ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

N. BOULEAU

Formules de changement de variables

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 2 (1984), p. 133-145
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_2_133_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 20, n° 2, 1984, p. 133-145. *Probabilités et Statistiques*

Formules de changement de variables

par

N. BOULEAU
École nationale des ponts et chaussées,
28, rue des Saints-Pères, 75007 Paris

RÉSUMÉ. — Nous donnons quelques extensions de formules de changement de variables utiles en analyse stochastique, en premier lieu pour les processus de variations finies en dimension un, et puis pour les fonctions convexes et les semimartingales en dimension d, ce qui améliore des résultats antérieurs [*2*].

ABSTRACT. — We give some extensions of change of variables formulae which are useful in stochastic analysis, first for processes of finite variation in dimension one, and then for convex functions and semimartingales in dimension d improving earlier results [*2*].

Le maniement de formules explicites est souvent une commodité du calcul stochastique et les limitations proviennent alors de leur condition de validité. Nous donnons ici quelques résultats, pour certains déjà utilisés [*1*], mais incomplètement publiés.

I. PROCESSUS A VARIATION FINIE

Soient a_i, $i = 1, \ldots, n$ des fonctions réelles à variation bornée sur tout compact définies sur $[0, \infty[$ continues à droite, non nécessairement nulles en zéro.

Si F est une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$,

$$t \to F(a_1(t), \ldots, a_n(t))$$

est à variation bornée sur tout compact. Il est donné dans ([*4*], chap. VI, § 90 à 93) une expression explicite de cette fonction lorsque F est de classe C^1, en posant $\bar{a}(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t))$, on a

$$(1) \quad F(\bar{a}(t)) = F(\bar{a}(0)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{]0,t]} F'_i(\bar{a}(s-))da_i(s) \\ + \sum_{0<s\leqslant t} \left\{ F(\bar{a}(s)) - F(\bar{a}(s-)) - \sum_{i=1}^{n} F'_i(\bar{a}(s-))\Delta a_i(s) \right\}$$

Et la démonstration est encore valable si $n = 1$ et si F est différence de convexes F′ étant interprétée comme la dérivée à gauche (ou à droite) de F.

L'extension de la formule (1) au cas où F est localement différence de convexes sur $\mathbb{R}^n$ $n > 1$ est un cas particulier de ce qui sera fait dans la partie II.

Nous étudierons ici les extensions de la formule (1) en dimension 1. Notons a^c la partie continue de a

$$a^c(t) = a(t) - \sum_{0<s\leqslant t} (a(s) - a(s-))$$

La formule (1) s'écrit alors

$$(2) \quad F(a(t)) = F(a(0)) + \int_0^t F'(a(s))da^c(s) + \sum_{0<s\leqslant t} [F(a(s)) - F(a(s-))]$$

LEMME 1. — *L'image par l'application $s \to a(s)$ (ou $s \to a(s-)$) de la mesure $da^c(s)$ sur $[0, t]$ est une mesure absolument continue par rapport a la mesure de Lebesgue et admet la densité*

$$(3) \qquad l_t(x) = \tilde{1}_{)a(0),a(t))}(x) - \sum_{0<s\leqslant t} \tilde{1}_{)a(s-),a(s))}(x)$$

où l'on a pris la notation

$$\tilde{1}_{)\alpha,\beta)}(x) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

pour désigner

$$\operatorname{sign}(\beta - \alpha)1_{]\alpha\wedge\beta,\alpha\vee\beta]}(x) = 1_{\{\beta\geqslant x\}} - 1_{\{\alpha\geqslant x\}}$$

(*le* ~ *rappelle que le signe intervient*).

Démonstration. — La fonction $\Psi(x) = \sum_{0<s\leq t} \tilde{1}_{]a(s-),a(s)]}(x)$ est à support compact et intégrable Lebesgue puisque

$$\int |\Psi(x)|\,dx \leq \sum_{0<s\leq t} |a(s) - a(s-)| \leq \underset{[0,t]}{\mathrm{var}}\,(a) \tag{4}$$

en notant $\underset{[0,t]}{\mathrm{var}}\,(a)$ la variation de a sur $[0, t]$.

