ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. PELLAUMAIL

Formule du produit et décomposition de réseaux de files d'attente

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 3 (1979), p. 261-286
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_3_261_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XV, n° 3, 1979, p. 261-286.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Formule du produit et décomposition de réseaux de files d'attente

par

J. PELLAUMAIL
Institut National des Sciences Appliquées,
20, avenue des Buttes de Coësmes, B. P. 14 A, 35031 Rennes Cedex.

RÉSUMÉ. — Quand les routages ne dépendent pas de l'état, il est bien connu que la probabilité stationnaire d'un réseau de files d'attente s'exprime sous forme d'un produit. Une formule du produit, d'un type plus général que dans la situation classique, est établie pour certains réseaux dont les routages dépendent de l'état ; plus précisément, on considère des réseaux satisfaisant à une condition d'équilibre qui généralise la notion classique de « balance locale ».

TABLE DES MATIÈRES

A. INTRODUCTION

Étant donné un réseau markovien de files d'attente R, on cherche à étudier le régime stationnaire de ce réseau R par l'intermédiaire des régimes stationnaires de sous-réseaux qui se déduiront de R et qui sont plus simples que R.

Dans la majeure partie de cette étude, on supposera que R est composé de stations dont les lois de service sont exponentielles : cette hypothèse est faite uniquement pour faciliter l'exposition des résultats fondamentaux. Les éléments en circulation dans ce réseau R seront appelés clients.

Le réseau R étant donné, pour simplifier l'étude de R, en régime stationnaire, on remplace certains sous-réseaux de R par une station unique; cet échange se fait de façon particulièrement simple quand on considère des sous-réseaux standards.

Cette notion de sous-réseau standard est définie et étudiée au paragraphe B : cette notion ne dépend que du sous-réseau considéré.

Les théorèmes généraux de décomposition d'un réseau R sont donnés au paragraphe C : le théorème fondamental dans toute cette étude est le théorème C-2; on y donne une condition suffisante pour qu'un réseau R puisse être « décomposé » en deux sous-réseaux R′ et R″ avec la formule du produit pour les probabilités stationnaires; cette condition suffisante est une généralisation, en un certain sens, de la notion classique de « balance locale » (cf. [Whi], [Ch1] ou [Ch2]).

Au lieu de dire que l'on a décomposé R, on peut aussi dire qu'une station S′, dans $\bar{R}' = (R', S')$ peut être remplacée par le sous-réseau R″;

pour cela, il suffit que la station S' soit « échangeable » ; le théorème C-2 dit aussi qu'une station échangeable dans $\bar{R}'$, l'est encore dans R ; on peut donc itérer ce procédé d'échange, ou, si l'on préfère, itérer la méthode de décomposition. Ceci permet d'obtenir, en raisonnant par récurrence, les autres théorèmes de décomposition.

Plus précisément, soit R un réseau markovien qui peut être décomposé en s sous-réseaux $(R_k)_{1 \leqslant k \leqslant s}$; soit e un état de R, e_k l'état associé de R_k et $\hat{e}_k$ le nombre de « clients » dans le sous-réseau R_k pour cet état e_k. On note $\hat{e}$ le « vecteur » $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_s)$. Soit $p(e)$ la probabilité stationnaire pour le réseau R d'être dans l'état e. Le théorème C-3 donne des conditions suffisantes pour que l'on ait des fonctions $\hat{f}$ et $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant s}$ telles que :

$$p(e) = \hat{f}(\hat{e}) \,.\, \prod_{k=1}^{s} f_k(e_k)$$

c'est-à-dire qu'on a décomposé l'étude de R en l'étude de chaque fonction f_k (c'est-à-dire, ici, l'étude du sous-réseau R_k) et en l'étude de la fonction $\hat{f}$.

Notons que, pour tout entier k, les paramètres qui interviennent dans la fonction f_k ne dépendent que des paramètres du sous-réseau R_k.

Par ailleurs, la fonction $\hat{f}$ est la probabilité stationnaire d'un réseau $\hat{R}$ déduit de R en remplaçant chaque sous-réseau R_k par une station unique.

Au paragraphe D, on définit et on étudie les notions de « réseau parfait » et de « réseau pouvant être rendu parfait » ; si le réseau $\hat{R}$ évoqué ci-dessus peut être rendu parfait, la fonction $\hat{f}$ peut être choisie identiquement égale à 1 ; dans ce cas, on a donc une « formule du produit » au sens habituel. Si $\hat{R}$ est un réseau dont les routages ne dépendent pas de l'état, on montre que $\hat{R}$ peut être rendu parfait.

B. SOUS-RÉSEAU STANDARD

B-1. Réseau et station de service (conventions).

Dans la suite, on sera amené à considérer des « *réseaux* » constitués de « *stations de service* ». Il sera entendu que :

a) Chaque station de service a une loi de service exponentielle, les « clients » étant servis un par un en ce sens que $\lim \frac{1}{dt} P[A(t, dt)] = 0$ si $A(t, dt)$ est l'événement : « il y a plusieurs clients qui sont servis entre t et $t + dt$ ».

b) Le taux de service de la station pourra dépendre uniquement de l'état de la station considérée, ou de tout l'état de tout le réseau ; dans tous les cas, on supposera que ce taux est nul si la station est vide et que ce taux est strictement positif dans les autres cas.

c) Tous les réseaux considérés seront supposés *markoviens irréductibles* (c'est-à-dire qu'on peut leur appliquer le théorème ergodique).

d) Un client qui quitte une station ne peut pas revenir immédiatement dans la même station ; on adopte cette hypothèse pour la commodité des notations (cf. F-2).

Par ailleurs, on ne fera pas de différence entre la notion de « *sous-réseau* » et la notion de « *réseau ouvert* ».

Enfin, soit S une station de service ; si le taux de service de S ne dépend que de l'état de la station S, on dira que S est une *station pure* ; dans ce cas, en général, on notera $h(j)$ le taux de service de la station S quand il y a j clients dans cette station. Par contre, si S est couplée avec un sous-réseau R et si le taux de service de S dépend de l'état e de R, on notera, en général, $g(e)$ le taux de service de S quand R est dans l'état e ; si S est pure et s'il y a n clients dans le réseau fermé $(R, S) = \bar{R}$, on aura donc $g(e) = h(n - \hat{e})$ en désignant par $\hat{e}$ le nombre de clients dans R quand l'état est e.

B-2. Taux de probabilité (notations *a*, *b*, *c*, *d* et *r*).

1) Dans la suite de cette étude, on sera amené à considérer des sous-réseaux R d'un réseau markovien donné ; chaque état d'un tel sous-réseau R est caractérisé par un élément e de $\mathbb{N}^s$ si s est le nombre de stations dans le sous-réseau R ; on a donc $e = (e^1, \ldots, e^s)$ où e^i désigne le nombre de clients dans la station i du sous-réseau R. On notera $\hat{e}$ le nombre de clients dans le sous-réseau R si l'état de ce sous-réseau est e : on a donc $\hat{e} = \sum_{i=1}^{s} e^i$. On notera $f_i = (f_i^j)_{j>0}$ l'élément de $\mathbb{N}^s$ défini par $f_i^j = \delta_{i,j}$ (c'est-à-dire $f_i^j = 0$ si $i \neq j$ et $f_i^j = 1$ si $i = j$). Par exemple, $f_2 = (0, 1, 0, \ldots)$.

2) Étant donné un événement A, on appellera *taux de probabilité* de cet événement la quantité définie par :

$$a = \lim_{dt \downarrow 0} . \frac{1}{dt} \{ \text{Probabilité que A se réalise entre } t \text{ et } (t + dt) \}$$

3) Soit R un sous-réseau ; en général dans la suite, ce sous-réseau sera tel que :

a) pour ce sous-réseau R, les taux de probabilité de transfert à l'intérieur du sous-réseau R ne dépendent que de l'état du sous-réseau R, *b*) pour ce sous-réseau R, les taux de probabilité pour un client de quitter le sous-réseau R ne dépendent que de l'état de ce sous-réseau R,

c) pour ce sous-réseau R, quand un client rentre dans ce sous-réseau, la probabilité, pour ce client, d'aller dans telle ou telle station de R ne dépend que de l'état de R.

