ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

GAETANO CARICATO

Sur le problème de Cauchy intrinsèque pour les équations de Maxwell-Einstein dans le vide

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, nº 4 (1969), p. 373-392
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_4_373_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XI, n° 4, 1969, p. 373-392. *Physique théorique.*

Sur le problème de Cauchy intrinsèque pour les équations de Maxwell-Einstein dans le vide

par

Gaetano CARICATO
(Istituto Matematico « G. Castelnuovo » Città Universitaria, Roma).

SUMMARY. — The Cauchy problem for the Maxwell-Einstein equations in the empty space is considered in every coordinate system. It is shown that this problem breaks into two separate invariant problems: the problem of initial conditions, the restricted problem of evolution.

For the restricted problem of evolution a theorem of existence and unicity is established without any assumption of analyticity.

INTRODUCTION

On sait que M. A. Lichnerowicz (1) et Mme Y. Choquet-Bruhat (2) ont étudié profondément le problème de Cauchy pour le système des équations de Maxwell-Einstein soit dans le vide soit dans les cas matière pure ou fluide parfait. On sait de même que M. C. Cattaneo a donné une formulation relative, intrinsèque, des lois physiques en relativité géné-

(1) A. LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en mécanique relativiste*, Actualités Scientifiques et Industrielles, 833 (XII), Paris, 1939, p. 1-75.

(2) Mme Y. BRUHAT, Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *Acta Mathematica*, t. **88**, 1952, p. 141-225; Sur l'intégration des équations de la relativité générale, *Journal of rational mechanics and analysis*, t. **5**, 1956, p. 951-966.

rale [3]. Dans ce travail sur les équations de Maxwell-Einstein dans le vide j'ai pu reprendre, encore une fois [4], l'idée de Lichnerowicz de partager le problème de Cauchy en deux problèmes distincts : le problème restreint d'évolution et le problème des données initiales ; et en vertu des résultats obtenus de Cattaneo et Benvenuti [Cf. § 1, n° 2] j'ai pu énoncer intrinsèquement ces problèmes. Enfin j'ai montré, par le moyen d'un théorème d'existence de Mme Bruhat, que le problème restreint d'évolution admet une solution et une seule, quel que soit le système de coordonnées locales employé, dès que les données de Cauchy satisfont aux équations de compatibilité du problème des données initiales et des conditions simples de différentiabilité.

§ 1. LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES ET LEUR EXPRESSION RELATIVE A UN REPÈRE PHYSIQUE DONNÉ

1. Les équations gravitationnelles.

Dans une variété différentiable à 4 dimensions V_4 douée d'une métrique riemannienne partout de type hyperbolique normal dont la signature est $+++-$, donnons une congruence de lignes orientées dans le temps et un champ de vecteurs unitaires $\gamma(x)$ tangents à ces lignes et orientés dans le futur. Déterminons ainsi un repère physique S dans lequel, comme nous avons déjà montré [5], les équations d'Einstein

$$G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 0 \tag{1}$$

---

(3) C. CATTANEO, General Relativity : Relative Standard Mass, Momentum, Energy and Gravitational Field in a General System of Reference, *Il nuovo Cimento*, série X, t. **10**, 1958, p. 318-337 ; Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale, *Annali di Matematica pura ed applicata*, (IV), vol. XLVIII, 1959, p. 361-386 ; Conservation Laws in General Relativity, *Il Nuovo Cimento*, série X, t. **13**, 1959, p. 237-240 ; Formulation relative des lois physiques en relativité générale, Cours professé au Collège de France, 1962.

(4) Sul problema di Cauchy per le equazioni gravitazionali nel vuoto, *Rendiconti di Matematica* (3-4), vol. 22, 1963 ; Sul problema intrinseco di evoluzione per le equazioni einsteiniane, *Rendiconti Accademia Naz. Lincei*, (VIII), vol. XLI, 1966 ; Sur le problème de Cauchy pour les équations de la relativité générale dans les schémas matériels fluide parfait et matière pure, *Annales Institut Henri Poincaré*, vol. IX, t. **3**, 1968, p. 283-301.

(5) Cf. 1re note cit. en (4).

équivalent au suivant système de trois équations tensorielles

$$(1') \qquad s_{\alpha\rho} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\gamma_{\alpha\rho} = 0, \qquad \mathrm{S}_\alpha = 0, \qquad \tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I} = 0,$$

où nous avons posé [6]

$$(2) \qquad \begin{aligned} s_{jm} \equiv \mathscr{P}_{\Sigma\Sigma}(\mathrm{R}_{jm}) &= \tilde{\mathrm{R}}^*_{jm} + \frac{1}{4}\tilde{\mathrm{K}}^i{}_i(\tilde{\mathrm{K}}_{mj} + \tilde{\Omega}_{mj}) - \frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{K}}_m{}^i + \tilde{\Omega}_m{}^i)\mathrm{K}_{ij} \\ &+ \frac{1}{2}\gamma^4\partial_4\tilde{\mathrm{K}}_{jm} - \tilde{\nabla}^*_m\mathrm{C}_j + \frac{1}{2}\gamma^4\partial_4\tilde{\Omega}_{mj} + \frac{1}{2}\tilde{\Omega}^i{}_j\tilde{\Omega}_{im} - \mathrm{C}_j\mathrm{C}_m \qquad (s_{4j} \equiv 0) \\ \mathscr{P}_{\Sigma\theta}(\mathrm{R}_{jm}) = \mathscr{P}_{\Sigma\theta}(\mathrm{G}_{jm}) &= \mathrm{S}_j\gamma_m, \qquad \mathscr{P}_{\theta\Sigma}(\mathrm{R}_{jm}) = \mathscr{P}_{\theta\Sigma}(\mathrm{G}_{jm}) = \mathrm{S}_m\gamma_j \\ \mathscr{P}_{\theta\theta}(\mathrm{G}_{jm}) &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I})\gamma_i\gamma_m \end{aligned}$$

avec

$$(3) \qquad \begin{aligned} \mathrm{S}_\beta &\equiv \frac{1}{2}[\tilde{\nabla}^*_\beta\tilde{\mathrm{K}}^i{}_i - \tilde{\nabla}^*_\mu(\tilde{\mathrm{K}}_\beta{}^\mu + \tilde{\Omega}_\beta{}^\mu)] + \mathrm{C}^\alpha\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} \qquad (\mathrm{S}_4 \equiv 0) \\ \tilde{\mathrm{P}}^*_{\alpha\beta} &\equiv -\tilde{\partial}_\beta\{\widetilde{{}^{\rho}_{\alpha\,\rho}}\}^* + \tilde{\partial}_\rho\{\widetilde{{}^{\rho}_{\beta\,\alpha}}\}^* - \{\widetilde{{}^{\sigma}_{\alpha\,\rho}}\}^*\{\widetilde{{}^{\rho}_{\beta\,\sigma}}\}^* + \{\widetilde{{}^{\sigma}_{\beta\,\alpha}}\}^*\{\widetilde{{}^{\rho}_{\rho\,\sigma}}\}^* \qquad (\tilde{\mathrm{P}}^*_{4r} \equiv 0) \\ \tilde{\mathrm{R}}^* &\equiv \gamma^{\alpha\beta}\tilde{\mathrm{R}}^*_{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}\tilde{\mathrm{P}}^*_{\alpha\beta}, \qquad \mathscr{I} = \frac{1}{4}[(\tilde{\mathrm{K}}_\alpha{}^\alpha)^2 - \tilde{\mathrm{K}}^{\alpha\beta}\mathrm{K}_{\alpha\beta} + 3\tilde{\Omega}^{\alpha\beta}\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}]. \end{aligned}$$

