

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Quelques univers magnéto-hydrodynamiques du type de Gödel

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, n° 1 (1975), p. 29-42

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_1_29_0

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Quelques univers magnéto-hydrodynamiques du type de Gödel

par

M. BRAY
C. N. R. S.

SUMMARY. — Given a Gödel type metric tensor $g_{\alpha\beta}$ some solutions of the Einstein gravitational field equations are obtained for a total energy tensor corresponding to the magneto-hydrodynamic case.

1. LE MODÈLE DE GÖDEL

L'introduction de trois coordonnées lagrangiennes a^v , $v = 1, 2, 3$ permet de représenter la famille des lignes de courant d'un fluide relativiste par les formules $x^\alpha = x^\alpha(s, a^v)$; $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Le champ vectoriel unitaire tangent a pour composantes $U^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s}$; $U^\alpha U_\alpha = 1$.

Posant $\delta(\) = \frac{\partial}{\partial a^v}(\) \delta a^v$ nous avons ⁽¹⁾

$$(1) \quad \frac{\nabla}{ds}(\delta x^\alpha) = U^\alpha{}_{;\beta} \delta x^\beta$$

puis en désignant par $\bar{\delta}(\)$ la projection des entités géométriques sur le 3-plan orthogonal à \bar{U} (physiquement, l'espace associé) — opération effectuée par le projecteur $\pi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta$

$$(2) \quad \bar{\delta} x^\alpha = \pi^\alpha{}_\beta \delta x^\beta; \quad \bar{\delta} U^\alpha = \pi^\alpha{}_\beta \frac{\nabla}{ds}(\bar{\delta} x^\beta) = U^\alpha{}_{;\beta} \bar{\delta} x^\beta$$

⁽¹⁾ J. EHLERS, Relativistic Hydrodynamics and its Relation to Interior Solutions of the Gravitational Field Equations, *Recent Developments in General Relativity*, p. 201.
J.-L. SYNGE, *Relativity, The general Theory*, p. 170.

La norme $\bar{\delta}s^2$ du vecteur infinitésimal $\bar{\delta}x^\alpha$ varie selon la loi

$$(3) \quad \frac{\nabla}{ds} \log \bar{\delta}s = U_{(\alpha;\beta)} \frac{\bar{\delta}x^\alpha}{\bar{\delta}s} \frac{\bar{\delta}x^\beta}{\bar{\delta}s}$$

Posons $A_{(\alpha\beta)} = \pi_\alpha{}^\rho \pi_\beta{}^\sigma U_{(\rho;\sigma)}$ et $\omega_{\alpha\beta} = \pi_\alpha{}^\rho \pi_\beta{}^\sigma U_{[\rho;\sigma]}$ il vient

$$A_{(\alpha\beta)} = U_{(\alpha;\beta)} - U_{[\alpha} \dot{U}_{\beta]} ; \quad \omega_{\alpha\beta} = U_{[\alpha;\beta]} + U_{[\alpha} \dot{U}_{\beta]}$$

avec

$$\dot{U}_\alpha = U^\nu \nabla_\nu (U_\alpha).$$

Nous pourrions donc écrire

$$(4) \quad \bar{\delta}U^\alpha = \left(\sigma^\alpha{}_{\cdot\beta} + \omega^\alpha{}_{\cdot\beta} + \frac{\theta}{3} \delta^\alpha{}_\beta \right) \bar{\delta}x^\beta$$

Les définitions $\sigma_{\alpha\beta} = A_{(\alpha\beta)} - \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\beta}$; $\theta = U^\alpha{}_{;\alpha}$ nous donnent l'interprétation des « paramètres » $\sigma_{\alpha\beta}$ (shear), θ (expansion) $\omega_{\alpha\beta}$ (rotation). Ces trois « paramètres » tensoriels fournissent donc une classification des congruences de lignes de courant.

La méthode est avantageusement étendue au domaine cosmologique ⁽²⁾ où la simplification apportée par l'hypothèse d'écoulement géodésique ($\dot{U}_\alpha = 0$) réduit les caractéristiques aux expressions

$$(5) \quad \sigma_{\alpha\beta} = U_{(\alpha;\beta)} - \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\beta} ; \quad \omega_{\alpha\beta} = U_{[\alpha;\beta]} ; \quad \theta = U^\alpha{}_{;\alpha}$$

Le modèle de Gödel est défini par les relations $\sigma_{\alpha\beta} = 0$; $\theta = 0$; $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$. Dans une métrique où $g_{00} = 1$ — ce qui est le cas en Cosmologie — les relations $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ s'écrivent

$$(6) \quad \partial_0(g_{0r}) = 0 ; \quad \partial_0(g_{rs}) = \frac{2}{3}(g_{rs} - g_{0r}g_{0s})\partial_0 \log \sqrt{-g}$$

On en tire, puisque $U_r = g_{r0}$ en coordonnées comobiles ($U^0 = 1$; $U^i = 0$)

$$(7) \quad \pi_{rs} = (-g)^{1/3} \bar{\gamma}_{rs}(x^k) ; \quad k, r, s = 1, 2, 3 \\ |\pi_{rs}| = g ; \quad |\bar{\gamma}_{rs}| = -1$$

On sait que l'examen du problème cosmologique à l'aide de la géométrie des lignes de courant conduit à des résultats plus généraux que la méthode fondée sur l'emploi du principe cosmologique puisque l'on obtient ainsi des modèles non homogènes, en particulier celui de Gödel.

⁽²⁾ James L. ANDERSON, *Principles of Relativity Physics*, Cosmology, ch. 14, p. 444.

