ldots Y_n \cdot x \quad \forall n \geqslant 1.$$

Pour tout x de $\mathbf{R}^d$, $(X_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbf{R}^d$ (appelée marche aléatoire gauche partant de x), de probabilité de transition P définie par :

$$Pf(y) = \int_G f(g \cdot y)\, \mu(dg) \quad \forall y \in \mathbf{R}^d.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $(Y_n, X_{n-1}(x))_{n \geqslant 1}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition R définie par :

$$Rf(g, y) = \int_G f(g', g \cdot y)\, \mu(dg') \quad \forall (g, y) \in G \times \mathbf{R}^d.$$

1.2. Cadre du problème et résultats antérieurs

Soit F une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$ définie sur $G \times \mathbf{R}^d$. Si ν désigne la mesure de probabilité stationnaire associée à la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (ν sera définie proprement par la suite), nous notons e la moyenne de F suivante :

$$e = \int_{G\times\mathbf{R}^d} F(g,x)\,\mu(dg)\,\nu(dx).$$

Nous nous intéressons alors au comportement en loi de la suite :

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\big(S_n(x) - ne\big)\right)_{n\geqslant 1}, \tag{1}$$

où $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F(\ Y_k, X_{k-1}(x)\ )$ pour tout $n \geqslant 1$ et σ est une constante de normalisation que nous définirons par la suite.

Cette étude a déjà été faite sous diverses hypothèses :

– X. Milhaud et A. Raugi [8] ont prouvé que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une loi normale avec une vitesse en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque F est localement hölderienne et lorsque μ vérifie les conditions suivantes, pour un réel $\alpha > 0$:

$$\int_G \mathrm{e}^{\|b(g)\|^\alpha}\mu(dg) < +\infty \quad \text{et} \quad \|A(\cdot)\| < 1 \quad \mu\text{-p.s.}$$

– H. Hennion et L. Hervé [3] établissent le même résultat pour des fonctions F uniformément lipshitziennes, bornées et lorsque μ est contractante en moyenne satisfaisant au même type d'hypothèse de moment. Puis, dans [4] ils traitent le cas de fonctions F localement hölderiennes et de mesure μ satisfaisant à $\int_G \|b(g)\|^\alpha \mu(dg) < +\infty$, pour un certain réel positif α dépendant de F.

Dans ces trois cas, la méthode utilisée est basée sur la quasi-compacité de l'opérateur P sur des espaces ad hoc. Cela permet d'étudier les noyaux de Fourier de P comme perturbations de P, en vue d'appliquer le théorème de Berry-Esseen. Notons que le gain entre [3] et [4] (passage d'un moment exponentiel à un moment polynomial) résulte d'un nouveau résultat de perturbation dû à G. Keller et C. Liverani [7]. Les vitesses obtenues dans [8,3] et [4] sont en $1/n^{1/2}$. Lorsque l'opérateur P n'est pas quasi-compact, il semble que la seule méthode utilisée soit de comparer $(S_n)_{n\geqslant 1}$ à une martingale et de s'appuyer sur les résultats obtenus dans ce cas. Nous allons donc procéder ainsi et utiliser les résultats récents de Christophe Jan ([5,6]). Alors, sous des hypothèses très faibles (régularité de F et moments de μ) nous obtenons des vitesses en $1/n^{1/4}$, et sous des hypothèses plus restrictives nous obtenons des vitesses en $1/n^\alpha$ pour tout $\alpha < 1/2$. Notre résultat n'est donc pas optimal lorsqu'il est appliqué à des fonctions localement hölderiennes (hypothèse assumée dans [8,3] et [4]). Nous donnerons un exemple de fonction satisfaisant à nos conditions de régularité mais qui n'est hölderienne d'aucun ordre.

1.3. Hypothèses

Dans toute la suite, nous supposons que l'hypothèse de contraction suivante est satisfaite :

Il existe sur une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^d$ telle que, si l'on note de même la norme d'opérateur associée sur $GL_d(\mathbf{R})$:

$$\|A(.)\| < 1 \quad \mu\text{-p.s.} \tag{2}$$

Notons que nous avons alors :

$$0 \leqslant \theta = \exp \int_G \log \|A(g)\| \, \mu(dg) < 1, \tag{3}$$

où $\theta = 0$ si $\int_G \log \|A(g)\| \mu(dg) = -\infty$.

Si δ est un réel positif, nous disons que μ admet un moment d'ordre δ lorsque

$$\int_G \|b(g)\|^\delta \mu(dg) < +\infty. \tag{4}$$

Soit τ un réel positif. Nous disons qu'une fonction F sur $G \times \mathbf{R}^d$ vérifie l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$ s'il existe une suite de réels positifs $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$, une fonction mesurable η de G dans $[1, +\infty[$, un réel $\tau > 0$ et un réel ρ $(\theta < \rho < 1)$ tels que les conditions suivantes soient réalisées :

(i) $\displaystyle\sup_{x\in\mathbf{R}^d} \frac{|F(g,x)|}{1+\|x\|^\tau} \leqslant \eta(g) \quad \forall g \in G,$

(ii) $\displaystyle\sup_{\|x-y\|\leqslant\rho^n} \frac{|F(g,x)-F(g,y)|}{1+\|x\|^\tau} \leqslant \eta(g)\beta_n \quad \forall g \in G,$

(iii) $\displaystyle\sum_{m\geqslant 1} m\beta_m < +\infty,$

(iv) $\displaystyle\int_G \eta^3(g)\, \mu(dg) < +\infty,$

(v) Il n'existe pas de fonctions ψ sur $G \times \mathbf{R}^d$ telles que ;

$$F(g,x) - e = \psi(x) - \psi(g\cdot x) \quad \mu\otimes\nu\text{-p.s.}$$

où $e = \int_{G\times\mathbf{R}^d} F(g,x)\, \mu(dg)\, \nu(dx)$.

