ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. BRU
H. HEINICH

Sur l'espérance des variables aléatoires à valeurs dans les espaces de Banach réticulés

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, nº 3 (1980), p. 197-210
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_3_197_0>

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVI, n° 3, 1980, p. 197-210. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur l'espérance des variables aléatoires à valeurs dans les espaces de Banach réticulés

par

B. BRU et H. HEINICH (*)

(*) Université Paris VI, Laboratoire de Probabilités, Tour 56,
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On poursuit l'étude commencée dans [*4*], avec pour cadre les espaces de Banach réticulés. On étudie les propriétés de la classe des v. a. de valeur absolue Pettis-intégrable, on donne quelques applications à la théorie des mesures vectorielles et des amarts.

SUMMARY. — We carry on the work initiated in [*4*], on the setting of Banach lattices, we study some properties of the class of Pettis integrable absolute value random variables. We give applications to the theory of vector valued measures and amarts.

INTRODUCTION

Cet article fait suite à [*4*], dont nous conservons toutes les notations, il développe d'autres résultats annoncés dans les notes [*3*].

On étudie maintenant les variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach ordonné, il est alors possible d'associer à chaque v. a. X, sa valeur absolue $|X|$. Les variables aléatoires de valeur absolue intégrable au sens de

(*) Membres du Laboratoire Associé au C. N. R. S. n° 224 « Processus stochastiques et applications ».

© Gauthier-Villars.

Pettis constituent une classe intermédiaire entre celles qui ne sont qu'intégrables au sens de Pettis et celles qui ont la chance d'être intégrables au sens de Bochner. Nous examinons quelques-unes des propriétés de cette classe : loi des grands nombres, équivalences d'espérances, convergence monotone...

Dans une deuxième partie, nous étudions certaines suites de v. a. adaptées à valeurs dans les espaces ordonnés : amarts, 0-amarts, presque-0-amarts, hypomartingales dont les propriétés sont souvent voisines de celles de leurs analogues réelles.

Dans tout cet article $\mathbb{E}$ désigne un espace de Banach (réel) réticulé. Nous adoptons pour tout ce qui concerne ces espaces les notations du livre [8] auquel nous faisons référence pour les résultats d'analyse dont nous aurons besoin; en particulier nous noterons toujours $\leq$ la relation d'ordre de $\mathbb{E}$, $x \vee y$, $x \wedge y$ les bornes supérieures et inférieures de deux éléments de $\mathbb{E}$, $[x, y] = \{ z \in \mathbb{E} \mid x \leq z \leq y \}$ l'intervalle d'ordre d'extrémités x et y, $x^+ = x \vee 0$ et $x^- = -x \vee 0$ les parties positives et négatives de x, $|x| = x^+ + x^-$ la valeur absolue de x, $\mathbb{E}_+$ le cône positif de $\mathbb{E}$.

$\mathbb{E}$ sera toujours supposé solide : $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$. Rappelons que les applications $x \to x^+$, $x \to x^-$ et $x \to |x|$ sont uniformément continues ([8] proposition II.5.2).

Toute application linéaire positive de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$ ($u(x) \geq 0$ si $x \geq 0$) est continue ([8] théorème II.5.3), nous notons $\mathbb{E}'_+$ l'ensemble de ces applications, le dual $\mathbb{E}'$ de $\mathbb{E}$ est alors réticulé pour son ordre naturel ($\mathbb{E}' = \mathbb{E}'_+ - \mathbb{E}'_+$), de plus ([8], proposition II.5.5) $\mathbb{E}'$ est un espace de Banach complètement réticulé solide.

Nous adoptons enfin les notations suivantes :

Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{E}$,

— nous notons :

$x_n \searrow x$ si x_n est une suite décroissante vérifiant $x = \bigwedge_n x_n$,

$x_n \nearrow x$ si x_n est une suite croissante vérifiant $x = \bigvee_n x_n$,

$x_n \to x$ si $\|x_n - x\| \to 0$,

$x_n \xrightarrow{\sigma} x$ si x_n converge vers x faiblement $\sigma(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$

$x_n \xrightarrow{0} x$ si x_n converge vers x, pour l'ordre, c'est-à-dire si

$$\underline{\lim}\, x_n = \bigvee_N \bigwedge_{n>N} x_n \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\, x_n = \bigwedge_N \bigvee_{n>N} x_n$$

existent et sont égales à x.

Rappelons que si x_n est une suite monotone alors si $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ on a également $x_n \to x$ et $x_n \xrightarrow{0} x$ ([8], corollaire du théorème II.5.9).

Si $x_n \to x$ on peut extraire une sous-suite (n_i) telle que $| x_{n_i} - x | \leq \varepsilon_{n_i} . e$ dans lequel ε_n est une suite de réels positifs convergeant vers 0 et $e \in \mathbb{E}_+$ en particulier $x_{n_i} \xrightarrow{0} x$: (il suffit de choisir (n_i) de sorte que

$$\sum_{n_i} \frac{1}{\varepsilon_{n_i}} \| x_{n_i} - x \| < \infty \Big).$$

1. VARIABLES ALÉATOIRES, DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{Pr})$ un espace probabilisé quelconque, nous appelons variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{E}$ toute application X de Ω dans $\mathbb{E}$, limite simple de fonctions mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Si X est une v. a. à valeurs dans $\mathbb{E}$, il en est de même de X^+, X^-, $| X |$.