Donc $l_t(x)$ est à support compact et intégrable Lebesgue. Si F est de classe C^1 nous déduisons alors de (3)

$$\int_{\mathbb{R}} l_t(x)F'(x)dx = F(a(t)) - F(a(0)) - \sum_{0<s<t} F(a(s)) - F(a(s-))$$

donc par (2)

$$\int_{\mathbb{R}} l_t(x)F'(x)dx = \int_0^t F'(a(s))da^c(s)$$

Cette égalité étant valable pour toute fonction continue F' on a le résultat.

Nous en déduisons :

THÉORÈME 2. — *a) Soit* F *une fonction localement lipschitzienne sur* $\mathbb{R}$ *on a alors*

$$F(a(t)) = F(a(0)) + \int_0^t F^*(a(s))da^c(s) + \sum_{0<s\leq t} F(a(s) - F(a(s-)) \tag{5}$$

où F^* *est une version quelconque de la dérivée de Lebesgue de* F.

b) Si a est croissante alors $F \circ a$ *est à variation bornée sur tout compact dès que* F *l'est et si de plus* F *est càd on a :*

$$F(a(t)) = F(a(0)) + \int_{\mathbb{R}} l_t(x)dF + \sum_{0<s\leq t} F(a(s)) - F(a(s-))\,. \tag{6}$$

c) Plus généralement si a est càd à variation bornée sur tout compact (quelconque) la formule (6) *a un sens et est valable dès que* F *peut se décomposer en différence de deux fonctions croissantes càd* F_1 *et* F_2 *telles que si* $G = F_1 + F_2$, $G \circ a$ *soit à variation bornée sur tout compact.*

Démonstration. — Écrivons la formule (3) sous la forme

$$1_{\{a(t)\geq x\}} = 1_{\{a(0)\geq x\}} + l_t(x) + \sum_{0<s\leq t} (1_{\{a(s)\geq x\}} - 1_{\{a(s-1)\geq x\}}) \tag{7}$$

a) Soit K l'adhérence de l'image de $[0, t]$ par a.

Les fonctions de x, $l_t(x)$ et $\Psi(x) = \sum_{0<s\leqslant t} (1_{\{a(s)\geqslant x\}} - 1_{\{a(s-)\geqslant x\}})$ sont à support dans le compact K, et sont intégrables Lebesgue, l'équation (7) n'est autre que la définition de $l_t(x)$ en tout point x où $\Psi(x)$ est défini, donc pour presque tout x.

Si F est localement lipschitzienne la mesure dF est absolument continue de densité bornée sur K on peut donc intégrer l'équation (7) terme à terme.

D'après le lemme 1

$$\int_{\mathbb{R}} l_t(x)d\mathrm{F}(x) = \int_0^t \mathrm{F}^*(a(s))da^c(s)$$

De plus dans l'expression

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(x)d\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} d\mathrm{F}(x) \sum_{0<s\leqslant t} (1_{\{a(s)\geqslant x\}} - 1_{\{a(s-)\geqslant x\}}) \tag{8}$$

le théorème de Fubini s'applique en raison de (4). Nous obtenons donc l'équation (5).

b) Si a est croissante on a $0 \leqslant \Psi(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant l_t(x) \leqslant 1$ ces fonctions étant à support compact on peut intégrer (7) terme à terme par rapport à n'importe quelle mesure de Radon dF. Dans (8) la théorème de Fubini s'applique parce que la fonction $\mathrm{G}(s, x) = 1_{\{a(s)\geqslant x\}} - 1_{\{a(s-)\geqslant x\}}$ étant positive est intégrable puisque son intégrale pour la mesure $\sum_{\substack{0<s\leqslant t\\ \Delta a(s)\neq 0}} \varepsilon_s$ est bornée. Ce qui donne l'équation (6).

c) Sous les hypothèses du *c*) de l'énoncé, écrivons pour t fixé :

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \sum_{0<s\leqslant t} 1_{]a(s-),a(s)]}(x)1_{\{\Delta a(s)>0\}} - \sum_{0<s\leqslant t} 1_{]a(s),a(s-)]}(x)1_{\{\Delta a(s)<0\}}\\ &= \Psi_1(x) - \Psi_2(x)\end{aligned}$$

