ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ROLAND PONS

Intégration des équations de Newman-Penrose dans le cas de l'espace minkowskien

Annales de l'I. H. P., section A, tome 16, nº 1 (1972), p. 51-61

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__16_1_51_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVI, n° 1, 1972, p. 51-62.

Section A :
Physique théorique.

Intégration des équations de Newman-Penrose dans le cas de l'espace minkowskien

par

Roland PONS

Laboratoire de Physique théorique,
Institut Henri Poincaré

RÉSUMÉ. — La première partie est consacrée à l'intégration des équations de Newman-Penrose dans le cas de l'espace minkowskien.

La seconde partie consiste en l'étude des transformations de Bondi-Metzner dans l'espace minkowskien avec symétrie axiale, mais avec la coordonnée radiale de Newman-Penrose.

1. INTRODUCTION

Le formalisme de Newman-Penrose a été développé dans [1]. Ce formalisme conduit aux trois groupes d'équations (4.2), (4.4) et (4.5) de [1]. Dans ces équations entrent les trois groupes d'équations suivants :

— Les composantes des vecteurs du repère.

— Les coefficients de spin construits à partir de ce repère.

— Les scalaires du tenseur de Riemann dans ce repère.

Newman et Penrose montrent qu'on peut obtenir, sans restriction essentielle, les simplifications suivantes des coefficients de spin :

$$\text{(1)} \qquad K = \varepsilon = \pi = 0, \qquad \rho = \bar{\rho}, \qquad \tau = \bar{\alpha} + \beta$$

que nous adopterons dans ce travail.

Finalement, les fonctions inconnues sont :

— Les trois composantes réelles U, X^i ($i = 2, 3$ dans toute la suite) et les trois composantes complexes ω, ξ^i du repère.

— Les neuf coefficients de spin ρ, σ, τ; α, β, γ et λ, μ, ν. Rappelons que, d'après (1), on a : $\rho = \bar{\rho}$ et $\tau = \bar{\alpha} + \beta$.

— Les scalaires Ψ_A, Φ_{mn} et Λ ($A = 0, 1, 2, 3, 4$; $m, n = 0, 1, 2$) qui déterminent le tenseur de Riemann dans le repère utilisé.

Dans ce travail, nous allons considérer le cas de l'espace minkowskien. Le tenseur de Riemann est alors identiquement nul. Dans les équations de Newmann-Penrose, nous devons introduire :

$$\Psi_A = \Phi_{mn} = \Lambda \equiv 0. \tag{2}$$

Le troisième groupe d'équation (4.5) de [1] est alors satisfait trivialement, et il ne reste plus que les deux groupes d'équations (4.2) et (4.4) avec les simplifications (1) et (2). Le but du présent travail est l'intégration de ces équations. Dans la suite, nous aurons besoin de la forme asymptotique de la métrique en coordonnées radiatives ($x^0 = u$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$) caractérisées par :

$$g^{00} = g^{02} = g^{03} = 0. \tag{3}$$

D'après [2], cette forme asymptotique est :

$$\left\{\begin{array}{lll} g^{01} = 1 + 0\left(\frac{1}{r}\right), & g^{11} = -1 + 0\left(\frac{1}{r}\right), & g^{1i} = 0\left(\frac{1}{r^2}\right); \\ g^{22} = -\frac{1}{r^2} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right), & g^{23} = 0\left(\frac{1}{r^3}\right), & \\ g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} + 0\left(\frac{1}{r^3}\right). & & \end{array}\right. \tag{4}$$

Comme Newman et Penrose, nous choisissons pour la coordonnée radiale $x^1 = r$, un paramètre affine de la bicaractéristique, ce qui nous donne :

$$g^{01} = 1. \tag{5}$$

Les autres composantes $g^{\mu\nu}$ sont données en fonction des composantes du repère par les relations (6.6) de [1] :

$$\left\{\begin{array}{l} g^{11} = 2(U - \omega\bar{\omega}), \\ g^{1i} = X^i - (\xi^i \bar{\omega} + \bar{\xi}^i \omega), \\ g^{ij} = -(\xi^i \bar{\xi}^j + \bar{\xi}^i \xi^j). \end{array}\right. \tag{6}$$

2. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

On distinguera trois types d'équations :

— Équations radiales : équations qui contiennent l'opérateur $D = \frac{\partial}{\partial r}$.