2. LE CAS MAGNÉTO-HYDRODYNAMIQUE

Rappelons brièvement les formules fondamentales de la magnéto-hydrodynamique ⁽³⁾. Le tenseur d'énergie d'un fluide parfait thermodynamique relativiste s'écrit

$$(8) \quad T_{\alpha\beta} = c^2 \bar{r} f U_\alpha U_\beta - p g_{\alpha\beta}$$

\bar{r} : densité propre de matière ; $f = \left(1 + \frac{i}{c^2}\right) > 0$; $i = \varepsilon + \frac{p}{\bar{r}}$ enthalpie spécifique ; ε : énergie spécifique interne ; p : pression ; U^α : vitesse d'univers $U^\alpha U_\alpha = 1$.

Si le fluide est soumis à un champ électromagnétique avec induction (décrit par une 2-forme H champ électrique — induction magnétique et une 2-forme G champ magnétique — induction électrique) les vecteurs \vec{e} , \vec{d} (champ et induction électriques) \vec{h} , \vec{b} (champ et induction magnétiques) associés à \vec{U} sont donnés par

$$(9) \quad e_\beta = U^\alpha H_{\alpha\beta} ; \quad d_\beta = U^\alpha G_{\alpha\beta} ; \quad b_\beta = U^\alpha (*H)_{\alpha\beta} ; \quad h_\beta = U^\alpha (*G)_{\alpha\beta}$$

* étant l'opérateur adjoint par rapport à $g_{\alpha\beta}$

Si $\vec{d} = \lambda \vec{e} ; \quad \vec{b} = \mu \vec{h}$

il vient

$$G = \frac{1}{\mu} H + \left(\frac{\lambda\mu - 1}{\mu}\right) \vec{U} \wedge \vec{e}$$

En magnéto-hydrodynamique nous avons $\vec{e} = 0$ par rapport à \vec{U} . Le champ électromagnétique admet alors un tenseur d'énergie

$$(10) \quad \tau_{\alpha\beta} = \mu \left\langle \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} G_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma} - G_{\alpha\rho} G_\beta{}^\rho \right\rangle$$

soit, avec

$$G = - * (\vec{U} \wedge \vec{h}) \quad \text{et} \quad |h|^2 = - h^\nu h_\nu$$

$$(11) \quad \tau_{\alpha\beta} = \mu \left\langle |h|^2 \left(U_\alpha U_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) - h_\alpha h_\beta \right\rangle$$

Le tenseur d'énergie total du fluide a donc pour expression

$$(12) \quad T_{\alpha\beta} = (c^2 \bar{r} f + \mu |h|^2) U_\alpha U_\beta - \left(p + \frac{\mu}{2} |h|^2 \right) g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta$$

⁽³⁾ A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc en magnéto-hydrodynamique relativiste, *Ann. Henri Poincaré*, Vol. V, n° 1, 1966, p. 37-75. Série A : Physique Théorique.

3. SOLUTION DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN

Dans un système de coordonnées cylindriques t, r, φ, z considérons la métrique hyperbolique normale (signature $+- - -$)

$$\boxed{g_{00}=1; \quad g_{03}=\varepsilon e^\zeta; \quad g_{11}=g_{22}=-\Delta e^{2\omega}; \quad g_{33}=-e^{2\nu}; \quad \text{autres } g_{\alpha\beta}=0 \\ \Delta = e^{2\zeta} + e^{2\nu}; \quad \varepsilon = \pm 1; \quad \zeta, \nu, \omega(r)}$$

Cet élément possède manifestement la symétrie axiale autour de Oz . D'autre part, en considérant les coordonnées comme comobiles, le champ vectoriel $\bar{U} \{ U^0 = 1; U^k = 0 \}$ satisfait les conditions

$$\theta = U^\alpha_{;\alpha} = 0; \quad \sigma_{\alpha\beta} = U_{(\alpha;\beta)} - \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\beta} = 0; \quad \dot{U}_\alpha = 0$$

Il définit une congruence shear-free et expansion-free, donc un Univers de Gödel dans tous les cas où $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$.

Nous nous proposons de montrer que cette métrique peut être engendrée par un tenseur d'énergie de type magnéto-hydrodynamique.

Les composantes du tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R^\nu_{\alpha\beta\nu} = -\partial_\beta(\Gamma_{\alpha\nu}^\nu) + \partial_\nu(\Gamma_{\alpha\beta}^\nu) - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\nu + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\nu$$

sont :

$$R_{00} = \frac{e^{2(\zeta-\omega)}}{2\Delta^2} (\partial_1 \zeta)^2;$$

$$R_{11} = -\partial_{11} \log \Delta - \partial_{11} \omega + \frac{1}{2} (\partial_1 \omega) (\partial_1 \log \Delta) + \frac{e^{2\zeta}}{2\Delta} (\partial_1 \zeta)^2$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2} \partial_{11} \log \Delta - \partial_{11} \omega - \frac{1}{2} (\partial_1 \log \Delta) \left(\frac{1}{2} \partial_1 \log \Delta + \partial_1 \omega \right);$$

$$R_{03} = \frac{\varepsilon e^{\zeta-2\omega}}{2\Delta} \left\langle \partial_{11} \zeta + \partial_1 \zeta \left[\partial_1 \zeta - \frac{1}{2} \partial_1 \log \Delta + \frac{e^{2\zeta}}{\Delta} \partial_1 \zeta \right] \right\rangle$$

$$R_{33} = -\frac{e^{-2\omega}}{2} \left\langle \partial_{11} \log \Delta + \frac{1}{2} (\partial_1 \log \Delta)^2 \right\rangle$$

$$+ \frac{e^{2(\zeta-\omega)}}{\Delta} \langle \partial_{11} \zeta + 2(\partial_1 \zeta)^2 \rangle - \frac{e^{2(\zeta-\omega)}}{2\Delta} (\partial_1 \zeta) \left\langle \partial_1 \log \Delta + \frac{e^{2\nu}}{\Delta} \partial_1 \zeta \right\rangle$$