Nous avons par le théorème de Fubini pour les fonctions positives

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \Psi_1(x)d\mathrm{F}_1(x) &= \sum_{0<s\leqslant t} [\mathrm{F}_1(a(s)) - \mathrm{F}(a(s-))]1_{\{\Delta a(s)>0\}}\\ &\leqslant \sum_{0<s\leqslant t} (\mathrm{G}(a(s)) - \mathrm{G}(a(s-)))1_{\{\Delta a(s)>0\}}\\ &\leqslant \operatorname*{var}_{[0,t]} \mathrm{G}\circ a\end{aligned} \tag{9}$$

de même pour $\int \Psi_i(x)d\mathrm{F}_j(x)$ $i = 1, 2, j = 1, 2$.

Donc $\Psi(x)$ est intégrable pour $dF(x)$ et donc $l_t(x)$ également de plus d'après (9)

$$\int \Psi(x) dF(x) = \sum_{0<s\leqslant t} (F(a(s)) - F(a(s-)))$$

et la somme est absolument convergente. On a donc l'équation (6).

II. SEMI-MARTINGALES A VALEUR $\mathbb{R}^d$

Le résultat suivant a été démontré indépendamment par Laurent Schwartz et par moi-même [*2*] :

THÉORÈME 3. — *Soit* F *une fonction convexe sur* $\mathbb{R}^d$, *il existe une section borélienne* $F^* = (F_1^*, \dots, F_d^*)$ *du sous-différentiel de* F *telle que pour toute semi-martingale* X *à valeur* $\mathbb{R}^d$ *on ait à l'indistinguabilité près :*

$$(10)\quad F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_{]0,t]} F_i^*(X_{s-}) dX_s^i + \sum_{0<s\leqslant t} \left[F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{d} F_i^*(X_{s-}) \Delta X_s^i \right] + C_t$$

où $C_t = C_t(F, F^*, X)$ *est un processus croissant continu.*

Nous posions en [*2*] la conjecture de savoir si ce résultat était valable *pour toute* section borélienne du sous-différentiel, c'est ce que nous résolvons ici par l'affirmative.

a) Rappelons qu'on appelle *sous-différentiel* de la fonction convexe F au point x et on note $\partial F(x)$ l'ensemble des points $\xi \in \mathbb{R}^d$ tels que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \quad \langle \xi, y - x \rangle \leqslant F(y) - F(x)$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien.

$\partial F(x)$ est un convexe fermé borné.

Nous appellerons *pseudo-dérivée* de F, toute section borélienne F^* de l'application multivoque ∂F telle que pour toute semi-martingale X à valeur $\mathbb{R}^d$ on ait (10).

Il est aisé de voir que

(11) *Si* F_n^* *est une suite de pseudo-dérivées de* F *convergeant simplement vers une fonction* G, *alors* G *est une pseudo-dérivée de* F.

En effet G est une section borélienne du sous-différentiel. De plus F est localement lipschitzienne donc après un arrêt convenable de la semi-martingale X on voit que dans (10) les intégrales stochastiques convergent donc les processus croissants $\sum_{0<s\leq t} + C_t$ convergent également d'où le résultat en écrivant l'égalité des sauts.

b) Notons $F'_0(x)$ la projection de l'origine 0 sur $\partial F(x)$.

Si on pose $F_{(\lambda)}(x) = \min_{y\in\mathbb{R}^d}\left(\frac{\lambda}{2}|y-x|^2 + F(y)\right)$.

Alors (*cf.* [*3*]) $F_{(\lambda)}$ est convexe de classe C^1 et lorsque $\lambda \to \infty$ $F_{(\lambda)}$ croît vers F et sa dérivée $F'_{(\lambda)}$ converge simplement vers F'_0.

Il en résulte (*cf.* [*2*]) que F'_0 est une pseudo-dérivée de F.

c) Nous sommes maintenant à même de démontrer la conjecture. Si $a \in \mathbb{R}^d$ notons $F'_a(x)$ la projection de a sur $\partial F(x)$. Il est clair par changement de repère que F'_a est une pseudo-dérivée de F. Remarquons que pour x fixé l'application $a \to F'_a(x)$ est continue. Soit alors G une section borélienne quelconque du sous-différentiel de F.

