ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ROGER FISCHLER

Quelques théorèmes limites du calcul des probabilités dont la valeur limite dépend d'une variable aléatoire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 4 (1973), p. 345-349
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_4_345_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 4, 1973, p. 345-349. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Quelques théorèmes limites du calcul des probabilités dont la valeur limite dépend d'une variable aléatoire

par

Roger FISCHLER
Université Carleton, Ottawa

A Mes Amis et Collègues de Clermont-Ferrand

SOMMAIRE. — Nous démontrons des versions des quelques théorèmes bien connus ou les frontières numériques habituelles sont remplacées par des variables aléatoires.

SUMMARY. — Versions of several well known theorems are proved in which the usual numerical boundaries are replaced by random variables.

I

La plupart des théorèmes au sujet de la convergence faible de fonctions de répartition (f. r.) peuvent être mis sous la forme :

$$\lim \mathrm{P}[g_n(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n) < a] = \mathrm{F}(a) \tag{1}$$

où $\{ \mathrm{X}_n \}$ est une suite de variables aléatoires (v. a.) et $\{ g_n \}$ est une suite de fonctions de Borel.

Or dans [1] on trouve une démonstration du résultat suivant :

« Si $\{ X_j \}$ est une suite de v. a. indépendantes et équiréparties avec $E(X_j) = 0$, $\sigma^2(X_j) = 1$ et si $\{ S_n \}$ est la suite des sommes partielles, alors pour n'importe quelle v. a. Z,

$$\lim P[S_n/\sqrt{n} < Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dP[Z < t], \tag{2}$$

où Φ est la fonction de répartition de Laplace-Gauss ».

C'est-à-dire que l'on a remplacé la constante dans (1) avec une variable aléatoire.

Le but de cet article est de donner d'autres résultats dans le même esprit que (2). Remarquer que le résultat de (2) est exactement ce qu'on obtiendrait (facilement même) si Z était indépendante de toute X_j. Nous verrons ce même phénomène dans tous les exemples.

Pour la suite nous utiliserons le résultat suivant :

THÉORÈME A [3]. — Soit $[\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P}]$ un espace de probabilité. Soient M, M′, M″ des espaces métriques avec $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{S}''$ pour tribus de Borel et soient M et M′ séparables. Soit $\{ Y_n \}$ une suite de v. a. de Ω dans M avec la propriété (de telles v. a. sont dites « mélangeantes avec mesure associée (m. a.) μ ») que pour tout $A \in \mathscr{A}$

$$\lim P[Y_n \in B, A] = \mu(B)P(A), \tag{3}$$

si $\mu(\partial B) = 0$ où ∂B est la frontière de B.

Soit $\{ Z_j \}$ une suite de v. a. de Ω dans M′ qui tendent en probabilité vers une v. a. Z. Définissons une mesure aléatoire $v : \Omega \times (M \times M') \to R$ par $v(\omega, D) = \mu(y : (y, Z(\omega)) \in D)$. Si maintenant $g : M \times M' \to M''$ est une transformation qui est continue presque partout [par rapport à $v(\omega, .)$] pour presque tout ω [par rapport à P], alors

$$\lim P[g(Y_n, Z_n) \in C] = \int \mu(y : g(y, Z(\omega)) \in C) P(d\omega), \tag{4}$$

pour tout $C \in \mathscr{S}''$ tel que $v(\omega, \partial[g^{-1}(C)] = 0$ pour presque tout ω par rapport à P.

Si dans le théorème ci-dessus Y_n prend des valeurs réelles et $\mu((-\infty, a)) = F(a)$, on peut récrire (3) et le résultat en terme de F. Parfois nous emploierons les symboles F_μ ou μ_F pour indiquer une relation entre μ et F.

II. APPLICATIONS

THÉORÈME 1. — Soit $\{ Y_n \}$ une suite de v. a. réelles et mélangeantes avec m. a. μ. Soit $\{ B_n(.) \}$ et $B(.)$ une collection de Boreliens aléatoires de la droite telle que $\lim P(\mu(B_n \Delta B)) = 0$ (Δ est la différence symétrique), et $P[\omega : \mu \{ \partial(B(\omega)) \} \neq 0] = 0$. Alors

$$\lim P[Y_n \in B_n] = \int_\Omega \mu(B(\omega))P(d\omega).$$

Démonstration. — Pour appliquer le théorème A on prend $M = M'' = R$ et pour M' on prend l'espace métrique engendré par les Boreliens de R, et μ (voir [*4*], p. 168, théorème B). Etant donné $\{ B_n \}$ et $\{ B \}$ par hypothèse, on définit $Z_n(\omega) = B_n(\omega)$, $Z(\omega) = B(\omega)$. Pour $y \in R$ et D un Borélien quelconque la transformation g est définie par $g(y, D) = 1$ si $y \in D$ et 0 si $y \notin D$. Comme g ne peut être discontinue que si $y \in \partial D$, on a $v(\omega, \{ g$ est discontinue $\}) = \mu \{ y : g$ est discontinue à $(y, B(\omega) \} \leqslant \mu \{ \partial B(\omega) \} = 0$ pour presque tout ω. Le résultat suit en mettant $C = \{ 1 \}$ dans (4).