Dans ce cas, on dira que R *est un sous-réseau propre* et on notera $a_i(e)$ (resp. $b_i(e)$) le taux de probabilité qu'un client quitte la station i pour aller dans une autre station (resp. à l'extérieur) du sous-réseau R, quand l'état est e (avant le départ de ce client).

De même, on notera $c_i(e)$ la probabilité, pour un client qui rentre dans le sous-réseau R, d'aller dans la station i si l'état du sous-réseau est e.

Enfin, on notera $d_{i,j}(e)$ le taux de probabilité qu'un client quitte la station i (du sous-réseau R) pour aller dans la station j (du sous-réseau R) si le sous-réseau R est dans l'état e. On a évidemment :

$$\sum_i c_i(e) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_j d_{i,j}(e) = a_i(e)\,.$$

De plus, $(a_i + b_i)(e)$ est le taux de service de la station i (du sous-réseau R) quand ce sous-réseau est dans l'état e.

Enfin, on posera

$$r_{i,j}(e) = d_{i,j}(e)\,.\,\frac{1}{a_i(e) + b_i(e)}\,;$$

Autrement dit, $r_{i,j}(e)$ est la probabilité, pour un client qui quitte la station i, d'aller dans la station j si le sous-réseau est dans l'état e ; ces probabilités $r_{i,j}$ de répartition entre stations seront parfois appelées « routages ».

Il faut bien noter que, dans la définition de ces quantités a, b, c, d et r, *on ne prend pas en compte les probabilités d'état du sous-réseau* R. Il faut aussi noter que ces quantités peuvent dépendre de l'état e de tout le sous-réseau, mais aussi d'un nombre n qui sera fixé dans tout ce qui suit.

B-3. **Taux de probabilité stationnaires (notations *u*, *v*, *w* et *z*).**

On considère un sous-réseau R avec les hypothèses et les notations données en B-2 ci-dessus. On considère une station de service S (cf. B-1). Soit $\bar{R} = (R, S)$ le réseau fermé constitué de R et S, le nombre de clients dans $\bar{R}$ étant égal à n (le taux de service de S pouvant dépendre de l'état e de R).

Dans la suite, on s'intéressera notamment au réseau $\bar{R}$ en *régime stationnaire*. Soit $p(e)$ la probabilité, en régime stationnaire, pour le réseau $\bar{R}$, d'être dans l'état $(e, n - \hat{e})$ (bien entendu cette probabilité dépend de n mais n est fixé une fois pour toutes).

Pour alléger l'écriture et faciliter la compréhension, on utilisera les notations suivantes :

B-3-1 $$u(e) = \sum_{i,j} p(e - f_i + f_j) . d_{j,i}(e - f_i + f_j)$$

autrement dit, $u(e)$ est le taux de probabilité, en régime stationnaire et pour le réseau $\bar{\mathrm{R}}$, d'atteindre l'état $(e, n - \hat{e})$ par transfert à l'intérieur du sous-réseau R.

B-3-2 $$v(e) = \sum_{i} p(e - f_i) . c_i(e - f_i)$$

autrement dit, $v(e)$ est la probabilité, en régime stationnaire et pour le réseau $\bar{\mathrm{R}}$, d'atteindre l'état $(e, n - \hat{e})$ si on sait qu'un client rentre dans le sous-réseau R.

B-3-3 $$w(e) = \sum_{i} p(e + f_i) . b_i(e + f_i)$$

autrement dit, $w(e)$ est le taux de probabilité, en régime stationnaire et pour le réseau $\bar{\mathrm{R}}$, d'atteindre l'état $(e, n - \hat{e})$ par départ d'un client du sous-réseau R vers la station S.

Quand le taux de service $g(e)$ de la station de service S dépend de l'état du sous-réseau R, on introduit aussi :

B-3-4 $$z(e) = \sum_{i} p(e - f_i) . c_i(e - f_i) . g(e - f_i)$$

autrement dit, $z(e)$ est le taux de probabilité, en régime stationnaire et pour le réseau $\bar{\mathrm{R}}$, d'atteindre l'état $(e, n - \hat{e})$ par départ d'un client de la station S (et arrivée de ce client dans le sous-réseau R).

B-4. Sous-réseau standard (définition).

Soit n un entier et R *un sous-réseau propre* (*cf.* B-2). *On dira que* R *est un sous-réseau n-standard s'il existe une station de service pure* S (*cf.* B-1) *telle que, avec les notations indiquées en* B-2 *et* B-3 *ci-dessus,* $\bar{\mathrm{R}}$ *est un réseau markovien ergodique et, pour tout état e de* R, *on a :*

B-4-1 $$w(e) = h(n - \hat{e}) . p(e)$$

De plus, on dira que R *est standard si* R *est n-standard pour tout entier n.*

Il faut noter que, par hypothèse, la probabilité p est une probabilité qui satisfait aux conditions d'équilibre habituelles en régime stationnaire; pour tout état e, la condition B-4-1 ci-dessus est donc équivalente à la condition suivante :

B-4-2 $$u(e) + h(n + 1 - \hat{e}).v(e) = p(e).\left\{\sum_i (a_i + b_i)(e)\right\}$$

Il faut aussi noter que les divers taux de probabilité (a, b et d) et les probabilités c associés au sous-réseau R *peuvent dépendre* de n (on travaille à n fixé).

Du point de vue « physique », la condition B-4-1 signifie que, en régime stationnaire, le taux de probabilité d'atteindre l'état $(\varepsilon, n - \hat{e})$ par arrivée d'un client dans la station S est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de la station S.

C'est donc, en un certain sens, une généralisation de la notion classique de « *balance locale* » (cf. [Whi] ou [Ch2]).

B-5. **Premier théorème de stabilité.**

Soit n un entier et R *un sous-réseau n-standard. Soit* S *une station de service pure (cf.* B-1) *telle que la condition* B-4-1 *soit satisfaite (pour tout état e). Soit* S′ *une station pure de taux de service $h'(j)$; on définit $\bar{R}'$, w', p' comme en* B-2 *et* B-3 *ci-dessus (relativement à cette station de service* S′). *On a alors :*

B-5-1 $$p'(e) = K.p(e).\left\{\prod_{j=1}^{n-\hat{e}} \frac{h(j)}{h'(j)}\right\}$$

où K *est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e.*

De plus, pour tout état e, on a :

B-5-2 $$w'(e) = h'(n - \hat{e}).p'(e)$$

Autrement dit, si, pour tout état e, la condition B-4-1 *est satisfaite relativement à une station de service* S, *alors cette même condition* B-4-1 *est satisfaite relativement à n'importe quelle station de service* S′ *(quand les taux de service ne dépendent que de l'état des stations considérées).*

Preuve. — On suppose donc que p satisfait aux conditions B-4-1. On considère, *a priori*, la probabilité p' définit par l'égalité B-5-1 (la constante K étant choisie en sorte que p' soit bien une probabilité). On définit u', v' et w'

relativement à cette probabilité p' comme en B-2 ci-dessus. Pour alléger les notations, on pose :

$$g(k) = \prod_{j=1}^{k} \frac{h(j)}{h'(j)}$$

On a :

B-3-1 $$u'(e) = \sum_{i,j} p'(e - f_i + f_j).d_{j,i}(e - f_i + f_j)$$

soit, compte tenu de B-5-1,

B-5-3 $$u'(e) = \mathrm{K}.u(e).g(n - \hat{e})$$

De même :

B-3-2 $$v'(e) = \sum_{i} p'(e - f_i).c_i(e - f_i)$$

ce qui implique

B-5-4 $$v'(e) = \mathrm{K}.v(e).g(n + 1 - \hat{e})$$

et

B-3-3 $$w'(e) = \sum_{i} p'(e + f_i).b_i(e + f_i)$$

ce qui implique

B-5-6 $$w'(e) = \mathrm{K}.w(e).g(n - 1 - \hat{e})$$

Les égalités B-4-1 et B-5-6 impliquent alors :

$$w'(e) = \mathrm{K}.h(n - \hat{e}).p(e).g(n - 1 - \hat{e})$$

ce qui donne :

