

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

GIUSEPPE ARCA

Espaces-temps possédant la propriété de la quasi-réurrence réciproque

Annales de l'I. H. P., section A, tome 33, n° 3 (1980), p. 225-233

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1980__33_3_225_0

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Espaces-temps possédant la propriété de la quasi-réurrence réciproque

par

Giuseppe ARCA

Istituto di Matematica, Università di Cagliari, Italia

ABSTRACT. — Let (M, g) be a general space-time and let $\mathcal{R}_h(M)$ be the bundle of *Sachs frames* [2] on M . We say that M has the *reciprocal quasi-recurrence property* if in the neighbourhood of each point $p \in M$ there exists an \mathcal{R}_h such that both pairings (h_1, h_2) and (h_3, h_4) are reciprocal quasi-recurrent [9] [10].

Making use of the complex vectorial formalism, it is shown that such a space-time is of *type D* in Petrov's classification. In addition, if the space-time M is endowed with a *symplectic structure* defined by the autodual form Z^3 , then it is proved that M is *recurrent* and its scalar curvature vanishes. Furthermore, such a space-time is foliated by *a) coisotropic hypersurfaces which are totally geodesic; b) spatial and hyperbolic surfaces, which are both totally geodesic.* Some other properties are also discussed.

1. INTRODUCTION

Soit (M, g) un espace-temps et soit $\mathcal{R}_h(M)$ le fibré des *repères de Sachs* [2] sur M . Nous disons que M possède la propriété de la *quasi-réurrence réciproque* si au voisinage de chaque point $p \in M$ il existe un repère $\mathcal{R}_h = \{h_A; A = 1, \dots, 4\} \in \mathcal{R}_h(M)$ tel que les couples (h_1, h_2) et (h_3, h_4) sont quasi-récurrents réciproques [9] [10]. En faisant usage du formalisme vectoriel complexe, on démontre que dans ce cas l'espace-temps M est

du *type D* dans la classification de Petrov. En outre, si M est *symplectique* par rapport à la forme volume autoduale Z^3 , alors :

- i) M est récurrent ;
- ii) la courbure scalaire de M est nulle ;
- iii) M est feuilleté par des hypersurfaces coisotropes totalement géodésiques, et il admet en outre un double feuilletage géodésique dont les feuilles sont des surfaces spatiales et hyperboliques.

D'autres considérations sont aussi faites.

2. FORMALISME VECTORIEL COMPLEXE

Soit (M, g) un espace-temps et soit $\mathcal{R}_h = \{ h_A ; A, B = 1, \dots, 4 \} \in \mathcal{R}_h(M)$ une *repère de Sachs* [2] sur M . Les vecteurs $h_a (a = 1, 4)$ et $h_b (b = 2, 3)$ sont respectivement isotropes réels et isotropes complexes conjugués ; on a

$$2.1 \quad \langle h_1, h_4 \rangle = 1 ; \quad \langle h_2, h_3 \rangle = -1$$

et tous les autres produits sont nuls ($\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire défini par la métrique g). Soit $T_p(M)$ l'espace tangent à M en $p \in M$. On peut considérer la décomposition de Witt [1]

$$2.2 \quad T_p(M) = H_p(M) \oplus S_p(M),$$

où $H_p = \{ h_a \}$ et $S_p = \{ h_b \}$ sont respectivement un 2-plan *hyperbolique* et un 2-plan *spatial*.

Nous ferons usage dans ce qui suit du formalisme vectoriel complexe (abr. f. v. c.) [2]. Si $\{ \theta^A \}$ est la base duale de $\{ h_A \}$, il existe un isomorphisme entre les 2-formes $\theta^A \wedge \theta^B$ de l'espace 6-dimensionnel L_6^* et les 2-formes autoduales Z^α ($\alpha = 1, 2, 3$) qui forment la base duale de l'espace complexe \mathbb{C}^3 . On a :

$$2.3 \quad Z^1 = \theta^3 \wedge \theta^4 ; \quad Z^2 = \theta^1 \wedge \theta^2 ; \quad Z^3 = \frac{1}{2} (\theta^1 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^3)$$

et la connexion ∇ induite par g est déterminée par la 1-forme σ (à valeurs dans $SO^3(\mathbb{C})$) telle que le premier groupe d'équations de structure dans \mathbb{C}^3 s'écrit :

$$2.4 \quad dZ = \sigma \wedge Z$$

Les formes de connexion $\sigma_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha$ ($\bar{\cdot}$: complexe conjugué) sont exprimées en fonction des θ^A par

$$2.5 \quad \sigma_\alpha = \sigma_{\alpha A} \theta^A ; \quad \bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}_{\alpha A} \bar{\theta}^A \quad (\theta^2 = \bar{\theta}^3, \theta^1 = \bar{\theta}^1, \theta^4 = \bar{\theta}^4)$$

Les coefficients $\sigma_{\alpha A}, \bar{\sigma}_{\alpha A}$ correspondent dans le f. v. c. aux coefficients spinoriels de Newman-Penrose [7].

