ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MONCEF BEN SALEM

Espace-temps ayant la propriété harmonique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 36, nº 2 (1982), p. 181-187
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1982__36_2_181_0>

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXXVI, n° 2, 1982, p. 181-187. *Physique théorique.*

Espace-Temps ayant la propriété harmonique

par

Moncef BEN SALEM (*)

Faculté des Sciences et Techniques,
Sfax, Tunisie

ABSTRACT. — Let (M, g) be a general space-time and let $R(M)$ and $Z^\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$ be a bundle of Sachs frames (or null frames [*1*]) and the self-dual 2-forms associated with an element $R \in R(M)$, in the complex vectorial formalism (abr. c. v. f.). We denote $\Omega = Z^3$ the unique almost symplectic form of the set $\{ Z^\alpha \}$, and $\omega \in \Lambda^1(M)$ the Lie covector corresponding to the conformal symplectic structure $CS_p(\Omega, R)$ defined by Ω. $T_p(M)$ denoting the space tangent to M at $p \in M$ $X = \mu^{-1}\omega$ the vectorial field dual to ω with respect to Ω.

We say that (M, g) has the *harmonic property* if, in the neighbourhood of every point $p \in M$, there exists a frame such that one of the monomial forms $Z^\alpha(\alpha \neq 3)$ is *harmonic*. In this case the following properties are proved:

i) (M, g) is a space-time of type D in Petrov's classification;

ii) if the dilatations of the null real congruences of Ω vanish and if R is parallel transported along the geodesic tangent to the Debever congruence, this congruence is generated by Killing vector fields;

iii) the vectorial field X is always divergence free; if in addition X is a null vector field, there exist on (M, g) two complex curvature 2-forms which are homologous;

iv) (M, g) is covered by two families of totally geodesic Lagrangian surfaces;

v) through each point $p \in M$ pass 4 co-null hypersurfaces which are almost umbilical [*2*], the principal curvatures of which are (up to the sign) the induced values of the components of the X field.

(*) Moncef BEN SALEM, Faculté des Sciences et Techniques, 3038 Sfax, Tunisie.

Annales de l'Institut Henri Poincaré-Section A-Vol. XXXVI, 0020-2339/1982/181/$ 5,00/
© Gauthier-Villars

RÉSUMÉ. — Soit (M, g) un espace-temps et soient R(M) et $Z^\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$ respectivement un champ de repères de Sachs et les 2-formes auto-duales associées à un élément R de R(M) dans le formalisme vectoriel complexe [*1*] (abr. f. v. c.). Notons avec $\Omega = Z^3$ l'unique forme presque symplectique de l'ensemble $\{ Z^\alpha \}$ et ω le *covecteur de Lie* correspondant à la structure *conforme symplectique* $CS_p(2, R)$ définie par Ω, X est le champ vectoriel dual de ω par rapport à $\Omega(X = \mu^{-1}\omega : \mu$: isomorphisme de fibrés défini par Ω).

Nous disons que (M, g) possède la *propriété harmonique* s'il existe en chaque point $p \in M$ un repère R tel que l'une des formes Z^α monôme ($\alpha \neq 3$) soit *harmonique*. Dans ce cas on démontre les propriétés suivantes :

i) (M, g) est un espace-temps de type D dans la classification de Petrov ;

ii) si les dilatations des congruences isotropes réelles de R sont nulles et R est transporté parallèlement le long de la géodésique tangente à la congruence de Debéver, alors celle-ci est décrite par des champs de Killing ;

iii) le champ X est toujours de divergence nulle ; si de plus X est isotrope on peut considérer sur (M, g) deux 2-formes de courbures complexes qui soient homologues ;

iv) (M, g) est recouverte par deux familles de surfaces lagrangiennes totalement géodésiques ;

v) par chaque point $p \in M$ il passe quatre hypersurfaces co-isotropes *presque ombilicales* [*2*] dont les courbures principales sont au signe près les valeurs induites des composantes du champ X.

