

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

H. HEINICH

Mesures à valeurs dans un espace de Banach complètement réticulé

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 3 (1974), p. 339-344

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_3_339_0>

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Mesures à valeurs dans un espace de Banach complètement réticulé

par

H. HEINICH

Laboratoire du Calcul des Probabilités.
Université Paris 6^e

RÉSUMÉ. — Après avoir donné quelques propriétés d'un espace de Banach, G , complètement réticulé « bien plongeable » (définition 4) dans un C -espace E (définition 2) on montre le résultat suivant : une mesure, μ , à valeurs dans G à densité dans E est à densité dans G si et seulement si elle est à variation σ -finie (cf. [I] auquel ce texte fait suite).

Soit E un espace vectoriel complètement réticulé — c. r. — à tronquature dénombrable i. e. tel qu'il existe une suite $\{e_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E^+$ croissante telle que $\forall e \in E^+$ on a $\bigvee_n (e \wedge e_n) = e$ on dit que $e \wedge e_n \rightarrow e$.

L'ensemble des mesures positives d'une tribu $\mathcal{A}$ à valeurs dans E est aussi un espace complètement réticulé. On établit aisément la décomposition de Lebesgue d'une telle mesure: si P est une probabilité sur $\mathcal{A}$ alors μ s'écrit d'une manière unique comme $\mu = \mu_1 + \mu_2$ avec $\mu_2 \wedge e_n P = 0$ tout n et $\mu_1 = \bigvee_n (\mu \wedge e_n P)$.

DÉFINITION 1. — $\mathcal{M}_P$ désigne l'ensemble des mesures $\mu : \mathcal{A} \rightarrow E^+$ telles que $\mu = \bigvee_n (\mu \wedge e_n P)$.

Citons comme propriétés : $\mathcal{M}_P$ n'est pas fermé ; $\mu \in \mathcal{M}_P \Rightarrow \mu \ll P$;
 $\mu \in \mathcal{M}_P \Leftrightarrow (\mu - e_n \wedge P)^+$ décroît vers 0.

Posons $B_n = \{0 \leq e \leq e_n\}$ et F_n l'espace vectoriel engendré par B_n .

DÉFINITION 2. — Un espace vectoriel métrisable complet E est un C-espace si :

- a) E est c. r. à tronquature dénombrable $\{e_n\}$.
- b) Sa distance vérifie $0 \leq e \leq e' \Rightarrow d(e, 0) \leq d(e', 0)$; $d(e, 0) = d(|e|, 0)$ et d est concave sur E^+ .
- c) Il existe une topologie normée sur F_n compatible avec la structure d'ordre, telle que sa trace sur chaque B_n est équivalente à la trace de la topologie de E et que B_n soit $\sigma(\hat{F}_n, \hat{F}'_n)$ compact — $\hat{F}_n$ Banach complété de F_n .

Sur un tel espace on peut définir un espace $L(E)$ de variables aléatoires X de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans E , intégrables ; complet pour la distance

$$N(X) = d\left(\int |X| dP, 0\right) - (1) - .$$

PROPOSITION 3. — E étant un C-espace alors

$$\mu \in \mathcal{M}_P \Leftrightarrow \exists X \in L(E) \quad \text{telle que} \quad \mu(A) = \int_A X dP .$$

Démonstration. — Soit $\mu \in \mathcal{M}_P$ pour chaque n la mesure vectorielle $\mu \wedge e_n P$ qui prend ses valeurs dans $B_n \subset \hat{F}_n$ se prolonge en une application faiblement compacte de L_P^1 dans $\hat{F}_n$ donc à densité. On montre que cette densité X_n appartient p. s. à B_n et qu'ainsi $X_n \in L(E)$. Il est clair que $X_{n+1} \wedge e_n = X_n$ p. s. et que les ensembles $A_n = \{X_n = e_n\}$ décroissent vers un ensemble A négligeable car $e_n P(A) \leq \mu(\Omega)$. Donc X_n croît p. s. comme

$$\int X_n dP = (\mu \wedge e_n P)(\Omega)$$

converge vers $\mu(\Omega)$, X_n est de Cauchy dans $L(E)$ et par conséquent $X_n \rightarrow X$ p. s. et dans $L(E)$ X est alors la densité de μ .

Réciproquement si $\mu(A) = \int_A X dP$ alors $(\mu \wedge e_n P)(A) = \int_A X \wedge e_n dP$ et comme $X \wedge e_n$ converge vers X dans $L(E)$ on a bien la convergence de $\mu \wedge e_n P$ vers μ .