Nous disons que F vérifie l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau^\infty)$ si de plus les conditions suivantes sont réalisées :

(iii′) $\displaystyle\sum_{m\geqslant 1} m^p\beta_m < +\infty \quad \forall p \geqslant 0,$

(iv′) $\displaystyle\int_G \eta(g)^p \mu(dg) < +\infty \quad \forall p \geqslant 0.$

Remarques. – Notons que dans [8,3] et [4] les fonctions F ont une régularité hölderienne alors que nous ne supposons ici qu'une régularité en terme de variation. Par exemple la suite $(\beta_n = \varepsilon^{(\log n)^u})_{n\geqslant 1}$ (pour des réels ε et u tels que $\varepsilon < 1$ et $u > 1$) vérifie la condition iii′) de l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau^\infty)$ alors qu'une régularité hölderienne correspondrait à $(\beta_n = \varepsilon^{nt})_{n\geqslant 1}$ (pour des réels ε et t tels que $\varepsilon < 1$ et $t > 0$). Concrètement, dans le cas du groupe affine réel G_1 la fonction F définie sur $G_1 \times \mathbf{R}$ par $F(g,x) = \exp(-(-\log|x|)^\alpha)$

pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $F(g,x)=1$ sinon, n'est hölderienne d'aucun ordre en 0 mais satisfait à (H_0^∞), avec $\beta_n = \exp(-(-n\log\rho)^\alpha)$. Notons que la régularité demandée dans l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$ est très faible (pour tout réel τ).

Dans [8] et [3], la mesure μ admet un moment exponentiel. Nous ne demandons ici que des moments polynomiaux de tous ordres. Dans [4], il est seulement supposé que μ admet un moment polynomial d'un ordre spécifié.

La condition v) assure la non dégénérescence dans le TCL (i.e. la stricte positivité de la constante σ apparaissant dans (1)).

Espaces de travail. Nous allons définir des espaces fonctionnels, adaptés à la fonction F vérifiant l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$, et ayant des propriétés de stabilité par P.
Soient β un réel strictement positif et h une fonction continue sur $\mathbf{R}^d$ à valeurs réelles, nous notons :

$$|h|_\beta = \sup_{x\in\mathbf{R}^d} \frac{|h(x)|}{1+\|x\|^\beta}.$$

Alors $|.|_\beta$ définit une norme sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}^d$ et nous désignons par E_β l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}^d$ de norme $|.|_\beta$ finie. L'ensemble $(E_\beta, |.|_\beta)$ est un espace de Banach.

Soit ρ le réel intervenant dans l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$. Pour toute fonction h de E_β, nous définissons :

$$m_{n,\beta}(h) = \sup_{\|x-y\|\leqslant\rho^n} \frac{|h(x)-h(y)|}{1+\|x\|^\beta} \quad \forall n \geqslant 1.$$

2. Enoncé des résultats

Nous désirons établir les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. – *Soit F définie sur $G\times\mathbf{R}^d$ vérifiant l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$ pour un réel $\tau>0$. Si μ admet un moment d'ordre $3\delta\tau$ pour un réel $\delta>1$ alors il existe $\sigma>0$ et une constante $C>0$ tels que* :

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n(x)-ne}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du \right| \leqslant Cn^{-1/4}\left(1+\|x\|^{\delta\tau}\right).$$

THÉORÈME 2. – *Soit F définie sur $G\times\mathbf{R}^d$ vérifiant l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau^\infty)$. Si μ admet des moments de tout ordre alors il existe $\sigma>0$ tel que pour tout $\alpha<\frac{1}{2}$ et tout $\delta>1$, il existe C tel que* :

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n(x)-ne}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du \right| \leqslant Cn^{-\alpha}\left(1+\|x\|^{\frac{2\delta\tau\alpha}{1-2\alpha}}\right).$$

Définissons formellement le potentiel U associé à P : $U=\sum_{n\geqslant 0} P^n$.

Lorsque μ admet un moment exponentiel et F est Hölderienne, nous pouvons construire ([8,3]) des espaces fonctionnels stables par P et sur lesquels U est bien défini (nous avons convergence normale de la série définissant U sur ces espaces : $\sum_{n\geqslant 1}\|P^n\| < +\infty$). Cela permet d'inverser l'opérateur $I - P$ et d'appliquer des résultats de pertubations des opérateurs (pour étudier la fonction caractéristique de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ en vue d'appliquer le théorème de Berry–Esseen).

Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_\tau)$, si h est une fonction de l'espace E_β défini précédemment, nous pouvons définir $U(h)(x)$ pour tout x de $\mathbf{R}^d$, mais a priori, la fonction $U(h)$ n'est pas dans E_β mais dans $E_{\delta\beta}$ pour tout $\delta > 1$. Il n'est donc pas possible d'appliquer la méthode précédente. Cependant, la convergence du potentiel, même dans un espace plus grand, nous permettra d'écrire $(S_n)_{n\geqslant 1}$ comme somme d'une martingale et d'un terme que nous savons maîtriser. Nous appliquerons alors des résultats de C. Jan ([5,6]), dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous.

2.1. Les théorèmes de C. Jan

• Soit $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 1}$ un processus *stationnaire* sur un espace de probabilité $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_n)_{n\geqslant 1}, \widetilde{\mathbb{P}})$ tel que :
– $\widetilde{\mathbb{E}}[|\widetilde{X}_1|^3] < +\infty$, $\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{X}_2 \mid \widetilde{\mathcal{F}}_1] = 0$ et $\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{X}_1^2] = 1$.
– $\sum_{p\geqslant 1}\|\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{X}_p^2 \mid \widetilde{\mathcal{F}}_1] - 1\|_{\frac{3}{2}} < +\infty$.
Alors nous avons le :

THÉORÈME 3 (C. Jan, [5]). – *Sous les conditions précédentes, il existe une constant C telle que* :

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\widetilde{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\widetilde{X}_1 + \cdots + \widetilde{X}_n) \leqslant t\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right| \leqslant C\frac{1}{n^{1/4}}.$$

Ce résultat nous permettra d'établir le théorème 1. Notons que ce résultat concerne des processus ayant un moment cubique et nous permet d'obtenir une vitesse de convergence dans le TCL en $n^{-1/4}$. L'utilisation des résultats de E. Haeusler [2] donneraient seulement des vitesses arbitrairement proches de $n^{-1/4}$ pour des processus admettant des moments de tout ordre.

