ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

IRÈNE MORET-BAILLY

Espaces-temps asymptotiquement plats invariants par un groupe de transformations asymptotiques isomorphe au groupe de Bondi-Metzner

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, n° 4 (1975), p. 265-276
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_4_265_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXII, n° 4, 1975, p. 265-276.
Section A :
Physique théorique.

Espaces-temps asymptotiquement plats invariants par un groupe de transformations asymptotiques isomorphe au groupe de Bondi-Metzner

par

Irène MORET-BAILLY
Faculté des Sciences d'Angers

RÉSUMÉ. — On étudie des espaces-temps munis de la métrique de Bondi mais avec des hypothèses affaiblies sur son comportement asymptotique. On prouve que les conditions aux limites choisies sont invariantes par un groupe de transformations isomorphe au groupe de Bondi-Metzner. Pour de tels espaces-temps asymptotiquement plats, le développement limité du tenseur de courbure satisfait au « peeling theorem » généralisé.

ABSTRACT. — Space-time manifolds with the Bondi metric but with weaker assumptions on the asymptotic behaviour are studied. It is proved that the boundary conditions chosen are invariant under a group of transformations isomorphic to the Bondi-Metzner group. For such asymptotically flat-space-time manifolds, the leading terms of the Riemann tensor expansion satisfy the generalised « peeling theorem ».

Soit $\mathscr{V}_4$ une variété espace-temps de la Relativité Générale au moins de classe C^4 qui satisfait aux hypothèses suivantes :

A. — Il existe au moins un système de coordonnées de Bondi [*1*]

$x^\alpha = u, r, \theta, \phi$ sur l'ouvert Ω de $\mathcal{V}_4$ défini par $r > r_0$ dans ce système de coordonnées la métrique a l'expression donnée par Bondi :

$$(1) \quad ds^2 = (\mathrm{V}r^{-1}e^{2\beta} - \mathrm{U}^2r^2e^{2\gamma})du^2 + 2e^{2\beta}dudr + 2\mathrm{U}r^2e^{2\gamma}dud\theta - r^2(e^{2\gamma}d\theta^2 + e^{-2\gamma}\sin^2\theta d\phi^2)$$

où V, β, U, γ sont des fonctions de u, r, θ.

B. — Ces fonctions admettent les développements limités en r^{-1} deux fois dérivables suivants :

$$(2) \quad \begin{cases} \mathrm{V} = \overset{-1}{\mathrm{V}} r + \overset{0}{\mathrm{V}} + 0(r^{-1}) & \beta = \overset{1}{\beta} r^{-1} + 0(r^{-2}) \\ \mathrm{U} = \overset{1}{\mathrm{U}} r^{-1} + \overset{2}{\mathrm{U}} r^{-2} + 0(r^{-3}) & \gamma = \overset{1}{\gamma} r^{-1} + 0(r^{-2}), \end{cases}$$

où $\overset{-1}{\mathrm{V}}$, $\overset{0}{\mathrm{V}}$, $\overset{1}{\beta}$, $\overset{1}{\mathrm{U}}$, $\overset{2}{\mathrm{U}}$, $\overset{1}{\gamma}$ sont des fonctions des variables u et θ. Nous supposons donc que si μ désigne l'une des fonctions (2) ou l'une de ses dérivées premières et si $\mu = 0(r^{-n})$ on a :

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = 0(r^{-n}) \quad , \quad \frac{\partial\mu}{\partial\theta} = 0(r^{-n}) \quad , \quad \frac{\partial\mu}{\partial r} = 0(r^{-(n+1)}).$$

On déduit de A et B le comportement asymptotique des composantes $g_{\alpha\beta}$ non nulles du tenseur métrique :

$$(2)' \quad \begin{cases} \lim\limits_{r=\infty} (g_{00}) = \overset{-1}{\mathrm{V}} & \lim\limits_{r=\infty} (r^{-1}g_{02}) = \overset{1}{\mathrm{U}} \\ \lim\limits_{r=\infty} (g_{01}) = 1 & \lim\limits_{r=\infty} (r^{-2}g_{22}) = -1 \qquad \lim\limits_{r=\infty} (r^{-2}g_{33}) = -\sin^2\theta. \end{cases}$$

Remarques. — *a*) L'étude des équations du vide $\mathrm{R}_{\alpha\beta} = 0$ montre qu'une condition nécessaire pour que g en soit solution est que $\overset{-1}{\mathrm{V}} = 1$ et $\overset{1}{\mathrm{U}} = 0$. Notons que ces valeurs de $\overset{-1}{\mathrm{V}}$ et $\overset{1}{\mathrm{U}}$ sont généralement prises, que g soit, ou ne soit pas, solution des équations du vide [*1*] [*2*] [*3*].

b) Si R désigne le tenseur de courbure de $(\mathcal{V}_4, g)$ on a $\lim\limits_{r=\infty} \mathrm{R} = 0$. Il suffit de prouver que ses composantes, relatives à un système de coordonnées régulier $x^{\dot\alpha}$ tendent vers zéro quand $r \to \infty$. On peut prendre pour $x^{\dot\alpha}$ les coordonnées t, x, y, z définies sur Ω par $t = u - r$, $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ en effet les $g_{\dot\alpha\dot\beta}$ et leur déterminant, égal à $-e^{4\beta}$, sont bornés sur Ω. On vérifie que $\mathrm{R}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta} = 0(r^{-1})$. On peut utiliser les $\Gamma_\beta{}^\alpha{}_\gamma$ donnés par Bondi [*1*] et les remarques suivantes dans lesquelles les valeurs de α, β, γ égales à 0,1 sont désignées par i, j, k et celles égales à 2,3 par A, B, C.

