ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

Groupes de spinorialité

Annales de l'I. H. P., section A, tome 14, nº 4 (1971), p. 309-323

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_4_309_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XIV, n° 4, 1971, p. 309-323. *Physique théorique.*

Groupes de spinorialité

par

A. CRUMEYROLLE

Faculté des Sciences de Toulouse, 118, route de Narbonne, Toulouse (France).

SOMMAIRE. — Dans le chapitre I nous donnons un certain nombre de compléments sur les structures spinorielles triviales qui précisent en particulier les définitions et résultats du chapitre II de [*2*]. Nous y dégageons notamment la *notion de structure spinorielle canonique triviale.*

Dans le chapitre II nous introduisons une notion nouvelle: celle de « groupe de spinorialité ». Le résultat essentiel est que *l'existence d'une structure spinorielle sur une variété se traduit par la possibilité de réduire le groupe structural du fibré pseudoriemannien de la variété à un « groupe de spinorialité ».* Nous établissons aussi un résultat implicitement contenu dans les développements du [*2*] à savoir que *toute variété à structure presque complexe admet une structure spinorielle complexe.*

Pour terminer nous examinons le cas particulier de l'espace-temps de la Relativité et nous retrouvons par une méthode inédite un résultat déjà signalé dans [*3*] pour un espace-temps non compact :

Si un espace-temps admet une structure spinorielle le fibré des repères est trivial.

Cet article constitue une suite à [*2*]. Les notations sont donc les mêmes, sauf en ce qui concerne le groupe Γ.

CHAPITRE PREMIER

STRUCTURES SPINORIELLES TRIVIALES

On considère un espace vectoriel réel E, de dimension $n = 2r$, muni d'une forme quadratique Q non dégénérée, de signature $(k, n - k)$ avec k termes positifs. C(Q) désigne l'algèbre de Clifford associée à Q. E_c et Q' sont les complexifiés de E et Q respectivement et C(Q′) est isomorphe à la complexifiée de C(Q).

On envisage une représentation irréductible ρ de C(Q′) dans un idéal à gauche minimal C(Q′)f de C(Q′), avec

$$f = y_1 y_2 \ldots y_r,$$

les $y_1, y_2, \ldots, y_r$ déterminent un sous-espace totalement isotrope maximal (s. t. i. m.) de E_c et $\rho(w)$ est l'application $uf \to wuf$, $w, u \in C(Q')$.

Γ désigne soit le groupe Pin Q′, soit le groupe Pin Q [*2*].

Définition d'une structure Γ-spinorielle triviale

Une structure Γ-spinorielle triviale est déterminée :

a) *Par le choix d'un idéal minimal* C(Q′)f, *espace de la représentation* ρ.

b) *Par une classe d'équivalence de repères de* C(Q′)f.

Si $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ sont de tels repères $\mathscr{S} \simeq \mathscr{S}'$ signifie qu'il existe γ appartenant à Γ tel que $\gamma(\mathscr{S}) = \mathscr{S}'$.

c) *Par une application continue q de l'ensemble des repères de la classe* (b) *dans celui des bases de Witt de* E_c, telle que :

Si $q\mathscr{S} = \Omega$, alors $q(\gamma(\mathscr{S})) = p(\gamma)\cdot q(\mathscr{S})$ (α)

où p est la représentation classique de Γ dans E_c :

$$p(\gamma)(x) = \gamma x \gamma^{-1}, \qquad x \in E_c.$$

Les bases de Witt associées aux repères orthonormés réels seront appelées par abus bases de Witt « réelles ».

Observons que si $q(\mathscr{S}') = q(\mathscr{S}'_1)$, alors $\mathscr{S}' = \varepsilon\mathscr{S}'_1$ avec $\varepsilon = \pm 1, \pm i$ (cas de Pin Q′), $\varepsilon = \pm 1$ (cas de Pin Q). q est donc un revêtement.

q est un morphisme entre un Γ-fibré principal trivial η et un $p(\Gamma)$-fibré principal trivial.

Tout Γ-fibré principal isomorphe se définit par une application continue bijective de Γ dans Γ qui commute avec l'action de Γ. Si Γ opère « à gauche » sur lui-même, on voit aisément que tout isomorphisme se définit à l'aide d'une translation « à droite » par un élément fixe γ_0 de Γ.

Si nous introduisons le Γ-fibré ξ, associé à η, de fibre C(Q′)f, à un isomorphisme j de η correspond un isomorphisme de ξ et deux structures spinorielles de projections q et q_1, de même classe de repères, seront isomorphes si et seulement s'il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que :

$$q_1(g\mathscr{S}_0) = q(g\gamma_0\mathscr{S}_0),$$

ce qui est toujours vrai, puisqu'il suffit de prendre $q_1(\mathscr{S}_0) = q(\gamma_0 \mathscr{S}_0)$.

Ainsi deux structures Γ-spinorielles triviales de même classe de repères sont isomorphes.

PROPOSITION 1. — *Il existe des structures Γ-spinorielles triviales.*

En effet la donnée de $q(\mathscr{S}_0)$ détermine $q(\gamma\mathscr{S}_0)$, $\forall\gamma \in \Gamma$.