Dans les équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} = \chi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) + \Lambda g_{\alpha\beta}; \quad \chi > 0$$

nous prendrons

$$T_{\alpha\beta} = (c^2 \bar{r}f + \mu |h|^2) U_\alpha U_\beta - \left(p + \frac{\mu}{2} |h|^2 \right) g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta$$

$$|h|^2 = -h^\nu h_\nu; \quad h^\nu U_\nu = 0;$$

il vient :

$$R_{\alpha\beta} = \chi \{ (\overset{*}{\rho} + \overset{*}{p}) U_\alpha U_\beta - \overset{*}{p} g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta \} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

avec

$$2\overset{*}{\rho} = c^2 \bar{r}f + \mu |h|^2 + 2p ; \quad 2\overset{*}{p} = c^2 \bar{r}f + \mu |h|^2 - 2p$$

Choissant un vecteur \bar{h} tel que $h_0 = h_1 = h_2 = 0, h_3 \neq 0$ nous avons le système

$$(13) \quad \begin{cases} R_{00} = \chi \overset{*}{\rho} + \Lambda ; & R_{11} = \Delta e^{2\omega} (\chi \overset{*}{p} - \Lambda) ; & R_{22} = \Delta e^{2\omega} (\chi \overset{*}{p} - \Lambda) \\ R_{33} = \chi \overset{*}{\rho} e^{2\zeta} + \chi \overset{*}{p} \Delta - \chi \mu h_3^2 - \Lambda e^{2\nu} ; & R_{03} = \varepsilon e^\zeta (\chi \overset{*}{p} + \Lambda) \end{cases}$$

Les autres équations sont identiquement satisfaites.

S'y ajoutent les relations

$$(14) \quad \begin{cases} (a) \quad \nabla_\alpha (\bar{r} U^\alpha) = 0 & \text{postulat de conservation de la matière,} \\ (b) \quad \nabla_\alpha (h^\alpha U^\beta - h^\beta U^\alpha) = 0 & \text{équations de Maxwell,} \\ (c) \quad \nabla_\beta (T^{\alpha\beta}) = 0 & \text{équations de conservation conséquences} \\ & \text{des équations d'Einstein.} \end{cases}$$

(14) (a) et (14) (b) nous donnent $\partial_0(\bar{r}) = 0, \partial_0(h^3) = 0 ; \partial_3(h^3) = 0$.

Le système (13) peut être transcrit sous la forme

$$(15) \quad \begin{cases} \text{I) } R_{11} = R_{22} ; & \text{II) } R_{03} = \varepsilon e^\zeta R_{00} \\ \chi \mu |h|^2 = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle -\partial_{11}\omega - \frac{1}{2} \partial_1 \omega \cdot \partial_1 \log \Delta - \frac{e^{2\zeta}}{2\Delta} (\partial_1 \zeta)^2 \right\rangle \\ \chi c^2 \bar{r}f = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle -(\partial_1 \log \Delta) \left(\frac{1}{2} \partial_1 \log \Delta + \partial_1 \omega \right) + \frac{e^{2\zeta}}{2\Delta} (\partial_1 \zeta)^2 \right\rangle \\ 2\chi p = -2\Lambda + \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle \partial_{11}\omega + (\partial_1 \log \Delta) \left(\frac{1}{2} \partial_1 \log \Delta + \frac{3}{2} \partial_1 \omega \right) \right. \\ \left. + \frac{e^{2\zeta}}{\Delta} (\partial_1 \zeta)^2 \right\rangle \end{cases}$$

On doit avoir $|h|^2 > 0, \bar{r}f > 0 ; p \geq 0$.

En posant $\mathcal{R} = c^2 \bar{r}f + \mu |h|^2, \mathcal{P} = p + \frac{\mu}{2} |h|^2$ le développement des équations $\nabla_\beta (T^{\alpha\beta}) = 0$ nous donne d'une part

$$(16) \quad \nabla_\alpha (\mathcal{R} U^\alpha) - U^\alpha \nabla_\alpha (\mathcal{P}) - \mu h^\alpha U_\beta \nabla_\alpha (h^\beta) = 0$$

et de l'autre

$$(17) \quad \mathcal{R} U^\alpha \nabla_\alpha (U^\beta) - \pi^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\mathcal{P}) - \mu h^\beta \nabla_\alpha (h^\alpha) - \mu h^\alpha \nabla_\alpha (h^\beta) = 0, \quad \pi^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta$$

D'après $\theta = 0, \sigma_{\alpha\beta} = 0$ (16) se réduit à $\partial_0(\mathcal{R} - \mathcal{P}) = 0$ relation satisfaite puisque \mathcal{R} et \mathcal{P} ne dépendent que de r .

Les relations (17) d'indices $\beta = 0, 2, 3$ sont satisfaites en vertu de

$$\partial_K(\mathcal{P}) = \partial_K(h^3) = \partial_K(h^0) = 0; \quad K = 0, 3.$$

La relation d'indice $\beta = 1$ s'écrit $2\partial_1(\mathcal{P}) + \mu|h|^2\partial_1 \log \Delta = 0$.

Si l'on porte dans cette équation les valeurs de \mathcal{P} et $\mu|h|^2$ déduites de (15) il reste, compte tenu de (15)_I, (15)_{II} une identité.

Une des fonctions ζ, v, ω peut donc être arbitrairement choisie; de même l'une des fonctions \bar{r}, f demeure arbitraire.

