ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

Y. LE JAN

Équilibre statistique pour les produits de difféomorphismes aléatoires indépendants

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº 1 (1987), p. 111-120
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_1_111_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 23, n° 1, 1987, p. 111-120. *Probabilités et Statistiques*

Équilibre statistique pour les produits de difféomorphismes aléatoires indépendants

par

Y. LE JAN
Université Paris 6, Laboratoire de Probabilités,
4, place Jussieu, Tour 56, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Étant donnée une suite de difféomorphismes aléatoires i. i. d., on étudie les propriétés de la mesure aléatoire stationnaire associée en fonction des exposants de Lyapounov du flot.

ABSTRACT. — Given a sequence of i. i. d. random diffeomorphisms we study properties of the associated stationnary random measure related to the Lyapounov exponents of the system.

Liste de mots-clés : Flots stochastiques, Exposants de Lyapounov, Mesures aléatoires.
Classification AMS : 60 G 57, 60 J 30.

1) Soit V une variété riemannienne compacte de dimension d, G le groupe des difféomorphismes de V et ν une probabilité sur G.

Notons P le noyau markovien défini par l'identité $Pf(x) = \int_G f(Tx)\nu(dT)$, f étant une fonction borélienne positive quelconque.

Soit m une probabilité P-invariante sur V. Nous supposerons P ergodique dans $L^1(m)$.

Posons $\Omega = G^Z$. Nous notons T_i les applications coordonnées et τ l'opérateur de translation naturel sur $\Omega : T_i(\tau\omega) = T_{i+1}(\omega)$.

Ω est toujours supposé muni de la probabilité produit $\mathbb{P} = \nu^{\otimes Z}$. Notons $\Pi(V)$ le convexe des probabilités sur V.

LEMME 1. — a) *Pour presque tout $\omega \in \Omega$, les mesures images de m par $T_0 \circ T_{-1} \dots \circ T_{-n}(\omega)$ convergent vaguement vers une mesure $\mu_\omega \in \Pi(V)$.*

b) *Les mesures images de m par $S_n(\omega) = T_n \circ T_{n-1} \dots \circ T_1(\omega)$ convergent en loi vers μ_ω.*

Preuve. — *a*) Pour tout borélien $B \subset V$, $M_n^B(\omega) = m(T_{-n}^{-1} \dots T_0^{-1}(B))$ est une martingale positive bornée par 1, qui converge p. s. et dans L^1 vers M_∞^B, avec $E(M_\infty^B) = m(B)$.

On vérifie que $M_\infty^B = 0$ P p. s. si $m(B) = 0$ et que $\Sigma M_\infty^{B_i} = M_\infty^{0B_i}$ si B_i est une suite d'ensembles deux à deux disjoints. D'après [N], V.4.3-4, on obtient l'existence d'une probabilité de transition $\mu_\omega(dx)$.

b) S_{n+1} et $T_0 \circ T_{-1} \dots \circ T_{-n}$ ont même loi.

On a $\mu_{\tau^n\omega} = S_n(\omega)\mu_\omega$ (mesure image). Les mesures $\mu_{\tau^n\omega}$ forment une chaîne de Markov stationnaire sur $\Pi(V)$. Nous appelons la loi de μ_ω l'équilibre statistique associé à ν (cf. [L1] [L2] [L3] [L4]).

Sur $V \times \Omega$, on définit une probabilité $Q(dx, d\omega) = \mu_\omega(dx)\mathbb{P}(d\omega)$, et une transformation $\theta : \theta(x, \omega) = (T_1(\omega)x, \tau\omega)$.

Puisque $\mu_{\tau\omega} = T_1(\omega)\mu_\omega$, θ préserve Q et elle est ergodique du fait de l'ergodicité de P dans $L^1(m)$.

2) Jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé la différentiabilité des transformations. Supposons maintenant :

H1. $$\int_G \nu(dT) \int_V m(dx) \operatorname{Log}^+(\| DT(x) \|) \quad \text{est fini}.$$

Posons $B(x, \omega) = [DT_1(\omega)](x)$. Par simple application du théorème ergodique sous additif et du théorème ergodique, on sait que, si $B^{(m)} = B \circ \theta^{m-1} \dots B \circ \theta . B$, $\frac{1}{m}\operatorname{Log}(\| B^{(m)} \|)$ et $\frac{1}{m}\operatorname{Log}(\det B^{(m)}|)$ convergent p. s. vers λ et α avec $d\lambda \geqslant \alpha \geqslant -\infty$ et $\alpha = \iint \nu(dT)m(dx) \operatorname{Log}(|\det(DT(x))|)$ (les espaces tangents étant munis de la structure euclidienne induite par la métrique).

Notons $\rho(dx)$ l'élément de volume riemannien sur V.

N. B. — λ est le plus grand exposant caractéristique et α la somme des exposants.

PROPOSITION 1. — a) *Si $\alpha < 0$, μ_ω est $\mathbb{P}$ p. s. étrangère à ρ.*

b) *Si m est équivalente à ρ, α est négatif ou nul. α est nul si et seulement* *si ν est portée par les difféomorphismes qui préservent m (ce qui implique que $\mu_\omega = m$).*

Preuve. — *a*) Posons $h(x, \omega) = \dfrac{d\mu_\omega}{d\rho}(x)$. L'identité $\mu_{\tau^n\omega} = \mathrm{S}_n(\omega)\mu_\omega$ entraîne, du fait que S_n est un difféomorphisme, que :

$$h(x, \tau^n\omega)\rho(dx) = \mathrm{S}_n(\omega)(h(x, \omega)\rho(dx))\,;$$

c'est-à-dire que pour tout $f \in \mathrm{C(M)}$,

$$\int f(\mathrm{S}_n x)h(x, \omega)\rho(dx) = \int f(x)h(x, \tau^n\omega)\rho(dx) = \int f(\mathrm{S}_n x)h(\mathrm{S}_n x, \tau^n\omega)\,|\det(\mathrm{DB}^{(n)}(x, \omega)|\,\rho(dx)$$

P. p. s. (par changement de variable).

Donc $\quad h(x, \omega) = h(\theta^n(x, \omega)\,|\det(\mathrm{DB}^{(n)}(x, \omega))|\,\rho \otimes \mathbb{P} \quad$ p. s.

Supposons $\mathrm{E}\left(\int h(x, \omega)\rho(dx)\right) = k > 0$. Posons $\tilde{\mathrm{Q}} = \frac{1}{k}h(x, \omega)\rho(dx)\mathbb{P}(d\omega)$. L'identité ci-dessus est aussi valable $\tilde{\mathrm{Q}}$ p. s. Vu que

$$h(x, \tau\omega)\rho(dx) = \mathrm{T}(\omega)(h(x, \omega)\rho(dx))\,,$$

θ préserve $\tilde{\mathrm{Q}}$, h et $h \circ \theta^n$ ont même loi sous $\tilde{\mathrm{Q}}$. Par ailleurs

$$\det|(\mathrm{DB}^{(n)}(x, \omega))| \to 0$$

Q. p. s. et donc $\tilde{\mathrm{Q}}$ p. s. On en déduit que $h = 0$ $\tilde{\mathrm{Q}}$ p. s. d'où une contradiction.

b) Posons $f(x) = \dfrac{dm}{d\rho}(x)$ et $\mathrm{F}(x, \omega) = |\det(\mathrm{B}(x, \omega))|$.