On peut construire une telle structure en considérant une base de Witt $W(x_i, y_j)$ avec $y_1 y_2 \ldots y_r = f$; si $\Omega = p(g)\cdot W$, $\Omega = (\xi_i, \eta_j)$, posant:

$$\mathscr{S} = \{ \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_h} gf \} = g \{ x_{i_1} \ldots x_{i_h} f \}, \quad g \text{ fixé},$$

$1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots i_h \leqslant r$, et faisant varier g dans Γ, on obtient une classe d'équivalence de repères (*b*). $\mathscr{S}$ étant donné, g est déterminé sans ambiguité puisque ρ est fidèle. Si $q(\mathscr{S}) = p(g)\cdot W$ on a bien (α).

Cette classe de repères sera dite *canoniquement associée à* W.

LEMME 1. — *$f = y_1 y_2 \ldots y_r$ et $f' = y'_1 y'_2 \ldots y'_r$ étant des r-vecteurs isotropes, f et f' déterminent le même idéal minimal si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ avec $f' = \lambda f$, autrement dit si f et f' définissent le même s. t. i. m.*

Soit $C(Q')f = C(Q')f'$, d'après le théorème de Witt, il existe $\delta \in \Gamma$, tel que $\delta f \delta^{-1} = f'$ et $C(Q')f\delta^{-1} = C(Q')f$, donc on peut trouver $s \in C(Q')$ tel que $f\delta^{-1} = sf$ qui implique [*1*, chap. III] $f\delta^{-1} = \lambda_1 f$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$. Appliquant l'anti-automorphisme principal β on obtient $\delta f = N(\delta)\lambda_1 f$, $N(\delta)$ désignant la norme spinorielle de δ égale à ± 1. Alors

$$f' = \delta f \delta^{-1} = N(\delta)\lambda_1^2 f = \lambda f, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

La réciproque est triviale.

Observons qu'un changement de repère quelconque du s. t. i. m. déterminé par f conduirait à $f' = kf$, $k \in \mathbb{C}^*$, où k est le déterminant de la matrice de changement de repère.

PROPOSITION 2. — *Un idéal minimal étant choisi, si Σ est une classe d'équivalence de repères* Pin Q'*-spinoriels toute autre classe est de la forme λΣ, $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

Soient Σ et Σ' deux classes d'équivalence de repères Γ-spinoriels avec les projections q et q'. Prenons $\mathscr{S}_0 \in \Sigma$ et $\mathscr{S}'_0 \in \Sigma'$ avec $q(\mathscr{S}_0) = \Omega_0$ et $q'(\mathscr{S}'_0) = \Omega_0$.

Il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{S}_0$ (c'est-à-dire un voisinage d'un élément de Γ) et un voisinage $\mathscr{U}'$ de $\mathscr{S}'_0$ homéomorphes à un voisinage $\mathscr{V}$ de Ω_0, donc un homéomorphisme σ de $\mathscr{U}$ sur $\mathscr{U}'$.

σ applique $\gamma\mathscr{S}_0$ sur $\gamma\mathscr{S}'_0$ pour tout γ appartenant à un certain voisinage de l'identité dans Γ. On notera que si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1 + \gamma_2 \in \mathscr{U}$ alors

$$\sigma(\gamma_1 + \gamma_2)\mathscr{S}_0 = (\gamma_1 + \gamma_2)\sigma(\mathscr{S}_0)$$

de sorte que σ s'étend de manière unique à un isomorphisme linéaire α de $C(Q')f$ sur lui-même. Comme α commute avec γ pour tout $\gamma \in \mathscr{U}$, l'étude du centre de $C(Q')$ nous assure que α est une homothétie. Ainsi dans un ouvert $\mathscr{U}$ contenant $\mathscr{S}_0$, σ associe à $\mathscr{S}$ l'élément $\lambda\mathscr{S}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et ce résultat s'étend par continuité à la composante connexe de $\mathscr{S}_0$. Mais pour γ quelconque si $\mathscr{S}' = \gamma\mathscr{S}'_0$, $\mathscr{S}'_0 = \lambda\mathscr{S}_0$, alors si $\mathscr{S} = \gamma\mathscr{S}_0$, $\mathscr{S}' = \gamma\lambda\mathscr{S}_0 = \lambda\mathscr{S}$.

Ainsi l'ensemble des classes de repères Pin Q'-spinoriels d'un idéal à gauche minimal est en bijection avec le quotient de $\mathbb{C}^*$ par le groupe multiplicatif des éléments ε.

PROPOSITION 3. — *Toute classe d'équivalence de repères* Pin Q'*-spinoriels de* $C(Q')f$ *peut se définir canoniquement à l'aide d'une base de Witt* $W'(x'_i, y'_j)$ *et s'identifie à :* $\{ g x_{i'_1} \ldots x_{i'_h}, y'_1 \ldots y'_r \}$, $g \in \operatorname{Pin} Q'$.

En effet, si $f = y_1 y_2 \ldots y_r$, soit $\lambda \{ g x_{i_1} \ldots x_{i_h} f \}$ une classe d'équivalence de tels repères. Considérons une base de Witt $W'(x'_i, y'_j)$ avec $y'_1 y'_2 \ldots y'_r = f' = \lambda^2 f$ et soit $\delta \in \operatorname{Pin} Q'$ qui permet de passer de $W(x_i, y_j)$ à $W'(x'_i, y'_j)$, δ est défini au coefficient ε près.

Comme $x_{i'_1} \ldots x_{i'_h} f' = \delta x_{i_1} \ldots x_{i_h} f \delta^{-1}$, le résultat sera établi si on montre que $f\delta^{-1} = \varepsilon\lambda f$. Or de $f' = \lambda^2 f$, on déduit :

$$\delta f \delta^{-1} = \lambda^2 f$$
$$f \delta^{-1} = \lambda^2 \delta^{-1} f,$$

ce qui entraîne, selon [*1*], chap. III, que

$$f\delta^{-1} = \mu f, \qquad \mu \in \mathbb{C}^*,$$

puis, appliquant β :

$$\delta f = N(\delta)\mu f$$
$$f' = N(\delta)\mu^2 f$$

soit $f\delta^{-1} = \varepsilon\lambda f$.