Supposons $\partial_1\zeta \neq 0$, (15)_{II} nous donne

$$e^{\zeta}\partial_1\zeta = A\sqrt{\Delta} \quad \text{d'où} \quad e^{2v} = e^{2\zeta}A^{-2} \langle (\partial_1\zeta)^2 - A^2 \rangle; \quad A : c^{te}$$

On doit donc avoir $(\partial_1\zeta)^2 > A^2$.

Écartant le choix $\partial_1\zeta = n$ ($n^2 > A^2$) qui conduit à une impossibilité, nous poserons $\zeta = -\frac{k}{2}r^2$, $k : c^{te}$.

D'après (15)_{II}

$$\partial_1 \log \Delta = \frac{2}{r} - 2kr \rightarrow \Delta = Cr^2 e^{-kr^2} \quad C : c^{te}$$

Puisque $e^{2\zeta}(\partial_1\zeta)^2 = A^2\Delta$ il faut nécessairement $C = k^2A^{-2}$, (15)_I donne alors

$$\omega = \frac{kr^2}{4} + \log \frac{(1 - kr^2)^N}{r}; \quad N = \frac{A^2 + 4k}{8k}$$

$e^{2v} > 0$ impose la restriction $r^2 > A^2k^{-2}$.

D'autre part $\bar{r}f > 0$ exige $r^2 < (A^2 + 3k)k^{-2}$.

k doit donc être > 0 et l'on a $A^2 < k^2r^2 < A^2 + 3k$.

L'étude de $|h|^2$ conduit à la condition (en supposant $1 - kr^2 \neq 0$)

$$k^3r^4 - kr^2(2k + M) + 3M + k > 0; \quad M = 4kN$$

Le choix $A^2 = 12k$ entraîne $M = 8k$; il vient dans ce cas

$$k(kr^2 - 5)^2 > 0 \quad \text{ou} \quad (kr^2 - 5)^2 > 0$$

Puisque $\frac{12}{k} < r^2 < \frac{15}{k}$ le zéro $r^2 = \frac{1}{k}$ du dénominateur $(1 - kr^2)$ dans les expressions de $|h|^2, p$ et le zéro $r^2 = \frac{5}{k}$ intervenant dans $|h|^2$ se trouvent hors du domaine de validité $\mathcal{D}(k) \{ 12k^{-1} < r^2 < 15k^{-1} \}$. Il reste donc à satisfaire la condition $p \geq 0$ ce qui donne

$$(1 - kr^2)^2(kr^2 - 6) + 8kr^2(kr^2 - 3) - \frac{\Lambda}{3}(1 - kr^2)^6 e^{-\frac{kr^2}{2}} \geq 0$$

Pour assurer cette inégalité il suffit de prendre Λ inférieur ou au plus égal au plus petit des deux nombres obtenus en annulant l'expression précédente pour les valeurs $kr^2 = 12$; $kr^2 = 15$.

Nous avons donc obtenu la solution

$$(18) \quad \begin{aligned} g_{00} = 1; \quad g_{03} = \varepsilon e^{-\frac{k}{2}r^2}; \quad g_{11} = g_{22} = -\frac{k}{12} e^{-\frac{k}{2}r^2} (1 - kr^2)^4; \\ g_{33} = -\frac{e^{-kr^2}}{12} (kr^2 - 12) \end{aligned}$$

dans le domaine $\mathcal{D}(k) < 12 < kr^2 < 15; k > 0$.

L'une des fonctions \bar{r}, f étant arbitraire on peut prendre par exemple une fonction \bar{r} nulle en dehors de $\mathcal{D}(k)$. Signalons aussi la possibilité de choisir k et Λ de manière à annuler p sur la frontière de $\mathcal{D}(k)$.

Partant des mêmes hypothèses initiales nous chercherons une solution en r, z . Le tenseur de Ricci a , dans ce cas, 7 composantes : $R_{\alpha\alpha}, R_{01}, R_{03}, R_{13}$ et le système tiré des équations d'Einstein s'écrit

$$\begin{aligned} a) \quad & \partial_{11}\zeta + (\partial_1\zeta)\left(\partial_1\zeta - \frac{1}{2}\partial_1 \log \Delta\right) = 0; \\ b) \quad & \partial_{13}\zeta + (\partial_1\zeta)\left(\partial_3\zeta - \frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta\right) = 0; \\ c) \quad & -\partial_{11} \log \Delta + (\partial_1 \log \Delta)\left(\frac{1}{2}\partial_1 \log \Delta + 2\partial_1\omega\right) + \frac{e^{2\zeta}}{\Delta}(\partial_1\zeta)^2 = 0; \\ d) \quad & -\frac{1}{2}\partial_{13} \log \Delta - \partial_{13}\omega + \frac{1}{2}(\partial_1 \log \Delta)\left(\frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta + \partial_3\omega\right) = 0 \\ \chi\mu h_3^2 = & \frac{1}{2}\partial_{33} \log \Delta + \partial_{33}\omega - \frac{1}{2}(\partial_3 \log \Delta)\left(\frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta + \partial_3\omega\right) \\ & - e^{-2\omega}\left\langle \partial_{11}\omega + \frac{1}{2}\partial_1\omega \cdot \partial_1 \log \Delta \right\rangle - \frac{e^{2\zeta-2\omega}}{2\Delta}(\partial_1\zeta)^2; \\ (19) \quad \chi c^2 \bar{r} f = & \frac{e^{-2\omega}}{2\Delta}\left\langle -(\partial_1 \log \Delta)(\partial_1 \log \Delta + 2\partial_1\omega) + \frac{e^{2\zeta}}{\Delta}(\partial_1\zeta)^2 \right\rangle \\ & - \frac{1}{\Delta}\left\langle \partial_{33} \log \Delta + 2\partial_{33}\omega + 2(\partial_3\omega)\left(\partial_3\omega + \frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta\right) \right\rangle; \\ 2\chi p = & -2\Lambda + \frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\left\langle \partial_{11}\omega + \frac{1}{2}(\partial_1 \log \Delta)(\partial_1 \log \Delta + 3\partial_1\omega) + \frac{e^{2\zeta}}{\Delta}(\partial_1\zeta)^2 \right\rangle \\ & + \frac{1}{\Delta}\left\langle \frac{1}{2}\partial_{33} \log \Delta + \partial_{33}\omega + \left(\frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta + \partial_3\omega\right)\left(\frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta + 2\partial_3\omega\right) \right\rangle \end{aligned}$$