Remarquons de plus que l'identité différentielle

$$(4) \qquad \nabla_j\mathrm{G}^j{}_k \equiv 0$$

dans le repère physique S équivaut aux identités suivantes :

$$(4') \qquad \begin{aligned} &\tilde{\nabla}^*_j s^j{}_m + \mathrm{C}_h s^h{}_m - \frac{1}{2}\mathrm{R}\mathrm{C}_m - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^*_m\mathrm{R} + \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{K}}^\alpha{}_\alpha\mathrm{S}_m + \gamma^4\partial_4\mathrm{S}_m + \tilde{\Omega}_{hm}\mathrm{S}^h \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I})\mathrm{C}_m \equiv 0 \\ &\frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{K}}_{jt} + \tilde{\Omega}_{jt})s^{jt} - \frac{1}{4}\mathrm{R}\tilde{\mathrm{K}}^\alpha{}_\alpha + \tilde{\nabla}^*_j\mathrm{S}^j + 2\mathrm{C}_j\mathrm{S}^j + \frac{1}{4}\tilde{\mathrm{K}}^\alpha{}_\alpha(\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I}) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}\gamma^4\partial_4(\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I}) \equiv 0. \end{aligned}$$

---

[6] Pour les symboles employés cf. C. Cattaneo, *Proiezioni naturali e derivazione trasversa...* ou *Formulation relative des lois physiques...* cités en [3]. Pour les indices on adopte ici la convention suivante : tout indice grec varie de 1 à 3, tout indice latin de 1 à 4. On rappelle que l'opérateur différentiel $\tilde{\partial}_i \equiv \partial_i + \gamma_i\gamma^4\partial_4$, *dérivation partielle transverse*, à caractère invariant vis-à-vis d'une transformation quelconque de coordonnées internes au repère physique S ; l'opérateur $\gamma^i\partial_i \equiv \gamma^4\partial_4$, *dérivation longitudinale*, appliqué à un tenseur d'espace produit un tenseur d'espace du même ordre. De plus, les symboles de Christoffel d'espace de première et deuxième espèce sont ainsi définis :

$$\widetilde{[ij, h]}^* \equiv \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_i\gamma_{jh} + \tilde{\partial}_j\gamma_{hi} - \tilde{\partial}_h\gamma_{ij}), \qquad \{\widetilde{{}^{r}_{i\,j}}\}^* = \gamma^{rh}\widetilde{[ij, h]}^*.$$

2. Équations de Maxwell.

On sait que dans une variété riemannienne V_4 orientable les équations de Maxwell peuvent s'écrire, en l'absence de toute matière,

$$F_j \equiv \nabla_i F_j^{\ i} = 0, \tag{5}$$

$$\mathscr{F}_j \equiv \nabla_i \mathscr{F}_j^{\ i} = 0, \tag{6}$$

où F_{ij} est le tenseur antisymétrique champ électromagnétique et $\mathscr{F}_{ij}$ le tenseur impair antisymétrique adjoint de F_{ij}

$$\mathscr{F}_{ij} = (*F)_{ij} = \frac{1}{2}\eta_{ijlm}F^{lm} \tag{7}$$

avec

$$\eta_{ijlm} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{ijlm} \qquad \text{(tenseur impair de Ricci).}$$

Supposons maintenant avoir donné dans la variété V_4 un repère physique S et en suivant M. Benvenuti (7) donnons la formulation relative des équations (5), (6). Dans ce but faisons d'abord la décomposition naturelle du tenseur F_{ij} (8)

$$F_{ij} = H_{ij} - E_i\gamma_j + \gamma_i E_j \tag{8}$$

où l'on a posé

$$H_{ij} \equiv \gamma_{ir}\gamma_{js}F^{rs} \quad , \quad E_i \equiv \gamma_{ir}\gamma_s F^{rs}. \tag{9}$$

Introduisons de plus le vecteur d'espace

$$\mathscr{H}_\alpha \equiv (*\underline{\underline{H}})_\alpha \equiv \frac{1}{2}\tilde{\eta}_{\alpha\rho\tau}H^{\rho\tau} \qquad (\mathscr{H}_4 \equiv 0) \tag{10}$$

où $\tilde{\eta}_{\alpha\rho\tau}$ est le tenseur impair de Ricci dans l'espace vectoriel tridimensionnel Σ_x.

La formule (8) peut être mise alors sous la forme intrinsèque suivante:

$$\underline{\underline{F}} = \tilde{*}\,\underline{\mathscr{H}} - \underline{E} \otimes \underline{\gamma} + \underline{\gamma} \otimes \underline{E}. \tag{11}$$

Par rapport au repère physique S on appelle *tenseur champ magnétique* le tenseur antisymétrique d'espace H_{ij} et respectivement *vecteur champ électrique*, *vecteur champ magnétique* les vecteurs d'espace E_i, $\mathscr{H}_i$.

---

(7) P. Benvenuti, Formulazione relativa delle equazioni dell'elettromagnetismo in relatività generale, *Annali Scuola normale superiore di Pisa*, Série III, vol. XIV, 1960, p. 171-193. Cf. aussi C. Cattaneo, *Formulation relative des lois physiques...* citée en (3).

(8) On rappelle que pour faire la décomposition naturelle d'un tenseur quelconque, en chaque point x de V_4, l'espace vectoriel T_x tangent en x à V_4 est décomposé dans la somme de l'espace unidimensionnel Θ_x des vecteurs colinéaires à $\underline{\gamma}(x)$ et du 3-plan Σ_x normal à Θ_x.

Cela posé, l'équation (5) équivaut parfaitement aux deux équations vectorielles

$$(5')\quad \begin{aligned} &\mathscr{P}_\Sigma(\mathrm{F}_j) \equiv \tilde{\mathrm{F}}_j \equiv 2\gamma^{is}\eta_{jsr}\tilde{\nabla}_i^*\mathscr{H}^r + 2\gamma_{jr}\tilde{\eta}^{rh\alpha}\mathrm{C}_h\mathscr{H}_\alpha - \gamma^4\partial_4\mathrm{E}_j + \tilde{\mathrm{K}}_{ij}\mathrm{E}^i \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{K}}_i{}^i\mathrm{E}_j = 0 \qquad (\tilde{\mathrm{F}}_4 \equiv 0) \\ &\mathscr{P}_\Theta(\mathrm{F}_j) \equiv \mathrm{F}_\theta\gamma_j \equiv \left(\tilde{\nabla}_i^*\mathrm{E}^i - \frac{4}{c}\omega_\alpha\mathscr{H}^\alpha\right)\gamma_j = 0 \end{aligned}$$

où

$$(12)\qquad \omega^\alpha = \frac{c}{4}\tilde{\eta}^{\alpha\beta\gamma}\tilde{\Omega}_{\beta\gamma}$$

est la vitesse angulaire locale du repère physique S [9].

En faisant la décomposition naturelle du tenseur $\mathscr{F}_{ij}$ on obtient une expression, analogue à (11),

$$(13)\qquad \underline{\underline{\mathscr{F}}} = -*\underline{\mathrm{E}} - \underline{\mathscr{H}} \otimes \underline{\gamma} + \underline{\gamma} \otimes \underline{\mathscr{H}},$$

et dans le repère physique S l'équation (6) équivaut aux deux équations vectorielles [10]

$$(6')\quad \begin{aligned} &\mathscr{P}_\Sigma(\mathscr{F}_j) \equiv \tilde{\mathscr{F}}_j \equiv -2\gamma^{is}\eta_{jsr}\tilde{\nabla}_i^*\mathrm{E}^r - 2\gamma_{jr}\tilde{\eta}^{rh\alpha}\mathrm{C}_h\mathrm{E}_\alpha - \gamma^4\partial_4\mathscr{H}_j + \tilde{\mathrm{K}}_{ij}\mathscr{H}^i \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{2}\mathrm{K}_i{}^i\mathscr{H}_j = 0 \\ &\mathscr{P}_\Theta(\mathscr{F}_j) \equiv \mathscr{F}_\theta\gamma_j \equiv \left(\tilde{\nabla}_i^*\mathscr{H}^i + \frac{4}{c}\omega_\alpha\mathrm{E}^\alpha\right)\gamma_j = 0. \end{aligned}$$