Observons que si, $f'' = k^2 f$, le calcul montre avec des notations évidentes que :

$$x_{i''_1} \ldots x_{i''_h} f'' = \varepsilon k \delta x_{i_1} \ldots x_{i_h} f.$$

λ étant donné, k est défini à ε près, donc f' répondant à la question posée est défini à ± 1 près. Donc à chaque classe d'équivalence de repères Pin Q'-spinoriels correspond, au coefficient ± 1 près, un r-vecteur isotrope unique $y_1 y_2 \ldots y_r$ tel que cette classe soit canoniquement associée à une base de Witt $W(x_i, y_j)$ (il est bien évident que les x_i ne sont pas univoquement déterminés par les y_j).

Notons que si

$$q\{x_{i_1}\dots x_{i_h}f\} = W(x_i, y_j) \quad \text{et} \quad q'\{x_{i'_1}\dots x_{i'_h}f'\} = W'(x_{i'}, y_{j'}),$$

comme

$$x_{i'_1}\dots x_{i'_h}f' = \varepsilon\delta x_{i_1}\dots x_{i_h}f$$

toutes les fois que les repères sont dans la même classe, $q' = q$.

Ainsi à chaque classe d'équivalence de repères est canoniquement associée une projection q. Nous dirons que la structure spinorielle ainsi définie est la structure spinorielle canonique attachée aux repères de la classe (b), ou plus brièvement une *structure spinorielle canonique triviale.*

Le cas de Pin Q

Supposons d'abord que $y_1, y_2, \dots, y_r$ soient éléments d'une base de Witt « réelle ».

Dans la démonstration de la proposition 2 on obtient encore $\lambda \in \mathbb{C}^*$, posons $\lambda = \rho e^{i\theta}$, ρ et θ réels, supposons $1 \leqslant k < n - k$ (si $k = 0$, on voit que nécessairement $\rho = 1$).

On considère $f' = \lambda^2 f$, avec

$$W'(x_{i'}, y_{j'}) = \left(\frac{x_1}{\rho^2}, x_2, \dots, e^{-2i\theta}x_r, \rho^2 y_1, y_2, \dots, e^{2i\theta}y_r\right)$$

ainsi $W'(x_{i'}, y_{j'})$ est « réelle ». On détermine alors δ comme plus haut.

. Si $N(\delta) = 1$, on a bien $\mu = \pm\lambda$, $f\delta^{-1} = \pm f$.

. Si $N(\delta) = -1$, la signature de Q étant $(k, n-k)$, si $k < n - k$, avec les notations de ([*2*], chap. III) on introduit des symétries par rapport aux hyperplans normaux à e_r et e_{r+1} ; comme

$$x_r = \frac{ie_r + e_{r+1}}{\sqrt{2}}, \qquad y_r = \frac{ie_r - e_{r+1}}{\sqrt{2}},$$

cela change x_r en $(-x_r)$ et y_r en $(-y_r)$, f' se change en $f'_1 = -\lambda^2 f$, δ en δ_1 avec $N(\delta) = N(\delta_1)$, car $(e_r)^2 = (e_{r+1})^2 < 0$ ([*2*], *p.* 20).

. Si $N(\delta) = -1$ avec $k > n - k$, on fait un raisonnement analogue dont les détails sont laissés au lecteur.

Nous avons jusqu'ici supposé $k \neq n - k$, mais si $k = n - k$, Q est neutre, alors les (x_i, y_j) sont réels ainsi que les $(x_{i'}, y_{j'})$ de sorte que λ, μ sont réels, $\lambda^2 = \mu^2 N(\delta)$ implique que $N(\delta) = 1$ et $\mu = \pm\lambda$.

Observons que finalement nous avons utilisé un élément f' avec $f' = N(\delta)\lambda^2 f$. Si les repères sont dans la même classe on obtiendra des structures spinorielles identiques *en utilisant les seules projections canoniques* si et seulement si $f' = N(\delta)f$. On retrouve ainsi les résultats déjà énoncés et établis dans ([*2*], p. 37).

Enfin, toujours dans le cas de Pin Q, si on ne se restreint plus à des $y_1, y_2, \ldots, y_r$ appartenant à une base de Witt réelle, on remarque qu'il existe $\gamma_0 \in \mathrm{Pin}\ Q'$ qui applique les éléments d'un r-vecteur isotrope f sur ceux d'un autre $f' = \gamma_0 f \gamma_0^{-1}$. Cela permet de ramener le problème au cas déjà traité.

Si nous convenons de dire que 2 structures spinorielles déduites l'une de l'autre pour l'action de γ_0 précédente sont semblables dans Pin Q', nous pourrons donc énoncer dans le cas où $\Gamma = \mathrm{Pin}\ Q$, la proposition 3 sous la forme légèrement modifiée :

PROPOSITION 3 *bis.* — *Toute classe d'équivalence de repères* Pin Q-*spinoriels peut se définir canoniquement à l'aide d'une base de Witt « réelle »* $W'(x'_i, y'_j)$ *et s'identifie à* $\{ g x_{i'_1} x_{i'_2} \ldots x_{i'_h} y'_1 \ldots y'_r \}$, $g \in \mathrm{Pin}\ Q$, *ou bien est semblable dans* Pin Q' *à une telle classe d'équivalence.*

A ce sujet, la démonstration de la proposition 6 et sa généralisation, p. 45 et 46 dans [*2*] demandent à être précisées. Le champ global de r-vecteurs isotropes obtenu n'est pas nécessairement associé à des bases de Witt réelles en tout point, mais en un point donné on peut se ramener à considérer ce cas en utilisant précisément une similitude dans Pin Q' comme on vient de l'établir.