DÉFINITION 4. — Un espace, G , de Banach, c. r., à tronquature dénombrable $\{x_n\}$ tel que $K_n = \{0 \leq x \leq x_n\}$ soit faiblement compact pour

tout n est dit « bien plongeable dans un C-espace E » si : il existe une injection j continue de G dans E telle que $j(x_n) = e_n$; j héréditaire :

$$j(0 \leq x \leq x_0) = \{ 0 \leq e \leq j(x_0) \}$$

et j isomorphisme d'ordre : $j(x) \leq j(y) \Leftrightarrow x \leq y$.

DÉFINITION 5. — Une application f de G dans $\bar{R}$ est m -continue si elle est continue pour les suites monotones convergentes.

PROPOSITION 6. — Sous les conditions précédentes G est presque solide. Pour tout $u \in G'$ il existe u^+ application s. c. i., m -continue, de G^+ dans $\bar{R}^+$ telle que, pour chaque n , sa restriction à K_n soit la partie positive de u et soit continue.

Démonstration. — On remarque d'abord que j est bicontinue pour les topologies faibles de K_n sur B_n , soit j^* son inverse. $v = u \circ j^*$ est une forme linéaire sur B_n et on peut définir v^+ par $v^+(e) = \sup \{ v(e') \text{ pour } 0 \leq e' \leq e, e \in B_n \}$.

Montrons que v est continue :

Pour $e_i \rightarrow 0$ dans $B_n \subset E$ il existe $0 \leq e'_i \leq e_i$ tel que $v^+(e_i) \leq \varepsilon_i + v(e'_i)$ or $d(e_i, 0) \rightarrow 0$ donc $d(e'_i, 0) \rightarrow 0$ et e'_i converge vers 0 dans $B_n \subset F_n$ et $v(e'_i) \rightarrow 0$ c'est bien la continuité de v^+ .

$v^+ = (u \circ j^*)^+ = u^+ \circ j^*$ est clair car :

$$\begin{aligned} u^+(j(e)) &= \sup (u(x) ; 0 \leq x \leq j^*(e)) \\ &= \sup (u \circ j(e') ; 0 \leq j^*(e') \leq j^*(e)) \\ &= \sup (v(e') ; 0 \leq e' \leq e) \end{aligned}$$

Montrons que u^+ est continue sur K_n : si $x_i \rightarrow 0$ dans K_n alors $j(x_i) \rightarrow 0$ dans B et $u^+(j(x_i)) \rightarrow 0$ c'est-à-dire que $u^+(x_i) \rightarrow 0$. Il aurait fallu mettre u_n^+ pour rappeler que l'on se référerait à K_n mais il est clair que $u_{n+1}^+|_{K_n} = u_n^+$ et si $\tilde{u}^+$ est définie par $\tilde{u}^+(x) = \limite \nearrow u_n^+(x) = \lim_n u_n^+(x \wedge x_n)$; alors $\tilde{u}^+$ est s. c. i. et on peut, sans ambiguïté $\tilde{u}^+ = u^+$.

Montrons que u^+ est m -continue.

Soit $\{y_n\}$ croissante vers y dans G^+ :

— Si $u^+(y) < +\infty$ alors $u^+(y) \leq \varepsilon + u(x)$ pour un $x : 0 \leq x \leq y$ or $x \wedge y_n \nearrow x$ et si n grand on a :

$$u^+(y) \leq 2\varepsilon + u^+(y_n \wedge x) \leq 2\varepsilon + u^+(y_n)$$

donc

$$u^+(y_n) \nearrow u^+(y).$$

— Si $u^+(y) = +\infty$ on aurait de même $u(x) \geq M$ et $u(x \wedge y_n) \geq M - \varepsilon$ et $u^+(y_n) \geq M - \varepsilon$.

Remarques. — Le convexe fermé $\bigcap_{||u|| \leq 1} (u^+ \leq 1)$ engendre un sous-espace G_0 solide et dense dans G .

G_0 considéré comme un Banach avec sa norme jauge montre qu'il existe un Banach solide et une injection de ce Banach dans G dont l'image est partout dense.

Si pour tout $x \in G^+$ l'ensemble $\{0 \leq y \leq x\}$ est faiblement compact alors G est solide.

COROLLAIRE 7. — Sous les conditions précédentes il existe une application p de $E^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, croissante, s. c. i., m -continue telle que sa restriction à chaque B_n soit continue et pour tout $x \in G$ « on a : »

$$p \circ j(x) = \sup_{||u|| \leq 1} (u^+(x)).$$

DÉFINITION 8. — G est m -complet si toute suite monotone $\{x_n\}$ croissante $\subset G^+$ telle que $\sup_n u^+(x_n) < +\infty$ tout $u \in G^+$ converge faiblement dans G — donc fortement, donc majorée —. Tout espace c. r. faiblement Σ -complet est m -complet, en particulier si G est séquentiellement faiblement complet.