On note comme dans [4] $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ l'ensemble des v. a. à valeurs dans $\mathbb{E}$ intégrables au sens de Pettis et $\mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ celles parmi ces v. a. qui sont à valeurs positives. En général $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ n'est pas réticulé pour son ordre naturel ($\mathbb{P}(\mathbb{E}) \neq \mathbb{P}(\mathbb{E}_+) - \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$), en effet on remarque que si $\Omega = \mathbb{N}$ $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et Pr est strictement positive sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ est isomorphe à l'ensemble des suites sommables d'éléments de $\mathbb{E}$ (cf. [4]) or on sait ([8], exercice IV.16) que toute suite sommable est différence de deux suites sommables à termes positifs si et seulement si $\mathbb{E}$ est de type AM ([8], définition II.7.1).

Nous noterons $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ l'ensemble des v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ qui sont différences de deux v. a. positives : $\mathbb{P}_0(\mathbb{E}) = \mathbb{P}(\mathbb{E}_+) - \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$.

$\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ est exactement l'ensemble des v. a. de valeurs absolues intégrables au sens de Pettis :

PROPOSITION 1. — *a) Si* $Y \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ *et si* X *est une v. a. à valeurs dans* $\mathbb{E}$ *vérifiant* $0 \leq X \leq Y$ *alors* $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ *et* $0 \leq E(X1_A) \leq E(Y1_A)$ *pour tout* $A \in \mathscr{F}$.

b) Soit X *une v. a. à valeurs dans* $\mathbb{E}$ *alors* $X \in \mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ *si et seulement si* $| X | \in \mathbb{P}(\mathbb{E})$.

Démonstration. — *a)* Posons

$$A_{m,n} = \{ m \leq \| X \| < m + 1, n \leq \| Y \| < n + 1 \},$$

$(A_{m,n})$ est une partition mesurable dénombrable de Ω, la famille $(E(Y1_{A_{m,n}}))$

est sommable de somme E(Y) (elle est faiblement sommable de somme E(Y) donc fortement sommable, c'est la propriété d'Orlicz) et

$$0 \leq E(X1_{A_{m,n}}) \leq E(Y1_{A_{m,n}})$$

($X1_{A_{m,n}}$ est intégrable au sens de Bochner et les inégalités sont valables scalairement) donc $(E(X1_{A_{m,n}}))$ est sommable, sa somme x vérifie :

$$0 \leq x \leq E(Y) \qquad \text{et} \qquad u(x) = E(u(X))$$

pour tout $u \in \mathbb{E}'_+$, on pose $x = E(X)$ et on définit de même $E(X1_A)$ pour tout $A \in \mathscr{F}$.

b) Résulte alors de *a*) sans difficultés.

Remarque. — On déduit en particulier de la proposition 1 que si X est intégrable au sens de Bochner alors $X \in \mathbb{P}_0(\mathbb{E})$; on a donc les inclusions suivantes :

$$\mathbb{B}(\mathbb{E}) \subset \mathbb{P}_0(\mathbb{E}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{E}) \subset \$(\mathbb{E}) \text{ (notations de [4]).}$$

On munit $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ de la norme N : $N(X) = \| E(|X|) \|$. On vérifie facilement que :

$$\begin{array}{ll} \text{si } X \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+) & S(X) = P(X) = N(X) \\ \text{si } X \in \mathbb{P}_0(\mathbb{E}) & P(X) \leq S(X) \leq N(X) \\ \text{si } X \in \mathbb{B}(\mathbb{E}) & P(X) \leq S(X) \leq N(X) \leq B(X). \end{array}$$

En général ni $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ ni $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ ne sont complets pour N, avant d'examiner ce point, nous établissons quelques résultats simples qui nous sont utiles.

LEMME 2. — *Soit* X_n *une suite croissante, de v. a. de* $\mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ *convergeant p. s. vers une v. a.* X *alors* $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ *si et seulement si la suite* $(E(X_n))$ *converge vers un élément* $x \in \mathbb{E}$; *on a alors* $x = E(X)$ *et la suite* X_n *converge vers* X *pour la norme* N.

Démonstration. — Supposons $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$, le théorème de Lebesgue de convergence monotone implique que $E(X_n) \to E(X)$ faiblement, mais $E(X_n)$ est une suite croissante, $E(X_n)$ converge fortement vers E(X) et X_n converge vers X pour la norme N.