Les équations (14) a, (14) b fournissent respectivement

$$(20) \quad \partial_0(\bar{r}) = 0; \quad \partial_3(\sqrt{-gh^3}) = 0$$

Compte tenu des équations de Maxwell, les relations $\nabla_a(T^{a\beta}) = 0$ se réduisent à

$$(21) \quad 2\partial_1(\mathcal{P}) + \mu |h|^2 \partial_1 \log \Delta = 0; \quad 2\partial_3(\mathcal{P}) - \mu \partial_3(|h|^2) = 0$$

Supposant toujours $\partial_1 \zeta \neq 0$, on tire de (19) a et (19) b

$$e^{\zeta} \partial_1 \zeta = A \sqrt{\Delta}, \quad A : c^{te}; \quad e^{2\nu} = A^{-2} e^{2\zeta} \langle (\partial_1 \zeta)^2 - A^2 \rangle$$

d'où la nécessité d'avoir $(\partial_1 \zeta)^2 > A^2$.

Nous poserons pour simplifier

$$\zeta = \zeta_{(1)}(r) + \zeta_{(3)}(z); \quad \nu = \nu_{(1)}(r) + \nu_{(3)}(z); \quad \omega = \omega_{(1)}(r) + \omega_{(3)}(z)$$

On a $\Delta = e^{2\zeta_{(3)}} \Delta_{(1)}$ avec $\Delta_{(1)} = e^{2\nu_{(1)}} + e^{2\nu_{(3)}}$

$$\text{Donc } e^{2\zeta_{(1)}} [\partial_1 \zeta]_{(1)}^2 = A^2 \Delta_{(1)}$$

Les équations (19) c, (19) d deviennent

$$(19)' \quad \begin{cases} c) & -\partial_{11} \log \Delta_{(1)} + (\partial_1 \log \Delta_{(1)}) \left(\frac{1}{2} \partial_1 \log \Delta_{(1)} + 2\partial_1 \omega_{(1)} \right) + A^2 = 0 \\ d) & (\partial_1 \log \Delta_{(1)}) (\partial_3 \zeta_{(3)} + \partial_3 \omega_{(3)}) = 0 \end{cases}$$

$\partial_1 \log \Delta_{(1)}$ est $\neq 0$ sinon $A^2 = 0$ d'après (19)' c ce qui entraîne $\partial_1 \zeta = 0$.

Donc nous avons $\omega = -\zeta_{(3)}$ à une constante arbitraire près. Posons $\Delta_{(1)} = e^{2nr}$, $n = c^{te}$

$$(19)' c \text{ nous donne } \partial_1 \omega_{(1)} = -N; \quad N = \frac{A^2 + 2n^2}{4n}$$

$$(22) \quad \begin{cases} \omega = -Nr - \zeta_{(3)}; & e^{\zeta_{(1)}} = \frac{A}{n} e^{nr} + C; \quad C : c^{te} \\ e^{2\nu_{(1)}} = \left(\frac{n^2 - A^2}{n^2} \right) e^{2nr} - \frac{2AC}{n} e^{nr} - C^2 \end{cases}$$

$$\chi \mu |h|^2 = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left(\frac{2n^2 - A^2}{4} \right); \quad \chi c^2 \bar{r} f = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} (A^2 - n^2);$$

$$2\chi p = -2\Lambda + \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left(\frac{A^2 + 2n^2}{4} \right)$$

Pour assurer la positivité de $|h|^2$ et $\bar{r}f$ il faut $n^2 < A^2 < 2n^2$. p est toujours positive si $\Lambda \leq 0$. Si $\Lambda > 0$ il suffit de prendre $2\Lambda \leq \text{minimum}$

$$\left\{ \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left(\frac{A^2 + 2n^2}{4} \right) \right\}_{\vartheta}$$

Étudions $e^{2\nu_{(1)}}$, en posant $X = e^{nr}$; l'expression s'annule pour les racines

$$X_1 = \frac{-nC}{n+A}, \quad X_2 = \frac{nC}{n-A}$$

Avec $n < 0$, $A < 0$, $C < 0$ on a $0 < X_1 < X_2$

$$e^{nri} = X_i \rightarrow r_1 = -\frac{1}{|n|} \log X_1; \quad r_2 = -\frac{1}{|n|} \log X_2$$

En choisissant $X_2 < 1$ nous aurons $r_1 > r_2$.