— Équations d'évolution : équations qui contiennent l'opérateur

$$\Delta = U\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial u} + X^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

— Les autres équations : dans lesquelles n'interviennent que les opérateurs

$$\delta = \omega\frac{\partial}{\partial r} + \xi^i\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \bar{\delta}.$$

L'ordre de résolution sera dicté par des considérations techniques.

1. Équations radiales

On remarque que les équations radiales pour ρ et σ forment un sous-système indépendant. On commence donc par intégrer ce système :

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} D\,\rho = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma}, \\ D\,\sigma = 2\,\rho\sigma. \end{cases}$$

En éliminant σ, on obtient une équation du second ordre pour ρ :

$$\text{(8)} \qquad \rho'' - 6\,\rho'\rho + 4\,\rho^3 = 0; \qquad \rho' = D\,\rho.$$

Pour intégrer cette équation, il suffit de poser :

$$\rho = -\frac{1}{2}\frac{W'}{W}.$$

On trouve alors

$$W''' = 0,$$

d'où la solution :

$$\text{(9)} \qquad \rho = -\frac{1}{2}\,\frac{2\,P\,r + Q}{P\,r^2 + Q\,r + R}.$$

Les constantes d'intégration P, Q, R ne pouvant pas être toutes nulles.

Pour σ, on trouve alors :

$$\text{(10)} \qquad \sigma = \frac{k}{P\,r^2 + Q\,r + R},$$

avec

$$\text{(11)} \qquad k\bar{k} = Q^2 - 4\,PR.$$

On peut distinguer trois classes de solutions :

(*a*) $P = 0$, alors $\rho = -\frac{1}{r} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Les surfaces $u =$ Cte sont alors asymptotiquement tangentes aux cônes caractéristiques.

(*b*) $P = 0$, $Q = 0 : \rho = -\frac{1}{2r} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Les surfaces $u =$ Cte sont asymptotiquement tangentes aux cylindres caractéristiques.

(*c*) $P = Q = 0 : \rho = \sigma = 0$. Les surfaces $u =$ Cte sont alors des plans caractéristiques.

Dans la suite, nous nous limitons au premier cas et nous utilisons, pour ρ et σ, les formes suivantes :

$$\rho = -\frac{r+a}{(r+a)^2 - A\bar{A}}, \qquad \sigma = \frac{A}{(r+a)^2 - A\bar{A}}, \tag{12}$$

où

$$A = A(u, \theta, \varphi) \in \mathbf{C}, \qquad a = a(u, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}.$$

Nous intégrons maintenant les équations radiales de τ et ξ^i. Ces équations ont la forme :

$$Df = \rho f + \bar{\sigma} f. \tag{13}$$

La solution de cette équation est, compte tenu des équations (7) :

$$f = -f_1 \rho - \bar{f}_1 \sigma, \qquad Df_1 = 0.$$

Nous aurons donc :

$$\begin{cases} \tau = -\tau_1 \rho - \bar{\tau}_1 \sigma, & D\tau_1 = 0; \\ \xi^i = -\xi_1^i \rho - \bar{\xi}_1^i \sigma, & D\xi_1^i = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Les équations pour α et β forment un système dont la solution est :

$$\begin{cases} \alpha = -\alpha_1 \rho - \beta_1 \bar{\sigma}, \\ \beta = -\beta_1 \rho - \alpha\sigma, \\ D\alpha_1 = D\beta_1 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Les équations pour λ et μ forment un système du même type. La solution est donc :

$$\begin{cases} \lambda = -\lambda_1 \rho - \mu_1 \bar{\sigma}, \\ \mu = -\mu_1 \rho - \lambda_1 \sigma, \\ D\lambda_1 = D\mu_1 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Les autres équations radiales se laissent aussi intégrer sans difficultés (*voir* [3]) mais conduisent à des expressions longues. Pour les abréger, nous remarquons, comme Newman-Unti dans [4], qu'on peut, à l'aide d'une rotation nulle de la tétrade, obtenir $\tau_1 = 0$.

