Annales de l'I. H. P., section A

B. Jeannet
T. Huillet
K. Choukri

Marches pseudo-aléatoires issues de substitutions : aspects statistiques

Annales de l'I. H. P., section A, tome 67, nº 1 (1997), p. 77-89
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1997__67_1_77_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 67, n° 1, 1997, p. 77-89. *Physique théorique*

Marches pseudo-aléatoires issues de substitutions : aspects statistiques

par

B. JEANNET, T. HUILLET et K. CHOUKRI

LIMHP-CNRS, Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France.

RÉSUMÉ. – On s'intéresse au formalisme qui s'impose lorsque l'on construit une marche pseudo-aléatoire à partir de la représentation d'une substitution « formelle » quelconque, de longueur éventuellement non constante, dans $\mathbb{R}^d$. Sous certaines conditions de renormalisabilité, cet outil paraît fournir un bon modèle de courbes fractales.

Mots clés : Substitutions, fonction de partition, produit de Riesz, formalisme thermodynamique, distribution géométrique et massique.

ABSTRACT. – Abstract substitutions, together with their representation into some physical space, are known to provide analytical methods which appear useful in the description of pseudo-random, as well as random fractal curves. We focus here on the thermodynamic formalism [15], arising from the very statistical nature of such objects, and extend known results in the "constant length" case to the "non-necessarily constant length" one.

1. INTRODUCTION

Les substitutions, comme ensemble de règles en chaîne sur les lettres d'un alphabet de cardinal fini, produisent des mots infinis (points fixes) lorsqu'elles sont indéfiniment itérées, dont la régularité, complexité, répétition ou nombre de sous mots, constituent un champ actif de recherche tant en combinatoire, qu'en théorie des langages, [10]. L'idée d'associer à chaque lettre de l'alphabet un vecteur dans un espace de représentation, apparaît aussi d'une certaine importance, puisque la somme vectorielle de ces vecteurs élémentaires, pourvu que l'on respecte l'**ordre** d'occurrence des lettres d'un point fixe d'une substitution, engendre des lignes brisées en général non bornées, dont l'irrégularité potentielle (pseudo-aléatoire), peut être source d'études intéressantes ([1], [5]). On parlera alors de la représentation de la substitution.

Si, en outre, la substitution, associée à cette représentation, présente quelques propriétés de « renormalisabilité », les courbes engendrées peuvent être contractées dans l'espace de représentation. L'objet ainsi renormalisé est confiné dans un domaine. Il paraît être un bon modèle de courbes fractales qui ont été appelées, indifféremment et de façon non exhaustive, *recurrent sets* [4], *recurrent iterated function systems* [2], *graph directed self-similar sets* [11], les auteurs se concentrant essentiellement sur le calcul de leur dimension de Hausdorff. L'exemple le plus simple auquel on pense est la marche associée à la suite de Fibonacci que l'on peut rendre confinée en dimension 1, moyennant une renormalisation.

L'objectif de ce travail, plus modeste, est l'étude des différentes fonctions de partition naturelles sous-jacentes à de tels modèles géométriques dans le cadre de substitutions pour lesquelles les longueurs des différents mots, images de chaque lettre, sont différentes. On étudie conjointement le morcellement d'une masse entre toutes les lettres composant un mot, lorsque l'on itère la substitution. Parler d'un coût de la réalisation d'un mot peut, d'ailleurs, être traité avec le même outil algébrique. Ces fonctions de partition, concernant des distributions géométriques de matière, paraissent être le point de départ d'une physique statistique de tels objets. Cette étude a, en grande partie, été initialisée par Mendès France et Dekking ([3], [5]), dans le cas de substitutions de longueur constante, telles celles de Thue-Morse, Rudin-Shapiro, Fredholm, ou dans le cas des pliages de papier, suivant en cela les travaux anciens de Kurt Mahler [5]. Il semble qu'une extension au cas de longueurs différentes présente quelques difficultés, essentiellement liées au fait que les suites issues de ces substitutions ne sont pas automatiques, c'est-à-dire non reconnaissables par un automate fini [1]. Nous verrons qu'il reste néanmoins possible, dans le cas de substitutions de lettres de longueurs non nécessairement constantes, d'écrire les fonctions de partition qui nous intéressent, comme produits infinis de polynômes de base. L'une des fonctions de partition analysées dans ce manuscrit (codage du type et de l'ordre de lecture des lettres d'un mot), est aussi étudiée, dans un cadre très général dans [16].

2. LE MODÈLE

2.1. Codage d'un mot

Soit X, un alphabet fini à m lettres, $X = \{A_1, ..., A_m\}$. Le semi-groupe libre engendré par X, noté X^+, est l'ensemble de tous les mots que l'on peut écrire avec les lettres de l'alphabet. On souhaite coder tout mot w de X^+, c'est-à-dire faire une lecture du mot w, de gauche à droite, en identifiant, la position, par exemple, ou toute autre information cumulée au cours du déchiffrage, et le type de chaque lettre le composant. On introduit à cet effet un morphisme ξ du semi-groupe libre X^+ vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Définissons une fonction $\mathbf{\Psi}_\xi$ de X^+ dans $\mathbb{C}^m$ de la façon suivante : pour toute lettre A_i de l'alphabet X, $\mathbf{\Psi}_\xi(A_i)$ est le i-ème élément de la base canonique de $\mathbb{C}^m$, ce, quel que soit le morphisme ξ choisi, et pour tout mot $w = w_1 \cdots w_l \cdots w_{|w|}$ de X^+, w_l désignant la l-ième lettre de ce mot,

$$\mathbf{\Psi}_\xi(w) = \mathbf{\Psi}_\xi(w_1) + \sum_{l=2}^{|w|} \prod_{j=1}^{l-1} \xi(w_j)\mathbf{\Psi}_\xi(w_l).$$