• Soit $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 1}$ un processus sur un espace de probabilité $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_n)_{n\geqslant 1}, \widetilde{\mathbb{P}})$ tel que :
– Pour tous entiers $n \geqslant 1$:

$$\widetilde{\mathbb{E}}\big(\widetilde{X}_n^2\big) = 1 \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbb{E}}\big(\widetilde{X}_{n+1} \mid \widetilde{\mathcal{F}}_n\big) = 0.$$

– Pour tout $p > 0$, la suite $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée dans $L^p(\widetilde{\Omega})$.
– Pour tout r-uplet $l = (l_1, \dots, l_r)$, la suite $(\phi_p(l))_{p\geqslant 1}$, définie par

$$\phi_p(l) = \sup_{\{k\in\mathbf{N}^*:\ p\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_r\}}\big\|\widetilde{\mathbb{E}}(\widetilde{X}_{k+p_1}^{l_1}\dots\widetilde{X}_{k+p_r}^{l_r} \mid \mathcal{F}_k) - \widetilde{\mathbb{E}}(\widetilde{X}_{k+p_1}^{l_1}\dots\widetilde{X}_{k+p_r}^{l_r})\big\|_2$$

décroît plus vite que toute puissance de $\frac{1}{p}$.

Alors nous avons le :

THÉORÈME 4 (C. Jan, [6]). – *Sous les hypothèses précédentes, nous avons*

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\widetilde{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\widetilde{X}_1+\cdots+\widetilde{X}_n)\leqslant t\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du\right|\leqslant\frac{A_n}{\sqrt{n}}$$

où $A_n=\mathrm{o}(n^{\varepsilon})$ *pour tout* $\varepsilon>0$.

Ce résultat nous permettra d'établir le théorème 2. Notons que si $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 1}$ est borné dans $L^\infty(\widetilde{\Omega})$ et si la suite $(\phi_p)_{p\geqslant 1}$ (définie dans $L^\infty(\widetilde{\Omega})$ au lieu de $L^2(\widetilde{\Omega})$) vérifie

$$\sum_{p\geqslant 1}p\phi_p(l)<+\infty\quad\forall l \tag{5}$$

alors le théorème 4 est vrai avec une vitesse en $n^{-1/2}$ d'après une généralisation de C. Jan [6] d'un résultat de E. Rio [9]. Cependant, même si nous considérons des fonctions F bornées, le processus $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 1}$ que nous serons amené à considérer n'est pas borné dans $L^\infty(\widetilde{\Omega})$ mais dans $L^\delta(\widetilde{\Omega})$, pour tout $\delta>0$. Aussi ne pouvons-nous établir la convergence de (5) que lorsque $(p\phi_p(l))_{p\geqslant 1}$ est définie dans $L^\delta(\widetilde{\Omega})$ et non dans $L^\infty(\widetilde{\Omega})$.

3. Résultats auxiliaires

Nous ferons la preuve des théorèmes 1 et 2 au paragraphe suivant. Nous allons tout d'abord établir une série de lemmes.

3.1. Résultats relatifs aux suites $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\widehat{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$

Nous pouvons écrire :

$$\widehat{X}_n(x)=A(Y_1)\dots A(Y_n)x+B_n\quad\forall(n,x)\in\mathbf{N}\times\mathbf{R}^d,$$
$$\text{avec}\quad B_0=0\quad\text{et}\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}A(Y_1)\dots A(Y_{k-1})B(Y_k)\quad\forall n\geqslant 1.$$

LEMME 1. – *Supposons que* μ *admet un moment d'ordre* $p\geqslant 1$, *alors la variable*

$$Z=\sum_{n\in\mathbf{N}}\|A(Y_1)\|\dots\|A(Y_n)\|\,\|b(Y_{n+1})\,\|$$

est finie $\mathbb{P}$*-p.s. et admet un moment d'ordre* p.

En particulier la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge* $\mathbb{P}$*-p.s. vers une variable aléatoire* B_∞ *de loi* ν *et* ν *est* P*-invariante.*

Remarque. – Dire que ν est P-invariante, revient à dire que $\nu=\mu*\nu$ où le symbole $*$ désigne la convolution provenant de l'action de G sur $\mathbf{R}^d$.

Démonstration. – La preuve est immédiate d'après l'hypothèse de contraction (2) et la loi forte des grands nombres. □

Pour tout réel α, $\theta < \alpha < 1$ (où θ est le réel défini en (3)), nous considérons les boréliens de Ω suivants :

$$\Gamma_n(\alpha) = \bigl\{\bigl\|A(Y_1)\dots A(Y_n)\bigr\| \geqslant \alpha^n\bigr\} \quad \forall n \geqslant 1$$
$$\text{et} \quad \Lambda_n(\alpha) = \left\{\left\|\sum_{k\geqslant n} A(Y_1)\dots A(Y_k)b(Y_{k+1})\right\| \geqslant \alpha^n\right\} \quad \forall n \geqslant 1.$$

Nous notons aussi, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\gamma_n(\alpha) = \mathbb{P}\bigl(\Gamma_n(\alpha)\bigr) \quad \text{et} \quad \lambda_n(\alpha) = \mathbb{P}\bigl(\Lambda_n(\alpha)\bigr).$$

Nous pouvons préciser les convergences du lemme précédent grâce au lemme suivant :

LEMME 2. – *Si μ admet un moment d'ordre* 1 *alors, pour tout α, $\theta < \alpha < 1$, les suites $(\gamma_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ et $(\lambda_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ convergent exponentiellement vite vers* 0.

Démonstration. – La convergence exponentielle de $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ découle d'un résultat classique de grande déviation (voir par exemple [1] p. 70).

La convergence exponentielle de $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ résulte alors aisément du premier point.

3.2. Résultats relatifs à l'opérateur P

LEMME 3. – *Soit β un réel positif. Si μ admet un moment d'ordre $\delta\beta$, pour un réel $\delta > 1$, alors il existe un réel ε, $0 < \varepsilon < 1$ et des constantes C, C' et C'' tels que, pour toute fonction h de E_β et tous entiers naturels $n, k \geqslant 1$, nous ayons* :

(i) $|P^n h|_\beta \leqslant C|h|_\beta$.
(ii) $|P^n h - \nu(h)|_{\delta\beta} \leqslant C'(m_{n,\beta}(h) + \varepsilon^n |h|_\beta)$.
(iii) $m_{k,\beta}(P^n h) \leqslant C''(m_{n+k,\beta}(h) + \varepsilon^n m_{k,\beta}(h))$.