COROLLAIRE 9. — Si de plus G est m -complet alors $p(e) < +\infty \Leftrightarrow e \in j(G_0)$.

Démonstrations. — Corollaire 7. — Pour $u \in G'$ posons $p_u^n(e) = u^+(j^*(e \wedge e_n))$, p_u^n est une fonction continue croissante en $e \in E^+$ et sa restriction à B_n est linéaire. La fonction $p_u(e) = \lim_n p_u^n(e)$ est croissante sur E^+ , s. c. i., et sa restriction à chaque B_n est encore continue, de plus on a $p_u(j(x)) = u^+(x)$ pour tout $x \in G$. Montrons que p_u est m -continue : soit e'_i croissant vers e dans E^+ , si $p_u(e) < +\infty$ pour n assez grand il vient $p_u(e) \leq \varepsilon + p_u^n(e)$ et $p_u(e) \leq 2\varepsilon + p_u^n(e'_i)$ donc $p_u(e) \leq 2\varepsilon + p_u(e_i)$ c'est bien que $p_u(e'_i) \nearrow p_u(e)$, preuve analogue si $p_u(e) = +\infty$. Soit J partie finie de la boule unité de G' posons $p_J(e) = \sup_{u \in J} p_u(e)$ et $p = \lim_J p_J$ l'application p de $E^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ vérifie les conditions du corollaire.

Corollaire 9. — Pour une suite croissante $\{g_n\} \subset G^+$ non convergente il existe $u \in G'$ tel que $\sup_n u^+(g_n) = +\infty$ donc $\lim_n p(j(g_n)) = +\infty$ et si $e \in j(G_0)$ la suite $g_n = j^*(e \wedge e_n)$ n'est pas convergente donc $p_u(e) = +\infty$ et $p(e) = +\infty$.

DÉFINITION 10. — La variation $v(\mu)$ d'une mesure μ positive à valeurs dans G est la mesure $v(\mu) = \bigvee_{\substack{u \in G^+ \\ \|u\| \leq 1}} u^+ \circ \mu$.

PROPOSITION 11. — Soit μ une mesure positive à valeurs dans G espace de Banach bien plongé dans un C -espace E et admettant une densité X , dans E , par rapport à une probabilité P alors

$$v(\mu)(A) = \int_A p \circ X dP.$$

Démonstration. — Si φ est une v. a. étagée de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans B_n alors

$$\int p_u \circ \varphi dP = p_u \left(\int \varphi dP \right);$$

par conséquent si $X_n \in L(E)$ et $X_n \subset B_n$ p. s. on a encore

$$p_u \left(\int X dP \right) = \int p_u(X) dP.$$

En particulier si X_n est la densité de $j(\mu) \wedge e_n P$, on a vu que $X_n \nearrow X$ dans $L(E)$ donc $p_u \left(\int X_n dP \right)$ croît vers $p_u \left(\int X dP \right)$ pour tout u et

$$p \left(\int X dP \right) = \lim_n p \left(\int X_n dP \right)$$

de même $p_u X_n$ croît vers $p_u X$ donc $\int p_u(X_n) dP$ croît vers $\int p_u(X) dP$ et

$$p_u \left(\int_A X dP \right) = \int_A p_u(X) dP = u^+ \circ \mu(A)$$

d'où :

$$\left(\bigvee_{u \in J} u^+ \circ \mu \right)(A) = \int_A p_J \circ X dP$$

et comme $P_X = P \circ X^{-1}$ est une mesure de Radon sur $\overline{X(\Omega)} \subset E$ on obtient

$$v(\mu)(A) = \int_A p \circ X dP.$$

COROLLAIRE 12. — Si μ est à variation σ -finie et G m -complet alors μ est à densité dans G_0 .

En effet $X_n = X \wedge e_n$ est mesurable dans $B_n \subset F_n$ d'où: X_n est faiblement mesurable dans $K_n \subset G$ — en écrivant encore X_n pour $j^* \circ X_n$ — donc fortement mesurable — G Banach — et par conséquent il en est de même de X qui prend p. s. ses valeurs dans G_0 car $p \circ X < +\infty$ p. p. corollaire 9.

Remarque. — Les résultats s'étendent au cas d'un espace complètement réticulé muni d'une topologie localement convexe séparée et bien plongeable — proposition 11 — En particulier le corollaire 12 demeure pour un espace de Fréchet solide.

Exemple. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité complet et $\{A_n\}$ une suite croissante $\subset \mathcal{A}$ telle que $\Omega = \cup A_n$. L'espace $G = L^1_{\text{loc}}(\Omega; \mathcal{A}; P; (A_n))$ est bien plongeable dans le C-espace $E = L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. HEINICH, Intégration dans certains espaces de Riesz à distance concave. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. X, n° 2, 1974.

(Manuscrit reçu le 5 février 1974)