À titre d'exemple appelons tout d'abord « 1 » le morphisme particulier pour lequel, pour tout mot w de X^+, $\xi(w) = 1$. Le code correspondant, $\mathbf{\Psi}_1(w) = \sum_{l=1\cdots|w|} \mathbf{\Psi}_1(w_l)$, compte le nombre de lettres de chaque type contenues dans w. D'une manière générale, remarquons que pour tout mot z découpé de deux manières différentes, $z = vw = ab$, où v, w, a et b sont des mots, la fonction $\mathbf{\Psi}_\xi$ prend l'unique valeur en z : $\mathbf{\Psi}_\xi(z) = \mathbf{\Psi}_\xi(v) + \xi(v)\mathbf{\Psi}_\xi(w) = \mathbf{\Psi}_\xi(a) + \xi(a)\mathbf{\Psi}_\xi(b)$.

Associé au morphisme ξ choisi, existe un unique vecteur $\mathbf{s}(\xi)$ du dual de $\mathbb{C}^m$, dont la i-ème composante $s_i(\xi)$ est définie par $\exp s_i(\xi) = \xi(A_i)$. Utilisant la notation usuelle du produit scalaire, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}^*\mathbf{u}$, où $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont vecteurs de $\mathbb{C}^m$ et de son dual, $\xi(w) = \exp\langle \mathbf{s}(\xi), \mathbf{\Psi}_1(w)\rangle$ pour tout mot w de X^+.

2.2. Représentations de mots et code associé

Représenter un mot, c'est choisir un homomorphisme $\mathbf{f}$ de X^+ vers $\mathbb{R}^d$. La donnée de $\mathbf{f}(A_i)$, pour toute lettre A_i de l'alphabet X, définit la représentation. On appellera $\mathbf{F}_i$ ce vecteur. La représentation ne permet pas *a priori* de distinguer les lettres les unes des autres. Quels que soient les mots v et w de X^+, $\mathbf{f}(vw) = \mathbf{f}(v) + \mathbf{f}(w)$. Si l'on appelle F la matrice de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ dont la i-ème colonne est $\mathbf{F}_i$, alors pour tout mot de X^+, $\mathbf{f}(w) = F\mathbf{\Psi}_1(w)$.

Tout homomorphisme $\mathbf{f}$ de X^+ vers $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire toute représentation des lettres de l'alphabet, permet de choisir le morphisme ξ associé au codage. Ce faisant, ξ, appliqué à un mot, réalise la somme vectorielle ordonnée des vecteurs élémentaires $\mathbf{F}_i$ représentant les diverses lettres lues dans ce mot. Choisissons pour cela le vecteur $\mathbf{s}(\xi)$, du dual de $\mathbb{C}^m$, défini par la matrice F de la façon suivante : $\mathbf{s}(\xi) = F^t\mathbf{s}$ où $\mathbf{s}$ est un vecteur du dual de $\mathbb{C}^d$, le symbole « t » indiquant la transposition des matrices. Appelons $\mathbf{1}$, le vecteur de dimension m composé uniquement de 1. À titre d'exemple, la représentation $F = \mathbf{1}^t$ est choisie afin de coder l'ordre d'apparition des lettres lors de la lecture d'un mot. Soit s un nombre complexe. Le choix particulier du vecteur $\mathbf{s}(\xi) = s\mathbf{1}$ permet de calculer la valeur du morphisme ξ. Ici, $\xi(w)$ vaut $e^{s|w|}$. Si l'alphabet est composé de deux lettres seulement, le code du mot $A_1A_2A_1$ est $\boldsymbol{\Psi}_\xi(A_1A_2A_1) = [1 + e^{2s}\ e^s]^t$. Chaque composante du vecteur regroupe les informations relatives à une des lettres de l'alphabet. L'information cumulée choisie, qui est ici la position d'une lettre de l'alphabet composant le mot codé, est, quant à elle, transmise par le morphisme ξ. Distribuer des objets dans un plan, c'est choisir conjointement une autre matrice, de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m$, dotant chaque lettre d'une représentation spatiale.

D'une manière générale, appelons $\mathbf{f}_n$, $n = 1, \cdots, N_\xi$, les N_ξ homomorphismes de X^+ vers $\mathbb{R}^{d_n}$, retenus pour la représentation des mots. Le morphisme ξ est choisi, grâce à la donnée des N_ξ matrices F_n de $\mathbb{R}^{d_n} \times \mathbb{R}^m$, et des vecteurs $\mathbf{s}_n$ des duaux de $\mathbb{C}^{d_n}$, $n = 1, \cdots, N_\xi$: $\xi(w) = \exp\langle \mathbf{s}(\xi),\ \boldsymbol{\Psi}_1(w)\rangle = \exp\left\langle \sum_{n=1}^{N_\xi} F_n^t\mathbf{s}_n,\ \boldsymbol{\Psi}_1(w)\right\rangle$ pour tout mot w.