Il existe une suite de fonctions boréliennes étagées

$$a_n(x) = \sum_{m=1}^{k_n} a_{n,m}1_{A_{n,m}}(x)$$

$(A_{n,m}m = 1, \ldots, k_n)$ formant une partition de $\mathbb{R}^d$, telles que

$$G(x) = \lim_{n\uparrow\infty} a_n(x)\,. \tag{12}$$

Nous disons que la fonction

$$\left\{\begin{array}{l} F'_{a_n(x)}(x) = \sum_m F'_{a_{n,m}}(x)1_{A_{n,m}}(x) \\ \text{est une pseudo-dérivée de F.}\end{array}\right. \tag{13}$$

C'est en effet clairement une section borélienne du sous-différentiel de F, de plus de

$$\begin{aligned} F(X_t) = F(X_0) &+ \sum_{i=1}^{d}\int_{]0,t]} (F'_{a_{n,m}}(X_{s-}))_i dX^i_s \\ &+ \sum_{0<s\leq t}\left[F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{d}(F'_{a_{n,m}}(X_{s-}))_i \Delta X^i_s\right] \\ &+ C_t(F, F'_{a_{n,m}}, X) \end{aligned}$$

nous déduisons en calculant $\int_{]0,t]} 1_{A_{n,m}}(X_{s-})dF(X_s)$ et en sommant sur m (somme finie)

$$\begin{aligned} F(X_t) = F(X_0) &+ \sum_{i=1}^{d} \int_{]0,t]} (F'_{a_n(X_{s-})}(X_{s-}))_i dX_s^i \\ &+ \sum_{0<s\leq t} \left[F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{d} (F'_{a_n(X_{s-})}(X_{s-}))_i \Delta X_s^i \right] \\ &+ \sum_m \int_0^t 1_{A_{n,m}}(X_{s-}) dC_s(F, F'_{a_{n,m}}, X) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion (13).

Il est clair que la projection de $G(x)$ sur $\partial F(x)$ n'est autre que $G(x)$ c'est-à-dire que

$$G(x) = F'_{G(x)}(x)$$

Donc par la continuité de $a \to F'_a(x)$ et (12)

$$G(x) = \lim_{n \uparrow \infty} F'_{a_n(x)}(x)$$

le résultat provient alors de (13) et de (11).

Nous donnons maintenant quelques précisions qui peuvent avoir leur intérêt en contrôle stochastique concernant le processus croissant continu $C_t(F, F^*, X)$.

Si F est différence de convexes $F = F_1 - F_2$, la formule (10) s'étend par différence et le processus $C_t(F, F^*, X)$ ne dépend que de F et de $F^* = F_1^* - F_2^*$ où F_1^* et F_2^* sont deux sections boréliennes des sous-différentiels de F_1 et F_2.

De même si F est localement différence de convexes et se compose en $F = F_{1,n} - F_{2,n}$ sur la boule B_n de rayon n, la formule (10) est valable avec

$$F^* = F_{1,1}^* - F_{2,1}^* + \sum_{n\geq 2} (F_{1,n}^* - F_{2,n}^*) 1_{B_n \setminus B_{n-1}}$$

comme on le voit en calculant $\int_{]0,t]} 1_{B_n \setminus B_{n-1}}(X_{s-})dF(X_s)$ et en sommant sur n après un arrêt convenable. Nous disons pour abréger que F^* est une « section de la dérivée de F ».

On montre aisément grâce à la propriété de localisation de l'intégrale stochastique de façon analogue à ([6], p. 366) que si S est la réunion des supports des mesures dérivées secondes de F, la mesure aléatoire $dC_t(F, F^*, X)$ est portée par $\{ t : X_{t-} = X_t \in S \}$ pour tout choix de F^*.