$$\frac{\partial x^{\mathrm{A}}}{\partial x^{\dot\alpha}} = 0(r^{-1}), \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x^{\dot\alpha}} = 0(1), \qquad \frac{\partial x^{\dot\alpha}}{\partial x^i} = 0(1),$$

$$\frac{\partial x^{\dot\alpha}}{\partial x^{\mathrm{A}}} = 0(r), \qquad \Gamma_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{C}} = 0(1), \qquad \Gamma_{\mathrm{A}}{}^i{}_{\mathrm{B}} = 0(r),$$

en général on a $\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k} = 0(r^{-1})$ et $\Gamma_{i}{}^{A}{}_{j} = 0(r^{-2})$ sauf pour $\Gamma_0{}^1{}_0$ et $\Gamma_0{}^2{}_0$,

$$\Gamma_0{}^1{}_0 = \frac{\partial \overset{-1}{V}}{\partial x^0} + 0(r^{-1}), \qquad \Gamma_0{}^2{}_0 = -\frac{\partial \overset{1}{U}}{\partial x^0} r^{-1} + 0(r^{-2}).$$

les $\Gamma_0{}^1{}_0$ et $\Gamma_0{}^2{}_0$ n'entrent que dans $R_0{}^1{}_{20}$ et $R_0{}^2{}_{20}$ pour lesquels on vérifie directement la propriété.

THÉORÈME I. — *Sous les hypothèses* A *et* B *on a :*

a) *Il existe sur* Ω *un champ de vecteurs* ξ *générateur de transformations infinitésimales* [4] *laissant invariants l'expression de la métrique* (1) *et le comportement asymptotique* (2)' *de* g.

b) *Pour* $r = \infty$ *ces transformations infinitésimales forment un groupe isomorphe au groupe infinitésimal de Bondi-Metzner.*

c) *Ces transformations conservent chacune des relations :*

$$\overset{-1}{V} - 1 = 0 \qquad \frac{\partial \overset{-1}{V}}{\partial u} = 0, \qquad \overset{1}{U} = 0.$$

Preuve. — *a*) Si $\mathscr{L}(\xi)g$ désigne la dérivée de Lie de g par ξ, il est nécessaire et suffisant que les ξ_α satisfassent aux équations suivantes :

(3) $\{\mathscr{L}(\xi)g\}_{11} = 0, \qquad \{\mathscr{L}(\xi)g\}_{1A} = 0, \qquad g^{AB}\{\mathscr{L}(\xi)g\}_{AB} = 0,$

(4) $\{\mathscr{L}(\xi)g\}_{0A} = 0(r), \qquad \{\mathscr{L}(\xi)g\}_{01} = 0(r^{-1}), \qquad \{\mathscr{L}(\xi)g\}_{00} = 0(1),$
$\{\mathscr{L}(\xi)g\}_{AB} = 0(r),$

(5) $\{\mathscr{L}(\xi)g\}_{23} = \{\mathscr{L}(\xi)g\}_{03} = 0 \qquad$ avec $A = 2,3$; $B = 2,3$.

Nous utilisons la formule suivante satisfaite sur une variété riemanienne

$$\{\mathscr{L}(\xi)g\}_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\xi_\beta - \nabla_\beta\xi_\alpha,$$

où ∇ est le symbole de dérivation covariante.

Les 4 équations (3) donnent les ξ_α en fonction de 3 fonctions arbitraires f, f^A des variables u, θ, ϕ. En effet elles s'écrivent respectivement

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial r} - \Gamma_1{}^\lambda{}_1\xi_\lambda = 0, \tag{6}$$

$\dfrac{\partial}{\partial r}\xi_A + \dfrac{\partial}{\partial x^A}\xi_1 - 2\Gamma_1{}^\lambda{}_A\xi_\lambda = 0$ desquelles on tire après avoir multiplié par g^{AB} :

$$\frac{\partial}{\partial r}(\xi_A g^{AB}) - \xi_A \frac{\partial}{\partial r} g^{AB} + g^{AB}\left[\frac{\partial}{\partial x^A}\xi_1 - 2\Gamma_A{}^\lambda{}_1\xi_\lambda\right] = 0, \tag{7}$$

$$g^{AB}\left(\frac{\partial}{\partial x^A}\xi_B + \frac{\partial}{\partial x^B}\xi_A - 2\Gamma_A{}^\lambda{}_B\xi_\lambda\right) = 0. \tag{8}$$

Après avoir remplacé les symboles de Christoffel par leur valeur en fonction de γ, β, U, V (6) (7) et (8) deviennent :

$$(9) \qquad \frac{\partial}{\partial r}\xi_1 - 2\xi_1\frac{\partial}{\partial r}\beta = 0$$

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}(\xi_2 g^{22}) + g^{22}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\xi_1 - 2\xi_1\dfrac{\partial}{\partial\theta}\beta\right) + e^{-2\beta}\xi_1\dfrac{\partial}{\partial r}\mathrm{U} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(\xi_3 g^{33}) + g^{33}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\xi_1 = 0 \end{cases}$$