2.3. Substitutions formelles

On appelle substitution, un endomorphisme σ de X^+. Ainsi, quels que soient les mots v et w de X^+, $\sigma(vw) = \sigma(v)\sigma(w)$. La substitution est entièrement définie par la donnée pour toute lettre A_i de l'alphabet X, du mot $\sigma(A_i)$ que l'on supposera de longueur finie, $|\sigma(A_i)| = l_i$. L'hypothèse « longueur constante », consiste à choisir $l_i = l_0$ pour toutes les lettres de X. On étudie dans la suite le mot $\sigma^n(A_i)$, mot obtenu lorsque l'on applique n fois la substitution à la lettre A_i. Si pour tout entier n, les mots $\sigma^n(A_i)$ sont préfixes d'un même mot infini, ce mot infini est noté $\sigma^\infty(A_i)$. C'est la limite pour la topologie de la convergence simple de la suite de mots $\sigma^n(A_i)$. Enfin, si la première lettre de $\sigma(A_1)$, $\sigma_1(A_1)$, est A_1, le mot $\sigma^\infty(A_1)$ est point fixe de la substitution.

2.4. Codage d'une substitution

Calculons ce que devient le codage d'un mot w lorsque lui est appliquée une substitution σ. $\sigma(w)$ est la concaténation des $|w|$ mots $\sigma(w_l)$, $l = 1, \cdots, |w|$. Pour tout mot w, le codage de $\sigma(w)$ est

$$\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma(w)) = \mathbf{\Psi}_\xi(\sigma(w_1)) + \sum_{l=2}^{|w|} \prod_{j=1}^{l-1} \xi(\sigma(w_j))\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma(w_l)). \tag{1}$$

Appelons $M(\sigma, \xi)$ la matrice dont la i-ème colonne est $\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma(A_i))$. Cette matrice de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$ code la substitution. Puisque w_l appartient à l'alphabet, $\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma(w_l))$ est alors une des colonnes de la matrice $M(\sigma, \xi)$. C'est la colonne $M(\sigma, \xi)\mathbf{\Psi}_\xi(w_l)$ car $\mathbf{\Psi}_\xi(w_l)$ est le vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ identifiant w_l. Les vecteurs $\mathbf{\Psi}_\xi(w_l)$ et $\mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma}(w_l)$ sont identiques. La relation (1) devient $\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma(w)) = M(\sigma, \xi)\mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma}(w_1) + \sum_{l=2}^{|w|} \left(\prod_{j=1}^{l-1} \xi \circ \sigma(w_j)\right) M(\sigma, \xi)\mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma}(w_l)$, ou encore :

$$\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma(w)) = M(\sigma, \xi)\mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma}(w) \tag{2}$$

2.5. Codage d'un mot issu d'une substitution itérée sur les lettres de l'alphabet

Le vecteur $\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma^n(A_i))$ est le code du mot $\sigma^n(A_i)$, pour tout i variant de 1 à m. C'est aussi la i-ème colonne de la matrice $M(\sigma^n, \xi)$ cherchée. On peut calculer cette matrice si l'on connaît la matrice $M(\sigma^{n-1}, \xi)$. En effet, tout mot $\sigma^n(A_i)$ est la concaténation des l_i mots $\sigma^{n-1}(\sigma_l(A_i))$. Ainsi donc, $\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma^n(A_i)) = \mathbf{\Psi}_\xi(\sigma^{n-1}(\sigma(A_i)))$. La formule (2), appliquée alors aux m lettres de l'alphabet, devient $\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma^n(A_i)) = M(\sigma^{n-1}, \xi)\mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma^{n-1}}(\sigma(A_i))$, pour tout i de 1 à m. On obtient la récurrence cherchée, initialisée par la matrice identité :

$$M(\sigma^n, \xi) = M\left(\sigma^{n-1}, \xi\right) M\left(\sigma, \xi \circ \sigma^{n-1}\right) \tag{3}$$

Cette formule permet le calcul effectif de la matrice cherchée, si l'on précise la définition du morphisme ξ. La formule (2) se simplifie considérablement dans le cadre du morphisme 1 car pour tout mot w de X^+, $\mathbf{\Psi}_1(\sigma(w)) = M(\sigma, 1)\mathbf{\Psi}_1(w)$. On appelle désormais M la matrice $M(\sigma, 1)$, matrice d'incidence de la substitution σ. On retrouve le résultat connu concernant la composition par type de lettre du mot $\sigma^n(w)$ en fonction de la composition du mot w, $\mathbf{\Psi}_1(\sigma^n(w)) = M^n\mathbf{\Psi}_1(w)$. Pour tout autre choix du morphisme ξ, associé au vecteur $\mathrm{s}(\xi)$ du dual de $\mathbb{C}^m$, la valeur de ξ appliqué au mot $\sigma^p(w)$ est : $\xi(\sigma^p(w)) = \exp\langle \mathbf{s}(\xi),\ M^p \mathbf{\Psi}_1(w)\rangle = \exp\langle \mathbf{s}(\xi),\ M^p \sum_{l=1\cdots|w|} \mathbf{\Psi}_1(w_l)\rangle$.