Sur le fibré $\mathcal{R}_h(\mathbf{M})$ le premier groupe d'équations de structure s'écrit [8]

$$2.6 \quad \left\{ \begin{array}{l} d\theta^1 = \frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^1 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \wedge \theta^2 + \frac{1}{2}\sigma_1 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 \wedge \theta^1 + \frac{1}{4}(\sigma_3 - \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^2 + \frac{1}{2}\sigma_1 \wedge \theta^4 \\ d\theta^3 = -\frac{1}{2}\sigma_2 \wedge \theta^1 - \frac{1}{4}(\sigma_3 - \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^3 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \wedge \theta^4 \\ d\theta^4 = -\frac{1}{2}\sigma_2 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 \wedge \theta^3 - \frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \wedge \theta^4 \end{array} \right.$$

et en termes de σ , la variété \mathbf{M} est structurée par la connexion

$$2.7 \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla h_1 = -\frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \otimes h_1 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 \otimes h_2 + \frac{1}{2}\sigma_2 \otimes h_3 \\ \nabla h_2 = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \otimes h_1 + \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_3 - \sigma_3) \otimes h_2 + \frac{1}{2}\sigma_2 \otimes h_4 \\ \nabla h_3 = -\frac{1}{2}\sigma_1 \otimes h_1 - \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_3 - \sigma_3) \otimes h_3 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 \otimes h_4 \\ \nabla h_4 = -\frac{1}{2}\sigma_1 \otimes h_2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 \otimes h_3 + \frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3) \otimes h_4. \end{array} \right.$$

La transcription du second groupe d'équations de structure est

$$2.8 \quad \begin{aligned} d\sigma_1 &= \frac{1}{2}\sigma_3 \wedge \sigma_1 + \Sigma_1 \\ d\sigma_2 &= \frac{1}{2}\sigma_2 \wedge \sigma_3 + \Sigma_2 \\ d\sigma_3 &= \sigma_2 \wedge \sigma_1 + \Sigma_3, \end{aligned}$$

où Σ_α représentent les 2-formes de courbure complexes. On a des équations analogues pour les complexes conjuguées $\bar{\sigma}_\alpha$ et $\bar{\Sigma}_\alpha$. Par rapport à la base $\{Z^\alpha, \bar{Z}^\alpha\}$ de \mathbb{C}^3 , les formes Σ_α s'écrivent [2] :

$$2.9 \quad \Sigma_\alpha = \left(C_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}R\gamma_{\alpha\beta} \right) Z^\beta + E_{\alpha\beta} \bar{Z}^\beta.$$

Dans 2.9, R , $\gamma_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$ et $C_{\alpha\beta}$ sont respectivement la courbure scalaire de \mathbf{M} , la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, le tenseur d'Einstein et les composantes

du tenseur symétrique sans trace ($\gamma^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow C_{33} = 4C_{12}$) qui correspond dans le f. v. c. au tenseur conforme de Weil C_{jkl}^i [2].

3. QUASI-RÉCURRENCE RÉCIPROQUE

Nous supposons que dans le voisinage de chaque point $p \in M$ il existe un repère \mathcal{R}_h tel que chaque'un des couples (h_1, h_2) et (h_3, h_4) est quasi-récurrent réciproque, dans le sens de R. Rosca [9] [10]. Dans ce cas nous dirons que M possède la propriété de la *quasi-récurrance réciproque*. Conformément à [9] on doit écrire

$$3.1 \quad \begin{cases} \nabla_{h_2} h_1 = Ah_1 + Bh_2 \\ \nabla_{h_1} h_2 = A'h_1 + B'h_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \nabla_{h_4} h_3 = Ch_3 + Dh_4 \\ \nabla_{h_3} h_4 = C'h_3 + D'h_4, \end{cases}$$

où $A, B, C, D, A', B', C', D' \in C^\infty(M)$. A l'aide de 2.7 les conditions 3.1 donnent

$$3.2 \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{14} = 0, \quad \sigma_{13} = 0.$$

Mais les équations ci-dessus expriment dans le f. v. c. les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace-temps soit du type D dans la classification de Petrov [5].