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}(g^{22}\xi_2) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g^{33}\xi_3) + 2\frac{e^{-2\beta}}{r}\xi_0 + e^{-2\beta}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\theta} + \mathrm{U}\cot\theta - \frac{2\mathrm{V}}{r^2}\right)\xi_1 + \left\{2\frac{\mathrm{U}}{r}e^{-2\beta} - \frac{e^{-2\gamma}}{r^2}\cot\theta\right\}\xi_2 = 0.$$

(9) et (10) déterminent ξ_1, ξ_2 et ξ_3 :

$$(12) \qquad \xi_1 = f e^{2\beta}$$

$$(13) \qquad \xi_2 g^{22} = -\mathrm{U}f + \int_r^\infty g^{22}e^{2\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}f\right)dr + f^2$$

$$\xi_3 g^{33} = \int_r^\infty g^{33}e^{2\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}f\right)dr + f^3$$

(11) détermine ξ_0 :

$$\xi_0 = -\frac{1}{2}e^{2\beta}r\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(g^{22}\xi_2) + \frac{\partial}{\partial\phi}(g^{33}\xi_3)\right] - \frac{1}{2}r\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{U} + \mathrm{U}\cot\theta - \frac{2\mathrm{V}}{r^2}\right)\xi_1 + \left\{\mathrm{U}r^2e^{2\gamma} - \frac{1}{2}re^{2\beta}\cot\theta\right\}\xi_2 g^{22}.$$

Ensuite en tenant compte de B on obtient le développement limité des ξ_α qui introduit dans les équations (4) et (5) déterminent f et f^{A}. En effet, les équations (4) s'écrivent :

$$\frac{\partial\xi_{\mathrm{A}}}{\partial u} + \frac{\partial\xi_0}{\partial x^{\mathrm{A}}} - 2\Gamma_{\mathrm{A}}{}^{\lambda}{}_0\xi_\lambda = 0(r)$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + \frac{\partial\xi_0}{\partial r} - 2\Gamma_0{}^{\lambda}{}_1\xi_\lambda = 0(r^{-1})$$

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial u} - \Gamma_0{}^{\lambda}{}_0\xi_\lambda = 0(1)$$

$$\frac{\partial\xi_{\mathrm{B}}}{\partial x^{\mathrm{A}}} + \frac{\partial\xi_{\mathrm{A}}}{\partial x^{\mathrm{B}}} - 2\Gamma_{\mathrm{A}}{}^{\lambda}{}_{\mathrm{B}}\xi_\lambda = 0(r).$$

En y remplaçant les symboles Christoffel par leur valeur on obtient :

$$(15)\quad \frac{\partial \xi_2}{\partial u} + \frac{\partial \xi_0}{\partial \theta} - 2\left\{\frac{\partial \beta}{\partial \theta} - r^2 e^{2(\gamma-\beta)}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + U\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right\}\xi_0$$

$$-2\left\{\frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)}\left[U\left(\frac{V}{r^2} + \frac{V}{r}\frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial \theta} - U\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}\right) + \frac{V}{2r}\frac{\partial U}{\partial r}\right]\right\}\xi_1$$

$$-2\left\{\frac{\partial \gamma}{\partial u} + U\frac{\partial \beta}{\partial \theta} - r^2 e^{2(\gamma-\beta)}U\left(\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + U\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right\}\xi_2 = 0(r),$$

$$(16)\quad \frac{\partial \xi_3}{\partial u} + \frac{\partial \xi_0}{\partial \phi} + 2\xi_3\frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0(r),$$

$$(17)\quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \frac{\partial \xi_0}{\partial r} - 2\left\{\frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{2r^2} + \frac{V}{r}\frac{\partial \beta}{\partial r} - U\frac{\partial \beta}{\partial \theta} - \frac{1}{2}r^2 e^{2(\gamma-\beta)}U\frac{\partial U}{\partial r}\right\}\xi_1$$

$$- 2\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} - U\frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{e^{(\beta-\gamma)}}{r^2}\frac{\partial \beta}{\partial \theta}\right\}\xi_2 = 0(r^{-1}),$$

$$(18)\quad \frac{\partial \xi_0}{\partial u}$$

$$-\left\{2\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{V}{2r^2} - \frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial \beta}{\partial r}\frac{V}{r} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)}U\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + U\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right\}\xi_0$$

$$-\left\{\frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{V}{r}\frac{\partial \beta}{\partial u} - \frac{V^2}{2r^3} + \frac{V}{2r^2}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V^2}{r^2}\frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{U}{2r}\frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{UV}{r}\frac{\partial \beta}{\partial \theta}\right.$$

$$\left.+ r^2 e^{2(\gamma-\beta)}\left[U^2\left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + U\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{V}{r^2} - \frac{V}{r}\frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{\partial \gamma}{\partial u}\right) - \frac{UV}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right]\right\}\xi_1$$

$$-\left\{-\frac{\partial U}{\partial u} + \left(\frac{2\partial \beta}{\partial u} - 2\frac{\partial \gamma}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial \theta} - U\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \frac{V}{2r^2} - \frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}\frac{\partial \beta}{\partial r}\right)U\right.$$

$$\left.+ \frac{e^{2(\beta-\gamma)}}{2r^3}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + 2V\frac{\partial \beta}{\partial \theta}\right) + r^2 e^{2(\gamma-\beta)}U^2\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + U\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right\}\xi_2 = 0(r),$$

$$(19)\quad \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} - \left\{re^{2(\gamma-\beta)}\left(1 + r\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right\}\xi_0$$