Inversement si $E(X_n) \to x$ dans $\mathbb{E}$, $u(X) = \lim \nearrow u(X_n)$ p. s. pour toute $u \in \mathbb{E}'_+$ donc $u(X)$ est intégrable d'intégrale $u(x)$, on montre de même que $u(X1_A)$ est intégrable pour tout $A \in \mathscr{F}$; d'autre part

$$S(X - X_n) = \bigvee_{u \in \mathbb{E}'} E(u(X) - u(X_n)) = \| x - E(X_n) \| \to 0,$$

donc en particulier X_n est une suite de Cauchy pour la norme N, et $(E(X_n 1_A))$

converge dans $\mathbb{E}$ pour tout A vers une limite qui ne peut qu'être scalairement égale à $E(u(X)1_A)$, ce qui montre bien que $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ et donc que $N(X - X_n) = S(X - X_n) \to 0$.

LEMME 3. — *Soit* X *une v. a. à valeurs dans* $\mathbb{E}$ *alors :* $X \in \mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ *si et seulement si la suite* $(X1_{\{\|X\| \leq n\}})$ *converge vers* X *pour la norme* N.

Démonstration. — On remarque que $X^+ 1_{\{\|X\| \leq n\}} \uparrow X^+$ p. s., on applique le lemme 2 à cette suite; on recommence la même opération avec X^-.

Comme dans [*4*], on peut maintenant déduire les conséquences suivantes :

Loi des grands nombres

Les v. a. de $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ satisfont à la loi des grands nombres au sens de la norme N :

PROPOSITION 4. — *Soit* $X_1, \ldots, X_n$, *une suite de v. a. de* $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ *indépendantes et de même loi, alors* $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to E(X_i)$ *pour la norme* N ; *de plus si on désigne par* $\mathscr{T}$ *l'ensemble filtrant des temps d'arrêt bornés liés à la famille décroissante des tribus symétriques on a :*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_\sigma}{\sigma} \underset{\sigma \in \mathscr{T}}{\longrightarrow} E(X_i) \text{ pour la norme } N.$$

Démonstration. — On recopie la démonstration de la proposition 8 de [*4*] en utilisant le lemme 3 d'approximation pour la norme N à la place du lemme 4 de [*4*].

Équivalences d'espérance

Commençons par rappeler la définition suivante [*8*], définition II.8.1 :

$\mathbb{E}$ est dit de type AL si sa norme (ou une norme équivalente) vérifie la propriété $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$ pour tout x, y de $\mathbb{E}_+$.

L'exemple typique des espaces de type AL est celui des espaces de Lebesgue $L^1(\mu)$ et on sait (théorème de Kakutani, [*8*] théorème II.8.5) que tout espace de type AL est isomorphe à un espace $L^1(\mu)$ pour une mesure μ réelle positive σ-finie.

Soit alors $\mathbb{E} = L^1(X, \mathscr{B}, \mu)$ un espace de type AL, toute v. a. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ définit une v. a. réelle sur l'espace produit $(\Omega \times X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}, \Pr \otimes \mu)$, le théorème de Fubini pour les v. a. réelles positives s'écrit alors : pour tout $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$

$$\| E(X) \| = E(\| X \|).$$

Il en résulte que, pour un espace $\mathbb{E}$ de type AL,

$$\mathbb{P}_0(\mathbb{E}) = \mathbb{B}(\mathbb{E}) \qquad \text{et} \qquad N(X) = \| E(| X |) \| = E(\| X \|) = B(X).$$

Les espaces de type AL jouent ainsi dans ce cadre le rôle que jouaient les espaces de dimension finie dans [*4*].

On dispose d'ailleurs de l'analogue du théorème de Dvoretzky-Rogers, sous la forme :

THÉORÈME DE SCHLOTTERBECK ([*8*] théorème IV.2.7)

$\mathbb{E}$ est de type AL si et seulement si toute suite sommable d'éléments positifs de $\mathbb{E}$ est absolument sommable.

On en déduit sans difficultés, comme dans le cas général [*4*] :

PROPOSITION 5. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ *un espace probabilisé infini* ($\Pr(\mathscr{F})$ *prend une infinité de valeurs). Les énoncés suivants sont équivalents :*

i) $\mathbb{E}$ *est de type* AL.

ii) $\mathbb{P}_0(\mathbb{E}) = \mathbb{B}(\mathbb{E})$.

iii) $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ *est complet pour la norme* N.

iv) Sur $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ *la norme* N *et* B *sont équivalentes.*

Remarque. — Si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et Pr est strictement positive sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ est isomorphe à l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{E}$ dont la valeur absolue est sommable, muni de la norme $N((a_n)) = \left\| \sum_n | a_n | \right\|$; il est facile de voir que $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ est un espace de Banach pour cette norme et cela résulte d'ailleurs du lemme II.1 de [*2*]. Donc le fait que $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ soit complet pour la norme N n'implique généralement rien sur $\mathbb{E}$. Par contre si l'espace $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ est non atomique, on montre facilement, en adaptant le contre-exemple de [*10*], qu'il y a équivalence entre : $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ est complet pour N et $\mathbb{E}$ est de type AL; cette situation est exactement symétrique de celle de [*4*], proposition 15, 2e partie.