On a
$$\alpha = \int \mathrm{Log}(\mathrm{F})d\mathrm{Q}\,.$$

Par ailleurs, vu que $\int f(\mathrm{T}(x)\,|\det(\mathrm{DT}(x))|\,\rho(dx) = 1$ pour tout difféomorphisme T,

on a
$$\int \mathrm{F}(x, \omega)(f(\mathrm{T}_1(\omega)x)/f(x))m(dx) = 1$$

et donc, du fait que $\mathrm{T}_1(\omega)$ et μ_ω sont indépendantes,

$$\int \mathrm{F}(x, \omega)(f(\mathrm{T}_1(\omega)x)/f(x))\mathrm{Q}(dx, d\omega) = 1\,,$$

ou $$\int \mathrm{F}.(\tilde{f} \circ \theta / \tilde{f}) d\mathrm{Q} = 1 \quad \text{avec} \quad \tilde{f}(x, \omega) \equiv f(x).$$

Par l'hypothèse H1, $\mathrm{Log}^+ \mathrm{F}$ est Q-intégrable. Par ailleurs si

$$\int |\mathrm{Log}\, \tilde{f}\,| d\mathrm{Q} = \int_{\mathrm{V}} f(x)\,|\,\mathrm{Log}\, f(x)\,|\,\rho(dx)$$

est fini, l'inégalité de Jensen s'écrit

$$0 = \mathrm{Log}\left(\int [\mathrm{F}.(\tilde{f} \circ \theta)/\tilde{f}\,] d\mathrm{Q}\right) \geqslant \int \mathrm{Log}\,(\mathrm{F}) d\mathrm{Q} = \alpha$$

$\left(\text{du fait que } \theta \text{ préserve Q, } \int \mathrm{Log}\,(\tilde{f} \circ \theta)/\tilde{f}) d\mathrm{Q} = 0\right)$.

On a égalité si et seulement si $\mathrm{F}.(\tilde{f} \circ \theta)/\tilde{f} = 1$ Q p. s. c'est-à-dire que $|\det(\mathrm{DT}(x))|\,.\,f(\mathrm{T}x)/f(x) = 1$ $m \otimes v$ p. s. On en déduit que pour tout $g \in \mathrm{C(V)}$,

$$\int g(x) m(dx) = \int g(\mathrm{T}x) f(\mathrm{T}x) |\det(\mathrm{DT}(x))|\, \rho(dx) = \int g(\mathrm{T}(x)) m(dx) \quad v \text{ p. s.}$$

et donc, $\mathrm{T}m = m$ v p. s.

Dans le cas où $\int |\,\mathrm{Log}\,(f(x))\,|\, f(x) \rho(dx)$ n'est pas fini, un argument supplémentaire est nécessaire.

LEMME 2. — *Soit θ une transformation ergodique sur* $(\mathrm{X}, \mathscr{F}, \mathrm{Q})$. *Soient* $\mathrm{F} > 0$ *et* $h > 0$ *tels que*

$$\int (\mathrm{F}.h \circ \theta / h) d\mathrm{Q} = 1 \quad \text{et} \quad \int \mathrm{Log}^+ (\mathrm{F}) d\mathrm{Q} < \infty.$$

On a $\int \mathrm{Log}\,(\mathrm{F}).d\mathrm{Q} \leqslant 0$ *avec égalité si et seulement si* $\mathrm{G} = \mathrm{F}.h \circ \theta / h = 1$ Q *p. s.*

Preuve. — Pour tout $x \in \mathrm{X}$, notons $\mu_n^x(dy)$ la mesure $\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n} \delta_{\theta_x^m}(dy)$ $\lim\limits_{n \to \infty} \int \mathrm{G} d\mu_n^x = 1$ Q p. s. d'après le théorème ergodique.

Donc $0 \geqslant \lim\limits_{n \to \infty} \int \mathrm{Log}\,(\mathrm{G}) d\mu_n{}^x$.

Or $\operatorname{Log}(G) = \operatorname{Log}(F) + \operatorname{Log}(h \circ \theta) - \operatorname{Log} h$, et donc

$$\int \operatorname{Log}(G) d\mu_n^x = \int \operatorname{Log}(F) d\mu_n^x + \frac{1}{n}\left[\operatorname{Log}(h \circ \theta^{n+1}(x)) - \operatorname{Log}(h(x))\right].$$

Définissons une sous-suite infinie $n_k(x)$ en posant par exemple $n_0 = 0$; $n_{k+1} = \inf(m > n_k, h(\theta^{m+1}x) < \sqrt{m})$.