En conclusion, on voit que l'on peut ramener toute structure Γ-spinorielle triviale à une classe d'équivalence de couples (Ω, g), $g \in \Gamma$, $(\Omega, g) \sim (\Omega', g')$ signifiant que si $\gamma = g'g^{-1}$, alors $\Omega' = p(\gamma)\cdot\Omega$.

Pour les structures spinorielles canoniques, on a $(\Omega, g) \sim (W, e)$, la classe (b) des repères est celle de $\{ x_{i_1} \ldots x_{i_h}, y_1 \ldots y_r \}$ avec $W = W(x_i, y_j)$ et $q(W, e) = W$; une structure quelconque avec la même classe de repères est définie par $q_1(W, e) = p(\gamma_0)\cdot W$, γ_0 fixé dans Pin Q'.

Toute structure Γ-spinorielle s'obtiendra à partir de l'une des précédentes par une similitude dans Pin Q'.

Remarque. — D'après le lemme 1, si f et f' sont des r-vecteurs isotropes, $ff' \neq 0$ équivaut à $C(Q')f \neq C(Q')f'$. Des considérations élémentaires sur les représentations d'algèbres simples, ou l'utilisation du lemme de Schur, montrent que $\alpha : uf \to uff'$ est une équivalence de représentation.

CHAPITRE II

DÉFINITION DES GROUPES DE SPINORIALITÉ ET APPLICATIONS

Nous choisissons une base de Witt $W(x_i, y_j)$ avec $y_1y_2 \ldots y_r = f$.

PROPOSITION 4. — *g et g' étant des éléments de* $\mathrm{Pin}\ Q'$, *les s. t. i. m. de gfg^{-1} et $g'fg'^{-1}$ sont identiques si et seulement si $g^{-1}g' \in K'$, où K' est le sous-groupe des éléments γ de* $\mathrm{Pin}\ Q'$, *tels qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ avec $\gamma f = \mu f$.*

En effet, si les s. t. i. m. de gfg^{-1} et $g'fg'^{-1}$ sont identiques, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ avec :

$$g'fg'^{-1} = \lambda gfg^{-1} \quad \text{et si} \quad g^{-1}g' = \gamma$$
$$\gamma f\gamma^{-1} = \lambda f.$$

Posant $\lambda = N(\gamma)\mu^2$, un calcul analogue à celui que l'on a utilisé dans la démonstration du lemme 1, montre que $\gamma f = \pm \mu f$ et qu'inversement $\gamma f = \mu f$ entraîne $\gamma f\gamma^{-1} = N(\gamma)\mu^2 f$.

COROLLAIRE 1. — *Il existe une bijection de l'ensemble des s. t. i. m. de* E_c *sur* $\dfrac{\mathrm{Pin}\ Q'}{K'}$.

Appelons H' le sous-groupe, distingué dans K', des éléments $\gamma \in \mathrm{Pin}\ Q'$ tels que $\gamma f = \varepsilon f$ ($\varepsilon = \pm 1, \pm i$).

COROLLAIRE 2. — *Il existe une bijection de l'ensemble* $\left(\dfrac{\mathrm{Pin}\ Q'}{H'}\right)$ *sur le quotient de l'ensemble des r-vecteurs isotropes* $\{ gfg^{-1}, g \in \mathrm{Pin}\ Q' \}$ *par* $\{ -1, 1 \}$.

Il suffit de faire $\mu = \varepsilon$ dans la démonstration de la proposition 4.

DÉFINITION. — *Nous appellerons groupe de spinorialité de* Q' *le groupe* $\mathfrak{S}' = p(H')$.

Il est facile de s'assurer que $\dfrac{O(Q')}{\mathfrak{S}'} \cong \dfrac{\mathrm{Pin}\ Q'}{H'}$.

Il faut bien noter que H' et $\mathfrak{S}'$ sont définis après le choix préalable de f. Un autre choix de f change le groupe $\mathfrak{S}'$ en un groupe « conjugué » dans $O(Q')$.

LE CAS DE PIN Q

Si $\gamma \in \mathrm{Pin}\, Q$, la démonstration de la proposition 4 montre que $\gamma f \gamma^{-1} = N(\gamma) f$ équivaut à $\gamma f = \pm f$, donc :

COROLLAIRE 3. — *L'ensemble* $\{ N(g) g f g^{-1},\ g \in \mathrm{Pin}\, Q \}$ *est en bijection avec* $\left(\dfrac{\mathrm{Pin}\, Q}{H}\right)$, *où* H *est le sous-groupe des éléments de* Pin Q *tels que* $\gamma f = \pm f$.

DÉFINITION. — *Le groupe* $p(H) = \mathfrak{S}$ *s'appelle groupe de spinorialité de* Q.

Il est facile de voir que $\dfrac{O(Q)}{\mathfrak{S}} \cong \dfrac{\mathrm{Pin}\, Q}{H}$ et que l'on peut obtenir d'autres groupes de spinorialité en modifiant f. Tous ces groupes sont conjugués, *dans* $O(Q')$.