On a alors :

$$\tau = 0. \tag{17}$$

Les équations pour γ, ν, X^i deviennent ainsi :

$$D\gamma = D\nu = D X^i = 0,$$

leurs solutions étant :

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_0, \qquad \nu = \nu_0, \qquad X^i = X^i_0\,; \\ D\gamma_0 = D\nu_0 = D X^i_0 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Avec (17), l'équation pour ω devient du type (13) et a, par conséquent, la solution

$$\omega = -\omega_1\,\rho - \bar{\omega}_1\,\sigma\,; \qquad D\,\omega_1 = 0. \tag{19}$$

L'équation pour U devient :

$$DU = -(\gamma + \bar{\gamma}) = -(\gamma_0 + \bar{\gamma}_0)$$

et a donc la solution :

$$U = -(\gamma_0 + \bar{\gamma}_0)\,r + U_0\,; \qquad DU_0 = 0. \tag{20}$$

Avant de procéder à l'intégration des équations non radiales, nous utilisons la forme asymptotique (4) de la métrique, afin d'obtenir quelques simplifications des résultats déjà obtenus. On obtient ainsi :

$$\gamma_0 + \bar{\gamma}_0 = 0, \qquad U = -\frac{1}{2}, \qquad X^i_0 = 0; \tag{21}$$

et

$$\xi^2_1 = \frac{e^{i\chi}}{\sqrt{2}}, \qquad \xi^3_1 = \frac{e^{i\psi}}{\sqrt{2}}$$

avec

$$\chi - \psi = (2k+1)\frac{\pi}{2}\cdot$$

Il n'y a qu'une relation entre les fonctions χ et ψ. Pour ne pas avoir, dans la suite, des formules compliquées par cette indétermination, nous faisons un choix en prenant :

$$\chi = 0, \qquad \psi = \frac{\pi}{2};$$

soit

$$\xi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_1^3 = \frac{i}{\sqrt{2}\sin\theta}. \tag{22}$$

2. Résolution des équations d'évolution

Compte tenu des résultats antérieurs, un examen rapide des équations d'évolution de ξ^i et de ω fournit les simplifications suivantes :

$$\bar{\gamma}_0 - \gamma_0 = 0, \qquad \nu_0 = 0. \tag{23}$$

Avec (21), on a donc

$$\gamma_0 = 0. \tag{24}$$

Dans la suite, on note $\frac{\partial F}{\partial u} = \dot{F}$ pour toute fonction F.

En introduisant dans les équations d'évolution pour ρ et σ les expressions (12) et (16), on trouve :

$$\begin{cases} \dot{a} = \mu_1 + \frac{1}{2}, \qquad \mu_1 = \bar{\mu}_1, \\ \dot{A} = \bar{\lambda}_1. \end{cases} \tag{25}$$

Compte tenu de ces résultats, les équations d'évolution pour ω, ξ^i, α, β, λ et μ donnent aisément :

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\xi}_1^i = \dot{\alpha}_1 = \dot{\beta}_1 = \dot{\lambda}_1 = \dot{\mu}_1 = 0. \tag{26}$$

3. Intégration des équations contenant les opérateurs δ et $\bar{\delta}$

Compte tenu des résultats antérieurs, l'équation contenant l'expression $\delta\bar{\xi}^i - \bar{\delta}\xi^i$ s'écrit, avec $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\xi_1^i \, \partial_i \bar{\xi}_1^j - \bar{\xi}_1^i \, \partial_i \xi_1^j = 2\left(\bar{\alpha}_1 \bar{\xi}_1^j - \alpha_1 \xi_1^j\right).$$

En utilisant (22), on obtient :

$$\alpha_1 = -\frac{\operatorname{cotg}\theta}{2\sqrt{2}}. \tag{27}$$

Avec (17) et (1), l'équation contenant $\delta\alpha - \bar{\delta}\beta$ s'écrit :

$$\xi_1^i \, \partial_i \alpha_1 + \bar{\xi}_1^i \, \partial_i \bar{\alpha}_1 = -\mu_1 + 4\,\alpha_1 \bar{\alpha}_1,$$

ce qui nous donne :

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}. \tag{28}$$

L'équation contenant $\delta\rho - \bar{\delta}\rho$ devient alors :

(29) $$\bar{\xi}_1^i\, \partial_i A - \xi_1^i\, \partial_i a = 4\, \alpha_1 A + \omega_1,$$

ce qui fournit directement l'expression de ω_1 en fonction de A et a.