Pour $X_1 < X < X_2$ le trinôme $e^{2\zeta_{(i)}}$ est positif

$$\text{Or } [e_{(i)}^\zeta]_{X_1} = \frac{-|C||n|}{|n| + |A|} < 0 \text{ et } [e_{(i)}^\zeta]_{X_2} = \frac{-|C||n|}{|n| - |A|} > 0.$$

Il y aura donc un nombre r_1^* ($r_2 < r_1^* < r_1$) pour lequel $e_{(i)}^\zeta > 0$ si

$$r_2 < r < r_1^*, \quad r_1^* = -\frac{1}{|n|} \log \frac{|C||n|}{|A|}$$

L'unique équation de Maxwell donne $e^{2\omega} \sqrt{\Delta} h_3 = \Psi(r)$ d'où

$$h_3 = e^{(2N-n)r + \zeta_{(3)}} \Psi$$

Mais

$$\chi \mu h_3^2 = \left(\frac{2n^2 - A^2}{A} \right) e^{2Nr + 2\zeta_{(3)}};$$

par conséquent

$$\Psi = \frac{1}{2} \left(\frac{2n^2 - A^2}{\chi \mu} \right)^{1/2} e^{(n-N)r}$$

La seconde équation (21) équivaut à $\partial_3(p) = 0$; elle est donc satisfaite car

$$2\chi p = -2\Lambda + \left(\frac{A^2 + 2n^2}{4} \right) e^{2(N-n)r}.$$

Quant à la première on vérifie, en y portant les valeurs de p et $|h|^2$, qu'elle se réduit à une identité. Finalement $\zeta_{(3)}$ peut être arbitrairement choisie

ainsi qu'une des fonctions \bar{r}, f . La solution se présente sous la forme

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{00} = 1; \quad g_{03} = \varepsilon \left\langle \frac{A}{n} e^{nr} + C \right\rangle e_{(3)}^\zeta; \\ g_{11} = g_{22} = -e^{-2(N-n)r}; \\ g_{33} = -e^{2\zeta_{(3)}} \left\langle \left(\frac{n^2 - A^2}{n^2} \right) e^{2nr} - \frac{2AC}{n} e^{nr} - C^2 \right\rangle \end{array} \right.$$

Domaine de validité

$$\mathcal{D} \left\{ r_2 < r < r_1^* = -\frac{1}{|n|} \log \frac{|C||n|}{|A|}; \quad n < 0; \quad A < 0; \quad C < 0; \quad n^2 < A^2 < 2n^2 \right\}$$

Examinons à présent le cas $h_0 = h_1 = h_3 = 0 \quad h_2 \neq 0$ avec la même métrique.

(14) a entraîne toujours $\partial_0(\bar{r}) = 0$.

(14) b s'écrit $\partial_K(\sqrt{-gh^2}) = 0, \quad K = 0, 2$. Ces relations sont satisfaites en vertu des hypothèses $\partial_K(g_{\alpha\beta}) = 0$.

Le système (14) c fournit les équations $\partial_\beta(\mathcal{P}) + \mu |h|^2 \Gamma_2^2{}_\beta = 0, \quad \mathcal{P} = p + \frac{\mu}{2} |h|^2$.

Sans écrire les expressions dans toute leur généralité nous postulerons la séparation des variables : $\zeta = \zeta_{(1)} + \zeta_{(3)}$; $v = v_{(1)} + v_{(3)}$; $\omega = \omega_{(1)} - \zeta_{(3)}$ avec $\partial_1 \zeta_{(1)} \neq 0$.

On en tire les conséquences $e_{(1)}^2 [\partial_1 \zeta_{(1)}]^2 = A^2 \Delta_{(1)}$; $\Delta_{(1)} = e_{(1)}^2 \zeta_{(1)} + e_{(1)}^2 v_{(1)}$.

Il reste alors une seule équation

$$(24) \quad \partial_1 \log \Delta_{(1)} + 2\partial_1 \omega_{(1)} = 2K \sqrt{\Delta_{(1)}}, \quad K : \text{c}^{\text{te}}.$$

L'une des fonctions $\zeta_{(1)}$, $v_{(1)}$, $\omega_{(1)}$ est arbitraire.

Le choix $\Delta_{(1)} = e^{2nr}$ avec le signe + devant le radical $\sqrt{\Delta_{(1)}}$ conduit aux expressions suivantes

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{(1)} = -nr + \frac{K}{n} e^{nr} ; \quad e_{(1)}^{\zeta_{(1)}} = \left(\frac{A}{n} e^{nr} + C \right) ; \\ e_{(1)}^{2v_{(1)}} = \left(\frac{n^2 - A^2}{n^2} \right) e^{2nr} - \frac{2AC}{n} e^{nr} - C^2 \\ \chi \mu |h|^2 = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle \left(\frac{A^2 - 2n^2}{2} \right) + 2Kne^{nr} \right\rangle \\ \chi c^2 \bar{r}f = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle \frac{A^2}{2} - 2Kne^{nr} \right\rangle ; \quad 2\chi p = -2\Lambda + n^2 \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \end{array} \right.$$

Les expressions $e_{(1)}^{\zeta_{(1)}}$, $e_{(1)}^{2v_{(1)}}$, $|h|^2$, $\bar{r}f$ doivent être strictement positives. On a toujours $p > 0$ si $\Lambda \leq 0$; dans le cas $\Lambda > 0$ on prendra donc

$$2\Lambda \leq \min \left(n^2 \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \right)_{\varnothing}$$

Pour $Kn < 0$, $\bar{r}f$ est essentiellement positive ; il faut alors $A^2 > 2n^2$ et

$$e^{nr} < \frac{A^2 - 2n^2}{4|Kn|}$$

L'étude du signe de $e_{(1)}^{2v_{(1)}}$ se fait d'une manière semblable à celle du précédent exemple avec des conclusions identiques ; il en est de même pour l'exponentielle $e_{(1)}^{\zeta_{(1)}}$. Enfin il est aisé de vérifier la satisfaction des équations de conservation. Nous avons donc la solution

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{00} = 1 ; \quad g_{03} = \varepsilon e_{(3)}^{\zeta_{(3)}} \left\langle \frac{A}{n} e^{nr} + C \right\rangle \\ g_{11} = g_{22} = -e^{2\frac{K}{n} e^{nr}} ; \quad Kn < 0 \\ g_{33} = -e_{(3)}^2 \left\langle \left(\frac{n^2 - A^2}{n^2} \right) e^{2nr} - \frac{2AC}{n} e^{nr} - C^2 \right\rangle ; \quad A < 0 ; n < 0 ; C < 0 \end{array} \right.$$