NOUVEL ASPECT DE LA CONDITION D'EXISTENCE D'UNE STRUCTURE SPINORIELLE SUR UNE VARIÉTÉ PSEUDORIEMANNIENNE

Nous dirons qu'une variété V, de dimension $n = 2r$ sur $\mathbb{R}$, pseudoriemannienne, admet une structure Γ-spinorielle, s'il existe un fibré principal $\mathscr{S}(V)$ de base V, de groupe structural Γ, revêtement du fibré pseudoriemannien des repères de V (réel ou complexe selon que $\Gamma = \mathrm{Pin}\, Q$ ou $\mathrm{Pin}\, Q'$), tel que $\forall x \in V$, il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de x dans V, $\mathscr{S}(V)/\mathscr{U}$ induisant une structure Γ-spinorielle triviale.

Nous avons établi dans [*2*] que pour qu'il existe sur V une structure Pin Q'-spinorielle il faut et il suffit qu'il existe, au facteur ± 1 près, un champ de r-vecteurs isotropes sur la variété, ou encore un champ de s. t. i. m.

Digression au sujet de l'espace des spineurs

Y. Kosmann a fait remarquer qu'il n'est pas évident *a priori* que l'on puisse considérer que l'espace des spineurs en chaque point de la variété est un sous-espace de la fibre cliffordienne. La proposition suivante répond à cette objection et permet d'établir à nouveau que s'il existe sur V une structure Γ-spinorielle, V porte un champ de s. t. i. m.

Nous renvoyons le lecteur à [*4 bis*] pour la définition la plus générale des spineurs sur une variété.

PROPOSITION. — *On peut choisir une représentation spinorielle de manière que l'espace des spineurs en* $x \in V$, *s'identifie à un idéal minimal de l'algèbre de Clifford en* x *de* V.

On suppose toujours $n = 2r$, le raisonnement étant local on peut se borner à considérer des fibrés triviaux.

Selon les notations de Lichnerowicz [cf. Champs spinoriels et propagateurs] un spineur (contravariant) ψ est une application différentiable du fibré principal spinoriel dans l'espace $\mathbb{C}^{2^r}$, où opère Pin Q, telle que :

$$\psi(zg^{-1}) = g \cdot \psi(z).$$

Cela suppose définie l'action de Pin Q dans $\mathbb{C}^{2^r}$, c'est-à-dire le choix d'une représentation spinorielle. On considère donc l'algèbre de Clifford C(Q') de $\mathbb{C}^n$, et un idéal minimal $C(Q')f$ fixé. Un repère « privilégié » est choisi dans C(Q'), si $(x_1, \ldots, y_r)$ est une base de Witt de $\mathbb{C}^n$,

$$\{ x_{i_1} \ldots x_{i_h} \, y_{j_1} \ldots y_{j_k} \}$$

constitue la base « privilégiée » de C(Q') et $\{ x_{i_1} \ldots x_{i_h} \, y_1 \ldots y_r \}$ la base « privilégiée » de $(C(Q')f$,

$$f = y_1 y_2 \ldots y_r, \, 1 \leqslant i_1 < i_2 < i_h \leqslant r \text{ et } 1 \leqslant j_1 < j_2 < j_k \leqslant r).$$

Soit φ l'application qui à $u \in C(Q')$ associe ainsi un élément de $\mathbb{C}^{2^n}$, il faut entendre que

$$\psi(zg^{-1}) = g \cdot \psi(z) = \varphi(gu)$$

u appartenant à $C(Q')f$, idéal minimal choisi une fois pour toutes.

Une carte locale du fibré de Clifford de V, permet de définir un isomorphisme d'algèbre θ entre l'algèbre C(Q') et la fibre $(C(Q'))_x$ au point x.

Posons $j(\psi) = \theta(u)$, si $\varphi(u) = \psi(z)$. Alors $j(\psi) \in (C(Q')f)_x$.

Prenons une autre carte locale du fibré de Clifford V, si z est remplacé par zg^{-1}, φ est remplacé par φ', θ par θ' et : $\varphi'(g^{-1}u'g) = \varphi(u')$, pour $u' \in C(Q')$, $g \in$ Pin Q, $\theta(u) = \theta(g^{-1})\theta'(u)\theta(g)$, d'après la définition du fibré principal spinoriel.

Nous avons maintenant $j'(\psi) = \theta'(v)$, si $\varphi'(v) = \psi(zg^{-1})$ donc :

$$\begin{aligned} & \varphi(gu) = \varphi'(v) = \varphi(gvg^{-1}) \\ \Rightarrow \quad & v = ug \\ & \theta'(v) = \theta(g)\theta(v)\theta(g^{-1}) = \theta(g) \cdot j(\psi) \\ & j'(\psi) = \theta(g) \cdot j(\psi), \\ \text{ainsi} \quad & j'(\psi) \in (C(Q')f)_x. \end{aligned}$$

Il faut noter que les *éléments de* $(C(Q')f)_x$ *considérés comme des spineurs en* x *ne peuvent pas, de manière intrinsèque, s'identifier individuellement à des éléments de* $(C(Q'))_x$, fibre au-dessus de x, du fibré de *Clifford, à groupe structural* O(Q), par l'égalité de leurs coordonnées locales.

Il est évident que les résultats précédents s'adaptent à Pin Q′ et Spin Q et établissent l'existence sur V d'un champ de s. t. i. m., si V porte une structure spinorielle.