2.6. Codage d'un mot et de son passé au cours de l'itération d'une substitution

Lorsque le mot $\sigma(A_i)$ se substitue à la lettre A_i, celle-ci crée l_i liaisons avec les différentes lettres $\sigma_l(A_i)$. On appelle chemin la succession des liaisons engendrées lors de l'itération de la substitution σ sur un mot w quelconque. La longueur de ce chemin, qui est le nombre de liaisons le composant, n'est autre que le nombre de fois qu'est itérée la substitution. Soit C l'ensemble de ces chemins muni de l'opération interne suivante : deux chemins ne sont concaténés que si le but du premier coïncide avec la source du second [12]. On souhaite ici adjoindre au formalisme précédent une information multiplicative concernant le chemin parcouru au cours de l'itération de la substitution lorsque parti par exemple de la lettre A_i on s'intéresse à la lettre $\sigma_l^n(A_i)$. Cette information ne peut en aucun cas être portée par le morphisme ξ. Celui-ci est seulement représentatif du type de lettre lue. Soit donc un morphisme μ de C, muni de l'opération de concaténation précédente, vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Soit X_σ^+ le sous ensemble des mots de X^+ tel que $X_\sigma^+ = \{\sigma(w) \in X^+ / w \in X^+\}$. Définissons une fonction $\mathbf{\Psi}_{\xi,\mu}$ de X^+ dans $\mathbb{C}^m$ de la façon suivante : la fonction $\mathbf{\Psi}_{\xi,1}$ obtenue pour le choix particulier de μ, le morphisme associant à tout chemin le scalaire 1, n'est autre que $\mathbf{\Psi}_\xi$ construite précédemment. Ainsi, nous posons, par définition, pour tout mot w de $X^+ - X_\sigma^+$, $\mathbf{\Psi}_{\xi,\mu}(w) = \mathbf{\Psi}_\xi(w)$.

Par ailleurs, pour toute lettre A_i, pour tout entier l de 1 à l_i , la valeur prise par μ en la liaison $A_i \to \sigma_l(A_i)$ est notée $\mu(A_i,\ l)$. Appelons $M(\sigma, \xi,\ \mu)$, la matrice $m \times m$ dont la i-ème colonne est $\mathbf{\Psi}_{\xi,\mu}(\sigma(A_i)) = \mu(A_i, 1)\mathbf{\Psi}_{\xi,1}(\sigma_1(A_i)) + \sum_{l=2}^{l_i} \mu(A_i, l) \prod_{j=1}^{l-1} \xi(\sigma_j(A_i))\mathbf{\Psi}_{\xi,1}(\sigma_l(A_i))$. Pour tout mot $\sigma(w)$ de X_σ^+, nous posons $\mathbf{\Psi}_{\xi,\mu}(\sigma(w)) = M(\sigma, \xi,\ \mu)\mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma,\mu}(w)$. Cette définition répond aux exigences formulées au début de ce paragraphe comme le montre la matrice complexe $M(\sigma, \xi,\ \mu)$. On peut alors généraliser la récurrence (3). On obtient ainsi la récurrence suivante, initialisée par la matrice identité :

$$M(\sigma^n,\ \xi,\ \mu) = M\big(\sigma^{n-1},\ \xi,\ \mu\big)M\big(\sigma,\ \xi \circ \sigma^{n-1},\ \mu\big) \tag{4}$$

La matrice $M(\sigma^n, \xi, \mu)$ est le produit de matrices de transfert : $M(\sigma^n, \xi, \mu) = \overrightarrow{\prod}_{p=1\cdots n} M(\sigma, \xi \circ \sigma^{p-1}, \mu)$. Le choix du morphisme ξ rend explicite le calcul de la i-ème colonne de la matrice de transfert de cette récurrence, $M(\sigma, \xi \circ \sigma^p, \mu)$, pour tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma^p,\mu}(\sigma(A_i)) &= \mu(A_i,1)\mathbf{\Psi}_1(\sigma_1(A_i))\\ &+\sum_{l=2}^{l_i}\mu(A_i,l)\mathbf{\Psi}_1(\sigma_l(A_i))\exp\left\langle \mathrm{s}(\xi), M^p\sum_{j=1}^{l-1}\mathbf{\Psi}_1(\sigma_j(A_i))\right\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

2.7. Équations duales

Tout mot $\sigma^n(A_i)$ peut aussi être obtenu en appliquant la substitution à chacune des lettres du mot $\sigma^{n-1}(A_i)$. Ainsi, $\mathbf{\Psi}_\xi(\sigma^n(A_i)) = \mathbf{\Psi}_\xi(\sigma(\sigma^{n-1}(A_i)))$. En termes matriciels cette relation équivaut à : $M(\sigma^n, \xi) = M(\sigma, \xi)M(\sigma^{n-1}, \xi \circ \sigma)$. Cette équation est à rapprocher de l'équation (3). Elle lui est, en notre sens, duale. La matrice de transfert $M(\sigma^{n-1}, \xi \circ \sigma)$ permettant de passer directement du code de tout mot $\sigma(A_i)$, au code de tout mot $\sigma^n(A_i)$, obéit à la récurrence (3), pour le morphisme particulier $\xi \circ \sigma$, initialisée par la matrice identité.