Convergences des suites de Cauchy pour N et convergences monotones

Comme dans le cas général les propositions précédentes permettent d'étudier les rapports entre convergence en norme N et convergence en probabilité, l'élément nouveau est ici le rôle joué par la convergence monotone. Le lemme 2 ci-dessus diffère de la propriété de Lebesgue de convergence

monotone pour les v. a. réelles en ce qu'il impose l'existence *a priori* d'une v. a. limite X de la suite croissante X_n, alors que dans le cas réel l'existence de lim $E(X_n)$ suffit à assurer l'existence d'une limite p. s. finie. On a :

PROPOSITION 6. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ *un espace probabilisé infini quelconque. Les énoncés suivants sont équivalents.*

i) $\mathbb{E}$ *est de type* AL.

ii) Toute suite, convergente pour N, *de v. a. de* $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ *converge fortement en probabilité.*

iii) Toute suite (X_n) *de v. a. de* $\mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ *vérifiant* $\| E(X_n) \| \to 0$, *converge fortement en probabilité vers* 0.

iv) Si (X_n) *est une suite croissante de v. a. de* $\mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ *telle que la suite* $(E(X_n))$ *converge dans* $\mathbb{E}$, *alors il existe une v. a.* X *de* $\mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ *telle que* X_n *converge vers* X *fortement p. s. et pour la norme* N.

v) Même énoncé que iv) en remplaçant « $(E(X_n))$ *converge dans* E » *par* « $(E(X_n))$ *bornée dans* $\mathbb{E}$ *pour la norme* ».

Démonstration. — *v)* $\Rightarrow$ *iv)* et *iii)* $\Rightarrow$ *ii)* sont triviales.

iv) $\Rightarrow$ *iii)* :

Soit (X_n) des v. a. positives telles que $\| E(X_n) \| \to 0$, de toute sous-suite de (X_n) nous pouvons extraire une sous-suite que nous noterons encore (X_n) vérifiant $\sum_n \| E(X_n) \| < \infty$, posons alors $Y_n = \sum_1^n X_i$, (Y_n) est une suite croissante, d'espérances convergentes, la série converge donc p. s. et son terme général tend fortement p. s. vers 0.

ii) $\Rightarrow$ *i)*.

Soit $X \in \mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ et soient $X_1, \ldots, X_n$, des copies indépendantes de X, $\left(\frac{X_1 + \ldots + X_\sigma}{\sigma}\right)_{\sigma \in \mathscr{C}}$ converge pour la norme N (proposition 4) donc fortement en probabilité et donc $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ converge fortement p. s. (lemme 11 de [*4*]) d'où $X \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ et on applique la proposition 5.

i) $\Rightarrow$ *v)*.

Supposons $\mathbb{E}$ de type AL et soit $(X_n) \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ tels que $(E(X_n))$ soit bornée, $(E(X_n))$ est croissante bornée en norme donc converge ([*8*], proposition II.8.3 *i)*) d'où $N(X_n - X_m) = \| E(X_n) - E(X_m) \| \to 0$, or $\mathbb{P}(\mathbb{E}_+) \subset \mathbb{B}(\mathbb{E})$ et $N = B$ (proposition 4) donc la suite (X_n) converge pour B vers une v. a. X, la convergence a également lieu fortement en probabilité donc fortement p. s. puisque la suite est monotone.

Remarque. — En renforçant les hypothèses sur l'espace sous-jacent on peut arriver à faire converger en probabilité certaines suites N-convergentes.

Rappelons qu'un espace de Banach réticulé solide est dit à norme continue pour l'ordre, [*8*] définition II.5.12, si $x_n \xrightarrow{0} x \Rightarrow x_n \to x$. On a alors :

PROPOSITION 7. — *Si* $\mathbb{E}$ *est à norme continue pour l'ordre et si* (X_n) *est une suite de* $\mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ *vérifiant* $0 \leq X_n \leq Y$ *pour une v. a.* Y *et* $\| E(X_n) \| \to 0$ *alors* X_n *converge vers* 0 *fortement en probabilité.*

Démonstration. — Si $u \in \mathbb{E}'_+$, $u(X_n) \to 0$ en probabilité donc de toute sous-suite on peut extraire une sous-suite convergeant p. s.; l'espace réticulé fermé $\mathbb{F}$ engendré par les images des v. a. X_n est séparable, soit $(u_1, \ldots, u_k, \ldots)$ une famille dénombrable de la boule unité de $\mathbb{F}'$ normant $F : \| x \| = \bigvee_k | u_k(x) |$. De toute sous-suite de X_n, on peut extraire par un procédé diagonal une sous-suite (n_i) telle que $u_k(X_{n_i}) \to 0$ p. s. pour tout k.