Enfin si on change de représentation spinorielle, une démonstration analogue permet d'identifier l'espace des spineurs en x à un sous-espace de $C(Q')_x$.

Signalons ici un résultat que nous avons omis de donner dans [*2*], mais qui est immédiat :

PROPOSITION 5. — *Toute variété réelle* V, *paracompacte, de dimension* $n = 2r$, *munie d'une structure presque complexe, admet une structure spinorielle complexe* (*).

Il suffit de rappeler que V admet deux champs de s. t. i. m. conjugués complexes l'un de l'autre définis par décomposition primaire des espaces tangents relativement au tenseur fondamental I tel que $I^2 = -1$, la forme quadratique Q introduite faisant de V une variété à structure presque hermitienne [*4*].

On pourrait se demander si une structure presque complexe admet une structure Pin Q-spinorielle. Mais le raisonnement que nous avons fait dans notre article [*2*] dans le cas complexe ne s'applique plus sans modification au cas réel : on a en effet montré qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une structure Pin Q-spinorielle sur une variété riemannienne équivalait à celle d'un champ de r-vecteurs isotropes (construit avec des bases de Witt d'ailleurs arbitraires).

Dans le cas d'une structure presque complexe il existe un tel champ à un scalaire près égal à ± 1 et ce champ est défini par des vecteurs d'une base de Witt « réelle ». En effet, avec les notations de [*2*], p. 42, $b(x)$ et $b'(x)$ sont de module 1. $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{b(x)}}$ est de la forme $f_x (\cos \theta_x + i \sin \theta_x)$, on remplace $(y_1 y_2 \ldots y_r)_x = f_x$ par $y_1 (\cos \theta + i \sin \theta) y_2 \ldots y_r$, ce qui revient à remplacer e_1 et e_n par des vecteurs réels déduits par rotation d'angle θ dans le plan (e_1, e_n) : $\varphi(x)$ est bien associé à une base de Witt « réelle ».

La réciproque de la proposition 5 est fausse : par exemple la sphère S^4 admet une structure spinorielle puisqu'elle borde la boule euclidienne B_5, mais elle n'a pas de structure presque complexe [*6*] (**).

(*) Donc $\mathfrak{S}'$ est semblable dans $O(Q')$ à un groupe qui contient $U(r, \mathbb{C})$.

(**) On notera aussi que S^2 et S^6 possèdent à la fois une structure p. c. et une structure Pin Q-spinorielle.

Nous revenons maintenant aux conditions d'existence d'une structure Pin Q'-spinorielle, Q' quelconque, en énonçant :

PROPOSITION 6. — *Pour qu'il existe sur une variété pseudo-riemannienne une structure* Pin Q'*-spinorielle il faut et il suffit que le groupe structural du fibré pseudoriemannien complexifié soit réductible à un groupe* $\mathfrak{S}'$ *de spinorialité de* Q'.

Cette proposition découle immédiatement des considérations classiques sur la réduction du groupe structural d'un fibré, du corollaire 2, de l'isomorphisme entre $\dfrac{O(Q')}{\mathfrak{S}'}$ et $\dfrac{\text{Pin } Q'}{H'}$ et bien entendu des résultats obtenus dans [2] et précédemment rappelés.

Dans le cas où $\Gamma = \text{Pin } Q$, nous avons établi dans [2] :

Pour qu'il existe sur la variété pseudoriemannienne V une structure Γ-spinorielle il faut et il suffit que l'on puisse définir un recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de V par des ouverts, domaines de définition de bases de Witt « réelles » Ω_α et au-dessus de chaque U_α un champ local de r-vecteurs isotropes, $x \to f_\alpha(x)$, tels que si α, $\beta \in A$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\Omega_\beta = p(\sigma_x)\cdot\Omega_\alpha$, $p(\gamma_x) = \sigma_x$, alors $f_\beta(x) = N(\gamma_x) f_\alpha(x)$. Il existe alors δ_x envoyant $f_\alpha(x)$ sur $f_\beta(x)$ tel que $N(\gamma_x) = N(\delta_x)$.

Nous considérons alors le fibré, de groupe O(Q), associé au fibré pseudoriemannien et dont la fibre est $\{ N(g)gfg^{-1} = f',\ g \in \text{Pin } Q \}$ (les f, g, Q sont ici relatifs à E), sur laquelle $g' \in \text{Pin } Q$ opère par :

$$f' \to N(g')g'f'g'^{-1}$$

et se trouve ainsi définie une action de O(Q).

Utilisant le même résultat classique que dans la démonstration de la proposition 6 et le corollaire 3, il vient :

PROPOSITION 7. — *Pour qu'il existe sur une variété pseudoriemannienne une structure* Pin Q*-spinorielle il faut et il suffit que le groupe structural* O(Q) *du fibré pseudoriemannien soit réductible à un groupe* $\mathfrak{S}$ *de spinorialité de* Q.

DÉTERMINATION EXPLICITE D'UN GROUPE DE SPINORIALITÉ DE Q

L'algèbre de Lie $\mathscr{L}(H)$ de H est une sous-algèbre de Lie de celle de Pin Q. De $gf = \pm f$ on déduit aisément que si $u \in \mathscr{L}(H)$ on a $uf = 0$, et inversement si $uf = 0$, $\exp(ut)f = f$.