---

1. Soit (M, g) un espace-temps assujetti aux conditions d'intégrabilité usuelles. *M est une variété para-compacte, connexe et toutes les fonctions utilisées sont supposées de classe* C^∞ *intégrables sur M*. Soient R(M) le fibré des repères de Sachs sur M et $R = \{ h_A ; 1 \leq A, B ; \leq 4 \} \in R(M)$ un élément de R(M), ($\langle h_1, h_4 \rangle = 1$; $\langle h_2, h_3 \rangle = -1$ et tous les autres produits sont nuls). Nous ferons dans ce qui suit usage du formalisme vectoriel complexe [*1*]. Ce formalisme est basé sur l'isomorphisme local A : $L(4) \to SO^3(C)$ où L(4) est le groupe de Lorentz (à 4 dimensions) et $SO^3(C)$ est le groupe de rotations complexes à 3 dimensions. Ainsi si $\{ \theta^A \}$ est la base duale de $\{ h_A \}$ l'isomorphisme A fait correspondre aux 2-formes $\theta^A \wedge \theta^B$ de l'espace 6-dimensionnel L_6^* les 2-formes auto-duales $Z^\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$ qui forment une base de l'espace complexe C^3 [*1*] l'on a :

$$Z^1 = \theta^3 \wedge \theta^4 \; ; \qquad Z^2 = \theta^1 \wedge \theta^2 \; ; \qquad Z^3 = \frac{1}{2}(\theta^1 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^3) \quad (1.1)$$

et des expressions analogues pour les $\overline{Z}^\alpha$ (— : complexe conjugué : $\overline{\theta}^2 = \theta^3$, $\overline{\theta}^1 = \theta^1$, $\overline{\theta}^4 = \theta^4$). Dans le formalisme de E. Cartan, le premier groupe d'équations de structures est sous forme compacte $dZ = \sigma \wedge Z$. En termes de σ la variété (M, g) est structurée par la connexion [*3*].

$$\left|\begin{aligned}
\nabla h_1 &= -\frac{1}{4}(\sigma_3+\bar{\sigma}_3)\otimes h_1 + \frac{\bar{\sigma}_2}{2}\otimes h_2 + \frac{\sigma_2}{2}\otimes h_3 \\
\nabla h_2 &= -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1\otimes h_1 + \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_3-\sigma_3)\otimes h_2 + \frac{1}{2}\sigma_2\otimes h_4 \\
\nabla h_3 &= -\frac{1}{2}\sigma_1\otimes h_1 - \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_3-\sigma_3)\otimes h_3 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2\otimes h_4 \\
\nabla h_4 &= -\frac{1}{2}\sigma_1\otimes h_2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1\otimes h_3 + \frac{1}{4}(\sigma_3+\bar{\sigma}_3)\otimes h_4
\end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

et le premier groupe d'équations de structure s'écrit :

$$\left|\begin{aligned}
d\theta^1 &= \frac{1}{4}(\sigma_3+\bar{\sigma}_3)\wedge\theta^1 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1\wedge\theta^2 + \frac{1}{2}\sigma_1\wedge\theta^3 \\
d\theta^2 &= -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_2\wedge\theta^1 + \frac{1}{4}(\sigma_3-\bar{\sigma}_3)\wedge\theta^2 + \frac{1}{2}\sigma_1\wedge\theta^4 \\
d\theta^3 &= -\frac{1}{2}\sigma_2\wedge\theta^1 - \frac{1}{4}(\sigma_3-\bar{\sigma}_3)\wedge\theta^3 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1\wedge\theta^4 \\
d\theta^4 &= -\frac{1}{2}\sigma_2\wedge\theta^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2\wedge\theta^3 - \frac{1}{4}(\sigma_3+\bar{\sigma}_3)\wedge\theta^4
\end{aligned}\right. \tag{1.3}$$

Les 1-formes σ_α, $\bar{\sigma}_\alpha$ sont exprimées en fonction des θ^A par :

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha A}\theta^A, \qquad \bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}_{\alpha A}\bar{\theta}^A \tag{1.4}$$

et les coefficients $\sigma_{\alpha A}$, $\bar{\sigma}_{\alpha A}$ correspondent dans le f. v. c. aux coefficients spinoriels de Newmann-Penrose.