3. REPRÉSENTATION D'UNE DISTRIBUTION GÉOMÉTRIQUE DE MATIÈRE ([8], [9], [12])

On porte notre attention sur un ensemble de N caractéristiques physiques inhérentes à chacune des lettres de l'alphabet, résumé par la donnée de N matrices F_n de $\mathbb{R}^{d_n} \times \mathbb{R}^m$, $n = 1, \cdots, N$. Toutefois, seules les N_ξ premières représentations seront intégrées durant la lecture d'un mot. Les $N - N_\xi$ dernières représentations ne concernent, quant à elles, que des propriétés relatives au type de la lettre lue. Par ailleurs, l'objet physique étudié est construit de la manière suivante : on scinde, au départ, un objet de masse unité, de type A_i, en l_i objets de type $\sigma_l(A_i)$, de masse $\pi_{i,l}$. Ce processus est répété dans les mêmes proportions, lorsque est itérée la substitution. L'hypothèse de conservation de masse, naturelle ici, n'est pas algébriquement indispensable. Nous aurions pu nous intéresser au coût additif, $\log \pi_{i,l}$, de la liaison engendrée, $A_i \to \sigma_l(A_i)$, et ainsi, calculer le coût global du chemin menant de A_i à $\sigma_l^n(A_i)$. On notera $m(\sigma_l^n(A_i))$, la masse, ou l'exponentielle du coût, de cette l-ième lettre atteinte en n itérations de la substitution.

Soient N paramètres complexes vectoriels s_p des espaces duaux de $\mathbb{C}^{d_p}$, $p = 1, \cdots, N$, et un nombre complexe γ. La fonction génératrice de l'information conjointe des représentations et de la masse de toute lettre du mot $\sigma^n(A_i)$ est :

$$\Phi_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N,\gamma}(\sigma^n(A_i)) = \sum_{l=1}^{|\sigma^n(A_i)|} \prod_{p=1}^{N_\xi} \exp\left\langle \mathbf{s}_p, \sum_{j=1}^{l} \mathbf{f}_p(\sigma_j^n(A_i)) \right\rangle$$
$$\times \prod_{q=N_\xi+1}^{N} \exp\langle \mathbf{s}_q, \mathbf{f}_q(\sigma_l^n(A_i))\rangle \exp\langle \gamma, \log m(\sigma_l^n(A_i))\rangle,$$

qui n'est autre que,

$$\Phi_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N,\gamma}(\sigma^n(A_i)) = \sum_{l=1}^{|\sigma^n(A_i)|} \exp\left\langle \sum_{p=1}^{N_\xi} F_p^t \mathbf{s}_p, \sum_{j=1}^{l-1} \mathbf{\Psi}_1(\sigma_j^n(A_i)) \right\rangle$$
$$\times \exp\left\langle \sum_{p=1}^{N} F_p^t \mathbf{s}_p, \mathbf{\Psi}_1(\sigma_l^n(A_i)) \right\rangle m^\gamma(\sigma_l^n(A_i)).$$

Appelons ξ, le morphisme associé au vecteur $\mathbf{s}(\xi) = \sum_{p=1}^{N_\xi} F_p^t \mathbf{s}_p$, et μ, le morphisme défini par $\mu(A_i, l) = \pi_{i,l}^\gamma$. On note $\mathbf{I}_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N}$ le vecteur de C^m dont le i-ème terme est $\exp \sum_{p=1}^{N} \langle \mathbf{f}_p(A_i), \mathbf{s}_p\rangle$. La fonction génératrice cherchée n'est autre que $\Phi_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N,\gamma}(\sigma^n(A_i)) = \left\langle M(\sigma^n, \xi, \mu)_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_{N_\xi},\gamma} \mathbf{\Psi}_1(A_i), \mathbf{I}_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N} \right\rangle$, pour tout entier $n \geq 1$. Le calcul de la matrice $M(\sigma^n, \xi, \mu)$ est déduit de la récurrence (4), initialisée, pour $n = 0$, par la matrice identité. L'équation (5), donne l'expression explicite de la i-ème colonne de la matrice de transfert de cette récurrence, $M(\sigma, \xi \circ \sigma^{n-1}, \mu)$, pour tout entier $n \geq 1$.

Remarque.

1. Ce faisant, il est clair que l'on s'intéresse à une marche pseudo-aléatoire construite sur la substitution. Le terme pseudo-aléatoire doit être compris ici en ce sens que le désordre statistique de telles structures géométriques est d'essence déterministe et non aléatoire. Il existe une utilisation probabiliste de la notion de substitutions, [13], due à B. Mandelbrot et J. Peyrière, qui n'est pas abordée ici. Ce terme est plutôt à rapprocher de la définition spectrale des suites pseudo-aléatoires qui présentent un spectre de Wiener continu, [1], [14].

2. La fonction génératrice géométrique et massique de tout mot $\sigma^n(w)$ de X^+, est

$$\Phi_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N,\gamma}(\sigma^n(w)) = \left\langle M(\sigma^n, \xi, \mu)_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_{N_\xi},\gamma} \mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma^n,\mu}(w), \mathbf{I}_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N} \right\rangle.$$

Le calcul explicite du vecteur $\mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma^n,\mu}(w)$ est déduit de (5) : $\mathbf{\Psi}_{\xi\circ\sigma^n,\mu}(w) = \pi_{i,1}^{\gamma}\mathbf{\Psi}_1(w_1) + \sum_{l=2}^{|w|}\pi_{i,l}^{\gamma}\mathbf{\Psi}_1(w_l)\exp\left\langle \mathbf{s}(\xi), M^n\sum_{j=1}^{l-1}\mathbf{\Psi}_1(w_j)\right\rangle$.