Nous en déduisons

PROPOSITION 4. — *Soit* F *localement différence de convexes de classe* C^2 *dans l'ouvert* A *alors*

$$C_t(F, F^*, X) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t 1_A(X_s) F''_{ij}(X_s) d \langle X^{ic}, X^{jc} \rangle_s + \int_0^t 1_{A^c}(X_s) dC_s(F, F^*, X)$$

Démonstration. — On peut supposer F convexe. Soit B_k une boule ouverte telle que $\overline{B}_k \subset A$. Il existe une fonction G de classe C^2 telle que $F = G$ sur B_k. Alors le support des dérivées secondes de $F - G$ est hors de B_K donc on a

$$\int_0^t 1_{B_k}(X_s) dC_s(F - G, F^* - G', X) = 0$$

ce qui donne

$$\int_0^t 1_{B_k}(X_s) dC_s(F, F^*, X) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_0^t 1_{B_k}(X_s) F''_{ij}(X_s) d \langle X^{ic}, X^{jc} \rangle_s$$

d'où le résultat.

Dans toute la suite si F est une fonction réelle borélienne sur $\mathbb{R}^d$ nous désignons par $F' = (F'_i)_{i=1,\dots,d}$ et $F'' = (F''_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ les dérivées de F au sens des distributions. Les notations $F^* = (F^*_i)_{i=1,\dots,d}$, $F^{**} = (F^{**}_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ désignerons des versions particulières de ces dérivées lorsqu'elles sont des (classes de) fonctions.

En [*2*], théorème 1, nous avons démontré l'extension suivante à $\mathbb{R}^d$ de la propriété des temps locaux d'être des densités de temps d'occupation.

(14) *Soit* F *une fonction convexe sur* $\mathbb{R}^d$, F''_{ij} *ses dérivées secondes qui sont des mesures de Radon, et* X *une semi-martingale à valeur* $\mathbb{R}^d$. *Notons* $\lambda^{ij}_{\omega,t}$ *l'image de la mesure* $d \langle X^{ic}, X^{jc} \rangle_s(\omega)$ *sur* $[0, t]$ *par l'application* $s \to X_s(\omega)$. *Alors pour presque tout* ω, *la mesure de Radon positive*

$$\sum_{i,j} \lambda^{i,j}_{\omega,t} * F''_{ij}$$

est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Et pour toute section borélienne F^* du sous-différentiel de F et pour toute fonction continue à support compact g on a :

$$(15)\quad \int_{a\in\mathbb{R}^d} C_t(\mathcal{C}_a F, \mathcal{C}_a F^*, X)g(a)da = \frac{1}{2}\int \sum_{i,j} (F''_{ij} * g)(X_s)d\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle_s$$

où $\mathcal{C}_a$ désigne l'opérateur de translation par $a \in \mathbb{R}^d$.

Cas des fonctions à dérivées localement lipschitziennes

En dimension 1, cela contient le résultat selon lequel si F est à dérivée localement lipschitzienne,

$$(16)\quad F(X_t) = F(X_0) + \int_{]0,t]} F'(X_{s-})dX_s + \sum_{0<s\leqslant t} [F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s] + \frac{1}{2}\int_0^t F^{**}(X_s)d\langle X^c, X^c\rangle_s$$

où F^{**} est une version borélienne de la dérivée seconde de F qui est dans L^∞_{loc}.

En dimension $d > 1$ la propriété (14) et la relation (15) donnent un résultat beaucoup moins simple.

Supposons que F soit de l'une des formes suivantes :

i) $F = G * f$ où G est à support compact et différence de convexes et où $f \in L^\infty_{\text{loc}}$.

ii) $F = G * f$ où G est différence de convexes et où $f \in L^\infty$ à support compact.

Dans les deux cas F est localement différence de convexes. De plus ses dérivées secondes comme produit de convolution de mesures à support compact par une fonction de L^∞_{loc} [resp. de mesures de Radon par une fonction de L^∞_K] sont des fonctions de L^∞_{loc} il en résulte [[7], théorème XVII, chapitre VI] que les dérivées premières de F sont des fonctions localement lipschitziennes.

iii) $F = \int F_\alpha d\mu(\alpha)$ où F_α est une famille mesurable localement uniformément bornée de fonctions des types *i*) ou *ii*) à dérivées premières localement uniformément lipschitziennes et où μ est une mesure signée bornée.

Sous *iii*) F est encore à dérivées premières localement lipschitziennes.