L'algèbre de Lie de Pin Q est engendrée par les combinaisons linéaires des éléments (e_ie_j), $i < j$, où $e_1, e_2, \ldots, e_n$ constituent une base orthogonale de E [1]. Prenant une base de Witt « réelle », on voit que nécessairement u a la forme suivante :

$$u = \alpha^{i_1 i_2} x_{i_1} y_{i_2} + \gamma^{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2}, \qquad j_1 < j_2, \qquad \beta(u) + u = 0,$$

$\alpha^{i_1 i_2}$, $\gamma^{j_1 j_2} \in \mathbb{C}$ avec $\bar{u} = u$, les indices variant de 1 à r.

Supposons $k \leqslant n - k$ et prenons comme dans [2], chap. III :

$$x_1 = \frac{e_1 + e_n}{\sqrt{2}}, \ldots, x_k = \frac{e_k + e_{n-k+1}}{\sqrt{2}}, \; x_{k+1} = \frac{ie_{k+1} + e_{n-k}}{\sqrt{2}}, \ldots, x_r = \frac{ie_r + e_{r+1}}{\sqrt{2}}$$

$$y_1 = \frac{e_1 - e_n}{\sqrt{2}}, \ldots, y_k = \frac{e_k - e_{n-k+1}}{\sqrt{2}}, \; y_{k+1} = \frac{ie_{k+1} - e_{n-k}}{\sqrt{2}}, \ldots, y_2 = \frac{ie_r - e_{r+1}}{\sqrt{2}}$$

Le lecteur pourra aisément vérifier que l'élément général u de l'algèbre $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ a la forme indiquée avec :

$\alpha^{i_1 i_2}$ réel	pour	$i_1 \leqslant k, \quad i_2 \leqslant k.$
$\alpha^{i_1 i_2} = 0$	pour	$i_1 \leqslant k < i_2.$
$\alpha^{i_2 i_1} = \bar{\gamma}^{i_1 i_2}$	pour	$i_1 \leqslant k < i_2.$
$\alpha^{i_1 i_2} = -\bar{\alpha}^{i_2 i_1}$	pour	$i_1 > k, \quad i_2 > k.$
$\Sigma \alpha^{ii} = 0$	pour	$i > 0.$
$\gamma^{i_1 i_2}$ réel	pour	$i_1 < i_2 \leqslant k.$
$\gamma^{i_1 i_2} = 0$	pour	$k < i_1 < i_2.$

CONCLUSION. — *La dimension de* $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ *est :* $r^2 + \dfrac{k(k-1)}{2} - 2$ *pour* $r \geqslant 2$, $k \neq 0$, *et* $r^2 - 1$ *pour* $r \geqslant 2$, $k = 0$.

H est un sous-groupe fermé de Pin Q, donc sa composante connexe de l'identité est parfaitement définie par $\mathscr{L}(\mathrm{H})$, ainsi que la composante connexe de l'identité de $\mathfrak{S}$.

L'étude plus poussée de la structure de $\mathfrak{S}$, selon la signature de Q peut alors se faire, elle est laissée au lecteur (*). Nous examinerons plus complètement un cas particulier intéressant en Relativité.

GROUPES DE SPINORIALITÉ DANS L'ESPACE DE MINKOWSKI

Q a la signature (1, 3), on trouve immédiatement si $u \in \mathscr{L}$ (Pin Q) et $uf = kf$, $k \in \mathrm{R}^*$,

$$u = \alpha x_1 y_1 + \gamma x_2 y_1 + \bar{\gamma} y_1 y_2, \quad \alpha \text{ réel}, \quad f = y_1 y_2.$$

(*) Lorsque $k = 0$, on peut voir que la composante connexe de l'identité de tout groupe $\mathfrak{S}$ est semblable dans O(Q') au groupe SU(r, $\mathbb{C}$) si $r = 1$, $\mathrm{H} = 0$.

Cela s'écrit encore, compte tenu des formules:

$$x_1 = \frac{e_1 + e_4}{\sqrt{2}}, \qquad x_2 = \frac{ie_2 + e_3}{\sqrt{2}},$$
$$y_1 = \frac{e_1 - e_4}{\sqrt{2}}, \qquad y_2 = \frac{ie_2 - e_3}{\sqrt{2}},$$

et en désignant par A, B, C des constantes réelles:

$$u = \mathrm{A}e_1e_4 + \mathrm{B}(e_1 - e_4)e_3 + \mathrm{C}(e_1 - e_4)e_2.$$

On en déduit que la composante connexe de l'identité $\hat{\mathrm{H}}_0$, de $\hat{\mathrm{H}}$ (*) est engendrée par

$$e_1e_4 \operatorname{sh} \mathrm{A} + \operatorname{ch} \mathrm{A}, \quad e_1e_3 \operatorname{sh} \mathrm{B} + \operatorname{ch} \mathrm{B}, \quad e_3e_4 \sin \mathrm{B} + \cos \mathrm{B}$$
$$e_1e_2 \operatorname{sh} \mathrm{C} + \operatorname{ch} \mathrm{C}, \quad e_2e_4 \sin \mathrm{C} + \cos \mathrm{C}.$$

et celle du groupe $\hat{\mathfrak{S}}_0 = p(\hat{\mathrm{H}}_0)$ par:

une rotation « hyperbolique » « d'angle » ψ dans (e_1, e_4),
une rotation « hyperbolique » « d'angle » φ dans (e_1, e_3),
une rotation « hyperbolique » « d'angle » θ dans (e_1, e_2),
une rotation ordinaire d'angle φ dans (e_3, e_4),
une rotation ordinaire d'angle θ dans (e_2, e_4).

ψ, φ, θ étant des paramètres réels.