3. $\sigma^{\infty}(A_1)$ étant point fixe de la substitution, on obtient, sous réserve de la convergence des séries formelles mises en jeu,

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N,\gamma}(\sigma^n(A_1))$$
$$= \left\langle \overrightarrow{\prod}_{p=1\cdots\infty} M(\sigma,\xi\circ\sigma^{p-1},\mu)_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_{N_\xi},\gamma}\mathbf{\Psi}_1(A_1), \mathbf{I}_{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_N}\right\rangle.$$

4. Ces résultats généralisent des résultats connus sous l'hypothèse « longueur constante », [5]. Si l'on code l'ordre des lettres, $\mathbf{s}(\xi) = s\mathbf{1}$, $\gamma = 0$; $(M^t)^n\mathbf{1} = l_0^n\mathbf{1}$, de sorte que $M(\sigma,\xi\circ\sigma^p)_s = M(\sigma,\xi)_{l_0^p s}$. Ainsi, dans l'asymptotique $n\to\infty$, le code prend la forme connue d'un produit de Riesz, [14], $M(\sigma^{\infty},\,\xi)_s = \overrightarrow{\prod}_{p=1\cdots\infty} M(\sigma,\,\xi)_{l_0^{p-1}s}$, source de nombreuses identités combinatoires, [5]. Cette dernière représentation est très utile pour les calculs de mesures spectrales associées aux substitutions, [14]. Il est donc à prévoir que le produit infini doive permettre de calculer des spectres dans la situation de « longueur non constante », problème assez largement ouvert.

5. Sous l'hypothèse « longueur constante », et, lorsque l'on choisit $\xi(w) = \exp s|w|$, l'équation duale prend la forme connue d'une équation de Mahler, $M(\sigma^n,\,\xi)_s = M(\sigma,\,\xi)_s M(\sigma^{n-1},\,\xi)_{l_0 s}$, pour tout $n \geq 1$.

4. RENORMALISATION SPATIALE DU PROCESSUS CUMULÉ

Appelons F l'unique représentation que l'on souhaite intégrer. On dira que la substitution σ est « renormalisable » s'il existe une application linéaire dilatante L (c'est-à-dire dont les valeurs propres sont toutes de module supérieur à l'unité) de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^d$, telle que : $L^tF = FM$. Toute substitution σ n'est pas renormalisable et seul un choix judicieux de représentation $\mathbf{f}$ associée lui confère cette propriété. Nous décrivons ci-dessous comment un tel choix peut s'opérer de manière systématique. Soit une substitution primitive de matrice d'incidence M. Par le théorème de Perron-Frobenius, on démontre que M admet une valeur propre réelle supérieure à l'unité, dominante, algébriquement simple, appelée rayon spectral ρ de M. Les autres valeurs propres de M sont strictement incluses dans le disque de rayon ρ. Pour trouver L dilatante, d valeurs propres de M notées λ_j, j variant de 1 à $d \leq m$, sont choisies, de module strictement supérieur à l'unité, contenant éventuellement ρ. Soit $\{\mathbf{m}_i,\ i = 1 \cdots d\}$ le système de vecteurs propres de $\mathbb{C}^m$ associé à M^t. Pour tout j de 1 à d, $M^t\mathbf{m}_j = \lambda_j \mathbf{m}_j$. Construisons alors une matrice L^t dont le polynôme caractéristique est donné par le polynôme $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_d) = \lambda^d - \alpha_1\lambda^{d-1} - \cdots - \alpha_{d-1}\lambda - \alpha_d$. Choisissons pour matrice réelle L^t la forme compagnon, primitive. Cette matrice admet d vecteurs propres $\mathbf{e}_j$ vérifiant $L^t\mathbf{e}_j = \lambda_j\mathbf{e}_j$, j variant de 1 à d. On introduit maintenant la matrice $d \times m$, $F = \sum_{j=1\cdots d} c_j(\mathbf{e}_j\mathbf{m}_j^t)$, où les scalaires c_j sont des nombres complexes, pour tout j de 1 à d. La propriété de renormalisabilité cherchée est vérifiée. En effet, $L^tF = \sum_{j=1\cdots d} c_j L^t(\mathbf{e}_j\mathbf{m}_j^t) = \sum_{j=1\cdots d} c_j\lambda_j(\mathbf{e}_j\mathbf{m}_j^t) = \sum_{j=1\cdots d} c_j(\mathbf{e}_j\mathbf{m}_j^t)M = FM$. C'est là une méthode « canonique », mais non exhaustive, de construction d'une substitution renormalisable. Notons enfin, que les scalaires c_j peuvent être choisis afin que les vecteurs $\mathbf{F}_i$ soient des vecteurs de module plus petit que 1. Le système de vecteurs obtenu, représentatif de l'alphabet, est appelé « rose des directions » du problème.