L'inégalité procède alors du fait que $\lim\limits_{k\to\infty} \int \operatorname{Log}(F) d\mu_{n_k}^x = \int \operatorname{Log}(F) dQ$ Q p. s. Pour le cas d'égalité, raisonnons par l'absurde :

Si $Q(\{ G \neq 1 \}) > 0$, il existe $a < 0$, $\int \operatorname{Log}(G) dQ < a$ et donc Q p. s. il existe $N(x)$, $\int \operatorname{Log}(G) d\mu_n^x < a/2$ pour tout $n > N(x)$. Il suffit de choisir n assez grand dans la suite $n_k(x)$ pour pouvoir conclure.

b) a été établi dans [B2], sous l'hypothèse que f est de classe C^2 et dans le cas d'un flot stochastique.

3) Nous introduisons maintenant une hypothèse supplémentaire.

Notons 2I le rayon d'injectivité de V et posons :

$$\delta_1(T) = \sup\left(d(T_x, T_y)/\|\exp_x^{-1} y\|\right), (x, y) \in V^2, 0 < d(x, y) \leqq I)$$

et $$\delta_2(T) = \sup\left(\|\exp_{T_x}^{-1}(Ty) - DT(x)\exp_x^{-1}(y)\| / \|\exp_x^{-1}(y),\right.$$
$$(x, y) \in V^2, 0 < d(x, y) \leqq I, d(T(x), T(y)) \leqq I).$$

On suppose vérifiée :

H2 $$\int \log^+(\delta_1(T) + \delta_2(T))\nu(dT) < \infty .$$

L'hypothèse H2, et *a fortiori* l'hypothèse H1, est assez peu restrictive. Elle est en particulier vérifiée lorsque dans un système de cartes, la norme uniforme des dérivées premières et secondes est ν-intégrable. C'est le cas lorsque ν est à support fini ou lorsqu'elle est induite par un flot brownien (cf. [L.W] [H] [B1] [K] [B] [E]) considéré ou temps 1. Le principe de la preuve consiste alors à utiliser les inégalités de Sobolev.

LEMME 3. — *Si $\lambda < 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, pour (x, ω) en dehors d'un ensemble* E *de* Q*-mesure inférieure à* ε, $\limsup\limits_{n\to\infty} \operatorname{Log}(d(S_n x, S_n y)) \leqq \lambda + \varepsilon$, *dès que $d(x, y) < \delta$.*

Ce résultat est un cas particulier du théorème des variétés stables de Pesin. (Cf. [R] [C]).

Ces résultats étant d'un abord assez difficile, donnons une preuve simple de ce lemme. (Elle emprunte son principe à Pesin).

D'après l'hypothèse H2 et le théorème de Birkhoff,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log}^+ (\delta_1(T_n) + \delta_2(T_n)) = 0 .$$

Fixons ε, $\lambda 10^{-9} > \varepsilon > 0$. Il existe $A^\varepsilon(\omega)$, $\infty > A^\varepsilon > 0$, tel que $\delta_1(T_n) + \delta_2(T_n) \leqq A^\varepsilon e^{n\varepsilon}$ P-p. s. On a vu que $\operatorname{Log}(\| DS_n \|)/n$ converge vers λ Q-p. s. d'après le théorème ergodique sous additif.

Un corollaire de ce théorème (cf. [R2] p. 288) montre que si l'on pose :

$$C^\varepsilon(x, \omega) = \sup_{n \geqq 0} \operatorname{Log}(\| DS_n \|) - n\lambda - n\varepsilon ,$$

il existe $B^\varepsilon(x, \omega)$, $\infty > B^\varepsilon > 0$, tel que pour tout entier k, $C^\varepsilon \circ \theta^k \leqq B^\varepsilon + k\varepsilon$.