L'unique forme Z^α de rang maximal étant visiblement Z^3, posons alors $Z^3 = \Omega$, puisque M est de dimension 4 on sait que Ω est *conforme symplectique* et à l'aide de (1.3) on trouve d'ailleurs [*4*] :

$$d\Omega = 2\omega \wedge \Omega \tag{1.5}$$

où $\omega \in \Lambda^1(M)$ est le covecteur de Lee qui est exprimé par :

$$\omega = -\sigma_{23}\theta^1 + \sigma_{24}\theta^2 - \sigma_{11}\theta^3 + \sigma_{12}\theta^4 \tag{1.6}$$

Nous remarquons que les coefficients de ω sont au signe près les *dilatations* des congruences décrites par les vecteurs h_A ; σ_{12} correspond à h_4, etc. Notons par $\eta = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4$ la forme volume canonique de M. Si $*$ désigne l'opérateur d'adjonction par rapport à η il résulte aussitôt :

$$Z^2 = *Z^1 \qquad (\text{et aussi } \bar{Z}^2 = -*\bar{Z}^1) \tag{1.7}$$

2. DÉFINITION. — Nous disons qu'un espace-temps (M, g) possède la *propriété harmonique* s'il existe en chaque point $p \in$ M un repère de Sachs R telle qu'une des formes auto-duales monôme du f. v. c. associée à R soit harmonique. Si $\Delta = d \circ \delta + \delta \circ d$ est l'opérateur harmonique (δ : codifférentiel d'une forme) alors :

$$\Delta Z^2 = 0 \Leftrightarrow dZ^2 = 0 ; \qquad dZ^1 = 0 \tag{2.1}$$

En nous rapportant à (1.1), (1.3) et (1.4) les conditions (2.1) donnent après calculs :

$$\sigma_{14} = 0, \qquad \sigma_{13} = 0, \qquad \sigma_{22} = 0, \qquad \sigma_{21} = 0 \tag{2.2}$$

et

$$\sigma_{33} = \sigma_{11} ; \qquad \sigma_{12} = \sigma_{34} ; \qquad \sigma_{31} = \sigma_{23} ; \qquad \sigma_{32} = \sigma_{24} \tag{2.3}$$

Mais conformément à un résultat connu [*1*] ayant trait aux coefficients $\sigma_{\alpha A}$ les équations (2.2) prouvent que l'espace-temps (M, g) considéré fait partie du type D dans la classification de Petrov. En nous rapportant aux équations (1.2) on vérifie que (M, g) possède aussi la *propriété géodésique* (dans le sens de R. Rosca [*5*]).

Si d'autre part les dilatations de congruences $\mathfrak{C}(h_4)$ et $\mathfrak{C}(h_1)$ qui sont respectivement σ_{12} et σ_{23} sont nulles alors il résulte de (2.3) :

$$\sigma_{34} = 0 ; \qquad \sigma_{31} = 0 ; \tag{2.4}$$

et si le repère R est transporté parallèlement le long de la géodésique tangente à $\mathscr{C}(h_4)$ (congruence de Debever) alors on a :

$$\sigma_3 + \bar{\sigma}_3 = 2(\bar{\sigma}_{11}\theta^2 + \bar{\sigma}_{11}\theta^3), \tag{2.5}$$

et cette condition exprime comme on sait [*1*] que $\mathfrak{C}(h_4)$ est un champ de Killing.

Si μ est l'isomorphisme de fibrés défini par Ω, il vient de (2.1) (au facteur $\frac{1}{2}$ près)

$$\mu^{-1}(\omega) = X = \sigma_{12}h_1 + \sigma_{11}h_2 + \sigma_{24}h_3 + \sigma_{23}h_4 \tag{2.6}$$

Nous conviendrons d'appeler X le champ associé à la structure $CS_p(2, R)$ (conforme symplectique) définie par Ω.

Si $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ indique la dérivée de Lie dans la direction X alors en vertu de $i_X \circ i_X = 0$ il vient aussitôt $dL_X\Omega = 0$. On peut donc dire que Ω est un *intégral relatif* de X.

