

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-LOUIS DUNAU

HENRI SÉNATEUR

Quelles fonctions changent toute loi uniforme en une loi uniforme ?

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, n° 3 (1984), p. 247-250

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_3_247_0

© Gauthier-Villars, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Quelles fonctions changent toute loi uniforme en une loi uniforme ?

par

Jean-Louis DUNAU (*)

Henri SÉNATEUR

Université Paul Sabatier,
Laboratoire de Statistique et Probabilités,
E. R. A.-C. N. R. S. 591, Toulouse

RÉSUMÉ. — Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : pour tout intervalle $[a, b]$, si la variable aléatoire X est de loi uniforme sur $[a, b]$, alors $f(X)$ est de loi uniforme sur un intervalle $[a_1, b_1]$. Nous démontrons qu'une telle application f est affine presque partout.

ABSTRACT. — Consider the measurable function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with the following property: for any interval $[a, b]$, if the random variable X is uniformly distributed on $[a, b]$, then $f(X)$ is uniformly distributed on some interval $[a_1, b_1]$. We prove that such an f is affine almost everywhere.

INTRODUCTION

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$; si f est une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on désigne par $f * \mu$ l'image par f de la mesure μ ; on note $A(\mu)$ l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}$ images de μ par une application affine; on note $F(\mu)$ l'ensemble des applications mesurables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f * A(\mu) \subset A(\mu)$.

(*) I. N. S. A., Toulouse.

En d'autres termes, si la variable aléatoire X est de loi μ , $A(\mu)$ est l'ensemble des lois des variables aléatoires $\alpha X + \beta$ avec α et β réels et $\alpha \neq 0$, et f est dans $F(\mu)$ si quels que soient $\alpha \neq 0$ et β , il existe $\alpha_1 \neq 0$ et β_1 tels que $f(\alpha X + \beta)$ et $\alpha_1 X + \beta_1$ aient la même loi.

Par exemple, si μ est une loi de Cauchy, $F(\mu)$ est un ensemble assez vaste, en pratique paramétré par $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_s$ où $\mathcal{M}_s$ est l'ensemble des mesures positives singulières sur le cercle (voir Letac [1]).

Pour tout μ , il est clair que $F(\mu)$ contient au moins les fonctions affines ; plus précisément $F(\mu)$ contient au moins la classe $T(\mu)$ des fonctions f telles que pour tout v de $A(\mu)$, il existe $\alpha_v \neq 0$ et β_v tels que $f(x) = \alpha_v x + \beta_v$, v — presque partout. J. F. C. Kingman (cité dans [2]) a conjecturé que $F(\mu) \neq T(\mu)$ si et seulement si μ est une loi de Cauchy. Cette conjecture semble tout à fait délicate à montrer ; dans [2] Letac et Pradines vérifient à son appui que $F(\mu) = T(\mu)$ si μ est une loi normale. Nous allons montrer qu'il en est de même si μ est uniforme sur un intervalle. Dans [2] il était mentionné que ceci est aisé à vérifier. G. Letac nous a informé que sa démonstration, après vérification, était incomplète, et c'est le but du présent article de fournir une preuve détaillée.

THÉORÈME. — *Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : pour tout a réel et pour tout $h > 0$, il existe $A(a, h)$ dans $\mathbb{R}$ et $H(a, h) \geq 0$ tels que, si X est une variable aléatoire uniforme sur $[a, a + h]$ alors $f(X)$ est uniforme sur $[A, A + H]$ (avec la convention $f(X) \equiv A$ si $H = 0$). Alors il existe des réels α et β tels que pour presque tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$.*

Démonstration. — Si $a < b$ on note $\mu_{a,b}$ la probabilité uniforme sur $[a, b]$.

S'il existe a réel et $h > 0$ tels que $H(a, h) = 0$ alors $f * \mu_{a,a+h}$ est la mesure de Dirac en A , donc

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f^2(x) dx = A^2 = \left(\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx \right)^2$$

C'est le cas d'égalité de l'inégalité de Schwarz, donc f est presque partout constante sur $[a, a + h]$. Alors pour a_1 et h_1 tels que $a_1 < a < a + h < a_1 + h_1$, $f * \mu_{a_1, a_1 + h_1}$ possède un atome, donc f est presque partout constante sur $[a_1, a_1 + h_1]$ et par conséquent sur $\mathbb{R}$. On supposera donc dans la suite que $H(a, h) > 0$.