---

(9) Rappelons ici brièvement que, en introduisant la dérivée temporelle locale d'un vecteur d'espace $\underline{s}$ [cf. C. Cattaneo, *Formulation relative...* en (3)]

$$(\delta_{\mathrm{T}_0}\underline{s})_\alpha = c\gamma^4\partial_4 s_\alpha - c\tilde{\mathrm{K}}_{\alpha\beta}s^\beta$$

si nous considérons le volume propre $d\mathrm{S}_0 = \sqrt{\gamma}\,|\,dx^1\delta x^2\Delta x^3\,|$ d'un 3-parallélipipède infinitésimal du repère, dont les arêtes sont dirigées comme les éléments de la base naturelle de Σ_x, nous avons

$$\delta_{\mathrm{T}_0}(d\mathrm{S}_0) = c\gamma^4\partial_4(d\mathrm{S}_0) = \frac{1}{2}c\tilde{\mathrm{K}}_\alpha{}^\alpha d\mathrm{S}_0.$$

Par cette formule on peut donner aux équations (5′) l'expression très semblable à celle classique

$$\widetilde{\mathrm{rot}}\ \underline{\mathscr{H}} - \frac{1}{2c\sqrt{\gamma}}\partial_{\mathrm{T}_0}(\sqrt{\gamma}\,.\,\underline{\mathrm{E}}) = \underline{j}', \qquad \widetilde{\mathrm{div}}\ \underline{\mathrm{E}} = \rho'$$

où

$$j'_\nu = -\gamma_{\nu\rho}\tilde{\eta}^{\rho h\alpha}\mathrm{C}_h\mathscr{H}_\alpha = (\underline{\mathscr{H}} \wedge \underline{\mathrm{C}})_\nu, \qquad \rho' = \frac{4}{c}\underline{\omega}\,.\,\underline{\mathscr{H}}.$$

(10) De même que (5′) les équations (6′) peuvent s'écrire sous la forme

$$\widetilde{\mathrm{rot}}\ \underline{\mathrm{E}} + \frac{1}{2c\sqrt{\gamma}}\delta_{\mathrm{T}_0}(\sqrt{\gamma}\,.\,\underline{\mathscr{H}}) = \underline{\mathrm{E}} \wedge \underline{\mathrm{C}}, \qquad \widetilde{\mathrm{div}}\ \underline{\mathscr{H}} = -\frac{4}{c}\underline{\omega}\,.\,\underline{\mathrm{E}}.$$

Remarquons que les vecteurs F_j, $\mathcal{F}_j$ premiers membres des équations de Maxwell (5), (6) ont leurs divergences respectives nulles à cause de l'antisymétrie du tenseur F_{ij} et de son adjoint $\mathcal{F}_{ij}$:

$$(14)\quad \nabla_i F^i = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}F^i) = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\partial_i[\sqrt{-g}\nabla_r(\eta^{irmn}\mathcal{F}_{mn})] = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\varepsilon^{irmn}\partial_i\partial_r\mathcal{F}_{mn} = 0$$

$$(15)\quad \nabla_i\mathcal{F}^i = 0.$$

Dans le repère physique S ces identités peuvent être mises sous la forme [11]:

$$(14')\quad \nabla_i F^i \equiv g^{ik}\nabla_i(\tilde{F}_k + F_\theta\gamma_k) \equiv \gamma^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_\alpha\tilde{F}_\beta - \gamma^4\partial_4 F_\theta - \gamma^{\alpha\beta}\{\widetilde{{}_\alpha{}^\sigma{}_\beta}\}^*\tilde{F}_\sigma + C_\alpha\tilde{F}^\alpha + \frac{1}{2}F_\theta\tilde{K}_\alpha{}^\alpha = 0$$

$$(15')\quad \nabla_i\mathcal{F}^i \equiv g^{ik}\nabla_i(\tilde{\mathcal{F}}_k + \mathcal{F}_\theta\gamma_k) \equiv \gamma^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_\alpha\tilde{\mathcal{F}}_\beta - \gamma^4\partial_4\mathcal{F}_\theta - \gamma^{\alpha\beta}\{\widetilde{{}_\alpha{}^\sigma{}_\beta}\}^*\tilde{\mathcal{F}}_\sigma + C_\alpha\tilde{\mathcal{F}}^\alpha + \frac{1}{2}\mathcal{F}_\theta\tilde{K}_\alpha{}^\alpha = 0$$

Il faut même remarquer que des relations [cf. $(9)_2$, (10)]

$$E_\alpha = \gamma_{\alpha r}\gamma_s F^{rs}, \qquad \mathcal{H}_\alpha = \frac{1}{2}\tilde{\eta}_{\alpha\rho\tau}H^{\rho\tau} \equiv \frac{1}{2}\tilde{\eta}_{\alpha\rho\tau}F^{\rho\tau}$$

on peut déduire les inverses à condition qu'on ait det. $\|\gamma_{\rho\tau}\| \neq 0$.

3. Équations d'Einstein pour un schéma champ électromagnétique pur.

Pour étudier l'interaction du champ électromagnétique et du champ gravitationnel dans un domaine d'espace-temps V_4 où il n'y a pas de matière il faut étudier l'ensemble des équations de Maxwell (5), (6) et des équations d'Einstein

$$(16)\qquad G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = -\chi T_{ij},$$

---

(11) On a

$$\nabla_i\tilde{F}_j \equiv \tilde{\partial}_i\tilde{F}_j - \{\widetilde{{}_i{}^h{}_j}\}^*\tilde{F}_h + \frac{1}{2}(\tilde{K}_{ir} + \tilde{\Omega}_{ir})\tilde{F}^r\gamma_j + \left[\frac{1}{2}(\tilde{K}_{jh} + \tilde{\Omega}_{jh})\tilde{F}^h - \gamma^4\partial_4\tilde{F}_j\right] - C_h\tilde{F}^h\gamma_i\gamma_j,$$

$$\nabla_i(F_\theta\gamma_j) \equiv \frac{1}{2}F_\theta(\tilde{K}_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij}) + \tilde{\partial}_i F_\theta\cdot\gamma_j - F_\theta\gamma_i\cdot C_j + \gamma^4\partial_4 F_\theta\cdot\gamma_i\gamma_j$$

et des formules parfaitement semblables peuvent s'écrire pour $\nabla_i\tilde{\mathcal{F}}_j$ et $\nabla_i(\mathcal{F}_\theta\gamma_j)$.

où T_{ij} est le tenseur d'impulsion-énergie de Maxwell

$$(17) \qquad T_{ij} \equiv g^{ls}F_{il}F_{js} - \frac{1}{4}g_{ij}F_{lm}F^{lm},$$

pour lequel on a

$$(18) \qquad T \equiv g^{ij}T_{ij} = 0.$$

Supposons donné dans l'espace-temps V_4 un repère physique S, et soit $\underline{\gamma}(x)$ le champ de vecteurs unitaires orientés dans le temps associé à ce repère; la décomposition naturelle du champ des tenseurs T_{ij} donne

$$(19) \qquad T_{ij} = \tilde{T}_{ij} + \tilde{T}_i\gamma_j + \gamma_i\tilde{T}_j + \tilde{T}\gamma_i\gamma_j.$$

En posant [12]