Pour tout $u \in T_x V$, posons $\delta_{x,\omega}(u) = \sup\limits_{n \geqq 0} (\| DS_n(u) \| e^{-n[\lambda + \varepsilon)})$. On a

$$\| u \| \leqq \delta_{x,\omega} \leqq e^{C_\varepsilon(x,\omega)} \| u \| \quad \text{et} \quad \delta_{\theta(x,\omega)}(DT(u)) \leqq e^{\lambda + \varepsilon} \delta_{x,\omega}(u) .$$

Posons $x_n = S_n(x)$, $y_n = S_n(y)$, $\delta_n = \delta_{(x_n, \tau^n \omega)}$, $V_n = \exp_{x_n}^{-1}(y_n)$ lorsque $d(x_n, y_n) \leqq I$.

Il suffit, pour établir le lemme, de montrer l'existence de $r(x, \omega) > 0$ et d'un entier $N(x, \omega)$ tels que, pour $d(x, y) \leqq r$ et $n \geqq N$, on ait $d(x_n, y_n) \leqq I$ et $\delta_n(V_n) \leqq e^{n(\lambda + 2\varepsilon)}$. Si ces propriétés sont satisfaites, on a :

$$d(x_{n+1}, y_{n+1}) \leqq \delta_1(T_{n+1}) \| V_n \| \leqq A^\varepsilon e^{(n+1)\varepsilon} e^{n(\lambda + 2\varepsilon)}$$

et l'on peut choisir $N(x, \omega)$ assez grand pour que cette quantité soit toujours inférieure à I ;

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1}(V_{n+1}) &\leqq \delta_{n+1}(DT_{n+1}(V_n)) + \delta_{n+1}(V_{n+1} - DT_{n+1}(V_n)) \\
&\leqq e^{\lambda+\varepsilon}\delta_n(V_n) + e^{C^\varepsilon \circ \theta^{n+1}} \| V_{n+1} - DT_{n+1}(V_n) \| \\
&\leqq e^{\lambda+\varepsilon}\delta_n(V_n) + e^{B^\varepsilon + (n+1)\varepsilon}\delta_2(T_{n+1})(\delta_n(V_n))^2 \\
&\leqq e^{n(\lambda+2\varepsilon)}(e^{\lambda+\varepsilon} + A^\varepsilon e^{B^\varepsilon + 2(n+1)\varepsilon} e^{n(\lambda+2\varepsilon)}) .
\end{aligned}$$

On peut choisir $N(x, \omega)$ assez grand pour que cette quantité soit toujours inférieure à $e^{(n+1)(\lambda+2\varepsilon)}$, ensuite $r(x, \omega)$ de manière à avoir $\delta_N(V_N) \leqq e^{N(\lambda+2\varepsilon)}$.

La propriété est alors établie par récurrence.

Lorsque $\int \operatorname{Log}^+ (\| DT^{-1} \| \nu(dT) < \infty$, on peut indiquer une autre démonstration, fondée sur le théorème d'Oseledetz (cf. [L]). Soit λ_k la suite des exposants caractéristiques du système, rangés par ordre décroissant. Par hypothèse $\lambda_d > -\infty$. Soit $E_k(x, \omega)$ la filtration correspondante de T_xV.

$$\text{Posons } \tilde{D}T(x, \omega) = DT\left(I + \sum_{k \geq 2}(e^{-\lambda_k + \lambda_1} - e^{-\lambda_{k-1} + \lambda_1})P_{E_k(x,\omega)}\right)$$

$$= \left(I + \sum_{k \geq 2}(e^{-\lambda_k + \lambda_1} - e^{\lambda_1 - \lambda_{k-1}})P_{E_k(Tx,\tau\omega)}\right)DT.$$