Supposons la substitution σ renormalisable. On représente maintenant toute lettre A_i rencontrée dans un mot $\sigma^n(w)$, non pas par le vecteur de $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{f}(A_i)$, mais par le vecteur $(L^t)^{-n}F\mathbf{\Psi}_1(A_i) = (L^t)^{-n}\mathbf{f}(A_i)$ de $\mathbb{R}^d$. Le mot $\sigma^n(w)$, après contraction, a la même représentation spatiale que celle de w. En effet, pour tout n, $(L^t)^{-n}F\mathbf{\Psi}_1(\sigma^n(w)) = (L^t)^{-n}FM^n\mathbf{\Psi}_1(w) = F\mathbf{\Psi}_1(w)$. La marche pseudo-aléatoire, représentative de $\sigma^n(w)$, s'achève, pour tout n, au même point $\mathbf{f}(w)$ de $\mathbb{R}^d$.

Le codage du processus cumulé renormalisé est $\varphi_{\mathbf{s}}(\sigma^n(w)) = \Phi_{L^{-n}\mathbf{s}}(\sigma^n(w))$. Cette fonction, particularisée aux m mots $\sigma^n(A_i)$, devient $\langle m_n(\mathbf{s})\mathbf{\Psi}_1(A_i), \mathbf{1}\rangle$ où la matrice $m_n(\mathbf{s})$ obéit à la récurrence,

$$m_n(\mathbf{s}) = m_{n-1}(L^{-1}\mathbf{s})M(\sigma,\, \xi)_{L^{-1}\mathbf{s}},$$

initialisée, pour $n = 0$, par la matrice diagonale de terme i-i, $\exp\langle\mathbf{s},\, \mathbf{f}(A_i)\rangle$, $i = 1, \cdots, m$. Il est à noter que la matrice de transfert de la récurrence, $M(\sigma,\, \xi)_{L^{-1}\mathbf{s}}$ est en ce cas constante. La formule (5), lorsque $\mathbf{s}(\xi) = F^t\mathbf{s}$, permet de la calculer explicitement. Remarquons que $\varphi_{\mathbf{s}}(\sigma^n(w))$ est, aussi, le produit scalaire, $\langle m_n(\mathbf{s})\mathbf{\Psi}_1(A_i), \mathbf{I}_{L^{-n}\mathbf{s}}\rangle$. La matrice $m_n(\mathbf{s})$ est alors obtenue, grâce à l'équation récurrente initialisée par la matrice identité, $m_n(\mathbf{s}) = M(\sigma,\, \xi)_{L^{-n}\mathbf{s}}m_{n-1}(\mathbf{s})$.

5. ASYMPTOTIQUE

On décrit ici, sans souci véritable de rigueur, le type d'information asymptotique qu'il serait possible d'étudier en détail sur les objets géométriques engendrés par le point fixe $\sigma^\infty(A_1)$. On se penche plus particulièrement sur le processus cumulé, associé à une seule représentation, c'est-à-dire sur le nuage de points de $\mathbb{R}^d$ atteints lors de la lecture ordonnée de ce mot.

Dans le cas **non renormalisé**, la fonction génératrice qui nous intéresse ici, est la limite de $\Phi_{\mathbf{s}}(\sigma^n(A_1)) = \sum_{l=1}^{|\sigma^n(A_1)|} \exp\left\langle \mathbf{s},\ \sum_{j=1}^{l} \mathbf{f}\left(\sigma_j^n(A_1)\right)\right\rangle$ lorsque n tend vers l'infini. Cette fonction n'est autre que la transformée de Laplace de la mesure positive de $\mathbb{R}^d$, $d\mu = \sum_{l=1\cdots|\sigma^n(A_1)|} \delta_{\sum_{j=1}^{l} \mathbf{f}\left(\sigma_j^n(A_1)\right)}$. Il est alors essentiel de savoir si le support de cette mesure est, ou non, compact. Cette discussion trouve réponse dans le choix même de la représentation $\mathbf{f}$ des mots. On ne donne ici qu'un aperçu caricatural des effets induits par le choix de la matrice F associée à la représentation $\mathbf{f}$.

Lorsque les d lignes de la matrice F sont des combinaisons linéaires des vecteurs propres à gauche de la matrice M, associés à des valeurs propres de module supérieur à 1, le support de la mesure est non compact. On démontre par l'inégalité de Hölder, que $\lim_{n\to\infty} \log \Phi_{\mathbf{s}}(\sigma^n(A_1))$ est une fonction convexe sur un domaine ∂ convexe, défini par $\partial = \left\{\mathbf{s} \in\mathbb{R}^d / \lim_{n\to\infty} \log \Phi_{\mathbf{s}}(\sigma^n(A_1)) < \infty\right\}$ [7].

Pour tout autre choix d'une représentation $\mathbf{f}$ lié à des valeurs propres de module plus petit que 1, le support de la mesure est compact. En effet, la trajectoire pseudo-aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ liée au point fixe $\sigma^\infty(A_1)$, revient en 0. La marche admet une mesure de probabilité asymptotique dont la transformée de Laplace est $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\sigma^n(A_1)|} \Phi_{\mathbf{s}}(\sigma^n(A_1))$. On peut écrire $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Phi_{\mathbf{s}}(\sigma^n(A_1)) = \log \alpha$, où α est le rayon spectral de la matrice M. Ces résultats sont bien évidemment liés au caractère récurrent ou transient des marches étudiées ([6], [17]).