Il est immédiat de vérifier que $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ n'est autre que:

$$\{ \mathrm{B}(e_1 - e_4)e_3 + \mathrm{C}(e_1 - e_4)e_2,\ \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{R} \}$$

et constitue une sous-algèbre de Lie commutative de $\mathscr{L}(\hat{\mathrm{H}})$, qui est aussi un idéal de $\mathscr{L}(\hat{\mathrm{H}})$. Il en résulte que le sous-groupe correspondant dans $\mathfrak{S}_0$ est distingué dans $\mathfrak{S}_0$ et que tout élément de $\mathfrak{S}_0$ s'écrit de manière unique sous la forme d'un produit $\psi\varphi\theta$, ψ, φ, $\theta \in \mathbb{R}$. $\mathfrak{S}_0$ est donc homéomorphe au produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (donc simplement connexe) (cas particulier d'un théorème de Cartan) ([*5*], p. 189).

En particulier:

PROPOSITION 8. — *Supposons que l'espace-temps* V *soit orientable et le fibré des repères réductible au groupe de Lorentz connexe* L_0. *Si* V *admet une structure spinorielle le fibré des repères est trivial.*

V est paracompact [*3*] (**) et la fibre étant homéomorphe à R^2 il suffit d'appliquer le théorème 12-2, p. 55 dans [*6*].

(*) $\hat{\mathrm{H}}$ est le sous-groupe des éléments γ de Pin Q tels que $\gamma f = \lambda f$, $\lambda \in \mathrm{R}^*$.
(**) Selon Geroch, mais de toute manière cette hypothèse est raisonnable.

Il est facile de voir que pour $k = 1$, $r > 2$, le résultat simple précédent n'est plus valable. Il intervient dans le calcul des termes « elliptiques » indépendants des termes « hyperboliques ».

Remarques.

1° On observera que le cas $n = 4$ est tout à fait particulier. La dimension des groupes de spinorialité est alors inférieure ou égale à n. Les résultats obtenus dépendent aussi étroitement de la signature.

En signature purement elliptique, en faisant $k = 0$, on trouve que l'élément général de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ est

$$u = \mathrm{A}(e_1e_4 - e_2e_3) + \mathrm{B}(e_3e_4 - e_1e_2) + \mathrm{C}(e_2e_4 - e_3e_1)$$

$\mathscr{L}(\mathfrak{S}_0) = \mathscr{L}(\mathrm{H}_0)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ comme on le voit sans difficulté.

$\mathfrak{S}_0$ est donc isomorphe à $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

2° Les développements précédents se généralisent d'eux-mêmes à des structures spinorielles définies à partir d'un fibré pseudoriemannien quelconque de base V, au lieu du fibré des repères. $n = 2r$, ne sera plus alors nécessairement la dimension de la variété, mais celle d'un espace auxiliaire fixé une fois pour toutes.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Claude CHEVALLEY, *The algebrebraic theory of spinors*. Columbia U. P., 1954.

[*2*] Albert CRUMEYROLLE, Structures spinorielles. *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. XI, n° 1, 1969, p. 19-55.

[*3*] Robert GEROCH, Spinor structure of space-time in general relativity. *Journal of math. phys.*, vol. **9**, n° 11, novembre 1968.

[*4*] André LICHNEROWICZ, *Théorie des connexions et des groupes d'holonomie*. Cremonese, Rome, 1955.

[*4 bis*] André LICHNEROWICZ, Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale. *Bull. Soc. Math. France*, t. **92**, 1964, p. 11 à 100.

[*5*] MONTGOMERY et ZIPPIN, *Topological transformations groups*. Interscience, 1966.

[*6*] Norman STEENROD, *The topology of fibre bundles*. Princeton U. P., 1951.

Manuscrit reçu le 30 novembre 1970.

Errata de l'article « **Structures spinorielles** »

Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. XI, n° 1, 1969, p. 19-55.

page 25, ligne 1, lire « base orthogonale ».

page 35, ligne 14, lire « τ^{-1} » au lieu de « τ ».

page 40, ligne 7, lire « variété V ».

page 41, ligne 4, lire « translations à droite ».
ligne 6, lire « $\mathscr{S}(V) \times \text{Pin } Q$ »
ligne 4 du bas, lire « où θ_x^{-1} » au lieu de « où σ_x^{-1} ».

page 43, ligne 8, lire « $\{ \xi_{i'_1} \ldots \xi_{i'_h} g' f' \}_x$ ».

page 44, ligne 1, lire « $y_i = p(g_x^{-1}) \cdot \eta_i(x)$ ».
ligne 1 du bas, lire « (et resp. $G_0^+(Q)$) ».

page 46, ligne 16, lire « $N(\gamma_x)$ ».
ligne 8 du bas, lire « nécessaire ».
ligne 9 du bas : barrer « $= 1$ ».

page 48, ligne 7, $L_Y Q(X)$.
ligne 1 du bas, ajouter « mod. f ».

page 49, ligne 2, lire « $\nabla_\beta f = 0$, mod. f ».
ligne 7 du bas, lire « $\tilde{\varphi}(X)$ », et n° VI.
ligne 9, lire $\omega_\beta^{\alpha *} + \omega_\alpha^{\beta *} = 0$.

page 50, ligne 5 du bas, lire « le repère spinoriel ».

page 55, ligne 3, lire « $D(w_2 w_1) = D\beta(w_1 w_2)$ ».
ligne 5, lire $= (D\beta)(w_1 w_2)' + D(w_2 w_1)$.