$$-\left\{r^2 e^{2(\gamma-\beta)}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial \theta} + U\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{V}{r^2} - \frac{V}{r}\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right\}\xi_1$$

$$-\left\{\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)}U\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right\}\xi_2 = 0(r),$$

$$(20)\quad \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \phi} - 2\left\{\cot\theta - \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}\right\}\xi_3 = 0(r),$$

$$
\begin{aligned}
(21)\quad & \frac{\partial \xi_3}{\partial \phi} - \left\{ r e^{-2(\gamma+\beta)} \sin^2 \theta \left(1 - r\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right\} \xi_0 \\
& - \left\{ r^2 \sin^2 \theta e^{-2(\gamma+\beta)} \left(- \frac{\partial \gamma}{\partial u} + \mathrm{U} \cot \theta - \mathrm{U}\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{V}}{r^2} + \frac{\mathrm{V}}{r}\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right\} \xi_1 \\
& - \left\{ r^2 \sin^2 \theta e^{-2(\beta-\gamma)} \mathrm{U} \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial \gamma}{\partial r}\right) - e^{-4\gamma} \sin^2 \theta \left(\cot \theta - \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}\right)\right\} \xi_2 = 0(r).
\end{aligned}
$$

Le développement limité des ξ_α est :

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \xi_1 = f + 2f\overset{1}{\beta} r^{-1} + 0(r^{-2}) \qquad \xi_2 = -f^2 r^2 + \overset{1}{\mathrm{U}} f + \frac{\partial f}{\partial \theta} - 2\overset{1}{\gamma} f^2 + 0(1) \\
& \xi_3 = - \sin^2 \theta f^3 r^2 + 0(r) \\
& \xi_0 = - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^2}{\partial \theta} + \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta - 2\overset{1}{\mathrm{U}} f^2\right) r \\
& \qquad - \overset{1}{\beta}\left[\frac{\partial f^2}{\partial \theta} + \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta\right] \\
& \qquad + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2 \sin^2 \theta} - \overset{1}{\mathrm{U}} \frac{\partial f}{\partial \theta} + 2f\overset{-1}{\mathrm{V}} + 4f^2 \overset{1}{\gamma}\overset{1}{\mathrm{U}} \right. \\
& \qquad \left. + 2\overset{2}{\mathrm{U}} f^2 - 2\overset{1}{\mathrm{U}}{}^2 f + \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right\} + 0(r^{-1}).
\end{aligned}
\right.
$$

Nous introduisons (22) dans les équations (15) ... (21).

Les équations (15) et (16) sont satisfaites si :

$$
(23)\qquad \frac{\partial f^{\mathrm{A}}}{\partial u} = 0
$$

l'équation (17) est satisfaite si :

$$
(24)\qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^2}{\partial \theta} + \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta\right)
$$

L'équation (18) est satisfaite.

Les équations (19) et (21) sont satisfaites si :

$$
(25)\qquad - \frac{\partial f^2}{\partial \theta} + \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta = 0
$$

L'équation (20) est satisfaite si :

$$
(26)\qquad \frac{\partial f^2}{\partial \phi} + \frac{\partial f^3}{\partial \theta} \sin^2 \theta = 0
$$

En introduisant (25) dans (24) on obtient :

$$
(27)\qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f^2}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta.
$$

De (16) et (20) on déduit que les équations (5) sont satisfaites si et seulement si :

(28) $$f^3 = 0$$

Des équations (23), (26), (24) on obtient alors :

(29) $$f^2 = a \sin\theta, \qquad f = a\cos\theta u + \alpha(\theta)$$

où a est une constante et α une fonction arbitraire de θ.

b) Les transformations infinitésimales engendrées par ξ, $x^{\alpha''} = x^\alpha + \xi^\alpha t$ s'écrivent pour $r = \infty$ $u'' = u + ft$, $\theta'' = \theta + f^2 t$, $\phi'' = \phi + f^3 t$ où f^3, f^2 et f sont déterminés par (28) et (29). Ce sont celles du groupe de Bondi-Metzner [*2*].

c) $\overset{-1}{\mathrm{V}}$ étant la limite de g_{00} quand $r \to \infty$, il suffit de vérifier que $\lim\limits_{r=\infty} \{ \mathscr{L}(\xi) g \}_{00}$ est nulle si $\overset{-1}{\mathrm{V}} = 1$ et, indépendante de u si $\dfrac{\partial \overset{-1}{\mathrm{V}}}{\partial u} = 0$.
De (18) on déduit :

$$\lim_{r=\infty} \{ \mathscr{L}(\xi) g \}_{00} = 2[\overset{-1}{\mathrm{V}} - 1]\frac{\partial f^2}{\partial\theta} + f^2 \frac{\partial \overset{-1}{\mathrm{V}}}{\partial\theta} + f\frac{\partial \overset{-1}{\mathrm{V}}}{\partial u}.$$

De même $\overset{1}{\mathrm{U}}$ étant la limite de $r^{-1} g_{02}$ il suffit de vérifier que

$$\lim_{r=\infty} [r^{-1} \{ \mathscr{L}(\xi) g \}_{02}]$$

a une limite nulle si $\overset{1}{\mathrm{U}} = 0$. De (15) on déduit :

$$\lim_{r=\infty} [r^{-1} \{ \mathscr{L}(\xi) g \}_{02}] = f\frac{\partial \overset{1}{\mathrm{U}}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial\theta} f^2 \overset{1}{\mathrm{U}}.$$