Domaine de validité

$$\mathcal{D} \left\{ -\frac{1}{|n|} \log \frac{|C||n|}{|A|-|n|} < r < -\frac{1}{|n|} \log \frac{|C||n|}{A}; \quad A^2 > 2n^2 \right\}$$

Indiquons brièvement les résultats obtenus en prenant $\Delta = k^2 \text{ch}^2(nr)$.

$$\left\{ \begin{aligned} e^{\zeta_{(1)}} &= \frac{Ak}{n} \text{sh}(nr); & e^{2v_{(1)}} &= k^2 \left\langle \text{ch}^2(nr) - \frac{A^2}{n^2} \text{sh}^2(nr) \right\rangle \\ \omega_{(1)} &= -\log[\text{ch}(nr)] + \frac{Kk}{n} \text{sh}(nr) \\ \chi\mu |h|^2 &= \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle \left(\frac{A^2 - 2n^2}{2} \right) + 2Kkn \text{sh}(nr) \right\rangle; & \chi c^2 \bar{r}f &= \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle \frac{A^2}{2} - 2Kkn \text{sh}(nr) \right\rangle \\ 2\chi p &= -2\Lambda + \frac{n^2}{\Delta} e^{-2\omega} \end{aligned} \right.$$

$n \text{sh}(nr)$ est toujours > 0 ; donc il faut $Ak > 0$ pour assurer $e^{\zeta_{(1)}} > 0$. Avec $A^2 = 2n^2$ on a notamment $|h|_{r=0} = 0$ ce choix exige $Kk > 0$. Nous aurons en outre $\bar{r}f > 0$ si $\text{sh}(nr) < \frac{n^2}{2Kkn} \Leftrightarrow \text{sh}(|n|r) < \frac{|n|}{2Kk}$. La nécessité d'avoir $e^{2v_{(1)}} > 0$ dans le cas $A^2 = 2n^2$ demande alors $|\text{sh}(nr)| < 1$. Apparaît finalement la solution suivante

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{00} &= 1; & g_{03} &= \varepsilon e^{\zeta_{(1)}} \langle |k| \sqrt{2} \text{sh}(nr) \rangle; \\ g_{11} &= g_{22} = -k^2 e^{2\frac{Kk}{n} \text{sh}(nr)}; \\ g_{33} &= -k^2 e^{\zeta_{(1)}} \langle 1 - \text{sh}^2(nr) \rangle \end{aligned} \right.$$

Domaine de validité $\mathcal{D} \{ 0 \leq r < \tilde{R}; -\infty < z < +\infty \}$

\tilde{R} : plus petit des deux nombres $\frac{1}{|n|} \arg \text{sh} \frac{|n|}{2Kk}; \frac{1}{|n|} \arg \text{sh}(1)$.

Nous indiquerons pour terminer quelques solutions correspondant au ds^2

$$\left\{ \begin{aligned} g_{00} &= 1; & g_{01} &= e^{\zeta}; & g_{11} &= -e^{2v}; & g_{22} &= g_{33} = -\Delta e^{2\omega}; & \text{autres } g_{\alpha\beta} &= 0 \\ \Delta &= (e^{2\zeta} + e^{2v}); & \zeta, v, \omega &(r, z). \end{aligned} \right.$$

En coordonnées comobiles la congruence des trajectoires du champ $\tilde{U} \langle U^0 = 1; U^k = 0 \rangle$ est encore shear-free et expansion-free.

Les composantes du tenseur de Ricci sont $R_{\alpha\alpha}, R_{01}, R_{03}, R_{13}$.

Le choix d'un vecteur \vec{h} tel que $h_0 = h_1 = h_3 = 0$, $h_2 \neq 0$ dans le tenseur d'énergie magnéto-hydrodynamique conduit au système

$$(28) \quad \begin{cases} R_{00} = \chi \rho^* + \Lambda ; & \frac{e^{-2\omega}}{\Delta} R_{33} = \chi \rho^* - \Lambda ; & \chi \mu h_2^2 = R_{33} - R_{22} ; & R_{01} = e^{\zeta} R_{00} \\ R_{03} = 0 ; & e^{2\zeta} R_{00} - R_{11} + e^{-2\omega} R_{33} = 0 ; & R_{13} = 0. \end{cases}$$

On en tire les expressions $\chi \mu |h|^2$, $\chi c^2 \bar{r} f$, $2\chi p$; il reste alors quatre relations entre les coefficients du ds^2 .

Nous avons toujours $\partial_0(\bar{r}) = 0$ et les équations de Maxwell $\partial_k(\sqrt{-gh^2}) = 0$; $K = 0, 2$ sont toutes deux satisfaites.

Prenant $\partial_3 \zeta \neq 0$, nous poserons en outre

$$\zeta = \zeta_{(1)} + \zeta_{(3)} ; \quad v = v_{(1)} + v_{(3)} ; \quad \omega = -\zeta_{(1)} + \omega_{(3)}$$

Il vient $e^{2\zeta_{(3)}} [\partial_3 \zeta_{(3)}]^2 = A^2 \Delta$; $e^{2v_{(3)}} = A^{-2} e^{2\zeta_{(3)}} [(\partial_3 \zeta_{(3)})^2 - A^2]$ d'où la condition $(\partial_3 \zeta_{(3)})^2 > A^2$.