THÉORÈME. — *Tout espace-temps (M, g) possédant la propriété de la quasi-récurrance réciproque est du type D dans la classification de Petrov.*

4. STRUCTURE SYMPLECTIQUE SUR L'ESPACE-TEMPS M

Supposons maintenant que l'espace-temps du n. 2 est en plus muni d'une *structure symplectique* $\text{Sp}(2; \mathbb{R})$ définie par la forme autoduale Z^3 (qui est visiblement de rang maximal). Dans ce cas, compte tenu de 2.4. $dZ^3 = 0$ implique

$$4.1 \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{24} = 0.$$

La comparaison de 4.1 et 3.2 montre que l'on a

$$4.2 \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0,$$

ce qui exprime que M est *récurrent* [5]. En faisant usage de 2.8 on trouve facilement

$$4.3 \quad \Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_3 = d\sigma_3;$$

ainsi la 2-forme de courbure Σ_3 est *exacte*.

En nous rapportant à [2], les composantes des formes de courbure Ω_B^A s'écrivent dans notre cas

$$4.4 \quad \Omega_B^A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(\Sigma_3 + \bar{\Sigma}_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(\bar{\Sigma}_3 - \Sigma_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(\Sigma_3 - \bar{\Sigma}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(\Sigma_3 + \bar{\Sigma}_3) \end{pmatrix}$$

et un calcul rapide prouve que la courbure scalaire $R = \sum_A R_{AA}$ est nulle.

D'autre part, en faisant usage de la formule générale [2]

$$4.5 \quad S_{AB} = R_{AB} - (R/4)g_{AB} = \begin{pmatrix} E_{22} & -\frac{1}{2}E_{23} & \frac{1}{2}E_{32} & \frac{1}{4}E_{33} \\ -\frac{1}{2}E_{23} & E_{12} & \frac{1}{4}E_{33} & \frac{1}{2}E_{31} \\ \frac{1}{2}E_{32} & \frac{1}{4}E_{33} & E_{21} & \frac{1}{2}E_{13} \\ \frac{1}{4}E_{33} & \frac{1}{2}E_{31} & \frac{1}{2}E_{13} & E_{11} \end{pmatrix}$$

on obtient

$$4.6 \quad R_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{32} & E_{33} \\ 0 & 0 & E_{33} & E_{31} \\ E_{32} & E_{33} & 0 & 0 \\ E_{33} & E_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $X = \sum_A X^A h_A \in T_p(M)$ un champ vectoriel tangent sur M.

La courbure de Ricci dans la direction X, en vertu de 4.6, est

$$4.7 \quad Ric(X) = X^3 \left(X^1 E_{32} + \frac{1}{2} X^2 E_{33} \right) - X^4 \left(\frac{1}{2} X^1 E_{33} + X^2 E_{31} \right)$$

De 4.7 on déduit que si l'on a

$$4.8 \quad m = (E_{33})^2 - 4E_{31}E_{32} = 0,$$

alors ils existent ∞^3 champs vectoriels tangents $X(X^A)$ dans la direction desquels M est *Ricci plate*.

D'autre part, compte tenu de 3.3, on obtient de 2.9

$$4.9 \quad \Sigma_3 = E_{31}\bar{Z}^1 + E_{32}\bar{Z}^2 + E_{33}\bar{Z}^3.$$

En faisant usage de 2.3, on a immédiatement

$$4.10 \quad \Sigma_3 \wedge \Sigma_3 = \left(-2E_{31}E_{32} + \frac{1}{2}(E_{33})^2 \right) \eta$$

où $\eta = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4$ est l'élément de volume canonique sur M .

Ainsi, dans le cas où l'on a $m \neq 0$ partout sur M , on voit en vertu de 3.3 que Σ_3 est une *forme potentielle symplectique*. Par conséquent, si $\text{Ric}(X) \neq 0$, $\forall X \in T_p(M)$, alors Σ_3 est nécessairement *symplectique* et la variété (M, g) (qui ne peut pas être compacte) est *quantifiable* [12].

En outre, la contraction de Σ_3 avec $X(X^A)$ donne

$$i_X \Sigma_3 = - \left(X^3 E_{32} + \frac{1}{2} X^4 E_{33} \right) \theta^1 - \left(X^4 E_{31} + \frac{1}{2} X^3 E_{33} \right) \theta^2 \\ + \left(X^1 E_{32} + \frac{1}{2} X^2 E_{33} \right) \theta^3 + \left(\frac{1}{2} X^1 E_{33} + X^2 E_{31} \right) \theta^4$$

et de 4.11 on trouve rapidement que l'égalité 4.8 est aussi la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe ∞^3 champs X pour lesquels la forme Σ_3 soit une *relation intégrale d'invariance*.