PROPOSITION 5. — *Sous les hypothèses ci-dessus on a pour toute semimartingale* X,

$$(17)\quad F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_{]0,t]} F_i'(X_{s-})dX_s^i + \sum_{0<s\leq t}\left[F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{d} F_i'(X_{s-})\Delta X_s^i\right] + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t F_{ij}^{**}(X_s)d\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle_s$$

où F_{ij}^{**} *désigne une version borélienne de la densité de la dérivée seconde* F_{ij}'' *calculée de la façon suivante :*

a) dans les cas i) ou ii)

$$F_{ij}^{**}(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^d} f(x-y)dG_{ij}''(x)$$

où une même version borélienne de f est prise pour tous les $i,\ j = 1, \ldots, d$

b) dans le cas iii)

$$F_{ij}^{**}(x) = \int (F_\alpha)_{ij}^{**} d\mu(\alpha)$$

où $(F_\alpha)_{ij}^{**}$ *est calculée selon le a).*

Démonstration. — Il suffit de démontrer la proposition dans les cas *i* et *ii*) le cas *iii*) s'en déduisant immédiatement par arrêt et intégration terme à terme.

Soit G* une section de la dérivée de G et $a \in \mathbb{R}^d$, la formule (10) appliquée à $\mathcal{T}_a G$ s'écrit

$$\mathcal{T}_a G(X_t) = \mathcal{T}_a G(X_0) + \sum_i \int_{]0,t]} \mathcal{T}_a G_i^*(X_{s-})dX_s^i + \sum_{0<s\leq t}\left[\mathcal{T}_a G(X_s) - \mathcal{T}_a G(X_{s-}) - \sum_i \mathcal{T}_a G_i^*(X_{s-})\Delta X_s^i\right] + C_t(\mathcal{T}_a G, \mathcal{T}_a G^*, X)$$

On en déduit en intégrant par rapport à $f(a)da$

$$F(X) = F(X_0) + \sum_i \int_{]0,t]} F_i'(X_{s-})dX_s^i + \sum_{0<s\leq t}\left[F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_i F_i'(X_{s-})\Delta X_s^i\right] + \int_{a\in\mathbb{R}^d} C_t(\mathcal{T}_a G, \mathcal{T}_a G^*, X) f(a)da\,.$$

La formule (15) nous donne alors par la propriété (14)

$$\int_{a\in\mathbb{R}^d} C_t(\mathscr{T}_a G, \mathscr{T}_a G^*, X) f(a)da = \frac{1}{2}\int f(a)d\Big(\sum_{i,j} \lambda^{i,j}_{\omega,t} * \check{G}''_{ij}\Big)(a)$$

ce qui s'écrit

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int\int f(x-y)dG''_{ij}(y))d\lambda^{i,j}_{\omega,t}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t\Big(\int f(X_s - y)dG''_{ij}(y)\Big)d\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle_s$$

Si une même version de f bornée est prise pour tous les $i, j = 1, \ldots, d$ ce qui est la proposition.

Nous ignorons si les fonctions localement de la forme *iii*) sont toutes les fonctions à dérivées premières localement lipschitziennes.

Cas des semi-martingales dont les sauts sont sommables

Nous considérons dans la suite une semi-martingale X à valeurs $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\sum_{0<s\leq t} |\Delta X_s| < +\infty \qquad \text{p. s.} \quad \forall t.$$

Ce qui revient à dire que X est somme d'une martingale locale continue et d'un processus (dont les composantes sont) à variation finie. Nous supposerons que X est bornée, les résultats étant valables dans le cas général avec un arrêt convenable.

Soit F convexe, posons

$$H(x, y) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\uparrow \frac{F(x) - F(x-\varepsilon y)}{\varepsilon}$$

Pour x fixé $H(x, .)$ est convexe finie donc bornée sur tout compact. Ceci permet de montrer (*cf.* [*2*]) que si θ est une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ positive à support compact d'intégrale égale à 1 et si on pose $\theta_n(x) = n^d\theta(nx)$, on a

$$\lim_{n\uparrow\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} F * \theta_n(x) = -\int_{y\in\mathbb{R}^d} H(x, y)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}(y)dy\,.$$

On définit donc ainsi une section borélienne du sous-différentiel que nous noterons

$$D^\theta F = (D^\theta_1 F, \ldots, D^\theta_n F)$$

PROPOSITION 6. — *Soit* X *une semi-martingale bornée dont les sauts sont sommables, et* F *une fonction convexe, alors*

$$C_t(F, D^\theta F, X) = \lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F * \theta_n(X_s) d\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle_s$$
$$= \lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int_0^t \int_{y\in\mathbb{R}^d} n^d \theta(n(X_s - y)) dF''_{ij}(y) d\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle_s$$

la limite étant en probabilité uniformément sur tout compact.