D'après le théorème d'Oseledetz, $\exists D^\varepsilon(\omega, x) > 0$ tel que :

$$\| \tilde{D}S_n \| \leqq D^\varepsilon e^{(\lambda+\varepsilon)n} \quad \text{et} \quad \| \tilde{D}S_n^{-1} \| \leqq D^\varepsilon e^{(-\lambda+\varepsilon)n}.$$

On pose $\tilde{D}S_n^{-1}(V_n) = U_n$. Il suffit de montrer l'existence de $r(x, \omega)$ et $N(x, \omega)$ tels que pour $n \geqq N$ et $d(x, y) \leqq r$, $d(x_n, y_n) \leqq I$ et $\| U_n \| \leqq e^{n\varepsilon}$, (ce qui implique $\| V_n \| \leqq D_\varepsilon e^{(\lambda+2\varepsilon)n}$). On peut choisir N de manière à avoir $d(x_{n+1}, y_{n+1}) \leqq \delta_1(T_{n+1}) \| V_n \| \leqq I$. De plus

$$\| U_{n+1} \| \leqq \| \tilde{D}S_{n+1}^{-1} DT_{n+1}(V_n) \| + \| \tilde{D}S_{n+1}^{-1} \| \| DT_{n+1}(V_n) - V_{n+1} \| .$$

Le premier terme égale $\| \tilde{D}T^{-1} \circ DT(U_n) \| \leqq \| U_n \| \leqq e^{n\varepsilon}$, et le deuxième est majoré par

$$\delta^2(T_{n+1}) \| V_n \|^2 \| \tilde{D}S_{n+1}^{-1} \| \leqq A^\varepsilon e^{(n+1)\varepsilon}(D^\varepsilon e^{(\lambda+\varepsilon)n})^2 D^\varepsilon e^{(-\lambda+\varepsilon)n} \leqq e^{(n+1)\varepsilon} - e^{n\varepsilon}$$

pour N assez grand, ce qui permet de conclure.

PROPOSITION 2. — *Si $\lambda < 0$, μ_ω est p. s. constituée d'un nombre fini de mesures ponctuelles de même masse.*

a) Si $n \in N^*$ et $[ab] \subset R^+$, $D(n, a, b) = \{ \omega, \mu_\omega$ possède n atomes de masse comprise dans l'intervalle $[ab] \}$ est un ensemble mesurable τ-invariant, puisque $\mu_{\tau\omega} = T_1(\omega)\mu_\omega$. $\mathbb{P}(D(n, a, b))$ est donc 0 ou 1.

Les masses des atomes de μ_ω sont donc constantes ainsi que le nombre d'atomes de même masse.

Soit m une de ces masses. Posons $F_m = \{ (x, \omega), \mu_\omega(x) = m \}$. Du fait que $\mu_{\tau\omega} = T_1(\omega)\mu_\omega$, on vérifie que F_m est un ensemble θ-invariant. On a donc $Q(F_m) = 1$ et tous les atomes de μ_ω ont donc même masse, la somme de ces masses étant nécessairement égale à 1 (cf. [P] § IV.2).

b) Montrons maintenant que μ_ω ne peut être diffuse.

Soit ψ une fonction positive et mesurable, définie sur $V^2 - \Delta$, telle que $\psi(x, y) \to +\infty$ si $d(x, y) \downarrow 0$ et telle que :

$$E\left(\iint_{V^2-\Delta} \psi(x, y)\mu_\omega(dx)\mu_\omega(dy)\right) < \infty .$$

Pour tout n, cette expression égale :

$$E\iint_{V^2-\Delta} \psi(x,y)\mu_{\tau^n\omega}(dx)\mu_{\tau^n\omega}(dy)\Big)$$

$$= E\left(\iint_{V^2-\Delta} \psi(S_n(\omega)x, S_n(\omega)y)\mu_\omega(dx)\mu_\omega(dy)\right)$$

$$\geqslant E\left(\iint_{V^2-\Delta} \psi(S_n x, S_n y)1_{\{d(x,y)<\delta\}}1_{E^c(x,\omega)}\mu_\omega(dx)\mu_\omega(dy)\right)$$

où E a été défini dans le lemme précédent (nous fixons $0 < \varepsilon < 1$). Mais $\psi(S_n x, S_n y) \to +\infty$ lorsque $(x,\omega) \in E^c$ et $d(x,y) < \delta$.