	$h = \tilde{T} = \gamma_r\gamma_s T^{rs}$	densité relative d'énergie
	$\mu = \dfrac{h}{c^2}$	densité relative de masse
(20)	$\tilde{g}_i = \dfrac{1}{c}\tilde{T}_i = -\dfrac{1}{c}\gamma_{ij}\gamma_r T^{jr}$	densité relative d'impulsion
	$\tilde{P}_i = c^2\tilde{g}_i$	densité relative de courant d'énergie (vecteur de Poynting)
	$\tilde{P}_{ij} = \tilde{T}_{ij} = \gamma_{ir}\gamma_{js}T^{rs}$	densité relative de courant d'impulsion (tenseur de Poynting)

si nous tenons compte de (2), (3) nous pouvons donner à (16) la forme suivante relative au repère physique S:

$$(16') \qquad \begin{aligned} s_{\alpha\rho} - \frac{1}{2}R\gamma_{\alpha\rho} &= -\chi\tilde{P}_{\alpha\rho} \qquad (\tilde{P}_{4j} \equiv 0) \\ S_\alpha &= -\frac{1}{c}\chi\tilde{P}_\alpha, \qquad (\tilde{P}_4 \equiv 0) \\ \tilde{R}^* + \mathscr{I} &= -2\chi h. \end{aligned}$$

D'autre part de (16) et (18) on déduit

$$(21) \qquad G \equiv G^i_{\ i} \equiv -R = -\chi g^{ij}T_{ij} = 0;$$

[12] Cf. C. CATTANEO, *Formulation relative des lois physiques*, citée en [3], p. 108-109.

par suite les équations (16) et (16′) peuvent s'écrire respectivement [13]

$$R_{ij} = -\chi T_{ij} \tag{22}$$

et

$$s_{\alpha\beta} = -\chi\tilde{P}_{\alpha\beta}, \qquad S_\alpha = -\frac{\chi}{c}\tilde{P}_\alpha, \qquad \tilde{R}^* + \mathscr{I} = -2\chi h, \tag{22′}$$

§ 2. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS DE MAXWELL-EINSTEIN DANS LE VIDE ET SON PARTAGE EN DEUX PROBLÈMES DISTINCTS

4. Analyse des équations de Maxwell-Einstein.

Rappelons que pour donner aux équations de Maxwell-Einstein une expression relative à un repère physique donné S nous avons choisi arbitrairement ce repère physique. Donnons maintenant dans V_4 une hypersurface $\overline{\Sigma}$ orientée dans l'espace et supposons que le champ de vecteurs $\underline{\gamma}(x)$ associés au repère physique S dans tout point de l'hypersurface $\overline{\Sigma}$ soit orthogonal à la même $\overline{\Sigma}$:

$$\gamma_i\xi^i = 0, \qquad \forall\xi^i \in \overline{\Sigma}.$$

Choisissons ensuite un système de coordonnées locales (x^i) adaptées au

---

[13] L'expression du tenseur symétrique d'espace $s_{\alpha\beta}$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
s_{\alpha\beta} \equiv {} & \frac{1}{2}(\gamma^4)^2\gamma^{\rho\sigma}[-\gamma_\alpha\gamma_\beta\partial_4\partial_4\gamma_{\rho\sigma} + \gamma_\beta\gamma_\sigma\partial_4\partial_4\gamma_{\alpha\rho} + \gamma_\alpha\gamma_\rho\partial_4\partial_4\gamma_{\sigma\beta} - \gamma_\rho\gamma_\sigma\partial_4\partial_4\gamma_{\alpha\beta}] \\
& + \frac{1}{2}(\gamma^4)^2[\partial_4\partial_4\gamma_{\alpha\beta} - \gamma_\beta\partial_4\partial_4\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\partial_4\partial_4\gamma_\beta] \\
& + \frac{1}{2}\gamma^4\gamma^{\rho\sigma}[-\gamma_\alpha\partial_\beta\partial_4\gamma_{\rho\sigma} - \gamma_\beta\partial_\alpha\partial_4\gamma_{\rho\sigma} + \gamma_\beta\partial_\rho\partial_4\gamma_{\alpha\sigma} + \gamma_\rho\partial_\beta\partial_4\gamma_{\alpha\sigma} + \gamma_\alpha\partial_\rho\partial_4\gamma_{\sigma\beta} + \gamma_\rho\partial_\alpha\partial_4\gamma_{\sigma\beta} - 2\gamma_\sigma\partial_\rho\partial_4\gamma_{\alpha\beta}] \\
& - \frac{1}{2}\gamma^4(\partial_4\partial_\alpha\gamma_\beta + \partial_4\partial_\beta\gamma_\alpha) + \frac{1}{2}\gamma^{\rho\sigma}[\partial_\rho\partial_\beta\gamma_{\alpha\sigma} + \partial_\rho\partial_\alpha\gamma_{\sigma\beta} - \partial_\rho\partial_\sigma\gamma_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta\gamma_{\rho\sigma}] \\
& + \gamma^4\partial_\alpha\partial_\beta\gamma_4 + \frac{1}{2}(\gamma^4)^2[\gamma_\alpha\partial_4\partial_\beta\gamma_4 + \gamma_\beta\partial_4\partial_\alpha\gamma_4] \\
& + \frac{1}{2}(\tilde{K}_{\beta\alpha} + \tilde{\Omega}_{\beta\alpha})\tilde{K}^\rho{}_\rho - \frac{1}{2}(\tilde{K}^\rho{}_\beta + \tilde{\Omega}^\rho{}_\beta)\tilde{K}_{\rho\alpha} + \frac{1}{2}\tilde{\Omega}^\rho{}_\alpha\tilde{\Omega}_{\rho\beta} - C_\alpha C_\beta + \frac{1}{2}\partial_4\gamma^4\tilde{K}_{\alpha\beta} \\
& + [C_\alpha\partial_4(\gamma_\beta\gamma^4) + C_\beta\partial_4(\gamma_\alpha\gamma^4)] + C_\alpha[\gamma_4\partial_\beta\gamma^4 - \gamma_\beta\partial_4\gamma^4] + (\widetilde{\beta\alpha, \sigma})^*\gamma^{\sigma\rho}C_\rho
\end{aligned}$$

champ de vecteurs $\underline{\gamma}(x)$ et à l'hypersurface $\bar{\Sigma}$ ([14]); on en déduit que sur $\bar{\Sigma}$ on a

$$(\gamma_\alpha)_{\bar{\Sigma}} = 0, \qquad (\gamma^4)_{\bar{\Sigma}} \neq 0. \tag{23}$$

Après ce choix les équations $(5')_2$, $(6')_2$, $(22')_2$, $(22')_3$, qu'il est convenable de récrire toutes à la fois

$$(24) \qquad \begin{aligned} F_\theta &\equiv \tilde{\nabla}^*_\alpha E^\alpha - \frac{4}{c}\,\omega_\alpha \mathscr{H}^\alpha = 0 \\ \mathscr{F}_\theta &\equiv \tilde{\nabla}^*_\alpha \mathscr{H}^\alpha + \frac{4}{c}\,\omega_\alpha E^\alpha = 0 \\ S_\alpha &\equiv \frac{1}{2}[\tilde{\nabla}^*_\alpha(\tilde{K}^\rho{}_\rho) - \tilde{\nabla}^*_\nu(\tilde{K}_\alpha{}^\nu + \tilde{\Omega}_\alpha{}^\nu)] + C^\beta\tilde{\Omega}_{\beta\alpha} = -\frac{\chi}{c}\tilde{P}_\alpha \\ \tilde{R}^* &+ \frac{1}{4}[(\tilde{K}^\alpha{}_\alpha)^2 - \tilde{K}^{\alpha\beta}\tilde{K}_{\alpha\beta} + 3\tilde{\Omega}^{\alpha\beta}\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}] = -2\chi h, \end{aligned}$$

en rappelant que le tenseur $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}$ a l'expression

$$\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} \equiv \gamma_4\left[\tilde{\partial}_\alpha\left(\frac{\gamma_\beta}{\gamma_4}\right) - \tilde{\partial}_\beta\left(\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_4}\right)\right]$$

donnent lieu sur $\bar{\Sigma}$ aux conditions ([15])

$$\begin{aligned} &\tilde{\nabla}^*_\alpha E^\alpha = 0, \qquad \tilde{\nabla}^*_\alpha \mathscr{H}^\alpha = 0 \\ &\tilde{\nabla}^*_\alpha(K^\rho{}_\rho) - \tilde{\nabla}^*_\nu(\tilde{K}_\alpha{}^\nu) = -\frac{2\chi}{c}\tilde{P}_\alpha \qquad (\bar{\Sigma}) \\ \tilde{R}^* &+ \frac{1}{4}[(\tilde{K}^\alpha{}_\alpha)^2 - \tilde{K}^{\alpha\beta}\tilde{K}_{\alpha\beta}] = -2\chi h \end{aligned}$$

auxquelles les vecteurs E_i, $\mathscr{H}_i$, les tenseurs γ_{ij}, $\tilde{K}_{ij}$ et leurs dérivées spatiales doivent satisfaire.