D'autre part, $\forall \omega$, $(X_n(\omega))$ est dans l'intervalle d'ordre $[0, Y(\omega)]$ qui est faiblement compact ([*8*] théorème II.5.10), soit $X(\omega)$ une valeur d'adhérence faible de $(X_{n_i}(\omega))$ pour une sous-suite donnée (n_i) d'après ce qui précède on a p. s. $u_k(X(\omega)) = 0$ pour tout k donc $X(\omega) = 0$ p. s., par conséquent pour presque tout ω $(X_{n_i}(\omega))$ converge faiblement vers 0 et donc fortement vers 0 d'après le lemme de [*6*] d'où (X_n) converge vers 0 fortement en probabilité.

Remarque. — Cette proposition est analogue au lemme I.4 de [*2*].

Mesures signées et applications

Comme dans le cas général [*4*], on associe à chaque v. a. X de $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ sa mesure : $\mu = X.\mathrm{Pr}$, μ est alors différence de deux mesures positives. On notera $\mathscr{M}_0(\mathbb{E})$ ou $\mathscr{M}_0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{E})$ l'ensemble des mesures différences de deux mesures positives à valeurs dans $\mathbb{E}$, nous appelons mesures signées de telles mesures.

Si $\mathbb{E}$ est complètement réticulé on peut définir pour toute mesure μ de $\mathscr{M}_0(\mathbb{E})$:

$$\mu^+(A) = \bigvee_B \mu(A \cap B), \mu^-(A) = \bigvee_B - \mu(A \cap B), | \mu | = \mu^+(A) + \mu^-(A) ;$$

il est alors naturel de définir sur $\mathscr{M}_0(\mathbb{E})$, la norme $N(\mu) = \| | \mu | (\Omega) \|$, pour cette norme $\mathscr{M}_0(\mathbb{E})$ est un espace de Banach réticulé solide, il est à norme

continue pour l'ordre si et seulement si $\mathbb{E}$ l'est également ([2]), dans ce cas $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ se plonge canoniquement dans $\mathscr{M}_0(\mathbb{E})$, on a :

PROPOSITION 8. — *Soit* $\mathbb{E}$ *un espace à norme continue pour l'ordre*

a) *Si* μ *est une mesure positive vérifiant* $0 \leq \mu \leq Y.\mathrm{Pr}$ *pour une v. a.* $Y \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$, μ *est à densité :* $\mu = X.\mathrm{Pr}$ *pour une v. a.* $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$.

b) *Si* $X \in \mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ *et* $\mu = X.\mathrm{Pr}$ *alors* $|\mu| = |X|.\mathrm{Pr}$, *en particulier* $N(\mu) = N(X)$.

Démonstration. — *a*) L'espace réticulé fermé $\mathbb{F}$ engendré par l'image de Y est séparable (à norme continue pour l'ordre), il contient donc un point quasi intérieur ([8], proposition II.6.2) c'est-à-dire un élément $e \in \mathbb{E}_+$ vérifiant $Y(\omega) = \bigvee_n (Y(\omega) \wedge ne)$, posons $\mu_n = \mu \wedge ne.\mathrm{Pr}$ on a $0 \leq \mu_n \leq ne.\mathrm{Pr}$ et comme $\mathbb{E}$ est à norme continue pour l'ordre, μ_n est à image faiblement compacte, elle admet donc une densité X_n par rapport à la probabilité Pr (théorème de Dunford-Pettis), la suite des v. a. X_n est croissante majorée par la v. a. Y, elle converge donc vers une v. a. X qui ne peut être que la densité de μ.

b) On a $0 \leq \mu^+ \leq X^+.\mathrm{Pr}$ donc μ^+ est à densité : $\mu^+ = Z.\mathrm{Pr}$ et on a $0 \leq Z \leq X^+$, d'autre part $E(X1_A) \leq E(Z1_A)$ pour tout $A \in \mathscr{F}$ donc, [2], $Z \geq X$, soit $Z \geq X^+$ et $Z = X^+$. De même on montre $\mu^- = X^-.\mathrm{Pr}$.

Remarque. — La partie *b*) de la proposition 8 nous donne une méthode pour démontrer la convergence de certaines suites de Cauchy pour la norme N de v. a. de $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$, il suffit de savoir reconnaître si la mesure limite de la suite de Cauchy de leurs mesures associées est à densité. La partie *a*) de la proposition nous fournit un premier critère pour décider si une mesure positive est à densité. En outre, dans les bons espaces on dispose d'une caractérisation des mesures à densité positive.

En effet, soit $\mu = X.\mathrm{Pr}$ une mesure à densité $X \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$, μ est alors à variation σ-finie, d'autre part on peut associer à la v. a. X un point $e \in \mathbb{E}$ vérifiant $X = \bigvee_n X \wedge ne$ comme dans la démonstration de la proposition précédente, il est clair que $\mu = \bigvee_n \mu \wedge ne.\mathrm{Pr}$. Réciproquement il est donc intéressant de considérer la classe $\mathscr{M}_p = \{\mu \geq 0$ à variation σ-finie $|$ il existe $e \in \mathbb{E}_+$ tel que $\mu = \bigvee_n \mu \wedge ne.\mathrm{Pr}\}$. On a :

PROPOSITION 9. — *Les énoncés suivants sont équivalents :*

i) $\mathbb{E}$ *ne contient pas* c_0 *(comme sous espace de Banach réticulé).*

ii) $\mathscr{M}_p = \{ \mu = X.\mathrm{Pr} \mid X \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_+)\}$.