Il reste donc à montrer que si μ_ω est diffuse,

$$E\left(\iint_{V^2-\Delta} 1_{E^c(x,\omega)}1_{\{d(x,y)<\delta\}}\mu_\omega(dx)\mu_\omega(dy)\right) > 0\,.$$

Or $$E\left(\int 1_{E^c}(x,\omega)\mu_\omega(dx)\right) = Q(E^c) > 1 - \varepsilon\,.$$

Mais si μ_ω est diffuse, $\displaystyle\int_{0<d(x,y)<\delta} \mu_\omega(dy) > 0$ μ_ω p. s., ce qui permet de conclure.

Exemple. — Si T est un difféomorphisme de S_1, notons T_θ la transformation conjuguée $R_\theta T R_{-\theta}$.

Prenons $V = S_1$ et $\nu = \displaystyle\int_{S_1} d\theta\delta_{T_\theta}$. m est alors la mesure de Lebesgue sur S_1, et on a $\lambda = \alpha = \displaystyle\int_{S_1} \operatorname{Log}(|T'(\theta)|)d\theta \leqslant 0$.

$\lambda = 0$ si et seulement si T est une rotation. Dans le cas contraire, la *proposition 2* s'applique.

Lorsque T commute avec une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$, μ_a est constitué de n points. Un cas plus général est traité dans [Ka].

4) Appendice.

Supposons toujours H2 vérifiée et $\lambda < 0$. La proposition 2 s'applique. Notons Σ_ω le support de μ_ω et posons $n = \operatorname{Card}(\Sigma_\omega)$. Il existe n applications mesurables $\sigma_i : \Omega \to V$ telles que :

$\Sigma_\omega = \{\sigma_i(\omega), i = 1, \ldots, n\}$. On introduit une bijection mesurable entre V et $[0\,1]$ et on prend $\sigma_0(\omega) = \inf(x, \mu_\omega([0\,x]) \neq 0)$, etc.

Définissons le ième domaine d'attraction $V_i(\omega)$ comme

$$\{ y \in V,\ d(S_n y, S_n \sigma_i(\omega)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \}.$$

$V_i(\omega)$ est un ouvert aléatoire de V.

Notons $G_i(\omega)$ la composante connexe contenant $\sigma_i(\omega)$, c'est aussi un ouvert aléatoire.

Il est clair que le n-uplet $G_i(\tau\omega)$ est une permutation (dépendant de ω) de $(T_1(\omega)G_i(\omega))$.

Proposition 3. — *$m(G_i) = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in \{1, 2 \ldots n\}$.*

Preuve. — Posons $\mu_\omega^{[n)} = [T_0 \circ \ldots \circ T_{-n}(\omega)](m)$.

On sait que $\mu_\omega^{(n)}$ converge étroitement vers μ_ω pour presque tout ω. En particulier, quel que soit i, $\mu_\omega^{(n)}(G_i(\omega))$ converge vers $\frac{1}{n}$P p. s. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $E \subseteq \Omega$, avec $P(E) < \varepsilon$, et il existe un entier N tels que $\mu_\omega^{(N)}(G_i(\omega)) > \frac{1}{n} - \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $\omega \notin E$.

On a donc $m(T_{-N}^{-1} \circ \ldots \circ T_0^{-1}(\omega)(G_i(\omega)) > \frac{1}{n} - \varepsilon$ pour tout i et $\omega \notin E$.

Or la famille d'ouverts $\{ T_{-N}^{-1} \circ \ldots \circ T_0^{-1}(\omega)G_i(\omega),\ i = 1, \ldots, n \}$ est identique à la famille $\{ G_j(\tau^{-N}\omega), j = 1, \ldots, n \}$.