Tout cela posé, supposons provisoirement connus deux champs de vecteurs E_i, $\mathscr{H}_i$ et un champ de tenseurs γ_{ik} vérifiant sur $\bar{\Sigma}$ les équations (25), qui satisfont dans un voisinage W de $\bar{\Sigma}$ aux équations $(5')_1$, $(6')_1$, $(22')_1$ c'est-à-dire aux équations tensorielles *spatiales*

$$(26) \qquad \begin{aligned} &\tilde{F}_\alpha = 0, \quad (\tilde{F}_4 \equiv 0); \qquad \tilde{\mathscr{F}}_\alpha = 0, \quad (\tilde{\mathscr{F}}_4 \equiv 0); \\ &s_{\alpha\beta} = -\chi\tilde{P}_{\alpha\beta} \qquad (s_{4j} \equiv 0, \quad \tilde{P}_{4j} \equiv 0). \end{aligned}$$

([14]) C'est-à-dire telles que les lignes du champ vectoriel $\gamma^i(x)$ et l'hypersurface $\bar{\Sigma}$ ont respectivement les équations $x^\alpha = \text{const.}$, $x^4 = 0$.

([15]) On rappelle que les vecteurs $\underline{E}$, $\underline{\mathscr{H}}$ sont déduits du tenseur F_{ij} par les relations $(9)_2$, (10).

Pour une telle solution les identités (14), (15) donnent lieu aux équations suivantes dans les fonctions inconnues F_θ, $\mathscr{F}_\theta$

$$\gamma^4 \partial_4 F_\theta = \frac{1}{2} F_\theta \tilde{K}_\alpha^{\ \alpha} \tag{27}$$

$$\gamma^4 \partial_4 \mathscr{F}_\theta = \frac{1}{2} \mathscr{F}_\theta \tilde{K}_\alpha^{\ \alpha}. \tag{28}$$

Ces équations linéaires et homogènes n'admettent, pour des données $(F_\theta)_{\overline{\Sigma}}$, $(\mathscr{F}_\theta)_{\overline{\Sigma}}$ sur $\overline{\Sigma}$ nulles, d'autre solution que la solution nulle ([16]).

On voit ainsi que si deux champs de vecteurs E_i, $\mathscr{H}_i$ et un champ de tenseurs γ_{ik} satisfont au voisinage de $\overline{\Sigma}$ aux équations (26) et sur $\overline{\Sigma}$ aux conditions (25), ils satisfont aussi au même voisinage de $\overline{\Sigma}$ aux équations [cf. $(5')_2$, $(6')_2$]

$$F_\theta = 0, \qquad \mathscr{F}_\theta = 0.$$

Considérons maintenant la relation différentielle [cf. (16)]

$$\nabla_j (G^j_{\ m} + \chi T^j_{\ m}) = 0. \tag{29}$$

et en faisons les projections naturelles. En rappelant (2), (20) ainsi que ([17])

$$\mathscr{P}_\Sigma(\nabla_j s^j_{\ m}) = \tilde{\nabla}^*_j s^j_{\ m} + C_h s^h_{\ m}, \quad \mathscr{P}_\Theta(\nabla_j s^j_{\ m}) = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{jr} + \tilde{\Omega}_{jr}) s^{jr} \gamma_m,$$

$$\nabla_j \gamma^j_{\ m} = C_m + \frac{1}{2} \tilde{K}^\alpha_{\ \alpha} \gamma_m,$$

$$\nabla_j\left(S^j + \frac{\chi}{c} P^j\right) = \tilde{\nabla}^*_j\left(S^j + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^j\right) + C_h\left(S^h + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^h\right),$$

$$\nabla_j \gamma_m = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{jm} + \tilde{\Omega}_{jm}) - \gamma_j C_m,$$

$$\begin{aligned} \gamma^j \nabla_j\left(S_m + \frac{\chi}{c}\tilde{P}_m\right) = \gamma^4 \partial_4\left(S_m + \frac{\chi}{c}\tilde{P}_m\right) - \frac{1}{2}(\tilde{K}_{mh} + \tilde{\Omega}_{mh})\left(S^h + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^h\right) \\ + C_h\left(S^h + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^h\right)\gamma_m, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\gamma^j \nabla_j\left[\frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right] = \gamma^4 \partial_4\left[\frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right],$$

$$\nabla_j(\gamma^j \gamma_m) = C_m + \frac{1}{2}\tilde{K}^\alpha_{\ \alpha}\gamma_m,$$

([16]) Voir M. Cinquini-Cibrario e S. Cinquini, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, Cremonese, Roma, 1964, p. 320.

([17]) Voir C. Cattaneo, *Proiezioni naturali e derivazione trasversa...* cité en ([3]).

on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_j^*(s^j{}_m + \chi\tilde{P}^j{}_m) + C_h(s^h{}_m + \chi\tilde{P}^h{}_m) - \frac{1}{2}\tilde{\partial}_m R - \frac{1}{2} R C_m \\
&\qquad + \left[\frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right] C_m + \frac{1}{2}\tilde{K}^\alpha{}_\alpha\left(S_m + \frac{\chi}{c}\tilde{P}_m\right) \\
&\qquad + \gamma^4\partial_4\left(S_m + \frac{\chi}{c}\tilde{P}_m\right) + \left(S^j + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^j\right)\tilde{\Omega}_{jm} = 0
\end{aligned}
\tag{29'}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\tilde{K}_{jr} + \tilde{\Omega}_{jr})(s^{jr} + \chi\tilde{P}^{jr}) - \frac{1}{4} R\tilde{K}^\alpha{}_\alpha + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right]\tilde{K}^\alpha{}_\alpha \\
&\quad + \tilde{\nabla}_j^*\left(S^j + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^j\right) + 2C_h\left(S^h + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^h\right) + \gamma^4\partial_4\left[\frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Observons d'ailleurs que pour la solution des équations (26) que nous avons supposé connue on a

$$
\begin{aligned}
\gamma^{\alpha\beta}s_{\alpha\beta} \equiv \tilde{R}^* + \frac{1}{4}(\tilde{K}^\alpha{}_\alpha)^2 - \frac{1}{2}\tilde{K}^{\alpha\rho}\tilde{K}_{\alpha\rho} + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\gamma^4\partial_4(\tilde{K}_{\beta\alpha} + \tilde{\Omega}_{\beta\alpha}) - C^\beta C_\beta - \tilde{\nabla}_\beta^* C^\beta \\
+ \frac{1}{2}\tilde{\Omega}^{\alpha\beta}\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = -\chi\gamma^{\alpha\beta}\tilde{P}_{\alpha\beta};
\end{aligned}
$$

en tenant compte des identités

$$
\tilde{K}^{\alpha\beta} = -\gamma^4\partial_4\gamma^{\alpha\beta}
$$

$$
R \equiv \tilde{R}^* + \frac{1}{4}[(\tilde{K}^\alpha{}_\alpha)^2 + \tilde{K}^{\alpha\beta}\tilde{K}_{\alpha\beta} + \tilde{\Omega}^{\alpha\beta}\tilde{\Omega}_{\alpha\beta}] + \gamma^4\partial_4(\tilde{K}^\alpha{}_\alpha) - 2(\tilde{\nabla}_\rho^* C^\rho + C^\rho C_\rho)
$$

on en déduit

$$
-R = \tilde{R}^* + \mathscr{I} + 2\chi\tilde{P} \qquad (\tilde{P} \equiv \gamma^{\alpha\beta}\tilde{P}_{\alpha\beta}). \tag{31}
$$