B-5-7 $$w'(e) = h'(n - \hat{e}).p'(e)$$

De même, les égalités B-4-2, B-5-3 et B-5-4 impliquent :

$$\begin{aligned} p'(e).\left\{\sum_{i}(a_i + b_i)(e)\right\} &= p(e)\left\{\sum_{i}(a_i + b_i)(e)\right\}.\mathrm{K}.g(n - \hat{e}) \\ &= \mathrm{K}.g(n - \hat{e}).u(e) + \mathrm{K}.g(n - \hat{e}).h(n + 1 - \hat{e}).v(e) \\ &= u'(e) + v'(e).\frac{g(n - \hat{e})}{g(n + 1 - \hat{e})}.h(n + 1 - \hat{e}) \end{aligned}$$

Soit, finalement :

B-5-8 $$u'(e) + v'(e).h'(n + 1 - \hat{e}) = p'(e).\left\{\sum_{i}(a_i + b_i)(e)\right\}$$

Les égalités B-5-7 et B-5-8 montrent alors que p' satisfait aux conditions d'équilibre en régime stationnaire, donc p' est bien la probabilité stationnaire du réseau $\bar{R}'$ (théorème ergodique). De plus, l'égalité B-5-7 montre que cette probabilité p' satisfait à la condition B-5-2 ce qui achève la preuve du théorème.

B-6. **Probabilités et réseau naturels (définition).**

Soit n un entier et R *un sous-réseau n-standard. Soit* S *la station pure de taux de service $h(j) = 1$ quel que soit j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Soit $p(e)$ la probabilité stationnaire de l'état $(e, n - \hat{e})$ du réseau $\bar{R}$ comme indiqué en* B-3 *ci-dessus. Cette probabilité p sera appelée la probabilité n-naturelle du sous-réseau* R. *Le réseau $\bar{R}$ sera appelé le réseau n-naturel associé à* R.

Soit, alors, une station pure S′ de taux de service h'. Soit $p'(e)$ la probabilité stationnaire de l'état $(e, n - \hat{e})$ du réseau $\bar{R}' = (R, S')$ comme indiqué en B-2. On a alors :

$$p'(e) = K.p(e).\left\{\prod_{j=1}^{n-e} \frac{1}{h'(j)}\right\}$$

où K est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e (ceci est un corollaire du théorème de stabilité B-5).

B-7. **Cas d'une seule station.**

Soit n un entier et R un sous-réseau réduit à une seule station pure (cf. B-1) S de taux de service $h(j)$ quand il y a j clients dans la-dite station. Alors R est standard ; de plus la probabilité n-naturelle de R vaut :

$$p(j) = K.\frac{1}{f(j)} \quad \text{avec} \quad f(j) = \prod_{i=1}^{j} h(i)$$

où j désigne le nombre de clients dans la station S.

La vérification de ceci est immédiate et sera laissée au lecteur.

B-8. **Deuxième théorème de stabilité.**

Soit R *un sous-réseau n-standard. Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant n$, soit $h^*(j)$ un réel strictement positif. On pose $h^*(0) = 0$. Soit* R′ *le sous-réseau déduit de* R *de la façon suivante :*

a) les probabilités de répartition entre stations sont les mêmes dans R′ *et dans* R ;

b) pour toute station X *de* R′, *le taux de service* $h'_X(e)$ *de* X *dans* R′, *si* R′ *est dans l'état e, est égal à* $h_X(e).h^*(n - \hat{e})$, *où* $h_X(e)$ *désigne le taux de service de la station* X *dans* R *si* R *est dans l'état e.*

Soit $p(e)$ (*resp.* $p'(e)$) *la probabilité n-naturelle du sous-réseau* R (*resp.* R′). *On peut alors affirmer que :*

a) R' est un sous-réseau n-standard

$$b)\ p'(e) = \mathrm{K}p(e)\left\{\prod_{i=1}^{\hat{e}} h'(n+1-i)\right\}$$

où K *est une constante qui ne dépend pas de l'état e.*

Preuve. — La vérification de ce théorème est tout à fait analogue à celle du théorème B-5 et sera laissée au lecteur.

B-9. **Flux de sortie conditionnel.**

Dans [Ma1], [Ma2] et [Ma3], Marie a mis en évidence l'importance de la notion de « flux de sortie conditionnel ». Soit R un sous-réseau propre. Soit $\bar{\mathrm{R}}$ le réseau fermé constitué de R et d'une station S dont le taux de service $g(e)$ peut dépendre de l'état e de R. Soit A un sous-ensemble de l'ensemble des états e de R ; avec les notations indiquées en B-2 et B-3, le flux de sortie conditionnel de R sachant que R est dans l'un des états de A vaut (par définition) :

$$v(\mathrm{A}) = \left\{\sum_{e\in \mathrm{A}} p(e) . \sum_i b_i(e)\right\} \frac{1}{\sum_{e\in \mathrm{A}} p(e)}$$

Si S *est une station pure, si* R *est un sous-réseau standard, si* $\mathrm{A} = \{ e : \hat{e} = k \}$ *avec k entier positif, le théorème de stabilité montre que* $v(\mathrm{A})$ *ne dépend pas du taux de service de la station* S (cette propriété avait été mise en évidence par Marie dans le cas des réseaux à routages fixes).

C. COMPOSITION DE RÉSEAUX

C-1. **Station échangeable (définition).**

Soit R un sous-réseau propre (cf. B-2). On note $\bar{\mathrm{R}}$ le réseau fermé constitué de R et d'une station de service (cf. B-1) S dont le taux de service $g(e)$ peut dépendre de l'état e du réseau ouvert R. Soit n le nombre total de clients dans le réseau $\bar{R}$. On note $p(e)$ la probabilité stationnaire, pour le réseau $\bar{R}$, d'être dans l'état $(e, n - \hat{e})$. On définit w comme en B-3 relativement à cette probabilité p.

On dira que S *est une station n-échangeable dans le réseau* $\bar{R}$ *si, pour tout état e de* R, *on a :*

C-1-1 $$w(e) = g(e) . p(e)$$

Dans le cas où g ne dépend que de $\hat{e}$, ceci revient à dire que R est un *sous-réseau n-standard* (cf. B-4). Par ailleurs, puisqu'on est en régime stationnaire, pour tout état e, l'égalité C-1-1 équivaut à la suivante :

C-1-2 $$u(e) + z(e) = p(e) . \sum_i [a_i(e) + b_i(e)]$$

C-2. **Théorème fondamental.**

On considère deux sous-réseaux propres R′ *et* R″ (*cf.* B-2). *On considère le réseau fermé* $\bar{R}'$ (*resp.* $\bar{R}''$) *constitué de* R′ (*resp.* R″) *et d'une station* S′ (*resp.* S″) *dont le taux de service* (*cf.* B-1) $g'(e')$ (*resp.* $g''(e'')$) *peut dépendre de l'état* e' (*resp.* e'') *du sous-réseau* R′ (*resp.* R″). *On suppose que* S′ (*resp.* S″) *est n-échangeable* (*cf.* C-1) *dans le réseau* $\bar{R}'$ (*resp.* $\bar{R}''$). *Alors, on peut composer un réseau* R *à partir de* R′ *et* R″ *en ayant la formule du produit.*

Plus précisément, on note $p'(e')$ (*resp.* $p''(e'')$) *la probabilité stationnaire, pour le réseau* $\bar{R}'$ (*resp.* $\bar{R}''$) *d'être dans l'état* $(e', n - \hat{e}')$ (*resp.* $(e'', n - \hat{e}'')$).

Soit R *le réseau fermé constitué de* R′ *et* R″, *le nombre de clients dans* R *étant n ; un état* $e = (e', e'')$ *de* R *est caractérisé par les états associés* e' *de* R′ *et* e'' *de* R″ *; dans* R, *les taux de service et les probabilités de répartition entre stations sont définis de la façon suivante :*

a) Dans R, *le taux de service d'une station* S_j *de* R′ (*resp.* R″) *est égal au taux de service de cette même station dans* R′ (*resp.* R″) *multiplié par le taux de service de* S″ (*resp.* S′) (*pour les états* e' *et* e'' *associés à l'état e de* R).

b) Dans R, *les probabilités de répartition entre stations (les « routages ») à l'intérieur de* R′ *ou de* R″ *sont les mêmes que dans les réseaux initiaux* R′ *et* R″.

c) Dans R, *la probabilité* $r_{j,k}$ *pour un client qui quitte une station* S_j *de* R′ (*resp.* R″) *d'aller dans la station* S_k *de* R″ (*resp.* R′) *est égale au produit de la probabilité, pour ce client qui quitte la station* S_j, *de quitter le sous-réseau* R′ (*resp.* R″) *multiplié par la probabilité, pour un client qui rentre dans le réseau* R″ (*resp.* R′), *d'aller dans la station* S_k *de* R″ (*resp.* R′).