D'autre part on trouve après calculs $i_X\eta = -2\omega \wedge \Omega$ ce qui donne eu égard à (1.4) $L_X\eta = 0$ et l'on conclut que X est de *divergence nulle*.

Enfin à l'aide de (2.2) et (2.3) on obtient :

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = 2(\sigma_{12}\sigma_{33} - \sigma_{24}\sigma_{11})\sigma_3 \wedge \Omega \tag{2.7}$$

Mais en nous rapportant à (2.6), il vient aussitôt :

$$\| X \|^2 = 2(\sigma_{12}\sigma_{23} - \sigma_{24}\sigma_{11}).$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que les formes de connexion σ_α ne soient pas indépendantes est que le champ X associé à Ω soit *isotrope*.

Dans ce cas on peut prendre

$$\sigma_{11} = \sigma_{23}, \qquad \sigma_{12} = \sigma_{24} \Rightarrow \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{2.8}$$

et à l'aide du second groupe d'équations de structure afférentes au f. v. c. [*1*], on a :

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= \frac{1}{2}\sigma_3 \wedge \sigma_1 + \Sigma_1 \\ d\sigma_2 &= \frac{1}{2}\sigma_2 \wedge \sigma_3 + \Sigma_2 \qquad \Sigma_\alpha = \text{2-formes de courbures} \\ d\sigma_3 &= \sigma_2 \wedge \sigma_1 + \Sigma_3 \end{aligned} \tag{2.9}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \Sigma_1 - \Sigma_2 &= d(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \Sigma_3 &= \Sigma_1 + \Sigma_2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

et l'équation (2.10) montre que les 2-formes Σ_1 et Σ_2 sont *homologues.*

THÉORÈME. — Soit (M, g) un espace-temps ayant la propriété harmonique et soient Ω et X respectivement la 2-forme conforme symplectique définie par la 2-forme non monôme du f. v. c. et le champ vectoriel associé à Ω. On a les propriétés suivantes :

i) (M, g) est un espace-temps du type D dans la classification de Petrov;

ii) Si les dilatations des congruences isotropes réelles du repère de Sachs R sont nulles et R est transporté parallèlement le long de la géodésique tangente à la congruence de Debever alors celle-ci est décrite par des champs de Killing ;

iii) le champ vectoriel X est toujours de divergence nulle et s'il est de plus isotrope, on peut envisager sur (M, g) deux 2-formes de courbures complexes qui soient homologues.

3. Considérons les 2 distributions complémentaires D_1 et D_2 de $T_p(M, g)$ définies par $D_1 = \{ h_1, h_2 \}$ et $D_2 = \{ h_3, h_4 \}$; eu égard à la définition du repère de Sachs D_1 et D_2 sont chacune *self-orthogonale*, soit $D_1 = D_1^\perp$, $D_2 = D_2^\perp$. En outre par rapport à la forme presque symplectique Ω on a visiblement $\Omega_{|D_1} = 0$; $\Omega_{|D_2} = 0$. Il résulte de ces considérations que D_1 et D_2 sont des 2-*plans lagrangiens*. De plus on déduit de (1.2) (2.2) et (2.3) :

$$\begin{aligned} [h_1, h_2] &\in D_1 \\ [h_3, h_4] &\in D_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les relations ci-dessus montrent que les distributions lagrangiennes D_1 et D_2 définissent des feuilletages. L'on conclut de là que D_1 et D_2 sont des *polarisations.* Cette propriété assure l'intégrabilité des surfaces M_1 et M_2 respectivement tangentes à D_1 et D_2, surfaces que nous conviendrons d'appeler *Lagrangiennes.*

Considérons par exemple la surface M_1. Celle-ci est définie par $\theta^3=0$, $\theta^4 = 0$ (pour plus de simplicité nous noterons les éléments induits avec les mêmes lettres. Sa *forme de soudure* est :

$$dp_1 = \theta^1 \otimes h_1 + \theta^2 \otimes h_2 ; \qquad p_1 \in M_1 \tag{3.2}$$

et puisque M_1 est *totalement isotrope* les secondes formes quadratiques fondamentales associées à l'immersion impropre $x : M_1 \to M$ sont :

$$l_1 = \langle dp_1, \nabla h_1 \rangle \qquad \text{et} \qquad l_2 = \langle dp_1, \nabla h_2 \rangle$$

En faisant usage de (1.2) et compte tenu de (2.2), (2.3) et $\theta^3 = 0, \theta^4 = 0$ on trouve après calculs $l_1 = l_2 = 0$.