Si de plus F est une fonction sur $G \times \mathbf{R}^d$, vérifiant $(\mathbf{H}_\beta)$ et si η^q est μ-intégrable pour un réel $1 \leqslant q < \delta$, il existe une constante D telle que

(iv) $\sup_{n\geqslant 1} \mathbb{E}[|S_n(x) - S_n(y)|^q] \leqslant D(1 + (\|x\| + \|y\|)^{\delta\beta})\ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^d$.

Remarques. – Le premier point du lemme signifie l'équicontinuité de $(P^n)_{n\geqslant 1}$ sur E_β.

Le deuxième point permet, pour h régulière dans E_β, de montrer que le potentiel associé converge dans $E_{\delta\beta}$ et le troisième point donne la régularité de ce potentiel.

Le quatrième point nous permettra de nous ramener à établir les théorèmes 1 et 2 sous la probabilité $\mathbb{P}_\nu$.

Démonstration. – Soient x un réel, n un entier naturel et h une fonction de E_β. Dans la suite nous utiliserons les majorations suivantes, pour tout réel $t > 0$, tout x de $\mathbf{R}^d$ et $\mathbb{P}$-p.s. tout ω de Ω (nous omettrons d'écrire ω pour alléger l'écriture, la variable Z est définie au lemme 1) :

$$\begin{aligned}\frac{1 + \|\widehat{X}_n(x)\|^t}{1 + \|x\|^t} &\leqslant \frac{1 + \max(1, 2^{t-1})(\|A(Y_1)\dots A(Y_n)x\|^t + Z^t)}{1 + \|x\|^t} \\ &\leqslant 2^t \frac{1 + \|x\|^t + Z^t}{1 + \|x\|^t} \quad \text{car } \|A(.)\| < 1 \quad \mu\text{-p.s.} \\ &\leqslant 2^t\bigl(1 + Z^t\bigr). \end{aligned} \tag{6}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{|h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_\infty)|}{1+\|x\|^t} \leqslant |h|_t \frac{(1+\|\widehat{X}_n(x)\|^t) + (1+\|B_\infty\|^t)}{1+\|x\|^t} \leqslant 2^{t+1}\bigl(1+Z^t\bigr)|h|_t. \tag{7}$$

Montrons le premier point. D'après (6), nous avons :

$$\frac{|P^n h(x)|}{1+\|x\|^\beta} = \frac{|\mathbb{E}\, h(\widehat{X}_n(x))|}{1+\|x\|^\beta} \leqslant |h|_\beta \mathbb{E}\left(\frac{1+\|\widehat{X}_n(x)\|^\beta}{1+\|x\|^\beta}\right) \leqslant 2^\beta |h|_\beta \mathbb{E}\bigl(1+Z^\beta\bigr).$$

Montrons le deuxième point. Soit $\delta > 1$ tel que μ ait un moment d'ordre $\delta\beta$, nous avons :

$$\frac{|P^n h(x) - \nu(h)|}{1+\|x\|^{\delta\beta}} = \frac{|\mathbb{E}[h(\hat{X}_n(x)) - h(B_\infty)]|}{1+\|x\|^{\delta\beta}}.$$

Fixons un réel ρ' tel que $\theta < \rho' < \rho$.

• Supposons dans un premier temps que x et n vérifient $\|x\| \geqslant (\frac{\rho}{\rho'})^n \geqslant 1$. Alors, d'après (7), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{|\mathbb{E}[h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_\infty)]|}{1+\|x\|^{\delta\beta}} &\leqslant \frac{1+\|x\|^\beta}{1+\|x\|^{\delta\beta}} \frac{|\mathbb{E}[h(\hat{X}_n(x)) - h(B_\infty)]|}{1+\|x\|^\beta} \\ &\leqslant 2\|x\|^{(1-\delta)\beta} \frac{|\mathbb{E}[h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_\infty)]|}{1+\|x\|^\beta} \\ &\leqslant 2^{\beta+1}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{\beta(\delta-1)n} |h|_\beta \mathbb{E}\bigl(1+Z^\beta\bigr).\end{aligned}$$

• Supposons dans un deuxième temps que x et n vérifient $\|x\| \leqslant (\frac{\rho}{\rho'})^n$. Nous avons :

$$\bigl|h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_\infty)\bigr| \leqslant \bigl|h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_n)\bigr| + \bigl|h(B_n) - h(B_\infty)\bigr|.$$

Or, sur $\Gamma_n^c(\rho') \bigcap \Lambda_n^c(\rho)$, nous avons :

$$\|\widehat{X}_n(x) - B_n\| \leqslant \rho^n \quad \text{et} \quad \|B_n - B_\infty\| \leqslant \rho^n.$$

D'après (6), nous obtenons que sur $\Gamma_n^c(\rho') \bigcap \Lambda_n^c(\rho)$ la majoration suivante est vérifiée :

$$\frac{|h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_\infty)|}{1+\|x\|^{\delta\beta}} \leqslant 2m_{n,\beta}(h)\left(\frac{1+\|B_n\|^\beta}{1+\|x\|^{\delta\beta}}\right) \leqslant 2m_{n,\beta}(h)\bigl(1+Z^\beta\bigr).$$

D'autre part, si s est tel que $1/s + 1/\delta = 1$, nous avons, d'après les inégalités de Hölder :

$$\frac{|\mathbb{E}(h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_\infty))\mathbf{1}_{\Gamma_n(\rho')})|}{1+\|x\|^{\delta\beta}} \leqslant \gamma_n^{1/s}(\rho')\left(\mathbb{E}\left|\frac{h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_\infty)}{1+\|x\|^\beta}\right|^\delta\right)^{1/\delta}$$
$$\leqslant 2^{\beta+1}\gamma_n^{1/s}(\rho')\left(\mathbb{E}\left(1+Z^\beta\right)^\delta\right)^{1/\delta}|h|_\beta$$
$$\frac{|\mathbb{E}((h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_\infty))\mathbf{1}_{\Lambda_n(\rho)})|}{1+\|x\|^{\delta\beta}} \leqslant \lambda_n^{1/s}(\rho)\left(\mathbb{E}\left|\frac{h(\widehat{X}_n(x)) - h(B_\infty)}{1+\|x\|^\beta}\right|^\delta\right)^{1/\delta}$$
$$\leqslant 2^{\beta+1}\lambda_n^{1/s}(\rho)\left(\mathbb{E}\left(1+Z^\beta\right)^\delta\right)^{1/\delta}|h|_\beta.$$

Ce qui termine la preuve du deuxième point, d'après les lemmes 1 et 2 puisque μ admet un moment d'ordre $\delta\beta$.