1) *Soit* $p(e) = p(e', e'')$ *la probabilité stationnaire, pour le réseau* R, *d'être dans l'état* $e = (e', e'')$. *On a alors :*

C-2-1 $$p(e) = \mathrm{C}.p'(e').p''(e'')$$

où C *est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état* e *de* R.

2) *De plus, si* S_j *est une station n-échangeable* (*autre que* S) *dans* $\bar{\mathrm{R}}'$ *ou* $\bar{\mathrm{R}}''$, S_j *est encore une station n-échangeable dans* R : *autrement dit on pourra éventuellement recommencer l'opération de composition de réseaux qui précède à partir de* S_j *dans* R.

Preuve. — 1) On considère *a priori* la probabilité p définie par la formule C-2-1, la constante K étant choisie en sorte qu'on ait bien une probabilité. Soit $e = (e', e'')$ un état de R. Dans R, on note J (resp. K) l'ensemble des indices des stations qui appartenaient à R′ (resp. R″). On définit a', b' et c' (resp. a'', b'' et c'') relativement à R′ (resp. R″) comme étaient définis a, b et c relativement à R en B-2. On définit u', w' et z', relativement à $\bar{\mathrm{R}}'$ et p' comme en B-3, et de même pour u'', w'', z'' et p''.

Soit $\mathrm{C}x(e)$ (resp. $\mathrm{C}y(e)$) le taux de probabilité (dans R et pour la probabilité p) d'atteindre (resp. de quitter) l'état e. On a :

C-2-1 $$x(e) = x_1(e) + x_2(e) + u'(e')g''(e'')p''(e'') + u''(e'')g'(e')p'(e')$$

avec :

C-2-2 $$x_1(e) = \frac{1}{\mathrm{C}}\sum_{j\in\mathrm{J}}\sum_{k\in\mathrm{K}} p(e + f_j - f_k).b'_j(e' + f_j).g''(e'' - f_k).c''_k(e'' - f_k) = w'(e').z''(e'')$$

C-2-3 $$x_2(e) = \frac{1}{\mathrm{C}}\sum_{j\in\mathrm{J}}\sum_{k\in\mathrm{K}} p(e - f_j + f_k).b''_k(e'' + f_k).g'(e' - f_j).c'_j(e' - f_j) = z'(e').w''(e'')$$

De même :

C-2-4 $$y(e) = y_1(e) + y_2(e) \qquad \text{avec}$$

C-2-5 $$y_1(e) = \frac{1}{\mathrm{C}}p(e)g''(e'')\sum_{j\in\mathrm{J}}[a'_j(e') + b'_j(e')].$$

C-2-6 $$y_2(e) = \frac{1}{\mathrm{C}}p(e)g'(e')\sum_{k\in\mathrm{K}}[a''_k(e'') + b''_k(e'')].$$

Par ailleurs, puisque S′ (resp. S″) est échangeable dans $\bar{\mathrm{R}}'$ (resp. $\bar{\mathrm{R}}''$), on a :

(C-2-7 $$w'(e') = g'(e').p'(e') \qquad \text{(cf. C-1-1)}$$

C-2-8 $$w''(e'') = g''(e'').p''(e'')$$

C-2-9 $$\frac{1}{p'(e')}[u'(e') + z'(e')] = \sum_{j\in J}[a'_j(e') + b'_j(e')] \quad \text{(cf. C-1-2)}$$

C-2-10 $$\frac{1}{p''(e'')}[u''(e'') + z''(e'')] = \sum_{k\in K}[a''_k(e'') + b''_k(e'')]$$

On reporte alors C-2-7 dans C-2-2, C-2-8 dans C-2-3 et les résultats obtenus dans C-2-1 ; il vient

C-2-11 $$\begin{aligned} x(e) &= g'(e')p'(e')z''(e'') + z'(e')g''(e'')p''(e'') \\ &+ u'(e')g''(e'')p''(e'') + u''(e'')g'(e')p'(e') \end{aligned}$$

De même on reporte C-2-9 et C-2-10 dans C-2-5 et C-2-6 respectivement et les résultats obtenus dans C-2-4 ce qui donne :

C-2-12 $$\begin{aligned} y(e) &= p''(e'').g''(e'').[u'(e') + z'(e')] \\ &+ p'(e').g'(e').[u''(e'') + z''(e'')] \end{aligned}$$

On a donc $x(e) = y(e)$, c'est-à-dire que p est bien la probabilité stationnaire du réseau R.

2) On considère donc une station S_i du sous-réseau R′, qui est échangeable dans $\bar{R}'$; l'indice i de cette station appartenant à J, on peut poser $J' = J \setminus \{ i \}$. Soit e un état de R ; dans R, pour la probabilité stationnaire $p = Kp'.p''$, le taux de probabilité $w_i(e)$ d'atteindre l'état e, par arrivée d'un client dans la station S_i, est égal à :

$$\begin{aligned} w_i(e) &= \sum_{j\in J,} p(e + f_j - f_i).g'_j(e' + f_j - f_i).g''(e'').r'_{j,i}(e' + f_j - f_i) \\ &+ \sum_{k\in K} p(e + f_k - f_i).b''_k(e'' + f_k).g'(e' - f_i).c'_i(e' - f_i) \\ &= Cp''(e'')g''(e'').\sum_{j\in J,}(p'g'_jr'_{j,i})(e' + f_j - f_i) \\ &= C(p'g'c'_i)(e' - f_i).\sum_{k\in K} p''(e'' + f_k)b''(e'' + f_k) \end{aligned}$$

La station S″ étant échangeable dans $\bar{R}''$, on a (cf. B-3-3 et C-1-1) :

$$w''(e'') = \sum_{k\in K} p''(e'' + f_k).b''_k(e'' + f_k) = p''(e'')g''(e'')$$

On en déduit :

$$w_i(e) = \mathrm{C}.p''(e'')g''(e'')\left\{\sum_{j\in \mathrm{J},}(p'g'_jr'_{j,i})(e' + f_j - f_i) + (p'h'c'_i)(e' - f_i)\right\}$$
$$= \mathrm{C}p''(e'')g''(e'')w'_i(e')$$

Mais la station S_i est échangeable dans $\bar{\mathrm{R}}'$, donc

$$w'_i(e') = p'(e').g'_i(e'),$$

on a donc :

$$w_i(e) = p(e).g''(e'')g'_i(e')$$

ce qui signifie très exactement que la station S_i est échangeable dans R.

C-3. **Théorème général.**

Soit $\hat{\mathrm{R}}$ *un réseau fermé markovien ergodique. On note* $\{ \mathrm{S}_m \}_{m\in \mathrm{M}}$ *l'ensemble des stations de service de ce réseau* $\hat{\mathrm{R}}$. *Soit* (I, J, K) *une partition de* M. *On suppose que, pour tout élément m de* $(\mathrm{J} \cup \mathrm{K})$, *la station* S_m *est n-échangeable dans* R (*cf.* C-1).

On suppose que, pour tout élément j de J, *le taux de service* $h_j(q)$ *de la station* S_j *ne dépend que du nombre q de clients dans la-dite station. On se donne une famille* $\{ \mathrm{R}_j \}_{j\in \mathrm{J}}$ *de sous-réseaux n-standards* (*cf.* B-4) *; on note* $p_j(e_j)$ *la probabilité n-naturelle, pour le sous-réseau* R_j, *d'être dans l'état* e_j (*cf.* B-6).