L'équation contenant $\delta\lambda - \bar{\delta}\mu$ s'écrit :

$$\bar{\xi}_1^i\, \partial_i \lambda_1 - \xi_1^i\, \partial_i \mu_1 = 4\, \bar{\alpha}_1\, \lambda_1.$$

Remarquons que cette équation peut s'obtenir en dérivant (29) par rapport à u et en tenant compte de (25) et (26).

Avec (22) et (28), cette équation prend la forme :

$$\sin\theta \frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta} + i \frac{\partial\lambda_1}{\partial\varphi} + 2\cos\theta\lambda_1 = 0.$$

L'intégration de cette équation nous donne :

(30) $$\lambda_1 = \frac{1}{\sin^2\theta} f\left(\operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| + i\,\varphi\right),$$

où f est une fonction holomorphe arbitraire de la variable complexe $z = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| + i\,\varphi$.

Or, d'après (25), on a

$$A = \bar{\lambda}_1 U + A_0(\theta, \varphi).$$

Pour que σ soit régulière sur toute la sphère $r = \mathrm{Cte}$, il faut que λ_1 le soit aussi. En utilisant le théorème de Liouville, pour les fonctions holomorphes, on peut alors montrer (*voir* [3]) que $f = 0$, donc

(31) $$\lambda_1 = 0.$$

On remarque que, avec (28) et (31), (25) nous donne :

(32) $$\dot{a} = \dot{A} = 0.$$

L'équation contenant $\delta\bar{\omega} - \bar{\delta}\omega$ n'a pas été employée. En y reportant les valeurs trouvées pour ω_1, ξ_1^i, α_1 et λ_1 on trouve une condition sur A :

(33) $$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_2} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + 3\operatorname{cotg}\theta - 2\right](\bar{A} - A) + \frac{2i}{\sin\theta}\left[\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\varphi}\right](\bar{A} - A) = 0.$$

En résumant ces résultats, on voit que la solution des équations dépend de deux fonctions arbitraires : la fonction réelle $a = a(\theta, \varphi)$ et la fonction complexe $A = A(\theta, \varphi)$; mais les parties réelle et imaginaire de A sont liées par (33).

En introduisant ces résultats dans (6), on trouve les expressions détaillées pour les composantes $g^{\mu\nu}$. Un calcul élémentaire permet alors de déterminer les composantes $g_{\mu\nu}$. Le résultat final est que la métrique a la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
(34) \quad ds^2 = du^2 + 2\,du\,dr &+ \frac{2}{\sqrt{2}}(\bar{\omega}_1 + \omega_1)\,du\,d\theta - \frac{2i}{\sqrt{2}}\sin\theta\,(\bar{\omega}_1 - \omega_1)\,du\,d\varphi \\
&- \left[(r+a)^2 + \left(A + \bar{A}\right)(r+a) + A\bar{A}\right] d\theta^2 \\
&+ 2i\left(\bar{A} - A\right)(r+a)\,d\theta\,d\varphi \\
&- \sin^2\theta\left[(r+a)^2 - \left(A + \bar{A}\right)(r+a) + A\bar{A}\right] d\varphi^2;
\end{aligned}
$$

avec ω_1 donné par (29).

3. TRANSFORMATIONS DE BONDI-METZNER POUR L'ESPACE MINKOWSKIEN

Les transformations de Bondi-Metzner pour l'espace minkowskien ont déjà été étudiées par Metzner dans [2] pour le cas à symétrie axiale et avec la coordonnée radiale définie d'après Bondi.