Montrons le troisième point. Soient n et k des entiers naturels, x et y des éléments de $\mathbf{R}^d$ tels que $\|x-y\| \leqslant \rho^k$ et h une fonction de E_β. Nous avons :

$$\frac{|P^n h(x) - P^n h(y)|}{1+\|x\|^\beta} \leqslant \int_{\Gamma_n} \frac{|h(\widehat{X}_n(x)) - h(\widehat{X}_n(y))|}{1+\|x\|^\beta} d\mathbb{P} + \int_{\Gamma_n^c} \frac{|h(\widehat{X}_n(x)) - h(\widehat{X}_n(y))|}{1+\|x\|^\beta} d\mathbb{P}$$
$$\leqslant m_k(h)\gamma_n^{1/s}\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\|\widehat{X}_n(x)\|^\beta}{1+\|x\|^\beta}\right)^\delta\right]\right)^{1/\delta}$$
$$+ m_{n+k}(h)\mathbb{E}\left[\left(\frac{1+\|\widehat{X}_n(x)\|^\beta}{1+\|x\|^\beta}\right)\right]$$
$$\leqslant A\gamma_n^{1/s} m_k(h) + B m_{n+k}(h).$$

Pour des constantes, A et B bien choisies. Ce qui termine la preuve du troisième point.

Montrons le quatrième point. Il suffit d'établir que

$$\sum_{n\geqslant 1} \left\|F\left(Y_n, \widehat{X}_{n-1}(x)\right) - F\left(Y_n, \widehat{X}_{n-1}(y)\right)\right\|_{L^q} \leqslant D\left(1 + (\|x\| + \|y\|)^{\delta\beta/q}\right).$$

Soit $n \geqslant 1$. En procédant comme dans la preuve du deuxième point (considérant les cas $\|x\| + \|y\| \geqslant \frac{\rho}{\rho'}^n$ et $\|x\| + \|y\| \leqslant \frac{\rho}{\rho'}^n$) nous montrons qu'il existe ε, $0 < \varepsilon < 1$ tel que :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|F(Y_n, \widehat{X}_{n-1}(x)) - F(Y_n, \widehat{X}_{n-1}(y))|^q}{(1+\|x\|+\|y\|)^{\delta\beta}}\right]$$
$$\leqslant D\left(\beta_n + \varepsilon^n\right)^q \mathbb{E}\left[1 + Z^{\delta\beta}\right] \int_G \eta^q(g)\,\mu(dg) \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^d.$$

Ce qui achève la preuve puisque la série $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ converge et μ admet un moment d'ordre $\delta\beta$. $\square$

Le lemme suivant concerne directement la fonction F sur laquelle porte le TCL. Nous rappelons que nous désignons par R la probabilité de transition de la chaîne de Markov $((Y_n, X_{n-1}(x)))_{n\geqslant 1}$. Soit H la fonction continue définie par :

$$H(x) = \int_G F(g,x)\,\mu(dg) \quad \forall x \in \mathbf{R}^d.$$

Nous rappelons aussi que e désigne la moyenne suivante de H :

$$e = \int_{\mathbf{R}^d} H(x)\,\nu(dx).$$

Nous avons le lemme :

LEMME 4. – *Soit F définie sur $G \times \mathbf{R}^d$ vérifiant $(\mathbf{H}_\tau)$ pour un réel $\tau > 0$. Si μ admet un moment d'ordre $\delta\tau$ pour un réel $\delta > 1$ alors il existe une suite positive $(\hat{\beta}_n)_{n\geqslant 1}$ de série convergente et des constantes K et L telles que* :

(i) $F(g,x) - e = (I - R)f(g,x) \quad \forall (g,x) \in G \times \mathbf{R}^d$.

(ii) $\displaystyle\sup_{x\in\mathbf{R}^d} \frac{|f(g,x)|}{1+\|x\|^{\delta\tau}} \leqslant L\big(\eta(g) + \|b(g)\|^{\delta\tau}\big)$.

(iii) $\displaystyle\sup_{\|x-y\|\leqslant\rho^n} \frac{|f(g,x) - f(g,y)|}{1+\|x\|^\tau} \leqslant K\hat{\beta}_n\,\big(\eta(g) + \|b(g)\|^\tau\big)$

où $\hat{\beta}_n \leqslant \sum_{k\geqslant n} \beta_k$, pour tout $n \geqslant 1$.

Remarques. – Si F vérifie $(\mathbf{H}_\tau)$ alors la série de terme général $(\hat{\beta}_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Si F vérifie $(\mathbf{H}_\tau^\infty)$, alors pour tout $p > 0$ la série de terme général $(n^p\hat{\beta}_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Démonstration. – Comme F vérifie l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$, donc H est une fonction de E_τ et vérifie :

$$m_{n,\tau}(H) \leqslant \beta_n \int_G \eta(g)\,\mu(dg) \quad \forall n \geqslant 1.$$

D'après le lemme 3 :

$$\begin{aligned}&\big|P^nH - e\big|_{\delta\tau} \leqslant C'\big(m_{n,\tau}(H) + \varepsilon^n|H|_\tau\big) \quad \forall n \geqslant 1\\ &\text{et} \quad m_{k,\tau}\big(P^nH - e\big) \leqslant C''\big(m_{n+k}(H) + \varepsilon^n m_{k,\tau}(H)\big) \quad \forall n,k \geqslant 1.\end{aligned}$$

D'après le point (iii) de l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$, la série de terme général β_n converge. Donc la série $\sum_{n\geqslant 1}(P^n(H) - e)$ converge normalement dans $E_{\delta\tau}$ vers une fonction h vérifiant :

$$|h|_{\delta\tau} \leqslant L\bigg(\sum_{n\geqslant 1}\beta_n + \varepsilon^n\bigg)$$

$$\text{et} \quad m_{k,\tau}(h) \leqslant K\bigg(\sum_{n\geqslant 1}\beta_{n+k} + \beta_k\sum_{n\geqslant 1}\varepsilon^n\bigg),$$

pour des constantes L et K convenables.