Par ailleurs, on considère une famille $\{ \mathrm{R}_k \}_{k\in \mathrm{K}}$ *de sous-réseaux propres* (*cf.* B-2) *et une famille associée* $\{ \mathrm{S}'_k \}_{k\in \mathrm{K}}$ *de stations de service, le taux de service* $g'_k(e_k)$ *de la station* S'_k *pouvant dépendre de l'état* e_k *du sous-réseau* R_k *associé ; pour tout élément k de* K, *on note* $\bar{\mathrm{R}}_k$ *le réseau fermé constitué de* R_k *et de* S'_k *et comprenant n clients en circulation ; on suppose que, pour tout élément k de* K, $\bar{\mathrm{R}}_k$ *est markovien ergodique et que la station* S'_k *est n-échangeable dans* $\bar{R}_k$, *et on note* $p'_k(e_k)$ *la probabilité stationnaire, pour le réseau* $\bar{\mathrm{R}}_k$, *d'être dans l'état* $(e_k, n - \hat{e}_k)$ *(en désignant par* $\hat{e}_k$ *le nombre de clients dans le sous-réseau* R_k *si* R_k *est dans l'état* e_k*).*

On étudie alors le réseau R *déduit de* $\hat{\mathrm{R}}$ *de la façon suivante :*

a) Il y a n clients dans le réseau fermé R.

b) Dans $\hat{\mathrm{R}}$, *on remplace chaque station* S_m, *pour* $m \in \mathrm{J} \cup \mathrm{K}$, *par le sous-réseau* R_m *associé ; un état e de* R *est alors caractérisé par les états* $\{ e_m \}_{m\in \mathrm{M}}$ *associés de* S_m *si* $m \in \mathrm{I}$ *ou de* R_m *si* $m \in \mathrm{J} \cup \mathrm{K}$ *; on notera* $\hat{e}_m$ *le nombre de clients dans* S_m *si* $m \in \mathrm{I}$ *ou dans* R_m *si* $m \in \mathrm{J} \cup \mathrm{K}$ *quand l'état est* e_m *; on posera* $\hat{e} = \{ \hat{e}_m \}_{m\in \mathrm{M}}$ *;* $\hat{e}$ *est l'état de* $\hat{\mathrm{R}}$ *associé canoniquement à l'état e de* R.

c) Les probabilités « de répartition » entre les diverses stations de R *sont définies de facon naturelle à partir de celles définies dans* R *et dans les sous-réseaux* R_m *; par exemple, la probabilité pour un client, qui quitte la station* X *du sous-réseau* R_m*, d'aller dans la station* Y *du sous-réseau* R_q *avec* $m \neq q$, $m \in J \cup K$ *et* $q \in J \cup K$, *est égale au produit* $x(e_m)y(e_q)z(\hat{e})$ *si le réseau* R *est dans l'état e, en posant :*

$x(e_m)$ = *probabilité, pour un client qui quitte la station* X, *de sortir du sous-réseau* R_m *quand celui-ci est dans l'état* e_m.

$y(e_q)$ = *probabilité, pour un client qui rentre dans le sous-réseau* R_q, *d'aller dans la station* Y *si le sous-réseau* R_q *est dans l'état* e_q.

$z(\hat{e})$ = *probabilité, dans le réseau* $\hat{R}$, *pour un client qui quitte la station* S_m *(de* $\hat{R}$*) d'aller dans la station* S_q *(de* $\hat{R}$*) si* $\hat{R}$ *est dans l'état* $\hat{e}$.

d) Pour tout état e de R *et pour toute station* X *de* R, *le taux de service* $g_x(e)$ *de la station* X, *quand* R *est dans l'état e, est défini de la façon suivante :*

Si $X = S_i$ *avec* $i \in I$,

$$g_X(e) = \hat{g}_i(\hat{e}) \,.\, \prod_{k \in K} g'_k(e_k)$$

en désignant par $\hat{g}_i(\hat{e})$ *le taux de service de la station* S_i, *dans le réseau* $\hat{R}$, *si ce réseau est dans l'état* $\hat{e}$.

Si X *appartient au sous-réseau* R_j *avec* $j \in J$,

$$g_X(e) = g_{j,X}(e_j)\hat{g}_j(\hat{e}) \,.\, \prod_{k \in K} g'_k(e_k)$$

en désignant par $g_{j,X}(e_j)$ *le taux de service de la station* X *dans le sous-réseau* R_j, *si ce sous-réseau est dans l'état* e_j.

Si X *appartient au sous-réseau* R_k *avec* $k \in K$,

$$g_X(e) = g_{k,X}(e_k) \,.\, \hat{g}_k(\hat{e}) \,.\, \prod_{m \in K, m \neq k} g'_m(e_m)$$

Soit $p(e)$ *(resp.* $p(\hat{e})$*) la probabilité stationnaire, pour le réseau* R *(resp.* $\hat{R}$*) d'être dans l'état e (resp.* $\hat{e}$*). On a alors :*

$$p(e) = c \,.\, \hat{p}(\hat{e}) \left\{ \prod_{j \in J} p_j(e_j) \right\} \left\{ \prod_{k \in K} p'_k(e_k) \right\}$$

où c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e de R.

Preuve. — On applique le théorème fondamental C-2 en raisonnant par récurrence ; plus précisément, si $k \in K$, on remplace la station S_k de $\hat{R}$ par le sous-réseau R_k, comme indiqué en C-2, à partir du réseau $\bar{R}_k$; si $j \in J$, on fait de même en prenant comme réseau $\bar{R}_j$ le réseau n-naturel associé à R_j (cf. B-6).

D. RÉSEAU PARFAIT

D-1. Réseau parfait (définitions).

Soit R un réseau fermé markovien ergodique constitué de q stations de service pures $(S_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ (cf. B-1). Pour tout k, on note $h_k(j)$ le taux de service de la station S_k quand il y a j clients dans cette station. Chaque état du réseau R est caractérisé par un élément $e = (e_1, \ldots, e_q)$ de $\mathbb{N}^q$ où e_k désigne le nombre de clients dans la station S_k. On note r les probabilités de répartition entre stations, c'est-à-dire que $r_{j,k}(e)$ est la probabilité, pour un client qui quitte la station j, d'aller dans la station k si l'état du réseau est e.

On dira que ce réseau R *est n-parfait s'il satisfait à la condition suivante (en posant* $h_k(n+1) = 0$ *pour tout* k*) :*

quels que soient j *et* e*, on a :*

D-1-1 $$h_j(e_j) = \sum_k h_k(e_k + 1) \, . \, r_{k,j}(e + f_k - f_j)$$

Si on considère seulement les probabilités r de répartitions entre stations, on dira que R *peut être rendu n-parfait* s'il existe des taux de service (comme indiqué en B-1) $(h_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ tels que, pour ces taux de service, R soit un réseau n-parfait. Il faut bien noter que, pour la suite (cf. D-7 et D-8), la notion importante est la notion de réseau *pouvant être rendu n-parfait.*

D-2. Probabilité stationnaire d'un réseau parfait (proposition).

La probabilité stationnaire d'un réseau n-parfait est la probabilité équidistribuée.

Preuve. — Considérons, *a priori*, la probabilité équidistribuée. Soit e un état ; pour la probabilité équidistribuée, le taux de probabilité de quitter l'état e vaut $\sum_j h_j(e_j)$.

De même, le taux de probabilité d'atteindre l'état e vaut

$$\sum_j \sum_k h_k(e_k + 1) r_{k,j}(e + f_k - f_j) \, .$$

Les conditions D-1-1 montrent alors que ces deux taux sont égaux, donc la probabilité équidistribuée est bien la probabilité stationnaire (théorème ergodique).

D-3. **Interprétation physique.**

La notion de réseau parfait a donc une interprétation « physique » simple ; plus précisément, un réseau R *est n-parfait si :*

a) la probabilité stationnaire de R *est la probabilité équidistribuée,*

b) en régime stationnaire, chaque station S_i *de* R *satisfait à la condition de* « balance locale » *indiquée en* B-4, *c'est-à-dire que, pour chaque état e et pour chaque station* S_i, *le taux de probabilité d'atteindre l'état e par arrivée d'un client dans la station* S_i *est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de la station* S_i.