Ici nous nous limitons également au cas à symétrie axiale, mais nous allons refaire les calculs en adoptant la définition de la coordonnée radiale donnée par Newman et Penrose.

Nous partons des coordonnées particulières $(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ pour lesquelles la métrique minkowskienne a la forme habituelle :

$$
(35) \qquad ds^2 = d\bar{u}^2 + 2\,d\bar{u}\,d\bar{r} \quad {}^{-2}\left(d\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}\,d\bar{\varphi}^2\right),
$$

et nous cherchons les transformations de coordonnées permettant de passer aux coordonnées radiatives générales (u, r, θ, φ) caractérisées par les conditions (3) et (5) et le comportement asymptotique (4).

A cause de la symétrie axiale, on prendra $\varphi = \bar{\varphi}$.

En répétant la première partie des calculs de Metzner, faisant appel à des coordonnées « mixtes » $(u, {}^{-}, \theta, \varphi)$, on déduit des conditions $g_{11} = g_{12} = 0$:

$$
(36) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\bar{\theta} &= p(u, \theta) - \arcsin\left(\frac{q(u, \theta)}{\bar{r}}\right), \\
\bar{u} &= s(u, \theta) + (\bar{r}^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} - \bar{r}, \\
s_\theta &= q\,p_\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Afin de faire coïncider les axes de symétrie dans les deux systèmes de coordonnées, on doit avoir :

$$(37)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\theta\to 0} p = \lim\limits_{\theta\to 0} q = 0, \\ \lim\limits_{\theta\to\pi} p = \pi, \qquad \lim\limits_{\theta\to\pi} q = 0. \end{cases}$$

En utilisant (36), la condition $g_{01} = 1$ donne sans difficulté :

$$(38)\qquad (s_u - p_u\, q)\,(\bar{r}^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} = r + v\,(u, \theta),$$

$v\,(u, \theta)$ étant une nouvelle fonction arbitraire.

L'utilisation des conditions asymptotiques permet de réduire le nombre des fonctions arbitraires. Nous donnons directement le résultat des calculs.

Le fait que r et $\bar{r}$ doivent tendre simultanément vers $+\infty$ implique :

$$(39)\qquad s_u - p_u\, q > 0.$$

En remarquant que la partie principale de g_{22}, lorsque r tend vers $+\infty$, est $-r^2$, on trouve :

$$(40)\qquad p_\theta = \pm\,(s_u - p_u\, q).$$

On choisit le signe positif afin que θ et $\bar{\theta}$ varient dans le même sens.

La partie principale de g_{00} est égale à 1, ce qui nous donne :

$$(41)\qquad \begin{cases} p_u = 0, \\ s_u^2 + 2\,v_u - q_u^2 = 1. \end{cases}$$

En écrivant que g_{02} est d'ordre r^0, on obtient :

$$s_{u\theta} = q_u\, p_\theta,$$

ce qui peut également s'obtenir en dérivant la relation $s_\theta = q\, p_\theta$ par rapport à u, en tenant compte de $p_u = 0$.

Enfin, en demandant que g_{33} ait pour partie principale $-r^2 \sin^2\theta$, on obtient, avec $p_\theta > 0$:

$$(42)\qquad \sin\theta \,.\, p_\theta = \sin p.$$

Cette équation se laisse intégrer immédiatement et donne :

$$(43)\qquad \operatorname{tg}\frac{p}{2} = e^{\nu}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \qquad \nu = \text{Cte}.$$

La fonction $p\,(\theta)$ est ainsi déterminée par (43).

On détermine $s\,(u,\,\theta)$ en intégrant (38) avec $p_u = 0$:

(44) $$s\,(u,\,\theta) = p_\theta\, u + \mathrm{S}\,(\theta),$$

S (θ) étant une fonction arbitraire de θ.

La troisième des relations (36) nous donne alors :

(45) $$q\,(u,\,\theta) = \frac{s_\theta}{q_\theta}\cdot$$

La dernière fonction $v\,(u,\,\theta)$ sera déterminée par l'intégration de la dernière équation (41) :

(46) $$v\,(u,\,\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p^2_{\theta\theta}}{p^2_\theta} - p^2_\theta\right) u + \mathrm{V}\,(\theta),$$

V (θ) étant une deuxième fonction arbitraire de θ.