Par suite si nous substituons dans les relations (29′) aux tenseurs quelconques γ_{ik}, F_{ik} les tenseurs satisfaisant aux équations (26) [voir dernière remarque du n° 2] et tenons compte de (31) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\tilde{\partial}_m(\tilde{R}^* + \mathscr{I} + 2\chi\tilde{P}) + \frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathscr{I} + 2\chi\tilde{P})C_m + \left[\frac{1}{2}(R^* + \mathscr{I}) + \chi h\right]C_m \\
&\qquad + \frac{1}{2}\tilde{K}^\alpha{}_\alpha\left(S_m + \frac{\chi}{c}\tilde{P}_m\right) + \gamma^4\partial_4\left(S_m + \frac{\chi}{c}\tilde{P}_m\right) \\
&\qquad + \left(S^j + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^j\right)\tilde{\Omega}_{jm} = 0
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(\tilde{R}^* + \mathscr{I} + 2\chi P)\tilde{K}^\alpha{}_\alpha + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right]\tilde{K}^\alpha{}_\alpha + \tilde{\nabla}_\rho^*\left(S^\rho + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^\rho\right) \\
&\qquad + \gamma^4\partial_4\left[\frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right] + 2C_\rho\left(S^\rho + \frac{\chi}{c}\tilde{P}^\rho\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Puisque le tenseur d'impulsion-énergie de Maxwell satisfait à la condition (18), on a

$$\tilde{\mathrm{P}} \equiv \gamma^{\alpha\beta}\tilde{\mathrm{P}}_{\alpha\beta} \equiv g^{rs}\gamma_{rm}\gamma_{sn}\mathrm{T}^{mn} = \gamma_m\gamma_n\mathrm{T}^{mn} = h, \tag{33}$$

et les relations (32) prennent la forme

$$\begin{aligned}
&\tilde{\partial}_m\left[\frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right] + 2\left[\frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right]\mathrm{C}_m + \gamma^4\partial_4\left(\mathrm{S}_m + \frac{\chi}{c}\tilde{\mathrm{P}}_m\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\mathrm{S}_m + \frac{\chi}{c}\tilde{\mathrm{P}}_m\right)\tilde{\mathrm{K}}^\alpha{}_\alpha + \left(\mathrm{S}^j + \frac{\chi}{c}\tilde{\mathrm{P}}^j\right)\tilde{\Omega}_{jm} = 0 \\
&\gamma^4\partial_4\left[\frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right] + \tilde{\nabla}^*_\rho\left(\mathrm{S}^\rho + \frac{\chi}{c}\tilde{\mathrm{P}}^\rho\right) + \left[\frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I}) + \chi h\right]\tilde{\mathrm{K}}^\alpha{}_\alpha \\
&\qquad + 2\mathrm{C}_\rho\left(\mathrm{S}^\rho + \frac{\chi}{c}\tilde{\mathrm{P}}^\rho\right) = 0.
\end{aligned} \tag{32'}$$

A condition qu'on ait

$$1 + \gamma^{4\alpha}\gamma_4\gamma_\alpha \neq 0 \tag{34}$$

en posant

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathscr{I}) + \chi h \quad , \quad \mathrm{B}_r = \mathrm{S}_r + \frac{\chi}{c}\tilde{\mathrm{P}}_r$$

les relations (32′) s'écrivent

$$\begin{aligned}
\gamma^4\partial_4\mathrm{B}_\alpha &= \mathrm{A}^{\beta\rho}_\alpha\partial_\beta\mathrm{B}_\rho + \mathrm{L}^\beta{}_\alpha\partial_\beta\mathscr{A} + \mathscr{L}_\alpha(\mathscr{A}, \mathrm{B}_\rho) \\
\gamma^4\partial_4\mathscr{A} &= \mathrm{A}^{\beta\rho}_4\partial_\beta\mathrm{B}_\rho + \mathrm{L}^\beta{}_4\partial_\beta\mathscr{A} + \mathscr{L}_4(\mathscr{A}, \mathrm{B}_\rho)
\end{aligned} \tag{32''}$$

où les coefficients $\mathrm{A}^{\beta\rho}_i$, L^β_i dépendent des fonctions γ_i, γ^{rs} et les $\mathscr{L}_i$ sont des fonctions linéaires homogènes des B_ρ, $\mathscr{A}$. Ainsi les fonctions B_ρ, $\mathscr{A}$ satisfont à un système de 4 équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes qui pour des données $(\mathrm{B}_\rho)_{\overline{\Sigma}}$, $(\mathscr{A})_{\overline{\Sigma}}$ nulles sur $\overline{\Sigma}$ n'admettent d'autre solution que la solution nulle ([18]).

Nous avons vu donc que si un champ de tenseurs γ_{ik} et deux champs de vecteurs E_i, $\mathscr{H}_i$ satisfont aux équations (26) et sur $\overline{\Sigma}$ aux conditions (25), ils satisfont en dehors de $\overline{\Sigma}$ aux équations (24). Pour cela le problème de Cauchy pour les équations de Maxwell-Einstein peut être partagé en deux problèmes distincts que nous énoncerons tous les deux en forme *intrinsèque:* le problème des données initiales, le problème restreint d'évolution.

([18]) Voir traité cité en ([16]), p. 320.

5. Formulation du problème des données initiales.

Étant donnée une variété à quatre dimensions V_4, différentiable et orientable, considérons:

a) un morceau d'hypersurface régulière $\overline{\Sigma}$;

b) un domaine à trois dimensions D sur $\overline{\Sigma}$, et en tout point Q de D l'espace vectoriel $\overline{\pi}_Q$ tangent à $\overline{\Sigma}$;

c) un voisinage $\overline{W}$ (à 4 dimensions) de l'hypersurface $\overline{\Sigma}$, de trace D sur $\overline{\Sigma}$, et dans $\overline{W}$ un champ de vecteurs contravariants γ^i qui sur $\overline{\Sigma}$ ne soient pas tangents à $\overline{\Sigma}$, un champ de vecteurs covariants η_i vérifiant partout dans $\overline{W}$ la condition

$$\gamma^i \eta_i = -1 \qquad (\overline{W}) \tag{35}$$

et sur $\overline{\Sigma}$

$$\eta_i \overline{\xi}^i = 0 \qquad \forall \overline{\xi}^i \in \overline{\pi}_Q \tag{36}$$

Cela posé choisissons dans $\overline{W}$ un système de coordonnées (x^i) adaptées au champ de vecteurs $\gamma^i(x)$ et à l'hypersurface $\overline{\Sigma}$; par ces coordonnées on a partout dans $\overline{W}$

$$\gamma^\alpha = 0 \qquad (\overline{W})$$

et sur $\overline{\Sigma}$

$$\eta_\alpha = 0 \qquad (\overline{\Sigma}).$$

Proposons-nous alors de chercher deux tenseurs symétriques $\overline{\gamma}_{ij}$, $\overline{\varphi}_{ij}$ de l'espace $\overline{\pi}_Q \otimes \overline{\pi}_Q$ vérifiant les conditions

$$\overline{\gamma}_{ij}\gamma^i = 0, \qquad \overline{\varphi}_{ij}\gamma^j = 0 \tag{37}$$

$$(\overline{\gamma}_{ij} - \overline{\gamma}_i\overline{\gamma}_j)\overline{\xi}^i\overline{\xi}^j > 0 \qquad \forall \overline{\xi}^r \in \overline{\pi}_Q \tag{38}$$

et deux vecteurs de $\overline{\pi}_Q$, $\overline{E}_\alpha$, $\overline{\mathscr{H}}_\alpha$ satisfaisant aux équations [cf. (25)]

$$\begin{gathered} \tilde{\nabla}^*_\alpha E^\alpha = 0 \quad , \quad \tilde{\nabla}^*_\alpha \mathscr{H}^\alpha = 0 \\ \tilde{\nabla}^*_\alpha(\overline{\varphi}^\rho{}_\rho) - \tilde{\nabla}^*_\beta(\overline{\varphi}_\alpha{}^\beta) = -\frac{2\chi}{c}\tilde{P}_\alpha \\ (\tilde{R}^*)_{\overline{\Sigma}} + \frac{1}{4}[(\overline{\varphi}_\alpha{}^\alpha)^2 - \overline{\varphi}^{\alpha\beta}\overline{\varphi}_{\alpha\beta}] = -2\chi(h)_{\overline{\Sigma}}. \end{gathered} \tag{39}$$