THÉORÈME II. — *Sous les hypothèses* A, B *et* $\overset{1}{\mathrm{U}} = 0$, $(\mathscr{V}_4, g)$ *possède les propriétés suivantes :*

a) *Il existe sur* Ω *un système de coordonnées* $x^{\bar\alpha} = (\bar t, \bar x, \bar y, \bar z)$ *régulier tel que l'on ait* $g_{\bar\alpha\bar\beta} = \eta_{\bar\alpha\bar\beta} + \overset{1}{g}_{\bar\alpha\bar\beta}\bar r^{-1} + 0(\bar r^{-2})$, $\eta_{\bar\alpha\bar\beta}$ *désignant les composantes du tenseur métrique de l'espace de Minkowski* M_4 *en repère orthonormé.*

b) *Si* K *désigne le vecteur isotrope* $\mathrm{K}^\alpha = (0, 1, 0, 0)$ *l'étude algébrique de* R *avec les notations usuelles de la classification de Bel-Pétrov donne le développement limité suivant :*

(30) $$\mathrm{R} = \mathrm{N(K)}\bar r^{-1} + 0(\bar r^{-2}).$$

Si de plus les fonctions V, U, β, γ *admettent un développement limité à l'ordre n on a :*

(31) *pour* $n=2$, $$\mathrm{R} = \mathrm{N(K)}\bar r^{-1} + \mathrm{II(K)}\bar r^{-2} + 0(\bar r^{-3}),$$

(32) *pour* $n=3$ *et* $\overset{1}{\beta}=0$, $$\mathrm{R} = \mathrm{N(K)}\bar r^{-1} + \mathrm{III(K)}\bar r^{-2} + \mathrm{II(K)}\bar r^{-3} + 0(\bar r^{-4}),$$

(33) *pour* $n=4$ *et* $\overset{1}{\beta}=0$ *et* $\overset{2}{\beta}=-\frac{1}{4}\overset{1}{\gamma}{}^2$ *et* $\overset{2}{\mathrm{U}}=-\frac{\partial\overset{1}{\gamma}}{\partial\theta}-2\overset{1}{\gamma}\cot\theta$,

$$\mathrm{R}=\mathrm{N(K)}\bar{r}^{-1}+\mathrm{III(K)}\bar{r}^{-2}+\mathrm{II(K)}\bar{r}^{-3}+\mathrm{I'(K)}\bar{r}^{-4}+0(\bar{r}^{-5}).$$

c) *Deux variétés espace-temps* $(\mathscr{V}_4, g)$ *satisfaisant, la première à* $\overset{-1}{\mathrm{V}}=1$, *la seconde à* $\frac{\partial\overset{-1}{\mathrm{V}}}{\partial u}\neq 0$, *sont distinctes. De même deux variétés* $(\mathscr{V}_4, g)$ *satisfaisant, la première à* $\overset{-1}{\mathrm{V}}=1$ *et* $\frac{\partial\overset{1}{\beta}}{\partial u}=0$, *la seconde à* $\overset{-1}{\mathrm{V}}\neq 1$ *et* $\frac{\partial\overset{1}{\beta}}{\partial u}=0$ *et* $\frac{\partial\overset{-1}{\mathrm{V}}}{\partial u}=0$, *sont distinctes.*

Preuve. — *a*) Le système de coordonnées $x^{\bar\alpha}=(\bar t, \bar x, \bar y, \bar z)$ est défini par :

$$\begin{aligned} t &= u + r + \psi(u,\theta)\\ \bar x &= [r+\psi(u,\theta)]\sin\theta\cos\psi \\ \bar y &= [r+\psi(u,\theta)]\sin\theta\sin\phi \\ \bar z &= [r+\psi(u,\theta)]\cos\theta \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{1}{2}(\overset{-1}{\mathrm{V}}-1)$$

On a
$$\frac{\mathrm{D}(t,\bar x,\bar y,\bar z)}{\mathrm{D}(u,r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta.$$

Si l'on pose :

$$a=e^{2\beta}\left[\mathrm{V}r^{-1}-2\frac{\partial\psi}{\partial u}\right]-\mathrm{U}^2r^2e^{2\gamma},$$

et
$$b=\mathrm{U}r^2e^{2\gamma}-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}e^{2\beta},$$

les composantes de $g_{\bar\alpha\bar\beta}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
g_{\bar0\bar0} &= a\\
g_{\bar0\bar1} &= \sin\theta\cos\phi[e^{2\beta}-a]+b\cos\theta\cos\phi r^{-1}\\
g_{\bar0\bar2} &= \sin\theta\sin\phi[e^{2\beta}-a]+b\cos\theta\sin\phi r^{-1}\\
g_{\bar0\bar3} &= \cos\theta[1-a]-b\sin\theta r^{-1}\\
g_{\bar1\bar1} &= \sin^2\theta\cos^2\phi[a-2e^{2\beta}]-\cos^2\theta\cos^2\phi e^{2\gamma}-\sin^2\phi e^{-2\gamma}\\
&\qquad -b\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi r^{-1}\\
g_{\bar1\bar2} &= \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi[a-2e^{2\beta}]-\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi e^{2\gamma}\\
&\qquad +\sin\phi\cos\phi e^{-2\gamma}-2b\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi r^{-1}\\
g_{\bar1\bar3} &= \sin\theta\cos\theta\cos\phi[a-2e^{2\beta}]+\sin\theta\cos\theta\cos\phi e^{2\gamma}\\
&\qquad +b\cos\phi(\sin^2\theta-\cos^2\theta)r^{-1}\\
g_{\bar2\bar2} &= \sin^2\theta\sin^2\phi[a-2e^{2\beta}]-\cos^2\theta\sin^2\phi e^{2\gamma}-\cos^2\phi e^{-2\gamma}\\
&\qquad -2b\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi r^{-1}\\
g_{\bar2\bar3} &= \sin\theta\cos\theta\sin\phi[a-2e^{2\beta}]+\sin\theta\cos\theta\sin\phi e^{2\gamma}\\
&\qquad +b\sin\phi(\sin^2\theta-\cos^2\theta)r^{-1}\\
g_{\bar3\bar3} &= \cos^2\theta[a-2e^{2\beta}]-\sin^2\theta e^{2\gamma}+b\sin\theta\cos\theta r^{-1},
\end{aligned}$$