Démonstration. — Commençons par rappeler que « $\mathbb{E}$ ne contient pas c_0 » est équivalent à « toute suite croissante bornée en norme converge (en norme) » un tel espace est alors appelé de type KB ([*8*], exemple II.5.7).

i) $\Rightarrow$ *ii)* : Supposons que $\mu \in \mathscr{M}_p$, on a $\mu \wedge ne.\mathrm{Pr} \leq ne.\mathrm{Pr}$ donc $\mu \wedge ne.\mathrm{Pr} = X_n.\mathrm{Pr}$ pour une v. a. $X_n \in \mathbb{B}(\mathbb{E}_+)$, il est visible que (X_n) est une suite croissante, d'autre part si nous notons var (μ) la mesure variation de μ on a :

$$\mathrm{var}\,(\mu \wedge ne.\mathrm{Pr}) = \| X_n \|.\mathrm{Pr} \leq \mathrm{var}\,(\mu) \qquad \text{donc} \qquad \bigvee_n \| X_n \| < \infty \text{ p. s.}$$

comme $\mathbb{E}$ est de type KB il existe une v. a. positive X telle que $X_n \uparrow X$ et on a $\mu = X.\mathrm{Pr}$.

ii) $\Rightarrow$ *i)* est démontrée dans [*2*].

Remarque. — On a : $\mu \in \mathscr{M}_p \Leftrightarrow \mu$ à variation σ-finie et il existe $e \in \mathbb{E}_+$ tel que $(\mu\text{-}ne.\mathrm{Pr})^+ \downarrow 0$. De cette caractérisation il résulte en particulier que la classe $\mathscr{M}_p$ est héréditaire : si $0 \leq \mu \leq \nu$ et $\nu \in \mathscr{M}_p$ alors $\mu \in \mathscr{M}_p$.

Terminons ce paragraphe par un exemple d'application du procédé de démonstration décrit ci-dessus (remarque après la proposition 8).

PROPOSITION 10. — *Soit* $\mathbb{E}$ *un espace de type* KB, *soit* (X_n) *une suite de v. a. de* $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ *de Cauchy pour la norme* N *et vérifiant* $\underline{\lim}\, B(X_n) < \infty$ *ou* $\underline{\lim} \| X_n \| < \infty$ *p. s., alors* X_n *converge pour la norme* N.

Démonstration. — Le cas $\underline{\lim}\, B(X_n)$ a été traité dans [*2*].

Supposons que $\underline{\lim} \| X_n \| < \infty$ p. s., il existe une suite de v. a. à valeurs entières à support disjoint (τ_n) telle que $\bigvee_n \| X_{\tau_n} \| < \infty$ p. s., posons $\mu_n = X_{\tau_n}.\mathrm{Pr}$, μ_n converge vers une mesure $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathbb{E})$ pour la norme N. D'autre part, quitte à considérer les parties positives et négatives, on peut supposer que $X_n \geq 0$.

Par extraction de sous-suite on a $\mu_n \xrightarrow{0} \mu$, en notant comme toujours (μ_n) la sous-suite extraite; posons $\lambda_n = \bigwedge_{p \geq n} \mu_p$, on a : $\lambda_n \uparrow \mu$, λ_n converge vers μ

pour N et $0 \leq \lambda_n \leq \mu_n = X_{\tau_n}.\Pr$ donc $\lambda_n = Y_n.\Pr$ où (Y_n) est une suite croissante de v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$; et comme $Y_n.\Pr \leq X_{\tau_n}.\Pr$ on a

$$\| Y_n \| \leq \bigvee_n \| X_{\tau_n} \|$$

d'où Y_n converge vers une v. a. $X(\mathbb{E}$ est KB) et $\mu = X.\Pr$; il est alors clair que $N(X_n - X) \to 0$ pour la suite initiale.

2. SUITES ADAPTÉES DE $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$

On se donne maintenant une histoire $(\mathscr{F}_n)$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$, c'est-à-dire une suite croissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, vérifiant : $\mathscr{F}_0$ triviale et $\bigvee_n \mathscr{F}_n = \mathscr{F}$. On note $\mathscr{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés liés à cette histoire.

— Une suite X_n de v. a. de $\mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ adaptée aux tribus $(\mathscr{F}_n)$ est appelée un a-potentiel si $N(X_\sigma) \xrightarrow[\sigma \in \mathscr{T}]{} 0$.

— Une suite X_n de v. a. de $\mathbb{P}(\mathbb{E}_+)$ adaptée aux tribus $(\mathscr{F}_n)$ est appelée un potentiel de Doob si la famille $(E(X)_\sigma)_{\sigma \in \mathscr{T}}$ est décroissante et converge vers 0 dans $\mathbb{E}$.