Cette condition *b)* équivaut évidemment à dire que, pour chaque station S_i, le sous-réseau $R \searrow S_i$ est n-standard (cf. B-4).

Il faut noter que la notion de réseau n-parfait (resp. la notion de réseau pouvant être rendu n-parfait) est une condition très restrictive (resp. assez restrictive).

Bien entendu, l'intérêt d'un réseau pouvant être rendu parfait est de *satisfaire à la « formule du produit »* (cf. D-7 et D-9 ci-après).

D-4. **Exemple de réseau parfait (situation classique).**

Soit R *un réseau fermé. On suppose que les probabilités r de répartition entre stations ne dépendent pas de l'état e du réseau* R. *Alors* R *peut être rendu parfait.*

Plus précisément, soit $X = (x_1, \ldots, x_q)$ *une matrice uni-ligne à termes positifs telle que* $X\check{R} = X$ *où* $\check{R}$ *désigne la matrice de terme général* $r_{j,k}$. *Quel que soit k, on pose* $h_k(0) = 0$ *et* $h_k(j) = x_k$ *pour* $j \geqslant 1$ *et on suppose que la station* S_k *admet* h_k *comme taux de service. Alors, pour ces taux de service, le réseau* R *est parfait.*

Ceci donne une interprétation « physique » (cf. D-3 ci-dessus) de la matrice X assez différente de l'interprétation classique suivant laquelle X est, à une constante multiplicative près, la probabilité stationnaire quand il n'y a qu'un seul client dans le réseau et que les taux de service sont tous égaux.

Preuve. — Sous les hypothèses indiquées, il est immédiat de vérifier que les conditions D-1-1 sont équivalentes à l'égalité matricielle $X\check{R} = X$.

D-5. Stations n-duales (définition).

On considère deux stations pures S et S′ de taux de service respectifs h et h'. On dira que ces stations sont *n-duales l'une de l'autre* si, pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant n$, on a :

$$h(j) = h'(n + 1 - j)$$

D-6. Théorème de substitution.

On considère deux réseaux ouverts R′ *et* R″ *et deux stations de service pures* S′ *et* S″ *n-duales l'une de l'autre* (*cf.* D-5). *On suppose que les réseaux fermés* $\bar{\mathrm{R}}' = (\mathrm{R}', \mathrm{S}')$ *et* $\bar{\mathrm{R}}'' = (\mathrm{R}', \mathrm{S}'')$ *sont n-parfaits* (*cf.* D-1). *Alors, le réseau fermé* $\mathrm{R} = (\mathrm{R}', \mathrm{R}'')$ *est un réseau n-parfait. Autrement dit, dans* $\bar{\mathrm{R}}'$, *on peut remplacer* S′ *par* R″ *et obtenir encore un réseau n-parfait.*

Preuve. — On pourrait prouver ce théorème à partir des théorèmes C-2 et B-8 ; toutefois, nous allons en donner une preuve directe à l'intention du lecteur qui ne s'intéresse qu'à ce cas particulier.

Dans tout ce qui suit n est fixé.

On note h' le taux de service de S′. Chaque état de R′ est caractérisé par un s'-uplet $e' = (e'_1, \ldots, e'_{s'})$ où e'_k désigne le nombre de clients qui sont dans la station k de R′, le nombre total de stations de R′ étant s'. On pose

$$\hat{e}' = \sum_{k=1}^{s'} e'_k .$$

On note $h'_k(j)$ le taux de service de la $k^{\text{ème}}$ station de R′ quand il y a j clients dans cette station. On note $r'_{k,j}(e')$, pour $1 \leqslant k \leqslant s'$ et $1 \leqslant j \leqslant s'$, la probabilité, pour un client qui quitte la station k de R′, d'aller dans la station j de R′ si l'état est e'. On introduit exactement les mêmes notations h'', e'', r'' pour S″ et R″. De plus, on note $r_j^*(e')$ la probabilité, pour un client qui rentre dans le sous-réseau R′, d'aller dans la station j de ce sous-réseau, si ce sous-réseau est dans l'état e'. On note $r_k^{**}(e'')$ la probabilité, pour un client qui quitte la station k du sous-réseau R″, de quitter ce sous-réseau R″ si l'état de R″ est e'' (les notations r^* et r^{**} ne jouent donc pas les mêmes rôles vis-à-vis de R′ et R″).

Soit S'_j une station de R′. Puisque (R′, S′) est n-parfait, on a (quel que soit l'état e' de R′) :

D-6-1

$$h'_j(e'_j) = \sum_k h'_k(1 + e'_k) . r'_{k,j}(e' + f_k - f_j) + h'(n + 1 - \hat{e}') . r_j^*(e' - f_j)$$

De même, puisque (R″, S″) est n-parfait, on a :

$$\text{D-6-2} \qquad h''(n - \hat{e}'') = \sum_i h_i''(1 + e_i').r_i^{**}(e'' + f_i)$$

Soit e un état de R = (R′, R″), le nombre total de clients dans R étant n ; soit e' et e'' les états associés de e ; on a donc $n = \hat{e}' + \hat{e}''$; les stations S′ et S″ étant duales l'une de l'autre, on a

$$h''(n - \hat{e}'') = h''(\hat{e}') = h'(n + 1 - \hat{e}') ;$$

on peut donc reporter D-6-2 dans D-6-1, ce qui donne :

$$\text{D-6-3} \quad h_j'(e_j') = \sum_k h_k'(1 + e_k').r_{k,j}'(e' + f_k - f_j) + \sum_i h_i''(1 + e_i).r_j^{*}(e' - f_j).r_i^{**}(e'' + f_i)$$

les indices k correspondant aux stations de R′ et les indices i correspondant aux stations de R″. Or, l'égalité D-6-3 est exactement l'égalité D-1-1, dans le réseau R, pour l'état $e = (e', e'')$ et relativement à la station S_j' de R′. Puisque R′ et R″ ont des rôles parfaitement symétriques, on prouverait de même l'égalité D-1-1 relativement à une station S_j'' de R″. On a donc prouvé que R est un réseau n-parfait.

D-7. **Théorème de décomposition : cas fermé.**

On considère un réseau fermé R *markovien ergodique. On appelle n le nombre total de clients dans ce réseau. On suppose que* R *peut être décomposé en q sous-réseaux propres* (*cf.* B-2) $(R_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ *(disjoints) ; chaque état de ce réseau* R *est caractérisé par un q-uple* $e = (e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_q)$ *où* e_k *caractérise l'état du sous-réseau* R_k *comme indiqué en* B-2 ; *comme en* B-2, *on désigne par* $\hat{e}_k$ *le nombre de clients dans le sous-réseau* R_k ; *on note* $\hat{e}$ *le « vecteur » défini par* $\hat{e} = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_k, \ldots, \hat{e}_q)$.

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Chaque sous-réseau R_k *est n-standard.*

b) Pour tout couple d'entier (j, k), *quand un client quitte le sous-réseau* R_j, *la probabilité de « répartition entre sous-réseaux »* $r_{j,k}$, *pour ce client, d'aller dans le sous-réseau* R_k, *ne dépend que de* $\hat{e}$.

c) Si on note $\hat{R}$ *le réseau déduit de* R *en remplaçant chaque sous-réseau* R_k

par une station unique, avec les probabilités de répartition $r_{j,k}(\hat{e})$, alors ce réseau $\hat{\mathrm{R}}$ peut être rendu n-parfait (cf. D-1).

Si toutes les conditions ci-dessus sont satisfaites, pour connaître les probabilités d'état stationnaires de R, *il suffit de connaître les probabilités d'état stationnaires de $\hat{\mathrm{R}}$ et les probabilités naturelles (cf.* B-6) *de chaque sous-réseau* R_k *(on a « décomposé » le réseau* R).