Dans les équations (39) le tenseur $\overline{\gamma}_{ij}$ donne le tenseur métrique de $\overline{\Sigma}$, le scalaire $(\tilde{R}^*)_{\overline{\Sigma}} = \overline{\gamma}^{\alpha\beta}(\tilde{P}^*_{\alpha\beta})_{\overline{\Sigma}}$ s'obtient par $(3)_2$ en posant en cette expression $(\gamma_{\alpha\beta})_{\overline{\Sigma}} = \overline{\gamma}_{\alpha\beta}$, $(\gamma^4\partial_4\gamma_{\alpha\beta})_{\overline{\Sigma}} = \overline{\varphi}_{\alpha\beta}$, $(\gamma_i)_{\overline{\Sigma}} = (\eta_i)_{\overline{\Sigma}} = \overline{\eta}_i$ et les vecteurs $\overline{E}_\alpha$, $\overline{\mathscr{H}}_\alpha$ donnent sur $\overline{\Sigma}$ respectivement les vecteurs champ électrique et champ magnétique [cf. (9), (10)].

6. Formulation du problème restreint d'évolution.

En supposant avoir déterminé deux tenseurs symétriques $\overline{\gamma}_{ij}$, $\overline{\varphi}_{ij}$ et deux vecteurs $\overline{\mathrm{E}}_i$, $\overline{\mathscr{H}}_i$ satisfaisant au problème des données initiales, nous nous proposons de chercher dans un voisinage de $\overline{\Sigma}$, de trace D sur $\overline{\Sigma}$, un champ de tenseurs symétriques γ_{ik} et deux champs de vecteurs E_i, $\mathscr{H}_i$ astreints partout aux conditions (γ^i est le champ contravariant satisfaisant à l'hypothèse *c*, n° 5):

$$\gamma_{ik}\gamma^k = 0 \quad , \quad \mathrm{E}_i\gamma^i = 0 \quad , \quad \mathscr{H}_i\gamma^i = 0 \tag{40}$$

qui satisfassent aux équations [cf. (26)]

$$\tilde{\mathrm{F}}_\alpha = 0 \quad , \quad \tilde{\mathscr{F}}_\alpha = 0 \quad , \quad s_{\alpha\beta} = -\chi\tilde{\mathrm{P}}_{\alpha\beta} \tag{41}$$

et sur $\overline{\Sigma}$ aux conditions

$$(\gamma_{ij})_{\overline{\Sigma}} = \overline{\gamma}_{ij} \quad , \quad (\gamma^4\partial_4\gamma_{ij})_{\overline{\Sigma}} = \overline{\varphi}_{ij} \quad , \quad (\mathrm{E}_j)_{\overline{\Sigma}} = \overline{\mathrm{E}}_j \quad , \quad (\mathscr{H}_j)_{\overline{\Sigma}} = \overline{\mathscr{H}}_j. \tag{42}$$

On peut faire tout de suite les remarques suivantes :

a) Ayant choisi des coordonnées adaptées au champ de vecteurs $\gamma^i(x)$ et à l'hypersurface $\overline{\Sigma}$, la condition (40) impose que les composantes γ_{4j} du tenseur inconnu γ_{ik} soient nulles partout sur W.

b) Aussitôt que le champ de tenseurs γ_{ik} a été déterminé, l'autre champ de tenseurs

$$g_{ij} = \gamma_{ij} - \eta_i\eta_j \tag{43}$$

donne univoquement le tenseur métrique de la variété V_4.

c) Le champ de vecteurs $\eta_i(x)$ représente l'expression covariante du champ de vecteurs $\gamma^i(x)$ (qui dans la métrique obtenue résulte unitaire) et par conséquent un repère physique résulte aussi déterminé dans V_4, dont le tenseur γ_{ik} fournit le tenseur métrique d'espace.

7. Existence et unicité de la solution du problème restreint d'évolution.

En supposant résolu le problème des données initiales dans le cas non analytique, nous nous proposons de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème restreint d'évolution. Nous procéderons à la manière suivante. Nous supposerons d'abord connue une telle solution et montrerons qu'on en peut déduire d'une façon univoque une solution du système complet d'équations de Maxwell-Einstein écrites en coordonnées isothermes. Après, en vertu d'un théorème de Mme Bruhat ([19]) assurant l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy pour les équations de Maxwell-Einstein écrites en coordonnées isothermes, nous montrerons que, une telle solution donnée, on en peut obtenir de façon unique la solution du problème restreint d'évolution. Cette solution ne sera plus astreinte à vérifier les conditions (supplémentaires) initiales imposées des coordonnées isothermes; mais satisfera seulement sur $\bar{\Sigma}$ aux équations (de compatibilité) du problème des données initiales.

I. Supposons donc que dans un voisinage W de $\bar{\Sigma}$ où le champ γ^i est donné les équations d'évolution (41) aient une solution γ_{ij}, E_i, $\mathscr{H}_i$ vérifiant sur $\bar{\Sigma}$ les conditions (42). Dans le repère physique S qui par suite résulte détermine univoquement les équations d'évolution (41) représentent la projection purement spatiale des équations respectives

$$F_j \equiv \nabla_i F_j{}^i = 0, \tag{5}$$

$$\mathscr{F}_j \equiv \nabla_i \mathscr{F}_j{}^i = 0, \tag{6}$$

$$R_{ij} = -\chi T_{ij}, \tag{22}$$

tandis que les équations (39), les trois premières multipliées par γ_i et la dernière par $\gamma_i\gamma_j$ représentent les autres projections des mêmes équations (5), (6), (22) considérées sur $\bar{\Sigma}$ [cf. (24), (25)].

Nous avons montré d'ailleurs au n° 4 que les équations

$$\begin{aligned} &F_\theta = 0, &&\mathscr{F}_\theta = 0 \\ &S_\alpha = -\frac{\chi}{c}\tilde{P}_\alpha, &&\tilde{R}^* + \mathscr{I} = -2\chi h \end{aligned} \tag{24}$$

supposées vérifiées sur $\bar{\Sigma}$, sont satisfaites partout dans un voisinage W de $\bar{\Sigma}$ des mêmes champs de tenseurs γ_{ij}, E_i, $\mathscr{H}_i$ qui dans W représentent une solution des équations d'évolution (41). Pour cela le champ de tenseurs symétriques (43) et le champ de tenseurs antisymétriques F_{rs} qu'on en peut déduire par (9), (10) des champs vectoriels E_i, $\mathscr{H}_i$ supposés connus, sont une solution du problème de Cauchy pour le système complet d'équations de Maxwell-Einstein (5), (6), (22).