Remarquons que :

$$\sum_{n\geqslant 1}\big(R^nF(g,x) - e\big) = \sum_{n\geqslant 0}\big(P^nH(g\cdot x) - e\big).$$

Posons donc :

$$f(g,x) = F(g,x) - e + h(g\cdot x).$$

D'après la continuité de P sur $E_{\delta\beta}$, f vérifie les conditions du lemme.

Nous terminons par un lemme garantissant que la loi normale limite de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas dégénérée. Posons $\sigma^2 = \int_{g\times\mathbf{R}^d} R(f^2(g,x)) - (Rf(g,x))^2\,\mu(dg)\,\nu(dx)$.

LEMME 5. – *Lorsque F vérifie le point v) de l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$, σ est strictement positif.*

Démonstration. – Supposons donc que σ soit nul. Comme $\mu * \nu = \nu$ donc :

$$\sigma^2 = \int_{G\times\mathbf{R}^d} f^2(g,x)\,\mu(dg)\,\nu(dx) - \int_{\mathbf{R}^d} \nu(dx)\left(\int_G f(g,x)\,\mu(dg)\right)^2$$
$$= \int_{G\times\mathbf{R}^d} \left(f(g,x) - \int_G f(g',x)\,\mu(dg')\right)^2 \mu(dg)\,\nu(dx).$$

Comme σ est nul, donc, pour $\mu\otimes\nu$-presque tout (g,x), nous avons :

$$f(g,x) = \int_G f(g',x)\,\mu(dg').$$

D'où, si nous posons $\psi(.) = \int_G f(g',.)\,\mu(dg')$, nous avons, pour $\mu\otimes\nu$-presque tout (g,x) :

$$\begin{aligned} F(g,x) - e &= (I-R)f(g,x) \\ &= f(g,x) - \int_G f(g', g\cdot x)\,\mu(dg') \\ &= \psi(x) - \psi(g\cdot x). \end{aligned}$$

Ce qui ne peut être par hypothèse. □

4. Preuve des théorèmes 1 et 2

Pour alléger les calculs, nous supposons dorénavant vérifiées les conditions de centrage et de normalisation suivantes :

$$e = 0 \quad \text{et} \quad \sigma = 1.$$

La deuxième condition est légitime puisque, d'après le lemme 5, σ est strictement positif.

4.1. Réduction à l'étude d'une martingale

Rappelons que R désigne la probabilité de transition de la chaîne de Markov $(Y_n, X_{n-1}(x))_{n\geqslant 1}$ et que, d'après le lemme 4, il existe une fonction continue f sur $G\times\mathbf{R}^d$ telle que :

$$F(g,x) = (I-R)f(g,x) \quad \forall (g,x)\in G\times\mathbf{R}^d.$$

Nous avons alors, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbf{R}^d$:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} F\big(Y_k, X_{k-1}(x)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f\big(Y_k, X_{k-1}(x)\big) - Rf\big(Y_k, X_{k-1}(x)\big) \\ &= f(Y_1, x) - f\big(Y_n, X_{n-1}(x)\big) + \sum_{k=1}^{n-1} f\big(Y_{k+1}, X_k(x)\big) - Rf\big(Y_k, X_{k-1}(x)\big) \\ &= U_n(x) + T_n(x). \end{aligned}$$

Par définition de R, nous constatons que $(T_n(x))_{n\geqslant 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$-martingale pour tout x de $\mathbf{R}^d$. Nous ne pouvons cependant pas appliquer directement les théorèmes 3 et 4 car nous n'avons pas un processus stationnaire (hypothèse du théorème 3) et nous ne pouvons pas estimer directement les quantités $\varphi_p(l)$ intervenant dans les hypothèses du théorème 4. Nous allons donc nous placer dans un premier temps sous la probabilité stationnaire ν et nous utiliserons le point $iv)$ du lemme 3 pour conclure.

Considérons donc l'espace de probabilité suivant :

$$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}) = \big(\mathbf{R}^d \times \Omega,\ \mathcal{B}\big(\mathbf{R}^d\big) \otimes \mathcal{F},\ \nu \otimes \mathbb{P}\big).$$

Nous choisissons comme processus $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 1}$, le processus :

$$\widetilde{X}_n = f\big(Y_{n+1}, X_n(.)\big) - Rf\big(Y_n, X_{n-1}(.)\big) \quad \forall n \geqslant 1.$$

Nous prenons $(\widetilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_{n+1}))_{n\geqslant 1}$ comme filtration.
Nous allons établir que sous l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$ (resp. sous l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau^\infty)$) le processus $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie les conditons d'application du théorème 3 (resp. du théorème 4). Remarquons que le processus $(Y_{n+1}, Y_n, X_{n-1}(.))_{n\geqslant 1}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition Q définie par :

$$Q\psi(g, g', x) = \int_G \psi(y, g, g' \cdot x)\, \mu(dy) \quad \forall (g, g', x) \in G^2 \times \mathbf{R}^d.$$

Remarquons aussi que, si ϕ est la fonction définie sur $G^2 \times \mathbf{R}^d$ par $\phi(g, g', x) = f(g, g' \cdot x) - Rf(g', x)$, pour tout (g, g', x) de $G^2 \times \mathbf{R}^d$, alors $\widetilde{X}_n = \phi(Y_{n+1}, Y_n, X_{n-1}(.))$ pour tout $n \geqslant 1$.

4.2. Preuve du théorème 1

Soit F définie sur $G \times \mathbf{R}^d$, vérifiant $(\mathbf{H}_\tau)$ pour un réel $\tau > 0$. Supposons que μ admet un moment d'ordre $3\delta^2\tau$ pour un réel $\delta > 1$.