Plus précisément, soit $(\hat{\mathrm{S}}_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ une famille de stations de service pures qui rend le réseau $\hat{\mathrm{R}}$ n-parfait (cf. D-1) *; quel que soit k, on note $\hat{h}_k$ le taux de service de la station $\hat{\mathrm{S}}_k$. De plus, quel que soit k, on note p_k la probabilité n-naturelle (cf.* B-6) *de* R_k *et on pose $f_k(0) = 1$ et $f_k(j) = \prod_{i=1}^{j} \hat{h}_k(i)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Soit $p(e)$ la probabilité stationnaire, pour le réseau R, *d'être dans l'état e. On a alors :*

D-7-1 $$p(e) = \mathrm{K} \, . \prod_{j=1}^{q} p_j(e_j) \, . \, f_j(\hat{e}_j)$$

où K *est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e.*

Il faut bien noter que, quel que soit j, $p_j(e_j)$ ne fait intervenir que l'état et les paramètres du sous-réseau R_j tandis que la famille $\{ f_j(\hat{e}_j) \}_{1 \leqslant j \leqslant q}$ ne dépend que de l'état $\hat{e}$ et se calcule exclusivement à partir des probabilités r de répartition entre sous-réseaux.

Preuve. — Le théorème D-7 est, en fait, un cas particulier du théorème C-3 (cf. B-5) ; toutefois, nous en donnerons une preuve directe. Pour prouver la formule D-7-1, il suffit de vérifier que la probabilité p définie par cette formule satisfait aux conditions d'équilibre habituelles, la constante K étant choisie en sorte que p soit bien une probabilité.

Pour tout couple (j, k) d'entiers avec $1 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant q$, on pose $h_k(j) = 1$; de plus, pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant q$, on pose $h_k(0) = 0$ et on note S_k la station de taux de service h_k et $\bar{\mathrm{R}}_k = (\mathrm{R}_k, \mathrm{S}_k)$.

On utilise alors des notations analogues à celles introduites en B-2 et B-3 ; plus précisément, quel que soit k, on définit $a_{k,i}$, $b_{k,i}$, $c_{k,i}$ et $d_{k,i,j}$ relativement au sous-réseau R_k exactement comme étaient définis, en B-2, a_i, b_i, c_i et $d_{i,j}$ relativement au sous-réseau R ; de même, on définit p_k, u_k, v_k et w_k relativement au couple $(\mathrm{R}_k, \mathrm{S}_k)$ exactement comme étaient définis, en B-2, p, u, v et w relativement au couple (R, S) ; p_k est alors bien la probabilité n-naturelle de R_k. Pour tout k, puisque le sous-réseau R_k est n-standard, on a (cf. B-4-1 et B-4-2) :

D-7-2 $$w_k(e_k) = h_k(n - \hat{e}_k) \, . \, p_k(e_k)$$

D-7-3 $$\sum_i (a_{j,i} + b_{j,i})(e_j) = \frac{1}{p_j(e_j)} [u_j(e_j) + h_j(n + 1 - \hat{e}_j) . v_j(e_j)]$$

Étant donné un état e, soit $x'(e)$ (resp. $y'(e)$) le taux de probabilité d'atteindre (resp. de quitter) l'état e pour la probabilité p définie par la formule D-7-1. On pose

$$x(e) = \frac{x'(e)}{\mathrm{K}p(e)} \quad \text{et} \quad y(e) = \frac{y'(e)}{\mathrm{K}p(e)} .$$

On vérifie facilement que l'on a :

D-7-4 $$y(e) = \sum_k \left\{ \sum_j (a_{k,j} + b_{k,j})(e) \right\}$$

et

D-7-5

$$x(e) = \sum_k \frac{u_k(e_k)}{p_k(e_k)} + \sum_j \frac{v_j(e_j)}{p_j(e_j) . \hat{h}_j(\hat{e}_j)} \left\{ \sum_k \frac{w_k(e_k)}{p_k(e_k)} \hat{h}_k(1 + \hat{e}_k) r_{k,j}(\hat{e} + f_k - f_j) \right\}.$$

On reporte alors les égalités D-7-2 dans le deuxième membre de D-7-5, ce qui donne D-7-6 ; on reporte les égalités D-7-3 dans D-7-4 ce qui donne D-7-7 ; en soustrayant D-7-7 de D-7-6, on obtient :

$$x(e) - y(e) = \sum_j \frac{1}{p_j(e_j)} v_j(e_j) z_j(e)$$

avec :

$$z_j(e) = \frac{1}{\hat{h}_j(\hat{e}_j)} . \left\{ \sum_k h_k(n - \hat{e}_k) . \hat{h}_k(1 + \hat{e}_k) r_{k,j}(\hat{e} + f_k - f_j) \right\} - h_j(n + 1 - \hat{e}_j).$$

Mais le réseau $\hat{\mathrm{R}}$ est n-parfait (cf. D-1), donc $z_j = 0$ (puisque $h_k(i) = 1$ sauf si $i = 0$). On a donc $x(e) - y(e) = 0$ ce qui prouve que p est bien la probabilité stationnaire du réseau R.

D-8. **Corollaire (situation classique).**

On considère un réseau fermé R markovien. De même qu'en D-1, on note n le nombre total de clients dans ce réseau et on suppose que R peut être décomposé en q sous-réseaux n-standards $(\mathrm{R}_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ (disjoints). De plus, on suppose que la condition suivante est satisfaite :

b') les probabilités de répartition entre sous-réseaux ne dépendent pas de l'état du réseau R, c'est-à-dire que, pour tout couple (j, k) d'entiers,

$1 \leqslant j \leqslant q$, $1 \leqslant k \leqslant q$, la probabilité $r_{j,k}$ pour un client qui quitte le sous-réseau R_j d'aller dans le sous-réseau R_k ne dépend pas de l'état e du réseau R.

Comme en D-4, on note $X = (x_1, \ldots, x_q)$ une matrice uni-ligne à termes positifs telle que $X\check{R} = X$ si $\check{R}$ est la matrice de terme général $r_{j,k}$. Soit $p(e)$ la probabilité stationnaire pour le réseau R d'être dans l'état e ; pour tout k, soit $p_k(e_k)$ la probabilité n-naturelle du sous-réseau R_k. On a alors :

D-8-1 $$p(e) = K . \prod_{k=1}^{n} (x_k)^{\hat{e}_k} . p_k(e_k)$$

où K est une constante qui ne dépend pas de l'état e du réseau R.

Preuve. — Ceci se déduit immédiatement de D-7 et D-4.

D-9. **Théorème de décomposition : cas ouvert.**

On considère un réseau ouvert R *(c'est-à-dire un sous-réseau au sens des paragraphes précédents) et un entier n. Soit* R' *le réseau fermé constitué de* R *et d'une station de service* S, *le nombre total de clients dans* R' *étant n. On suppose que* R' *admet une décomposition en sous-réseaux propres* $(R_k)_{1 \leqslant k \leqslant q+1}$ *(disjoints) telle que* $R_{q+1} = S$ *et telle que toutes les conditions* (*a*, *b*, *c*) *du théorème* D-7 *soient satisfaites. Alors,* R *est n-standard* (*cf.* B-4). *De plus, soit* $p(e)$ *la probabilité n-naturelle* (*cf.* B-6) *pour le sous-réseau* R *d'être dans l'état e ; pour tout k,* $1 \leqslant k \leqslant q$, *soit* $p_k(e_k)$ *la probabilité n-naturelle pour le sous-réseau* R_k *d'être dans l'état* e_k *; soit* $(\hat{h}_k)_{1 \leqslant k \leqslant q+1}$ *une famille de taux de service qui rend* $\hat{R}'$ *n-parfait* (*cf.* D-1 *et* D-7-*c*)), $\hat{h}_{q+1}$ *désignant donc le taux de service de la station* S_{q+1} *associée à l'* « *extérieur* » $R_{q+1} = S$. *Pour tout état e de* R, *on pose* $e^* = \sum_{k=1}^{q} \hat{e}_k$.