Il reste alors l'unique équation

$$\begin{aligned} -\partial_{33} \log \Delta_{(3)} - \partial_{33} \omega_{(3)} + \frac{1}{2} \partial_3 \omega_{(3)} \cdot \partial_3 \log \Delta_{(3)} \\ + \frac{e^{2v_{(3)}}}{\Delta_{(3)}} \left\langle \partial_{33} v_{(3)} + (\partial_3 v_{(3)}) \left[2\partial_3 v_{(3)} - \frac{1}{2} \partial_3 \log \Delta_{(3)} \right] \right\rangle + A^2 = 0 \end{aligned}$$

L'une des fonctions $\zeta_{(3)}$, $v_{(3)}$, $\omega_{(3)}$ peut être arbitrairement choisie.

Soit $\Delta_{(3)} = k^2 \operatorname{ch}^2(nz)$; nous avons

$$\begin{aligned} e^{\zeta_{(3)}} &= \frac{Ak}{n} \operatorname{sh}(nz) ; & e^{2v_{(3)}} &= k^2 \left\langle \left(1 - \frac{A^2}{n^2} \right) \operatorname{ch}^2(nz) + \frac{A^2}{n^2} \right\rangle \\ \omega_{(3)} &= \omega_0 + \frac{K_0}{n} \operatorname{sh}(nz) - \log \operatorname{ch}(nz) \end{aligned}$$

L'étude des conditions de positivité $|h|^2 > 0$, $\bar{r} f > 0$, $p \geq 0$ est analogue à celle déjà rencontrée. Nous nous contenterons de mentionner la solution particulière

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{01} = e^{\zeta_{(1)}} \frac{Ak}{n} \operatorname{sh}(nz), \\ g_{11} = -k^2 e^{2\zeta_{(1)}} \left\langle \left(1 - \frac{A^2}{n^2} \right) \operatorname{ch}^2(nz) + \frac{A^2}{n^2} \right\rangle ; \quad Akn > 0 \\ g_{22} = g_{33} = -k^2 e^{2\omega_0 + \frac{2K_0}{n} \operatorname{sh}(nz)} ; \\ \zeta_{(1)} \text{ arbitraire ; } \quad n > 0 ; \quad K_0 < 0 \end{array} \right.$$

dont la validité est restreinte au domaine $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ avec

$$\mathcal{D} \left\{ -\frac{1}{n} \operatorname{arg sh} \frac{A^2}{4 |K_0| n} < z < \frac{1}{n} \operatorname{arg sh} \frac{(A^2 - 2n^2)}{4 |K_0| n}; \quad A^2 > 2n^2 \right\}$$

$$\mathcal{D}_1 \left\{ -\frac{1}{n} \operatorname{arg sh} \frac{n}{\sqrt{A^2 - n^2}} < z < \frac{1}{n} \operatorname{arg sh} \frac{n}{\sqrt{A^2 - n^2}} \right\}; \quad \mathcal{D}_2 \{ z > 0 \}.$$

Comme précédemment, l'une des fonctions \bar{r}, f demeure arbitraire.

Le choix $\Delta = e^{2nz}$ conduirait à des résultats similaires quant au domaine de validité en z ($0 \leq r < +\infty$).

Nous poserons enfin $h_0 = h_2 = h_3 = 0, h_1 \neq 0$.

Les équations de Maxwell s'écrivent $\partial_1(e^{2\omega} \sqrt{\Delta} h_1) = 0; \partial_0(\sqrt{-gh^1}) = 0$, la dernière étant identiquement satisfaite.

En postulant une séparation des variables identique au cas précédent nous obtenons encore

$$e^{2\zeta_{(3)}} [\partial_3 \zeta_{(3)}]^2 = A^2 \Delta_{(3)}, \quad e^{2\gamma_{(3)}} = A^{-2} e^{2\zeta_{(3)}} \langle (\partial_3 \zeta_{(3)})^2 - A^2 \rangle \rightarrow [\partial_3 \zeta_{(3)}]^2 > A^2$$

Il reste l'équation

$$\partial_{33} \log \Delta_{(3)} - (\partial_3 \log \Delta_{(3)}) \left(\frac{1}{2} \partial_3 \log \Delta_{(3)} + 2\partial_3 \omega_{(3)} \right) - A^2 = 0$$

Posons $\zeta_{(3)} = \log z^{2n}$; il vient $e^{2\gamma_{(3)}} = z^{4n-2} \left\langle \frac{4n^2}{A^2} - z^2 \right\rangle$ puis

$$\omega_{(3)} = -n \log z - \frac{A^2 z^2}{8(2n-1)}$$

$(2n-1)$ est nécessairement $\neq 0$ sinon $A^2 = 0$

$$\chi \mu |h|^2 = \frac{e^{-2\omega_{(3)}}}{\Delta_{(3)}} (n-1) \left\langle \frac{2n}{z^2} - \frac{A^2}{2(2n-1)} \right\rangle \quad \text{d'où } (n-1) \neq 0$$

$$\chi c^2 \bar{r} f = -\frac{e^{-2\omega_{(3)}}}{\Delta_{(3)}} \left\langle \frac{(2n-1)(2n-2)}{z^2} - A^2 \right\rangle$$

$$2\chi p = -2\Lambda + \frac{e^{-2\omega_{(3)}}}{\Delta_{(3)}} \left\langle \frac{2(n-1)^2}{z^2} + \frac{A^2(n-1)}{2(2n-1)} \right\rangle$$

Soit $n = \frac{4}{3}$; $|h|^2 > 0$ et $\bar{r}f > 0$ imposent alors

$$\frac{8}{3} - \frac{3A^2 z^2}{10} > 0; \quad A^2 z^2 - \frac{10}{9} > 0$$

D'autre part, l'expression de $e^{2\gamma_{(3)}}$ exige $A^2 z^2 < \frac{64}{9}$.