D'après le lemme 4 (et comme μ admet un moment d'ordre $\delta\tau$), il existe une constante C telle que :

$$\bigl|\phi\bigl(Y_2, Y_1, X_0(.)\bigr)\bigr| \leqslant C\bigl[\bigl(\eta(Y_2) + \|b(Y_2)\|^{\delta\tau}\bigr)\bigl(1 + \|X_1(.)\|^{\delta\tau}\bigr) + \bigl(1 + \|X_1(.)\|^{\delta\tau}\bigr)\bigr] \in L^3(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}})$$

d'après l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau)$.

Le processus $(\widetilde{X}_n)_{n\geqslant 1}$ est clairement stationnaire et vérifie :

$$\widetilde{\mathbb{E}}\bigl[\widetilde{X}_2 \mid \widetilde{\mathcal{F}}_1\bigr] = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbb{E}}\bigl[\widetilde{X}_1^2\bigr] = 1$$

d'après nos hypothèses de centrage et de normalisation.

Montrons la convergence de la série :

$$\sum_{p\geqslant 1} \bigl\|\widetilde{\mathbb{E}}\bigl[\widetilde{X}_p^2 \mid \widetilde{\mathcal{F}}_1\bigr] - 1\bigr\|_{\frac{3}{2}} < +\infty. \tag{8}$$

Soit χ la fonction définie sur $\mathbf{R}^d$ par :

$$\chi(.) = \int_{G^2} \phi^2(g, g', .)\, \mu(dg)\, \mu(dg').$$

D'après le lemme 4, χ est dans $E_{2\delta\tau}$ et il existe une constante C telle que :

$$\sup_{\|x-y\|\leqslant\rho^n} \frac{\chi(x) - \chi(y)}{1 + \|x\|^{2\delta\tau}} \leqslant C\hat{\beta}_n$$

où $(\hat{\beta}_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite définie au point (iii) du théorème 4.

D'après le lemme 3 et comme μ admet un moment d'ordre $2\delta^2\tau$, il existe une constante C' telle que pour tout $p \geqslant 1$:

$$\bigl|P^p\chi - \nu(\chi)\bigr|_{2\delta^2\tau} \leqslant C'\bigl(\hat{\beta}_p + \varepsilon^p\bigr).$$

De plus, d'après notre hypothèse de normalisation et comme ν est μ-invariante, nous avons $\nu(\chi) = 1$.

D'autre part, pour tout entier $p \geqslant 3$, nous avons :

$$\mathbb{E}\bigl[\widetilde{X}_p^2 \mid \widetilde{\mathcal{F}}_1\bigr] = Q^{p-1}\bigl(\phi^2\bigr)(Y_2, Y_1, .) = P^{p-3}\chi(X_2).$$

Donc, pour tout entier $p \geqslant 3$

$$\bigl\|\widetilde{\mathbb{E}}\bigl[\widetilde{X}_p^2 \mid \widetilde{\mathcal{F}}_1\bigr] - 1\bigr\|_{\frac{3}{2}} \leqslant C'\bigl(\hat{\beta}_{p-3} + \varepsilon^{p-3}\bigr)\bigl\|\, 1 + \|X_2\|^{2\delta^2\tau}\bigr\|_{3/2}.$$

Comme μ admet un moment d'ordre $3\delta^2\tau$ et comme la série $(\hat{\beta}_p)_{p\geqslant 1}$ converge donc la série (8) converge.

D'après le théorème 3, nous obtenons alors

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \left|\mathbb{P}_\nu\left[\frac{1}{\sqrt{n}} T_n(.) \leqslant t\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du\right| \leqslant Cn^{-1/4}. \tag{9}$$

Ecrivons, pour tout couple (x, y) de $(\mathbf{R}^d)^2$:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= T_n(y) + (S_n(x) - S_n(y)) + U_n(y)) \\ &= T_n(y) + V_n(x, y) \quad \forall n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Soit α un réel ($\frac{1}{4} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$). Supposons que

$$\sup_{n \geqslant 1} \mathbb{E}\big[|V_n(x, y)|^q\big] \leqslant C(x, y) \tag{10}$$

où $q = 2\alpha/(1 - 2\alpha)$. Alors, pour tout réel t, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n(x) \leqslant t\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} T_n(y) \leqslant t + n^{-\alpha}\right) + \mathbb{P}\big(\big|V_n(x, y)\big| \geqslant n^{\frac{1}{2}-\alpha}\big) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} T_n(y) \leqslant t + n^{-\alpha}\right) + n^{-\alpha} C(x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

Prenons $\alpha = 1/4$. Alors $q = 1$ et d'après le lemme 3 (point iv)) et puisque μ admet un moment d'ordre $\delta\tau$, nous pouvons choisir $C(x, y) = D(1 + (\|x\| + \|y\|)^{\delta\tau})$, pour une constante $D > 0$.

Intégrons la relation (11) par rapport à y contre la mesure ν et utilisons (9). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n(x) \leqslant t\right) \leqslant{}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du + C n^{-1/4} \\ &+ n^{-1/4}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \int_{\mathbf{R}^d} \big(1 + (\|x\| + \|y\|)^{\delta^2\tau}\big)\, \nu(dy)\right). \end{aligned}$$

L'inégalité inverse se montre de même. Ce qui achève la preuve du théorème 1. □

4.3. Preuve du théorème 2

Nous supposons à présent que F vérifie l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau^\infty)$ et que μ admet des moments de tout ordre.

Nous considérons le même processus $(\widetilde{X}_n)_{n \geqslant 1}$ et le même espace de probabilité que dans la preuve du théorème précédent.