Démonstration. — Dans la formule d'Ito appliquée à $F * \theta_n$, les termes d'intégrales stochastiques $\int_{]0,t]} \frac{\partial}{\partial x_i} F * \theta_n(X_{s-}) dX^i_s$ convergent en probabilité uniformément sur tout compact vers $\int_{]0,t]} D^\theta_i F(X_{s-}) dX^i_s$, car les fonctions $\frac{\partial}{\partial x_i} F * \theta_n$ restent bornées en module par la constante de Lipschitz de F sur le compact où X prend ses valeurs, les termes de sauts convergent presque sûrement uniformément sur tout compact parce que X est à sauts sommables, d'où le résultat.

REMARQUE 7. — Posons $h(x) = 1_{\{0<x_i<1\ i=1,\dots,d\}}$ la même méthode s'applique en remplaçant dans le raisonnement précédent θ par h car les dérivées premières de h sont des mesures bornées.

On a

$$D^h_i F(x) = \int_{\substack{0<y_j<1 \\ j\neq i}} [H(x, (y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_d)) -$$
$$H(x, (y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_d))] \, dy_1 \dots dy_{i-1} dy_{i+1} \dots dy_d$$

et sous les hypothèses de la proposition 6

$$C_t(F, D^h F, X) = \lim_{\substack{n\uparrow\infty \\ \text{P.U.C.}}} \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int_0^t n^d F''_{ij}\{\mathscr{C}_{X_s} D_{\frac{1}{n}}\} \, d\langle X^{ic}, X^{jc}\rangle_s$$

où $$D_{\frac{1}{n}} = \left\{ x : -\frac{1}{n} < x_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, d \right\}$$

Ce qui en dimension 1 redonne la formule des densités de temps d'occupations :

$$L^a_t = \lim_{n\uparrow\infty} n \int_0^t 1_{\left\{a-\frac{1}{n}<X_s<a\right\}} \, d\langle X^c, X^c\rangle_s$$

où le temps local L_t^a est défini avec des dérivées à gauche :

$$\frac{1}{2} L_t^a = C_t(F, F'_g, X) \qquad \text{avec} \qquad F(x) = (x - a)^+ .$$

REMARQUE 8. — La proposition 5 ne fait aucune hypothèse sur la semi-martingale X. En revanche, pour les semi-martingales continues de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s(\omega) dB_s + \int_0^t b_s(\omega) ds$$

où B est un brownien d_1-dimensionnel, $d_1 \geqslant d$, σ_s une matrice $d \times d_1$ progressivement mesurable telle qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\langle \sigma_s \tilde{\sigma}_s \xi, \xi \rangle \geqslant \delta \mid \xi \mid^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d .$$

N. V. Krylov a montré que le temps passé dans un négligeable Lebesque de $\mathbb{R}^d$ est négligeable Lebesgue et a établi une formule d'Ito pour des fonctions à dérivées partielles d'ordre 1 et 2 dans des espaces L^p, (*cf*. [*5*], chap. 2, § 10).

RÉFÉRENCES

[*1*] N. BOULEAU, Propriétés d'invariance du domaine du générateur infinitésimal étendu des processus de Markov. *Sem. Prob. XV Lectures Notes*, n° 850, Springer, 1981.

[*2*] N. BOULEAU, Semi-martingales à valeurs $\mathbb{R}^d$ et fonctions convexes. *Note aux C. R. A. S.*, t. **292**, 1er janvier 1981, p. 87-90.

[*3*] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North Holland, 1973.

[*4*] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et potentiels*, Chapitres V à VIII, Hermann, 1980.

[*5*] N. V. KRYLOV, *Controlled diffusion processes*, Springer, 1980.

[*6*] P. A. MEYER, Un cours sur l'intégrale stochastique. *Sem. Prob. X Lectures Notes*, n° 511, Springer, 1976.

[*7*] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1973.

(Manuscrit reçu le 28 février 1983.