en tenant compte de $\lim_{r=\infty} a = 1$ et des développements limités (2)′, on obtient, $\lim_{r=\infty} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$. Le tenseur métrique a donc bien le développement limité annoncé. Ceci prouve que $(\mathscr{V}_4, g)$ est asymptotiquement plat dans le sens qu'il existe un homéomorphisme (défini par les $x^{\bar{\alpha}}$) de Ω sur un ouvert $\bar{r} > \bar{r}_0$ de M_4.

b) On désigne par $x^{\alpha'}$ le système de coordonnées définies sur Ω par $x^{\alpha'} = (u, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Si on écrit le développement limité de R à l'ordre n sous la forme :

$$R_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'} = \overset{1}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\,\bar{r}^{-1} + \dots + \overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\,\bar{r}^{-n} + 0(\bar{r}^{-(n+1)}),$$

et celui de K sous la forme : $K^{\alpha'} = \overset{0}{K}{}^{\alpha'} + 0(\bar{r}^{-1})$, on rappelle ([*3*], p. 228) que : $\overset{n}{R}$ est un cas N relativement à K [notation $\overset{n}{R} = N(K)$] si :

$$\begin{cases} \overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\,\overset{0}{K}{}^{\delta'} = \overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\,\overset{0}{K}_{\beta'} = \overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\,\overset{0}{K}{}^{\alpha'} = 0 \\ \overset{n}{R}{}^{*}{}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\overset{0}{K}{}^{\delta'} = \overset{n}{R}{}^{*}{}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\overset{0}{K}_{\beta'} = \overset{n}{R}{}^{*}{}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\overset{0}{K}{}^{\alpha'} = 0, \end{cases}$$

$\overset{n}{R}$ est un cas III relativement à K [notation $\overset{n}{R} = III(K)$] si :

$$\begin{cases} \overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\,\overset{0}{K}_{\beta'}\overset{0}{K}{}^{\delta'} = \overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\,\overset{0}{K}{}^{\alpha'}\overset{0}{K}{}^{\delta'} = 0 \\ \overset{n}{R}{}^{*}{}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\overset{0}{K}_{\beta'}\overset{0}{K}{}^{\delta'} = \overset{n}{R}{}^{*}{}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\overset{0}{K}{}^{\alpha'}\overset{0}{K}{}^{\delta'} = 0, \end{cases}$$

$\overset{n}{R}$ est un cas II relativement à K [notation $\overset{n}{R} = II(K)$] si :

$$\overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\overset{0}{K}_{\beta'}\overset{0}{K}{}^{\delta'} = \lambda\overset{0}{K}_{\alpha'}\overset{0}{K}_{\gamma'}, \qquad \overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\overset{0}{K}{}^{\alpha'}\overset{0}{K}{}^{\delta'} = \lambda\overset{0}{K}{}^{\beta'}\overset{0}{K}_{\gamma'},$$

$\overset{n}{R}$ est un cas I′ relativement à K [notation $\overset{n}{R} = I'(K)$] si :

$$[(\overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\overset{0}{K}_{\rho'} - \overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\rho'}\overset{0}{K}_{\delta'})\overset{0}{K}{}^{\sigma'} - (\overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\overset{0}{K}_{\rho'} - \overset{n}{R}_{\alpha'}{}^{\sigma'}{}_{\gamma'\rho'}\overset{0}{K}_{\delta'})\overset{0}{K}{}^{\beta'}]\overset{0}{K}{}^{\alpha'}\overset{0}{K}{}^{\gamma'} = 0 .$$

Sous les hypothèses faites, les théorèmes de Lehman ([*3*], « peeling theorem » généralisé, p. 262) sont applicables :

1) le vecteur K étant isotrope on a, à l'ordre 1 et à l'ordre 2, respectivement (30) et (31) ;

2) si de plus les fonctions V, U, β, γ admettent un développement limité à l'ordre 3 et si $R_{\rho'\sigma'}K^{\rho'}K^{\sigma'} = 0(\bar{r}^{-4})$ le tenseur de courbure R admet le développement limité qui figure dans (32) ;

3) si de plus les fonctions V, U, β, γ admettent un développement limité à l'ordre 4 et si $K^{\mu'}(R_{\mu'\rho'}K'_{\sigma'} - R_{\mu'\sigma'}K_{\rho'}) = 0(\bar{r}^{-5})$ alors R admet le développement limité qui figure dans (33).