Les transformations cherchées dépendent donc de deux fonctions arbitraires S (θ) et V (θ) et d'une constante ν.

Ceci contraste avec les résultats de Metzner qui ne contiennent, en dehors de la constante ν, qu'une seule fonction arbitraire.

Comme le mentionne Metzner, la constante ν décrit une transformation de Lorentz dont la vitesse a la direction de l'axe de symétrie et la valeur

$$v = c\ \mathrm{th}\ \nu.$$

En éliminant cette transformation de Lorentz, c'est-à-dire en mettant

$$\nu = 0,$$

on peut étudier les supertranslations.

Les relations (43) à (46) donnent alors :

(47) $$p\,(\theta) = \theta,\quad q = q\,(\theta) = \mathrm{S}'\,(\theta),\quad v = v\,(\theta) = \mathrm{V}\,(\theta);\qquad \left(\mathrm{S}' = \frac{d\mathrm{S}}{d\theta}\right)\cdot$$

Les transformations cherchées prennent ainsi la forme :

(48) $$\left\{\begin{aligned} \bar\theta &= \theta - \arcsin\left(\frac{\mathrm{S}'}{\bar r}\right), \\ \bar u &= u + \mathrm{S}\,(\theta) + (\bar r^2 - \mathrm{S}'^2)^{\frac{1}{2}} - \bar r, \\ (\bar r^2 &- \mathrm{S}'^2)^{\frac{1}{2}} = r + \mathrm{V}\,(\theta). \end{aligned}\right.$$

Ces formules décrivent les changements de coordonnées transformant le cône de lumière en une autre hypersurface caractéristique admettant le même axe de symétrie.

En calculant tous les coefficients de la métrique à l'aide de (48), on obtient l'expression $du\, ds^2$ dans les coordonnées (u, r, θ, φ) :

$$(49)\quad \begin{aligned} ds^2 &= du^2 + 2\, du\, dr + 2\,(S' + V')\, du\, d\theta \\ &\quad - [r - (S'' - V)]^2\, d\theta^2 - \sin^2\theta\, [r - (S' \operatorname{cotg}\theta - V)]^2\, d\varphi^2. \end{aligned}$$

En comparant les formes (34) et (49) de la métrique, on constate d'abord que la symétrie axiale entraîne :

$$(50)\qquad A = \bar{A}, \qquad \omega_1 = \bar{\omega}_1.$$

On a, de plus, les relations suivantes :

$$(51)\qquad \left\{ \begin{aligned} a + A &= V - S'', \\ a - A &= V - S' \operatorname{cotg}\theta. \end{aligned} \right.$$

La relation (29) donne alors :

$$(52)\qquad \sqrt{2}\,\omega_1 = A' - a' + 2\,A \operatorname{cotg}\theta = -\,(S' + V'),$$

ce qu'on obtient aussi directement par la comparaison de (34) et (49).

Notons finalement que Newman-Unti montrent qu'on peut toujours imposer la condition

$$(53)\qquad a = 0$$

qui semble être utile en pratique pour l'étude du rayonnement gravitationnel. En adoptant (53), nous déduisons de (51) :

$$(54)\qquad 2\,V = S'' + S' \cos\theta.$$

Cette relation signifie que lorsqu'on adopte (53), les transformations ne dépendent plus que d'une fonction arbitraire, comme dans le cas de la coordonnée radiale de Bondi.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ici mes vifs remerciements à M. A. Papapetrou qui m'a proposé ce travail et qui m'a sans cesse guidé dans sa réalisation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Newman et R. Penrose, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 566.
[2] H. Bondi, M. Van der Burg et A. Metzner, *Proc. Roy. Soc.*, vol. **269**, 1962, p. 21.
[3] R. Pons, *Thèse de* 3e *cycle*, Paris, 1971.
[4] E. Newman et T. Unti, *J. Math. Phys.*, t. **7**, 1966, p. 864.

(*Manuscrit reçu le* 2 *juillet* 1971.)