Considérons enfin sur (M, g) la famille à deux paramètres de 2-formes $\lambda Z^3 + \mu \Sigma_3$ ($\lambda, \mu \in C^\infty(M)$). Selon une définition connue [5] les 2-formes (λ, μ) et (λ', μ') de la famille sont en involution si l'on a

$$4.12 \quad (\lambda Z^3 + \mu \Sigma_3) \wedge (\lambda' Z^3 + \mu' \Sigma_3) = 0.$$

Compte tenu de 2.3, 4.9 et 4.10 on trouve aussitôt que 4.12 est satisfaite si

$$4.13 \quad \mu\mu'm - \lambda\lambda' = 0.$$

De 4.13 il découle que dans le cas où l'égalité 4.8 est satisfaite l'involution est *singulière* [5].

THÉORÈME. — *Si l'espace-temps (M, g) du n. 3 est symplectique par rapport à la forme volume autoduale Z^3 , alors :*

- i) M est récurrent ;
- ii) les 2-formes de courbure Σ_1 et Σ_2 sont nulles et Σ_3 est exacte ;
- iii) la courbure scalaire de M est nulle.

En outre, soit $m = (E_{33})^2 - 4E_{31}E_{32}$ le discriminant formé avec les composantes du tenseur d'Einstein.

a) Si $m = 0$, alors :

- i) ils existent ∞^3 champs X dans la direction desquels M est *Ricci plate*

et la forme symplectique Σ_3 est une relation intégrale d'invariance pour ces champs ;

- ii) l'involution définie par les deux formes Σ_3 et Z^3 est singulière.
- b) Si $m \neq 0$, la variété symplectique M est quantifiable.

5. IMMERSIONS

Dans les hypothèses du n. 4, les équations 2.6 prennent la forme

$$5.1 \quad d\theta^1 = \varphi \wedge \theta^1, \quad d\theta^2 = \bar{\varphi} \wedge \theta^2, \\ d\theta^3 = -\bar{\varphi} \wedge \theta^3, \quad d\theta^4 = -\varphi \wedge \theta^4$$

où l'on a posé $\varphi = \frac{1}{4}(\sigma_3 + \bar{\sigma}_3)$. Les équations 5.1 montrent que chacune des formes duales θ^A ($A = 1, \dots, 4$) est complètement intégrable. Il découle de là que toute distribution définie par les vecteurs h_A est involutive [4].

Considérons en premier lieu l'hypersurface M définie par

$$5.2 \quad \theta^1 = 0.$$

Le vecteur isotrope h_4 étant partout tangent et normal à M , l'hypersurface M est par définition coisotrope ($T_{\tilde{p}}(\tilde{M})^\perp \subset T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$ [12]). La seconde forme quadratique fondamentale associée à l'immersion (impropre) $x : \tilde{M} \rightarrow M$ est par conséquent

$$5.3 \quad l_4 = -\langle d\tilde{p}, \nabla h_4 \rangle.$$

Mais en nous rapportant aux formules 2.7 et compte tenu de 4.2 on obtient

$$5.4 \quad \nabla h_4 = \varphi \otimes h_4,$$

ce qui implique $l_4 = 0$. Ceci signifie que l'immersion $x : \tilde{M} \rightarrow M$ est géodésique [3]. Rappelons que la 2-forme

$$5.5 \quad \Omega = \tilde{\theta}^2 \wedge \tilde{\theta}^3 \in \Lambda^2(\tilde{M})$$

($\tilde{\theta}$: restriction à \tilde{M}) est la 2-forme principale sur \tilde{M} . En vertu de 5.1 et 5.2 on trouve aussitôt que

$$5.6 \quad d\Omega = 0,$$

ce qui exprime, conformément à une définition donnée dans [11], que la variété \tilde{M} est quasi-minimale, et cette propriété est en accord avec la totale géodésie.