On a donc $m(G_j(\tau^{-N}\omega)) > \frac{1}{n} - \varepsilon$ pour tout j et $\omega \notin E$, c'est-à-dire $m(G_i(\omega)) > \frac{1}{n} - \varepsilon$ pour tout i et $\omega \notin \tau^{-N}(E)$. ε étant arbitraire, la proposition en résulte.

Lorsque $M = S_1$, si pour toute rotation R_θ, $R_\theta T R_{-\theta}$ a même loi que T, m est la mesure de Lebesgue. T commute ν-p. s. avec $R_{\frac{2\pi}{n}}$ si et seulement si le support de μ_ω est constitué de n points. (Ceci résulte de l'invariance par rotation et de l'indépendance entre μ_ω et l'ensemble des n intervalles d'attraction.)

L'auteur tient à remercier F. Ledrappier, J. P. Thouvenot, G. Royer et un référé anonyme pour l'aide qu'ils ont apportée à l'élaboration de ce travail. On pourra pour certains résultats se référer à l'ouvrage tout récent de Kifer [Ki] dont nous avons eu connaissance après l'achèvement de ce travail. Ces résultats ont été annoncés dans une note (CRAS Paris, t. 302, série I, pages 351-354).

RÉFÉRENCES

[B1] P. BAXENDALE, Brownian motion in the diffeomorphism group I. *Compositio Math.*, t. **53**, 1984, p. 19-50.

[B2] P. BAXENDALE, *The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms.* Preprint.

[Bi] J. M. BISMUT, Mécanique aléatoire. *Lectures notes n° 866*, Springer, 1981.

[C] A. P. CARVERHILL, Flows of stochastic dynamical systems: ergodic theory, *Stochastics*, t. **14**, 1985, p. 273-318.

[E] K. D. ELWORTHY, *Stochastic differential equations on manifolds.* Cambridge University Press. 1982.

[H] T. H. HARRIS, Brownian motion on the homeomorphisms of the plane, *Ann. Probab.*, t. **9**, 1981, p. 232-254.

[Ka] T. KAIJSER, *On iterations of random mappings of the Institut Mittag Leffler.* Report n° 18, 1984.

[Ki] Y. KIFER, *Ergodic theory of random transformations. Progress in probability and statistics.* Birkhauser, 1986.

[K] H. KUNITA, Stochastic flows of diffeomorphisms. École d'Été de Probabilités de St-Flour XII. *Lecture notes*, n° 1097. Springer, 1984.

[L] F. LEDRAPPIER, École d'Été de St-Flour, 1982. *Lectures notes in mathematics*, n° 1097, Springer.

[L1] Y. LE JAN, Equilibrium state for turbulent flows of diffusion. Infinite dimensional analysis and stochastic processes. *Pitman notes*, 124, 1985.

[L2] Y. LE JAN, Équilibre et exposants de Lyapunov de certains flots browniens. *C. R. A. S. Paris*, t. **398**, Série I, 1984, p. 361-364.

[L3] Y. LE JAN, On isotropic brownian motions. *Z. F. W.*, t. **70**, 1985, p. 609-620.

[L4] Y. LE JAN, Hausdorff dimension for the statistical equilibrium of stochastics flows *Proceedings of the BIBOS conference.* 1984. *Lecture Notes*, n° 1158, Springer.

[LW] Y. LE JAN, S. WATANABE, *Stochastic analysis.* Proceedings of the Taniguchi symposium 1982. North Holland, 1984.

[N] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Masson, Paris, 1964.

[P] W. PARRY, *Entropy and generators in ergodic theory.* Benjamin New-York, Amsterdam, 1969.

[R] D. RUELLE, Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publ. Math. IHES*, t. **50**, 1979, p. 275-305.

[R2] D. RUELLE, Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert space. *Annals of Maths*, t. **115**, 1982, p. 243-289.

(Manuscrit reçu le 10 décembre 1985)