En utilisant le lemme 11 de [*4*] et les propositions précédentes on établit facilement que :

a) Si $\mathbb{E}$ est à norme continue pour l'ordre et si (X_n) est un a-potentiel vérifiant $0 \leq | X_n | \leq Y$ pour une v. a. Y, alors $X_n \to 0$ fortement p. s.

b) Si $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ est un espace probabilisé infini, les énoncés suivants sont équivalents :

i) $\mathbb{E}$ est de type AL.

ii) Tout a-potentiel (X_n) vérifiant $\| X_n \| \leq 1$ converge fortement p. s. (pour toutes les histoires de l'espace).

iii) Tout a-potentiel (X_n) converge fortement p. s.

iv) Tout a-potentiel est uniforme.

Rappelons enfin que si $\mathbb{E}$ n'est pas de type AL, on peut construire un espace probabilisé non atomique et un potentiel de Doob sur cet espace, uniformément borné et ne convergeant pas fortement p. s. [*1*].

Amarts

Nous prendrons dans toute cette partie un espace de Banach $\mathbb{E}$ solide et séparable. Rappelons brièvement qu'une suite (μ_n) de mesures à valeurs dans $\mathbb{E}$ adaptées à une histoire $(\mathscr{F}_n)$ est un presque amart pour l'ordre ou p. o. a. si $\bigvee_n |\mu_n|(\Omega) \in \mathbb{E}$ et s'il existe une suite de réels $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $e \in \mathbb{E}_+$ tels que $\forall m > n \; |\mu_n - \mu_m|_{\mathscr{F}_n}|(\Omega) \leq \varepsilon_n e$ pour tout n. On dit que (μ_n) est un presque potentiel pour l'ordre ou p. o. p. si $\bigvee |\mu_n|(\Omega) \in \mathbb{E}$ et $|\mu_n|(\Omega) \leq \varepsilon_n e$ tout n. On définit les 0-amarts et les 0-potentiels en remplaçant dans les définitions précédentes « $n \in \mathbb{N}$ » par « $t \in \mathscr{T}$ ». En outre on obtient les mêmes notions pour les suites adaptées $\{X_n\} \subset \mathbb{P}_0(\mathbb{E})$ en considérant $(\mu_n = X_n.P)$.

Remarquons que les définitions données ci-dessus sont plus strictes que celles de [7]; mais lorsque $\mathbb{E}$ est à norme continue pour l'ordre elles coïncident modulo la propriété $*$ [4].

Nous obtenons la caractérisation suivante, dont la preuve est laissée au lecteur.

PROPOSITION 11. — *(μ_n) — respect. (X_n) — est un $*$-p. o. p. si et seulement si $N_n(\mu_n) \to 0$ — respect. $N(X_n) \to 0$.*

L'utilisation du concept « mesures adaptées » outre sa généralité permet de simplifier les démonstrations relatives aux v. a. Ainsi l'adaptation des propriétés de [7] permet d'établir

PROPOSITION 12. — *Si $\mathbb{E}$ est à norme continue pour l'ordre, la classe des p. o. a. est réticulée.*

Enfin la proposition suivante montre la décomposition de Riesz des p. o. a. et de là le lien reliant cette classe aux 0-amarts. Il est intéressant de noter l'analogie avec les résultats de [5].

PROPOSITION 13. — *Si $\mathbb{E}$ est du type KB et (X_n) une suite vérifiant les hypothèses de la proposition 10.*

a) Si (X_n) est un p. o. a. — resp. un $*$-p. o. a. et $E(X_n 1_A)$ converge pour tout $A \in \cup \mathscr{F}_n$ — alors X_n s'écrit de manière unique sous la forme $X_n = M_n + \mathscr{Z}_n$ où (M_n) est une martingale et $\mathscr{Z}_n$ est un p. o. p. — resp. $\mathscr{Z}_n$ est un $*$-p. o. p.

b) (X_n) est un $*$-p. o. a. si et seulement si (X_n) est un $*$-0-amart.

Preuve. — La première partie se montre de manière analogue au théorème III-1 de [7] lorsque $\underline{\lim}\, B(X_n) < +\infty$. Lorsque $\underline{\lim}\, \| X_n \| \in L^0$ on

utilise la proposition 9 : le p. o. p. ($\mu_n = X_n.P$) se décomposant de manière unique en $\mu_n = m_n + \rho_n$ avec la martingale $(m_n) \subset \mathscr{M}_p$: (théorème 3.2 et proposition 2.2 de [7]) donc ($m_n = M_nP$) ce qui achève la preuve de *a*). Il suffit donc d'établir *b*) lorsque (X_n) est p. o. p. positif et on peut même supposer, par extraction de sous-suites, que $E(X_{n_i}) \leq 2^{-i}e_0$. Il est clair que $\{ Y_i = X_{n_i} \}$ est un 0-potentiel relativement à $(\mathscr{G}_i = \mathscr{F}_{n_i})$.

a) Applications aux hypomartingales

Rappelons que (X_n) est une hypomartingale si $X_n = M_n - \mathscr{Z}_n$ où (M_n) est une martingale et $(\mathscr{Z}_n)$ un potentiel positif :

Proposition 14. — *Sous les hypothèses de la proposition précédente on a l'équivalence entre*

i) (X_n) *est une hypomartingale.*

ii) $E(X_\tau) \to \bigvee_{\mathscr{C}} E(X_\tau)$ *dans* $\mathbb{E}$.