Soit maintenant $X = fh_2 + gh_3 \in S_p(M)$ ($f, g \in C^\infty(M)$) un champ spatial quelconque. Cherchons sous quelles conditions X est un automorphisme infinitésimal de la forme principale Ω . On devra écrire

$$5.7 \quad \mathcal{L}_X \Omega = (i_X \circ d + d \circ i_X)\Omega = 0$$

(\mathcal{L}_X : dérivée de Lie dans la direction X) et en vertu de 5.6 il découle

$$5.8 \quad d(i_X \Omega) = d(f\theta^3 - g\theta^2) = 0$$

Eu égard à 5.1 il vient

$$5.9 \quad (df - f\bar{\varphi}) \wedge \theta^3 - (dg + g\bar{\varphi}) \wedge \theta^2 = 0;$$

on voit qu'une condition suffisante pour avoir $\mathcal{L}_X \Omega = 0$ est que l'on ait

$$5.10 \quad \frac{df}{f} = -\frac{dg}{g} = \bar{\varphi}.$$

De 5.10 il vient par un calcul facile

$$5.11 \quad fg = \text{Cte} \Rightarrow \|X\|^2 = \text{Cte}$$

et $\bar{\varphi}$ est une forme *exacte*. En nous rapportant à 4.3 on a

$$5.12 \quad \Sigma_3 = \bar{\Sigma}_3$$

i. e. la 2-forme de courbure Σ_3 est *réelle*.

En second lieu, on voit sur 5.1 que la distribution hyperbolique annulée par θ^2, θ^3 définit elle aussi un feuilletage. Soit \tilde{M}_h (nous conviendrons de noter avec $\tilde{}$ tout élément induit sur une sous-variété de M) une feuille (surface) de ce feuilletage. Les secondes formes fondamentales associées à l'immersion (propre) $x : \tilde{M}_h \rightarrow M$ sont

$$5.13 \quad l_b = -\langle d\tilde{p}, \nabla h_b \rangle \quad (b = 2, 3)$$

et on voit aussitôt, en vertu de 2.7, 3.1 et 4.2, que $l_2 = l_3 = 0$. On conclut de là que l'immersion $x : \tilde{M}_h \rightarrow M$ est elle aussi *totalement géodésique*.

En troisième lieu considérons la surface spatiale \tilde{M}_s définie par $\theta^1 = \theta^4 = 0$. Compte tenu de 2.7 et 4.2 on trouve qu'aussi dans ce cas l'immersion $x : \tilde{M}_s \rightarrow M$ est totalement géodésique. On peut donc dire que l'espace temps considéré admet un double feuilletage géodésique. Les variétés totalement géodésiques étant un cas particulier des variétés minimales, cette propriété est en accord avec un théorème de Tachibana [13].

THÉORÈME. — *Soit (M, g) l'espace-temps du n. 4. Un tel espace-temps est feuilleté par des hypersurfaces coisotropes totalement géodésiques; en outre il admet un double feuilletage géodésique dont les feuilles sont respectivement des surfaces spatiales et hyperboliques.*

RÉFÉRENCES

- [1] E. ARTIN, *Geometrical algebra*. Interscience Publ. Inc., New York, 1957.
- [2] M. CAHEN, R. DEBEVER, L. DEFRISE, A complex vectorial formalism in general relativity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, t. 16, 7, 1967, p. 761-785.
- [3] B. Y. CHEN, *Geometry of submanifolds*. M. Dekker, New York, 1973.

- [4] Y. CHOQUET-BRUHAT, C. DEWITT-MORETTE, M. DILLARD-BLEICK, *Analysis, manifolds and physics*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1977.
- [5] R. DEBEVER, *Les espaces de l'électromagnétisme*, Colloque de géométrie différentielle, Louvain, 1951.
- [6] R. DEBEVER, L. SPELKENS, Espaces conformes récurrents. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, 1968.
- [7] E. NEWMAN, R. PENROSE. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal Math. Phys.*, t. 3, 6, 1962, p. 566-578.
- [8] R. ROSCA, Espaces-temps possédant la propriété de Killing. *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A*, t. 30, 4, 1979, p. 333-337.
- [9] R. ROSCA, Couple de champs vectoriels quasi-récurrents réciproques. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*, t. 282, 1976, p. 699-701.
- [10] R. ROSCA, S. IANUS, Space-times carrying a quasi-recurrent pairing of vector fields. *General Relativity and Gravitation*, t. 8, 6, 1977, p. 411-420.
- [11] R. ROSCA, On null hypersurfaces of Lorentzian manifolds. *Tensor N. S.*, t. 26, 1972.
- [12] J. M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, Paris, 1970.
- [13] S. TACHIBANA, On harmonic simple forms. *Tensor N. S.*, t. 27, 1973, p. 123-130.

(Manuscrit reçu le 16 mai 1980)