On a alors :

D-9-1 $$p(e) = K \left\{ \prod_{k=1}^{q} p_k(e_k) . f_k(\hat{e}_k \right\} f_{q+1}(n - e^*)$$

où K *est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e et en posant*

$$f_k(j) = \prod_{i=1}^{j} \hat{h}_k(i)$$

Preuve. — Notons d'abord que les hypothèses effectuées ne portent que sur le réseau R (et non pas sur le taux de service de la station S). Plus précisément, dire que la décomposition $(R_k)_{1 \leqslant k \leqslant q+1}$ de R' satisfait aux conditions données en D-7 équivaut à dire (cf. B-7) que chaque réseau R_k est n-standard et que la décomposition $(R_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ de R satisfait aux trois conditions suivantes :

b') pour tout couple d'entiers $(j, k), 1 \leqslant j \leqslant q, 1 \leqslant k \leqslant q$ (resp. $k = q + 1$) la probabilité $r_{j,k}$ pour un client qui quitte le sous-réseau R_j d'aller dans le sous-réseau R_k (resp. de sortir de R) ne dépend que de n et de $\hat{e}$;

b'') pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant q$, la probabilité $r_{q+1'k}$ pour un client, venant de l'extérieur, d'aller dans le sous-réseau R_k ne dépend que de n et de $\hat{e}$;

c') si on note $\hat{R}'$ le réseau déduit de R en remplaçant chaque sous-réseau R_k par une station unique S_k et en remplaçant l'extérieur par une station unique S_{q+1}, alors ce réseau $\hat{R}'$ peut être rendu n-parfait.

Prouvons alors le théorème D-9. On suppose donc que toutes les hypothèses indiquées sont satisfaites et on note $(\hat{h}_k)_{1 \leqslant k \leqslant q+1}$ une famille de taux de service qui rend $\hat{R}'$ n-parfait. Soit $p'(e)$ la probabilité stationnaire, pour le réseau $R' = (R \cup S_{q+1})$ d'être dans l'état $(e, n - e^*)$, le taux de service de la station S_{q+1} étant $\hat{h}_{q+1}$.

Le théorème D-7 dit que :

D-9-3 $$p'(e) = K' . \prod_{k=1}^{q} f_k(\hat{e}_k) . p_k(e_k)$$

puisque la probabilité n-naturelle $p_{q+1}(n - e^*)$ est égale à $f_{q+1}^{-1}(n - e^*)$ (cf. B-7).

Compte tenu du théorème de stabilité B-5 et de la formule B-5-1, on aura prouvé le théorème D-8 et la formule D-9-1 si on sait prouver que R est n-standard. On va donc prouver que l'égalité B-4-1 est satisfaite, pour tout état e, relativement à la probabilité p'.

Il reste donc à vérifier que

$$w'(e) = \hat{h}_{q+1}(n - e^*) . p'(e)$$

Or (cf. B-3-3) :

D-9-4 $$w'(e) = p'(e) . \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{p_k(e_k)} . w_k(e_k) . \frac{f_k(\hat{e}_k + 1)}{f_k(\hat{e}_k)} . r_{k'q+1}(\hat{e} + f_k)$$

Or, quel que soit k, R_k est n-standard, donc (cf. B-4-1 et le théorème de stabilité B-5) :

$$\frac{1}{p_k(e_k)} \cdot w_k(e_k) = 1$$

puisque p_k est la probabilité n-naturelle.

L'égalité D-9-4 devient donc :

$$w'(e) = p'(e) \cdot \sum_{k=1}^{q} \hat{h}_k(1 + \hat{e}_k) \cdot r_{k'q+1}(\hat{e} + f_k)$$

ce qui donne $$w'(e) = p'(e) \cdot \hat{h}_{q+1}(n - e^*)$$

puisque $\hat{R}'$ est n-parfait (cf. D-1-1 avec $j = q + 1$).

D-10. **Théorème d'unicité.**

Soit R *un réseau fermé pouvant être rendu n-parfait ; à une constante multiplicative près, les taux de service qui rendent* R *n-parfait sont uniques.*

Plus précisément, soit $(S_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ l'ensemble des stations du réseau R. Soit $(h_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ et $(h'_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ deux familles de taux de service qui rendent le réseau R n-parfait. Alors, il existe une constante c telle que, pour tout couple d'entiers (j, k) avec $1 \leqslant k \leqslant q$ et $0 \leqslant j \leqslant n$, on ait :

$$h'_k(j) = c \cdot h_k(j).$$

Preuve. — Soit e un état du réseau R avec les notations introduites en D-1. Soit $p(e)$ (resp. $p'(e)$) la probabilité stationnaire, pour le réseau R, d'être dans l'état e, quand on prend les taux de service $(h_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ (resp. $(h'_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$).

On peut appliquer le théorème D-7 en prenant, pour chaque sous-réseau R_k, la station S'_k. On a donc :

$$p'(e) = K \cdot \prod_{j=1}^{q} p'_j(\hat{e}_j) \cdot f_j(\hat{e}_j)$$

avec

$$p'_j(k) = \frac{1}{f'_j(k)} \qquad \text{(cf. B-7)}$$

Mais on a aussi $p'(e) = c$ (probabilité équidistribuée).

Pour toute famille $\{ e_j \}_{1 \leqslant j \leqslant q}$ d'entiers positifs telle que

$$\sum_{j=1}^{q} e_j = n,$$

on doit donc avoir

$$\prod_{j=1}^{q} f_j(e_j) = \mathrm{K}' \prod_{j=1}^{q} f_j'(e_j)$$

où K′ est une constante.

Pour tout couple (j, k) d'entiers, avec $j \neq k$, et tout couple d'entiers (u, v), on a donc :

$$\frac{f_j(u+1)f_k(v-1)}{f_j(u)f_k(v)} = \frac{f_j'(u+1)f_k'(v-1)}{f_j'(u)f_k'(v)}$$

Si on pose $g_j(u) = \dfrac{f_j(u)}{f_j'(u)}$, on a donc

$$\frac{h_j(u+1)}{h_j'(u+1)} = \frac{g_j(u+1)}{g_j(u)} = \frac{g_k(v)}{g_k(v-1)} = \frac{h_k(v)}{h_k'(v)}$$

Ce rapport est donc une constante, ce qui prouve le théorème.

Pour des exemples de réseaux à routages dépendant de l'état, voir [GHM] et :

J. PELLAUMAIL, Régime stationnaire quand les routages dépendent de l'état, Rapport IRISA n° 102, juin 1978.

BIBLIOGRAPHIE

[BCM] F. BASKETT, M. CHANDY, R. MUNTZ, J. PALACIOS, Open, closed ans mixed networks of queues with different classes of customers. *J. ACM 22*, 1975, p. 248-260.

[Cha] K. M. CHANDY, The analysis and solutions for general queuing networks. Proc. Sixth Annal Princeton Conf. on Information Sciences and Systems, 1972, p. 219-224.

[Ch1] K. M. CHANDY, J. H. HOWARD, J. D. TOWSLEY, Product form and local balance in queueing networks. Modelling and performance evaluation of computer system, E. Gelembe, ed. North Holland a·-ɔ Publishing company, 1976.

[Ch2] K. M. CHANDY, J. H. HOWARD and D. F. TOWSLEY, Product form and local balance in queueing networks. *JACM*, vol. **24**, n° 2, april 1977, p. 250-263.

[Co1] D. R. COX, A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. **51**, 1955, p. 313-319.

[Co2] D. R. COX, The analysis of non-markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. **51**, 1955, p. 313 and p. 433-441.

[GHM] P. Y. GLORENNEC, G. HAINRY, R. MARIE, J. PELLAUMAIL, Quelques résultats en théorie des files d'attente. Séminaire de Rennes, 1975. *Rapport I. R. I. S. A.*, n° **33**.

[Ma1] R. MARIE, Sur les réseaux de files d'attente fermés à services exponentiels. *Rapport I. R. I. S. A.*, n° **33**, p. 5-33, Rennes.

[Ma2] R. MARIE, Méthodes itératives de résolution de modèles mathématiques de systèmes informatiques. *R. A. R. O. Informatique/Computer Science*, vol. **12**, n° 2, 1978.

[Ma3] R. MARIE, Quelques résultats relatifs aux réseaux de files d'attente. *A paraître dans les Actes du 1er Colloque AFCET-SMP de Mathématiques Appliquées*, 4-9 septembre 1978, Palaiseau, France.

[Mun] R. R. MUNTZ, Poisson departure processes and queueing networks. *Queueing networks. IBM Research Report RC 414. Yorktonn Heights*, New York, 1972.

[Whi] P. WHITTE, Equilibrium distributions for an open migrating process. *J. Appl. Prob.*, t. **5**, 1968, p. 567-571.

(Manuscrit reçu le 11 mai 1979)