Preuve. — *i*) $\Rightarrow$ *ii*) est évidente et *ii*) $\Rightarrow$ *i*) résulte de la proposition précédente.

Remarque. — Dans la seconde note [3] la condition *iii*)

$$E(X_n 1_A) \to \bigvee_n E(X_n 1_A)$$

pour tout $A \in \cup \mathscr{F}_n$ permet uniquement d'affirmer que $X_n = M_n - \mathscr{Z}_n$ avec (M_n) martingale positive et $\mathscr{Z}_n \geq 0$ avec $E(Z_n) \to 0$ donc $*$ p. o. p.

b) Cas des espaces a base inconditionnelle

L'espace $\mathbb{E}$ sera maintenant un espace de Banach à base inconditionnelle (e_k) [9] c'est-à-dire que tout $x \in \mathbb{E}$ s'écrit de manière unique $x = \Sigma f_k(x)e_k$ où $f_k \in \mathbb{E}'$ et la série de terme général $(f_k(x)e_k)$ sommable. On a alors les équivalences entre : *i*) $\mathbb{E}$ ne contient pas c_0, *ii*) $\mathbb{E}$ vérifie la propriété de Radon-Nikodym, *iii*) $\mathbb{E}$ est de type KB. Remarquons que l'espace $\mathbb{E}$ n'est pas *a priori* ordonné. Nous noterons $|||.|||$ la norme équivalente sur $\mathbb{E}$ définie par $||| x ||| = \bigvee(\Sigma \mid f_k(x)u(e_k) \mid)$ le sup étant pris pour les u : $\| u \| \leq 1$. Si $x = \Sigma f_k(x)e_k$ alors $\mid x \mid = \Sigma \mid f_k(x) \mid e_k$ et ainsi si μ est une $\mathbb{E}$-mesure telle que $\mid \mu \mid = \mu^+ - \mu^-$ existe alors pour tout k $\mid f_k \circ \mu \mid = f_k \circ \mid \mu \mid$.

Proposition 15. — *Soit* (X_n) *un amart à valeurs dans* $\mathbb{E}$, *espace à base inconditionnelle de type* KB, *et tel que* $\bigvee_\tau E(\mid X_\tau \mid) \in \mathbb{E}$ *alors* (X_n) *est un* $*$-0-*amart*.

Preuve. — Posons $\mu_n = X_n P$ et soit $\mu_n = m_n + \rho_n$ sa décomposition de Riesz. (m_n) est un 0-amart, soit $u \in \mathbb{E}'$ alors $u \circ \rho_n = (f_k(\rho_n).u(e_k))_k$ est un potentiel avec $\bigvee_\tau |\mu \circ \rho_\tau| \in l^1$ donc $(|u \circ \rho_n|)$ est un potentiel et ainsi $(|\rho_n|)$ est un potentiel faible dans $\mathbb{E}$. Comme $\bigvee_\tau |\rho_\tau|(\Omega) \in \mathbb{E}$ c'est un potentiel fort [6] et par sous-suite (ρ_n) est un $*$-0-amart.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Benyamini et N. Ghoussoub, Une caractérisation probabiliste de l^1. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. **286**, série A, 1978, p. 795.

[2] B. Bru et H. Heinich, *Convergence forte de certains amarts vectoriels*, 1978, (à paraître).

[3] B. Bru et H. Heinich, Sur l'espérance des variables aléatoires vectorielles. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. **288**, série A, 1979, p. 65-68.

B. Bru et H. Heinich, Sur les suites de mesures vectorielles adaptées. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. **288**, série A, 1979, p. 363-366.

[4] B. Bru et H. Heinich, Sur l'espérance des variables aléatoires vectorielles. *Annales de l'Inst. Henri Poincaré*, vol. XVI, n° 3, 1980, p. 177-196.

[5] G. A. Edgar et L. Sucheston, The Riesz decomposition for vector-valued amarts. *Zeit. Wahrs. verw. Gebiete*, t. **36**, 1976, p. 85-92.

[6] H. Heinich, Convergence des sous-martingales positives dans un Banach réticulé. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. **286**, série A, 1978, p. 279-280.

[7] H. Heinich, Martingales asymptotiques pour l'ordre. *Annales de l'Inst. Henri Poincare*, vol. XIV, n° 3, 1978, p. 315-333.

[8] H. H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1974.

[9] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*. Springer-Verlag, 1970.

[10] E. Thomas, On some negative properties of the Pettis integral. *Lecture notes*, n° 541, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1976, p. 131.

(Manuscrit reçu le 18 mars 1980).