Les composantes de K s'écrivent dans les coordonnées x^{α} et$x^{\alpha'}$:

$$(34)\quad \begin{cases} K^{\alpha} = (0, 1, 0, 0), & K_{\alpha} = (e^{2\beta}, 0, 0, 0) \\ K^{\alpha'} = (0, \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), & K_{\alpha'} = (e^{2\beta}, 0, 0, 0). \end{cases}$$

On démontre que :

$$[\mathrm{R}_{\rho'\sigma'}\mathrm{K}^{\rho'}\mathrm{K}^{\sigma'} = 0(\bar{r}^{-4})] \Leftrightarrow \overset{1}{\beta} = 0\,,$$

en effet :

$$\mathrm{R}_{\rho'\sigma'}\mathrm{K}^{\rho'}\mathrm{K}^{\sigma'} = \mathrm{R}_{\alpha\beta}\mathrm{K}^{\alpha}\mathrm{K}^{\beta} = \mathrm{R}_{11} = -4\left[\frac{\partial\beta}{\partial r} - r\left(\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)^2\right]r^{-1} \tag{35}$$

$$= \frac{4\overset{1}{\beta}}{\bar{r}^3} + 0(\bar{r}^{-4})$$

On démontre que :

$$[\mathrm{K}^{\mu'}(\mathrm{R}_{\mu'\rho'}\mathrm{K}_{\sigma'} - \mathrm{R}_{\mu'\rho'}\mathrm{K}_{\rho'}) = 0(\bar{r}^{-5})]$$

$$\Leftrightarrow \left[\overset{1}{\beta} = 0 \text{ et } \overset{2}{\beta} + \frac{1}{4}\overset{1}{\gamma}{}^2 = 0 \text{ et } \overset{2}{\mathrm{U}} + \frac{\partial\overset{1}{\gamma}}{\partial\theta} + 2\overset{1}{\gamma}\cot\theta = 0\right]$$

Pour cela, on désigne par $\mathrm{T}_{\rho'\sigma'}$ le tenseur antisymétrique

$$\mathrm{K}^{\mu'}(\mathrm{R}_{\mu'\rho'}\mathrm{K}_{\sigma'} - \mathrm{R}_{\mu'\sigma'}\mathrm{K}_{\rho'})$$

Dans le système de coordonnées $\underset{\cdot}{x}^{\alpha}$ on a en tenant compte de (34)

$$\mathrm{T}_{\alpha\beta} = \mathrm{K}^{\lambda}[\mathrm{R}_{\lambda\alpha}\mathrm{K}_{\beta} - \mathrm{R}_{\lambda\beta}\mathrm{K}_{\alpha}] = \mathrm{R}_{1\alpha}\mathrm{K}_{\beta} - \mathrm{R}_{1\beta}\mathrm{K}_{\alpha}\,.$$

De plus, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{T}_{\alpha\beta} = 0$.

Les composantes non nulles ne peuvent être que T_{10}, T_{20}, T_{30}. On a

$$\mathrm{T}_{10} = \mathrm{R}_{11}e^{2\beta}, \quad \mathrm{T}_{20} = \mathrm{R}_{12}e^{2\beta}, \quad \mathrm{T}_{30} = \mathrm{R}_{13}e^{2\beta} = 0 \quad \text{car} \quad \mathrm{R}_{13} = 0\,. \tag{36}$$

D'où :

$$\mathrm{T}_{\rho'\sigma'} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^0}{\partial x^{\sigma'}} - \frac{\partial x^0}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{\sigma'}}\right)\mathrm{T}_{10} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^0}{\partial x^{\sigma'}} - \frac{\partial x^0}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{\sigma'}}\right)\mathrm{T}_{20}\,.$$

On a pour $i = 0, 1$ $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{\rho'}} = 0(1)$ et $\dfrac{\partial x^2}{\partial x^{\rho'}} = 0(r^{-1})$ d'où en tenant compte de (36)

$$[\mathrm{T}_{\rho'\sigma'} = 0(\bar{r}^{-5})] \Leftrightarrow [\mathrm{R}_{11} = 0(r^{-5}) \text{ et } \mathrm{R}_{12} = 0(r^{-4})]\,.$$

Or d'après (35)

$$[\mathrm{R}_{11} = 0(r^{-5})] \Leftrightarrow \left[\overset{1}{\beta} = 0 \text{ et } \overset{2}{\beta} = -\frac{1}{4}\overset{1}{\gamma}{}^2\right].$$

De plus on a :

$$\mathrm{R}_{12} = -2r^{-2}\left\{[r^4e^{2(\gamma-\beta)}\mathrm{U}_1]_1 - 2r^2\left[\frac{\partial^2\beta}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial r\partial\theta} + 2\frac{\partial\gamma}{\partial r}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} - 2\frac{\partial\beta}{\partial\theta}r^{-1} - 2\frac{\partial\gamma}{\partial r}\cot\theta\right]\right\}.$$

Le développement limité de R_{12}, compte tenu de $\overset{1}{\beta} = 0$, est :

$$R_{12} = \left(\overset{2}{U} + \frac{\partial \overset{1}{\gamma}}{\partial \theta} + 2\overset{1}{\gamma} \cot \theta\right) r^{-2} + 0(r^{-4})$$

Compte tenu de ce qui précède, on a :