Dans le cas particulier où M admet 1 comme valeur propre, si l'on choisit la représentation $\mathbf{f}$ de telle sorte que $F = FM$, alors la fonction génératrice vaut $\langle M^n(\sigma, \xi)_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\Psi}_1(A_1),\ \mathbf{I}_s\rangle$. On peut appliquer le théorème ergodique lié au rayon spectral $\alpha(\mathbf{s})$ de la matrice $M(\sigma, \xi)_{\mathbf{s}}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Phi_{\mathbf{s}}(\sigma^n(A_1)) = \log \alpha(\mathbf{s})$. Ce cas apparaît critique dans la classification des choix de la représentation $\mathbf{f}$.

Le choix délibéré de prendre $\mathbf{s}$ réel, est lié au formalisme thermodynamique qui peut être développé à partir de ces résultats asymptotiques ([12], [15]). Toutefois les propriétés spectrales ($\mathbf{s}$ imaginaire pur) sont bien évidemment d'un grand intérêt ([1], [14]). Si l'on fait le choix d'une représentation liée à des valeurs propres de module supérieur à l'unité, on démontre, sur des exemples, l'existence d'une mesure spectrale asymptotique, comme dans le cadre de substitutions de longueur constante ([1], [14]).

Si l'on **renormalise** spatialement la ligne brisée, et si l'on s'intéresse seulement aux représentations liées aux valeurs propres de M de module supérieur à 1, la marche pseudo-aléatoire est à support compact. On peut espérer, par le théorème ergodique de Chacon-Ornstein, qu'il existe une mesure de probabilité asymptotique dont la transformée de Laplace réelle est $\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{L-n_s}(\sigma^n(A_1))}{|\sigma^n(A_1)|}$. Les outils algébriques présentés dans ce travail complètent les résultats qualitatifs obtenus par F. Dekking sur ces problèmes ([3], [4], [5]).

6. CONCLUSION

On donne une méthode de génération systématique de la fonction de partition géométrique et massique lorsque l'on s'intéresse à la représentation physique (renormalisable ou non) de substitutions formelles quelconques et, en particulier de longueur non constante, généralisant en cela une situation largement défrichée sous l'hypothèse « longueur constante ». Celles-ci paraissent fournir un outil de base de représentation intéressant la physique statistique de marches pseudo-aléatoires.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier l'un des rapporteurs, pour nous avoir suggéré un outil de représentation, permettant une écriture plus concise de l'article. Nous remercions, par ailleurs, Anna Porzio et Andrzej Klopotowski, (de l'Université Paris XIII), pour l'intérêt stimulant qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] J.-P. ALLOUCHE et M. MENDÈS FRANCE, *Automata and automatic sequences. Beyond quasicrystals*, Éd. F. AXEL, D. GRATIAS, Springer, Les Éditions de Physique, 1995, p. 293-367.

[2] F. BARNSLEY, J. H. ELTON et D. HARDIN, Recurrent iterated functions systems., *Constr. Approx.*, vol. **5**, 1989, p. 3-39.

[3] F. DEKKING, *Substitutions, branching processes and fractal sets.* Fractal Geometry and Analysis, Ed. J. Bélair and S. Dubuc. Kluwer Academic Pub., 1991, p. 99-119.

[4] F. DEKKING, Recurrent sets, *Adv. in Math.*, vol. **44**, 1982, p. 78-104.

[5] F. DEKKING, M. MENDÈS FRANCE, et A. VAN DER POORTEN, *Folds! (I,II,III)*, The Mathematical Intelligencer-Springer-Verlag, vol. **4**, 1982, number 3 et 4.

[6] F. DEKKING, Marches automatiques, *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, vol. **5**, 1993, p. 93-100.

[7] R. S. ELLIS, *Entropy, large deviations and statistical mechanics*, New York, Springer, 1985.

[8] T. HUILLET et B. JEANNET, On statistical aspects of deterministic tree-like fractals, *J. of Physics A. Math. Gen.*, vol. **27**, 1994, p. 1191-1198.

[9] T. HUILLET et B. JEANNET, *On a class of skewed self-similar and hyperbolic fractals*, *J. of Mathematical Physics*, vol. **35**, (12), 1994, p. 6510-6524.

[10] M. LOTHAIRE, Combinatorics on words, *Encyclopedia of Mathematics and its applications*, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

[11] R. D. MAULDIN et S. C. WILLIAMS, Hausdorff dimensions in graph directed constructions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **309**, 1988, p. 811-829.

[12] G. MICHON et J. PEYRIÈRE, Thermodynamique des ensembles de Cantor autosimilaires, *Chinese Annals of Math.*, vol. **15B**, 1994, p. 253-272.

[13] J. PEYRIÈRE, Substitutions aléatoires itérées, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, vol. **80-81**, 1981, p. 1701-1709.

[14] M. QUEFFÉLEC, Substitution dynamical systems-spectral analysis, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. **1294**, 1987.

[15] D. RUELLE, Thermodynamic formalism, *Encyclopedia of Mathematics and its applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1978.

[16] Z.-X. WEN et Z.-Y. WEN, Mots infinis et produits de matrices à coefficients polynômiaux, *RAIRO Info. Théor. et Applic.*, vol. **26**, 1992, p. 319-343.

[17] Z.-X. WEN, Marches sur les arbres homogènes suivant une suite substitutive, *Thèse*, Université Paris-Sud, Juin, 1991.

(Manuscrit reçu le 1er février 1995;
version révisée reçue le 13 septembre 1996.)