Comme μ admet des moments de tout ordre, donc $(\widetilde{X}_n)_{n \geqslant 1}$ est borné dans $L^p(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbb{P}})$, pour tout $p > 0$. De plus $\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{X}_2 \mid \widetilde{\mathcal{F}}_1] = 0$ et $\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{X}_1^2] = 1$. Il ne nous reste donc plus qu'à établir la décroissance rapide des suites $(\phi_p(l))_{p \geqslant 1}$ dont nous rappelons la définition : pour tout r-uplet $l = (l_1, \ldots, l_r)$, la suite $(\phi_p(l))_{p \geqslant 1}$, est définie par

$$\phi_p(l) = \sup_{\{k \in \mathbf{N}:\ p \leqslant p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_r\}} \big\|\widetilde{\mathbb{E}}\big(\widetilde{X}_{k+p_1}^{l_1} \ldots \widetilde{X}_{k+p_r}^{l_r} \mid \widetilde{\mathcal{F}}_k\big) - \widetilde{\mathbb{E}}\big(\widetilde{X}_{k+p_1}^{l_1} \ldots \widetilde{X}_{k+p_r}^{l_r}\big)\big\|_2.$$

Soit k, p et r des entiers plus grand que 1. Soit $l = (l_1, \ldots, l_r)$ et $(p_1, \ldots, p_r)$ des r-uplets d'entiers plus grand que 1, avec $p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_r$. Nous avons :

$$\widetilde{\mathbb{E}}\big(\widetilde{X}_{k+p_1}^{l_1} \ldots \widetilde{X}_{k+p_r}^{l_r} \mid \widetilde{\mathcal{F}}_k\big) = Q^p \psi\big(Y_{k+1}, Y_k, X_{k-1}(x)\big)$$

où nous avons posé :

$$\psi(g,g',x) = \left(Q^{p_1-p}\left(\phi^{l_1}Q^{p_2-p_1}\left(\phi^{l_2}\dots Q^{p_r-p_{r-1}}\phi^{l_r}\right)\right)\right)(g,g',x).$$

Soit alors la fonction Ξ définie sur $\mathbf{R}^d$ par :

$$\Xi(.) = \int_{G^2} \psi(g,g',.)\,\mu(dg)\,\mu(dg').$$

Sachant que F vérifie l'hypothèse $(\mathbf{H}_\tau^\infty)$ et que μ admet des moments de tout ordre, nous voyons qu'il existe une constante C et une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à décroissance rapide telles que si l'on note $\pi = \tau(l_1+\cdots+l_r)$:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} \frac{\Xi(x)}{1+\|x\|^\pi} \leqslant C, \tag{12}$$

$$\sup_{\|x-y\|\leqslant\rho^n} \frac{|\Xi(x)-\Xi(y)|}{1+\|x\|^\pi} \leqslant u_n \quad \forall n\geqslant 1. \tag{13}$$

Notons que, l'entier r étant fixé, la constante C et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ peuvent etre choisies indépendemment du r-uplet $(p_1,\dots,p_r)$.

Comme ν est μ-invariante, nous avons, pour tous $p\geqslant 2$, $k\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}&\left\|\widetilde{\mathbb{E}}\left(\widetilde{X}^{l_1}_{k+p_1}\dots\widetilde{X}^{l_r}_{k+p_r} \mid \mathcal{F}_k\right) - \widetilde{\mathbb{E}}\left(\widetilde{X}^{l_1}_{k+p_1}\dots\widetilde{X}^{l_r}_{k+p_r}\right)0\right\|_2\\ &\quad = \left(\int_{\mathbf{R}^d}\left(\left(P^{p-2}\Xi\right)(x)-\nu(\Xi)\right)^2\nu(dx)\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 3, et comme μ admet des moments de tout ordre, nous voyons que la suite $(\phi_p)_{p\geqslant 1}$ est à décroissance rapide. Nous pouvons donc appliquer le théorème 4. Nous en déduisons un TCL avec vitesse, en régime stationnaire ; c'est-à-dire sous la probabilité $\mathbb{P}_\nu$:

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\mathbb{P}_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(T_n(.)\right)\leqslant t\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right| \leqslant \frac{A_n}{\sqrt{n}} \tag{14}$$

où $A_n = \mathrm{o}(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon>0$.

Soit α et δ des réels avec $1/4\leqslant\alpha<1/2$ et $\delta>1$. Comme μ admet un moment d'ordre $2\delta\tau\alpha/(1-2\alpha)$, d'après le lemme 3, l'estimation (10) est vérifiée avec $C(x,y) = D(1+(\|x\|+\|y\|)^{2\delta\tau\alpha/(1-2\alpha)})$, pour une constante $D>0$.

Intégrons alors la relation (11) par rapport à y contre la mesure $\mathbb{P}_\nu$ et utilisons le (14), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n(x)\leqslant t\right) &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du\\ &\quad + \frac{A_n}{\sqrt{n}} + n^{-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \int_{\mathbf{R}^d}\left(1+\left(\|x\|+\|y\|\right)^{\frac{2\delta\tau\alpha}{1-2\alpha}}\right)\nu(dy)\right).\end{aligned}$$

L’inégalité inverse se montre de même et le résultat annoncé est prouvé. □

RÉFÉRENCES

[1] R. Durrett, Probability: Theory and Examples, Duxburry Press, 1996.
[2] E. Haeusler, On the rate of convergence in the central limit theorem for martingales with discrete and continuous time, Ann. Probab. 16 (4) (1988) 275–299.
[3] H. Hennion, L. Hervé, Limit Theorems for Markov Chains and Stochastic Properties of Dynamical Systeme by Quasi-compactness, in: Lecture Note In Mathematics, Vol. 1766, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
[4] H. Hennion, L. Hervé, Théorèmes de type central limite pour les chaînes de Markov associées à un noyau lipschitzien, en préparation.
[5] C. Jan, Vitesse de convergence dans le TCL pour des processus associés à des systèmes dynamiques ou des produits de matrices aléatoires, Thèse de doctorat de l’université de Rennes.
[6] C. Jan, Vitesse de convergence dans le TCL pour des chaînes de Markov et certains processus associés à des systèmes dynamiques, CRAS, Série I 331 (2000) 395–398.
[7] G. Keller, C. Liverani, Stability of the spectrum for transfer operator, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. CI. Sci. XXVIII (4) (1999) 141–152.
[8] X. Milhaud, A. Raugi, Etude de l’estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas d’un processus autorégressif: convergence, normalité asymptotique, vitesse de convergence, Ann. Inst. Henri Poincaré 25 (4) (1989) 383–428.
[9] E. Rio, Sur le théorème de Berry–Esseen pour les suites faiblement dépendantes, Probab. Theory Related Fields 104 (1996) 255–282.