$[R_{11} = 0(r^{-5})$ et $R_{12} = 0(r^{-4})]$

$$\Leftrightarrow \left[\overset{1}{\beta} = 0 \text{ et } \overset{2}{\beta} = -\frac{1}{4}\overset{1}{\gamma}{}^2 \text{ et } \overset{2}{U} = -\frac{\partial \overset{1}{\gamma}}{\partial \theta} - 2\overset{1}{\gamma} \cot \theta\right]$$

c) Toujours dans l'hypothèse où $\overset{1}{U} = 0$, pour démontrer que les espaces-temps $(\mathscr{V}_4, g)$ dont le comportement asymptotique du tenseur métrique est affaiblie, c'est-à-dire satisfait à :

(37) $$\overset{-1}{V} - 1 \neq 0,$$

sont distincts des espaces-temps étudiés jusqu'à présent donc tels que :

(38) $$\overset{-1}{V} - 1 = 0,$$

il suffit de prouver qu'il n'existe pas de changement φ de coordonnées de Bondi globalement défini sur Ω qui annule la transformée de $\overset{-1}{V} - 1$. On peut aussi faire la démonstration suivante. Si les espaces-temps ne sont pas distincts, soit h la transformation de coordonnées définies sur Ω par

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^{\bar{\beta}}) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u} \neq 0,$$

soit φ, si elle existe, la transformation de coordonnées de Bondi en coordonnées de Bondi qui annule la transformée de $\overset{-1}{V} - 1$ et est définie sur Ω par :

$$x^{\underline{\rho}} = x^{\underline{\rho}}(x^{\alpha}),$$

soit l la transformation de coordonnées définie sur Ω par :

$$x^{\bar{\sigma}} = x^{\bar{\sigma}}(x^{\underline{\rho}}) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$$

La transformation de coordonnées $l \circ \varphi \circ h$ définie sur Ω appartient au groupe de transformations qui conservent $\lim\limits_{\bar{r}=\infty} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$. Ces transformations conservent également l'ordre du développement limité du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire $\mathscr{R}$ par exemple. Pour prouver *c*) il suffit donc de vérifier que suivant l'hypothèse (37) ou (38) faite :

1) dans le premier cas, l'ordre de $R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ relativement à $\bar{r}$ diffère. En effet :

$$R_{00} = -\frac{\partial \overset{-1}{V}}{\partial u} r^{-1} + 0(r^{-2}), \text{ d'où l'on tire } R_{\bar{0}\bar{0}} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\bar{0}}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\bar{0}}} R_{\rho\sigma} = 0(r^{-1})\,;$$

si $\overset{-1}{\mathrm{V}} - 1 = 0$ on a $\mathrm{R}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0(\bar{r}^{-2})$, si $\dfrac{\partial \overset{-1}{\mathrm{V}}}{\partial u} \neq 0$ on a $\mathrm{R}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0(\bar{r}^{-1})$,

2) dans le second cas l'ordre de la courbure scalaire $\mathscr{R}$ courbure scalaire relativement à $\bar{r}$ diffère.

Dans le système de coordonnées x^{α} on a :

$$\mathscr{R} = 2g^{01}\mathrm{R}_{01} + g^{11}\mathrm{R}_{11} + 2g^{12}\mathrm{R}_{12} + g^{22}\mathrm{R}_{22} + g^{33}\mathrm{R}_{33},$$

où

$$g^{01} = e^{-2\beta}, \quad g^{11} = \mathrm{V}e^{-2\beta}r^{-1}, \quad g^{12} = \mathrm{U}e^{-2\beta},$$
$$g^{22} = -\, e^{-2\beta}r^{-2}, \quad g^{33} = -\, e^{2\gamma}r^{-2}\sin^2\theta$$

Le développement limité de R_{11} est donné par (35). Ceux de R_{01}, R_{22} et R_{33} sont en tenant compte de $\dfrac{\partial \overset{1}{\beta}}{\partial u} = 0$,

$$\mathrm{R}_{01} = \left[-\, 4\frac{\partial \overset{2}{\beta}}{\partial \theta} - 2\frac{\partial \overset{1}{\gamma}}{\partial u}\overset{1}{\gamma} \right] r^{-3} + 0(r^{-4}),$$

$$\mathrm{R}_{22} = [\overset{-1}{\mathrm{V}} - 1] + 0(r^{-1}), \qquad \mathrm{R}_{33} = (\overset{-1}{\mathrm{V}} - 1)\sin^2\theta + 0(r^{-1}),$$

d'où le développement limité du scalaire $\mathscr{R}$: $\mathscr{R} = 2(1 - \overset{-1}{\mathrm{V}})r^{-2} + 0(r^{-3})$.
Donc si

$$\overset{-1}{\mathrm{V}} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overset{1}{\beta}}{\partial u} = 0 \qquad\qquad \text{on a} \quad \mathscr{R} = 0(\bar{r}^{-3}),$$

si

$$\overset{-1}{\mathrm{V}} - 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overset{1}{\beta}}{\partial u} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overset{-1}{\mathrm{V}}}{\partial u} = 0 \quad \text{on a} \quad \mathscr{R} = 0(\bar{r}^{-2}).$$

Je tiens à remercier M. Papapétrou et M. Madore pour de fructueuses discussions.

RÉFÉRENCES

[1] H. Bondi, M. Van Der Burg et A. Metzner, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **269**, 1962, p. 21.
[2] R. Sachs, *Physical Review*, Vol. **128**, n° 6, 1962, p. 2851.
[3] E. Lehman, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. IX, n° 3, 1968, p. 213.
[4] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations.* Dunod, Paris, p. 12.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1975)