Puisque

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx = A + \frac{H}{2}$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{h} \int_a^{a+h} (f(x) - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt)^2 dx = \frac{H^2}{12},$$

alors pour $h > 0$ fixé, l'application $a \mapsto H^2(a, h)$ est absolument continue sur $\mathbb{R}$ et, comme $H > 0$, les applications $a \mapsto H(a, h)$ et $a \mapsto A(a, h)$ sont également absolument continues sur $\mathbb{R}$.

De même, pour a fixé, les applications $h \mapsto H(a, h)$ et $a \mapsto A(a, h)$ sont absolument continues sur $]0, +\infty[$.

Fixons maintenant a , et dérivons par rapport à h l'expression suivante :

$$(1) \quad s \int_a^{a+h} e^{sf(x)} dx = \frac{h}{H} (e^{s(A+H)} - e^{sA});$$

nous avons pour presque tout $h > 0$:

$$se^{sf(a+h)} = \left[\left(\frac{h}{H} \right)' + \left(\frac{h}{H} \right) (A' + H's) \right] e^{s(A+H)} - \left[\left(\frac{h}{H} \right)' + s \frac{h}{H} A' \right] e^{sA}.$$

Utilisons maintenant le fait que si $Q_i(s)$ sont des polynômes et ω_i des réels

deux à deux distincts, alors $\sum_{i=1}^n Q_i(s) e^{\omega_i s} \equiv 0$ si et seulement si pour tout i

$Q_i \equiv 0$; alors, pour presque tout $h > 0$.

$$(2) \quad \left(\frac{h}{H} \right)' = 0$$

$$(3) \quad \begin{cases} f(a+h) = A(a, h) + H(a, h) \\ \text{et} \quad A'(a, h) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(a+h) = A(a, h) \\ \text{et} \quad A'(a, h) = -H'(a, h) \end{cases}$$

Fixons maintenant $h > 0$; en dérivant (1) par rapport à a et en tenant compte de (2) on trouve que :

$$(4) \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0 \quad H(a, h) = \alpha h.$$

Soient alors des réels $a < b$, $a' < b'$ et notons $\mu_{A,B} = f * \mu_{a,b}$ et $\mu_{A',B'} = f * \mu_{a',b'}$; si $a = a'$, on voit aisément que ou bien $A = A'$ ou bien $B = B'$. On en déduit que pour tout réel a , ou bien l'application définie sur $]0, +\infty[: h \mapsto A(a, h)$ est une constante $\beta(a)$, ou bien l'application définie sur $]0, +\infty[: h \mapsto A(a, h) + \alpha h$ est une constante $\gamma(a)$. En rapprochant ceci de (3) on obtient que pour tout réel a ,

$$\text{ou bien, pour presque tout } h > 0, \quad f(a+h) = \alpha h + \beta(a) \quad (5)$$

$$\text{ou bien, pour presque tout } h > 0, \quad f(a+h) = -\alpha h + \gamma(a) \quad (6)$$

Mais s'il existe a_1 vérifiant (5) et a_2 vérifiant (6), alors $\alpha = 0$. On a donc :
ou bien, pour tout a et pour presque tout $h > 0$ $f(a+h) = \alpha h + \beta(a)$ (7)
ou bien, pour tout a et pour presque tout $h > 0$ $f(a+h) = -\alpha h + \gamma(a)$ (8)
Si on a (7) on voit que l'application $a \mapsto \beta(a) - \alpha a$ est une constante β ;
c'est analogue pour (8). Ce qui achève la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

- [1] G. LETAC, Which functions preserve Cauchy laws? *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **67**, 1977, p. 277-286.
- [2] G. LETAC et J. PRADINES, Seules les affinités préservent les lois normales. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **286**, 1978, p. 399-402.

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1983)