L'annulation de l_1 et l_2 montre que M_1 est *totalement géodésique* [*6*] (donc aussi minimale).

D'une manière analogue, on trouve que la surface lagrangienne M_2 est elle aussi totalement géodésique. Cette propriété est en accord avec le théorème de Tachibana [*7*] ayant trait aux formes simples harmoniques sur une variété riemannienne.

THÉORÈME. — Si (M, g) est un espace-temps possédant la propriété harmonique, alors elle est recouverte par deux familles de surfaces lagrangiennes totalement géodésiques.

4. Eu égard au rôle important que jouent en relativité les hypersurfaces co-isotropes $M^3(1)$ [*8*], nous allons faire pour finir les considérations suivantes :

Rappelons pour une hypersurface co-isotrope, le vecteur normal (*vecteur caractéristique* [*2*]) est situé dans l'espace tangent. Notons avec $l_A = \langle dp, \nabla h_A \rangle$ la seconde forme quadratique fondamentale correspondante à l'hypersurface $M^3_A(1)$ ayant h_A pour vecteur caractéristique. Compte tenu des conditions d'intégrabilité on trouve à l'aide de (1.3) (1.2) et (2.2) :

$$\begin{aligned} l_4 &= \sigma_{12}\theta^2 \otimes \theta^3 \\ l_1 &= -\sigma_{23}\theta^2 \otimes \theta^3 \\ l_2 &= \sigma_{24}\theta^1 \otimes \theta^4 \\ l_3 &= -\sigma_{11}\theta^1 \otimes \theta^4 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ces expressions montrent conformément à la définition de R. Rosca [*2*] que toutes les $M^3_A(1)$ sont *presque ombilicales.* En outre les deux courbures principales non nulles pour chacune d'entre elles sont au signe près les valeurs induites des composantes du champ X associé à la structure

$CS_p(2, R) = (\Omega, \omega)$. Il convient aussi de remarquer que les intersections $M_1(1) \cap D_1$, $M_2(1) \cap D_1$, $M_3(1) \cap D_2$ et $M_4(1) \cap D_2$ sont conformément à la terminologie des sous-variétés lagrangiennes [9] des *intersections propres*.

THÉORÈME. — Soit (M, g) un espace-temps ayant la propriété harmonique et soit X le champ associé à la structure $CS_p(2, R) = (\Omega, \omega)$. On a la propriété suivante : par chaque point de M passent quatre hypersurfaces co-isotropes presque ombilicales dont les courbures principales sont au signe près les valeurs induites des composantes du champ X. En outre chacune de ces hypersurfaces a dans un ordre convenablement choisi une intersection propre avec les distributions lagrangiennes définies à la section 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. CAHEN, R. DEBEVER, L. DEFRISE, A complex formalism in general Relativity, *Journal of Mathematics and Mechanics*, t. **16**, 1967, p. 7.

[2] R. ROSCA, Sur les hypersurfaces isotropes de défaut 1 incluses dans un espace hyperbolique de type normal, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. **XX**, n° 3, 1974, section A.

[3] R. ROSCA, Espace-temps possédant la propriété de Killing, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. **XXX**, n° 4, 1979, section A.

[4] R. ROSCA, Sur un type de variété lorentzienne symplectique, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **274**, 1972, série A.

[5] R. ROSCA, Espace-temps possédant la propriété géodésique, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. **285**, série A.

[6] B. Y. CHEN, *Geometry of submanifolds*, M. Dekker, N. Y., 1973.

[7] S. TACHIBANA, *On harmonic simple forms*, *Tensor N. S.*, t. **27**, 1973.

[8] J. M. SOURIAU, *Structures des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.

[9] A. WEINSTEIN, *Lectures on sumplectic manifolds*, Expository Lectures from C. B. M. S. North Carolina, 1976

(Manuscrit reçu le 13 mars 1981)