COROLLAIRE 2. — Soit $\{ Y_n \}$ une suite de v. a. réelles et mélangeantes avec m. a. F et soit $\{ a_n(\ ) \}$, $\{ b_n(\ ) \}$ des suites de v. a. réelles qui tendent en probabilité vers des v. a. $a(\ )$ et $b(\ )$ respectivement. Si $P[\omega : F$ est discontinue à $a(\omega)] = P[\omega : F$ est discontinue à $b(\omega)] = 0$, alors

$$\lim P[a_n < Y_n < b_n] = \int F(b(\omega)) - F(a(\omega))P(d\omega). \tag{5}$$

COROLLAIRE 3. — Soit $\{ Y_n \}$ une suite de v. a. réelles et mélangeantes avec m. a. F continue. Soit $\{ Z_n \}$ une suite de v. a. qui tendent en probabilité vers Z dont la f. r. est G. Alors

$$\lim P[Y_n < Z_n] = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)dG(y) \tag{6}$$

EXEMPLE 1. — Soit $\{ X_n \}$ une suite de v. a. indépendantes et équiréparties avec f. r. F, alors $\{ X_n \}$ est mélangeante ([*8*], exemple 5.8.2, [*9*]). Si F est continue et Z est une v. a. avec f. r. G, on a d'après (6),

$$\lim P[X_n < Z] = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)dG(y).$$

Cette formule montre comment évaluer les intégrales de la forme $\int F(y)dG(y)$ (F continue, G croissante) par les méthodes de « Monte Carlo ».

EXEMPLE 2. — Soit $\{ X_j \}$ une suite de v. a. indépendantes telle qu'il existe des suites $\{ c_n \}$ et $\{ d_n \}$ de nombres réels tel que $\{ Y_n \} = \{ S_n - c_n/d_n \}$ tend en loi vers Φ. La suite $\{ Y_n \}$ est mélangeante ([*7*], p. 438, [*8*], p. 325). En utilisant le corollaire 2, on pourrait peut-être améliorer la théorie classique de tests d'hypothèses en utilisant des limites aléatoires.

EXEMPLE 3. — Les chaînes de Markov dites ergodiques sont mélangeantes [*9*]. Donc le théorème 1 nous dit qu'on peut considérer des classes d'états aléatoires dans les applications de telles chaînes.

III

Nous donnons maintenant d'autres applications du théorème A. Dans la suite les v. a. $\{ X_j \}$ et $\{ Z_j \}$ sont réelles, les $\{ X_j \}$ sont indépendantes et la suite $\{ Z_j \}$ tend en probabilité vers une v. a. Z dont la f. r. est G. Le cas $Z_n = Z$ est toujours d'un intérêt spécial.

EXEMPLE 4. — Supposons que la f. r. de X_n tende en loi vers F. En prenant $g(x, y) = \max(x, y)$ nous obtenons

$$(7)\quad \lim P[\max(X_n, Z_n) < a] = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_F[\max(x, z) < a]dG(z) = \int_{-\infty}^{a} F(a)dG(z) = F(a)G(a),$$

si a est un point de continuité de F et G.

EXEMPLE 5. — Supposons que les X_n sont équiréparties. Soit $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et soit $\{ a_n \}$ une suite de nombres réels telle que $\{ M_n/a_n \}$ tende en loi vers F, avec $F(x) = \exp(-cx^\alpha)$ pour $x \geqslant 0$ et $F(x) = 0$ pour $x < 0$ ([*2*], p. 271). On sait que $\{ M_n/a_n \}$ est mélangeante ([*35*]). Nous avons, comme dans l'exemple 4,

$$(8)\qquad \lim P[\max(M_n/a_n, Z_n) < a] = F(a)G(a).$$

EXEMPLE 6. — En prenant $g(x, y) = x + y$ nous obtenons, $F_{X_n+Z_n} \to F * G$. Comparer avec le théorème de Slutsky [*5*], p. 174, n° 16 et le résultat classique pour la somme de deux v. a. indépendantes [*8*], théorème 3.5.7.

Nous avons tenté sans succès de démontrer une forme générale de la loi arc sinus où l'on considère le nombre de sommes partielles plus grandes qu'une v. a. X.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] M. CSÖRGO et R. FISCHLER, On Mixing and the Central Limit Theorem. *Tohoku Math. J.*, t. **23**, 1971, p. 139-145.

[*2*] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 2, Wiley, 1966.

[*3*] R. FISCHLER, Suites de bi-probabilités stables. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont*, n° 43, 1970, p. 159-167.

[*4*] P. HALMOS, *Measure Theory*, Van Nostrand, 1959.

[*5*] M. LOEVE, *Probability Theory*, Van Nostrand, 1960.

[*6*] W. RICHTER, Zu Einigen Konvergenzeigenschaft von Folgen Zufallige Elemente. *Studia Math.*, t. **25**, 1964-1965, p. 231-243.

[*7*] A. RÉNYI, *Calcul des Probabilités*, Dunod, 1966.

[*8*] A. RÉNYI, *Foundations of Probability*, Holden-Day, 1970.

[*9*] A. RÉNYI et P. REÉSZ, On Mixing Sequences of Random Variables. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, t. **9**, 1958, p. 389-393.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1973)