Cela posé, effectuons un changement de coordonnées

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{44}$$

à condition que les coordonnées nouvelles $x^{i'}$ soient isothermes et coïncident sur $\bar{\Sigma}$ avec les x^i mêmes : dans ce but il suffit de choisir pour coor-

([19]) Mme Y. BRUHAT, *Théorème d'existence...* cité en ([2]).

données $x^{i'}$ quatre solutions indépendantes de l'équation hyperbolique

$$(45)\qquad g^{ij}\nabla_i\nabla_j\psi(x) \equiv g^{ij}[\partial_i\partial_j\psi - \Gamma_i{}^r{}_j\partial_r\psi(x)] = 0$$

satisfaisant sur $\bar{\Sigma}$ aux conditions

$$(46)\qquad x^{i'} = x^i \quad , \quad \partial_i x^{i'} = \delta^{i'}{}_i \qquad (\bar{\Sigma}).$$

Les conditions (45) et (46) déterminent de façon unique, les coordonnées $x^{i'}$.

En vertu de (46) les composantes des vecteurs γ^i, η_i, $\bar{\mathrm{E}}_i$, $\bar{\mathscr{H}}_i$ et des tenseurs $\bar{\gamma}_{ij}$, $\bar{\varphi}_{ij}$ restent toujours égales sur $\bar{\Sigma}$ dans le changement susdit, en ayant ici

$$(47)\quad (\mathrm{F}_{ij})_{\bar{\Sigma}} = (\mathrm{F}_{i'j'})_{\bar{\Sigma}} \quad , \quad (g_{ij})_{\bar{\Sigma}} = (g_{i'j'})_{\bar{\Sigma}} \quad , \quad (\partial_\alpha g_{ij})_{\bar{\Sigma}} = (\partial_{\alpha'} g_{i'j'})_{\bar{\Sigma}} \quad , \quad (\partial_4 g_{\alpha\beta})_{\bar{\Sigma}} = (\partial_{4'} g_{\alpha'\beta'})_{\bar{\Sigma}}\,;$$

au contraire les $\partial_4 g_{4i}$ changent sur $\bar{\Sigma}$ par la loi

$$(48)\qquad (\partial_4 g_{4i})_{\bar{\Sigma}} = (\partial_{4'} g_{4'i'} + \partial_4\partial_4 x^{r'}\cdot g_{r'i'} + \partial_4\partial_i x^{s'}\cdot g_{4's'})_{\bar{\Sigma}}$$

et les équations (45) déterminent sur $\bar{\Sigma}$ les quantités supplémentaires

$$(49)\qquad (g^{44}\partial_4\partial_4 x^{r'})_{\bar{\Sigma}} = (g^{jk}\Gamma_j{}^s{}_k\partial_s x^{r'})_{\bar{\Sigma}}.$$

Ainsi de l'existence d'une solution du problème restreint d'évolution on déduit l'existence d'une solution du problème de Cauchy pour le système complet d'équations de Maxwell-Einstein (5), (6), (22) écrites en coordonnées isothermes, solution vérifiant sur $\bar{\Sigma}$ les mêmes données de Cauchy auxquelles la solution du problème restreint d'évolution satisfait déjà par hypothèse :

$$(g_{\alpha'\beta'})_{\bar{\Sigma}} = \bar{\gamma}_{\alpha'\beta'} \quad ; \quad (g_{4'i'})_{\bar{\Sigma}} = -\bar{\gamma}_{4'}\bar{\gamma}_{i'} \quad , \quad (\gamma^{4'}\partial_{4'} g_{\alpha'\beta'})_{\bar{\Sigma}} = \bar{\varphi}_{\alpha'\beta'} \quad , \quad (\mathrm{E}_{i'})_{\bar{\Sigma}} = \bar{\mathrm{E}}_{i'} \quad , \quad (\mathscr{H}_{i'})_{\bar{\Sigma}} = \bar{\mathscr{H}}_{i'}.$$

Il convient de rappeler ici que les équations (6) expriment localement la condition nécessaire et suffisante pour que le champ de tenseurs antisymétriques F_{ij} soit le rotationnel d'un champ de vecteurs Φ_i :

$$(50)\qquad \mathrm{F}_{ij} = \partial_i\Phi_j - \partial_j\Phi_i.$$

D'autre part les équations (5) en coordonnées isothermes s'écrivent

$$(51)\qquad -\mathrm{F}_j \equiv \nabla^s\mathrm{F}_{sj} = g^{ik}\partial_k\mathrm{F}_{ij} - g^{ik}\left\{{}_k{}^n{}_j\right\}\mathrm{F}_{in} = 0$$

puisque ces coordonnées vérifient les équations

$$(52)\qquad \Delta_2 x^s \equiv g^{ik}\nabla_i\nabla_k x^s = g^{ik}[\partial_i\partial_k x^s - \left\{{}_i{}^r{}_k\right\}\partial_r x^s] = -g^{ik}\left\{{}_i{}^s{}_k\right\} = 0.$$

On en déduit alors que, compte tenu de (50) et de la condition habituelle de normalisation ([20])

$$(53) \qquad \nabla_i \Phi^i \equiv g^{ik}[\partial_i \Phi_k - \{ {}_{i}{}^{r}{}_{k} \} \Phi_r] = 0$$

les équations (51) deviennent

$$(54) \qquad g^{ik}\partial_i \partial_k \Phi_j + M_j(g_{rs}, \partial_r \Phi_s) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

avec

$$(55) \qquad M_j \equiv \partial_j g^{ki} \partial_k \Phi_i - g^{ik} \{ {}_{k}{}^{n}{}_{j} \} (\partial_i \Phi_n - \partial_n \Phi_i).$$

Donc les équations de Maxwell en coordonnées isothermes sont équivalentes aux relations (50) et au système d'équations (54) dans les composantes du potentiel vecteur Φ_i ; ce système d'équations (54) a la même structure des équations d'Einstein (22) si ces dernières équations sont écrites en coordonnées isothermes ([21]) :

$$(22') \qquad R_{rs} \equiv \frac{1}{2} g^{ik} \partial_i \partial_k g_{rs} + N_{rs}(g_{ik}, \partial_j g_{ik}) = - \chi T_{rs}.$$

Les fonctions $N_{rs}(g_{ik}, \partial_j g_{ik})$ sont des polynômes dans g_{ik}, $\partial_j g_{ik}$ dont la forme nous n'écrivons pas explicitement ici.

II. Supposons maintenant d'ignorer s'il existe une solution du problème restreint d'évolution, et considérons le système complet d'équations de Maxwell-Einstein (5), (6), (22) que nous écrirons en coordonnées isothermes $x^{i'}$:

$$(50') \qquad F_{i'j'} = \partial_{i'} \Phi_{j'} - \partial_{j'} \Phi_{i'}$$

$$(54') \qquad - F_{j'} \equiv g^{i'k'} \partial_{i'} \partial_{k'} \Phi_{j'} + M_{j'}(g_{r's'}, \partial_{r'} \Phi_{s'}) = 0$$

$$(22'') \qquad R_{i'j'} \equiv \frac{1}{2} g^{r's'} \partial_{r'} \partial_{s'} g_{i'j'} + N_{i'j'}(g_{r's'}, \partial_{m'} g_{r's'}) = - \chi T_{i'j'}.$$

Donnons en outre sur $\overline{\Sigma}$ (d'équation $x^{4'} = 0$) les fonctions

$$\overline{g}_{i'k'}(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \, [\overline{g}_{4'\alpha'} \equiv 0], \quad \overline{\psi}_{i'k'}(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}), \quad \overline{\Phi}_{j'}(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}),$$
$$\overline{Z}_{4'j'}(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$$

([20]) On rappelle de même que chaque solution des équations de Maxwell en coordonnées isothermes vérifiant sur $\overline{\Sigma}$ la condition (53) satisfait à la même condition dans le voisinage de $\overline{\Sigma}$ où la solution susdite est définie [Y. Bruhat, Théorème d'existence en mécanique des fluides relativistes, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. **86**, 1958, p. 155-175].

([21]) Cf. Y. Bruhat. Mémoire cité en ([19]).

[qui doivent coïncider respectivement avec les composantes du tenseur métrique $g_{i'k'}$, leurs dérivées $\partial_{4'}g_{i'k'}$, les composantes du potentiel vecteur $\Phi_{j'}$ et leurs dérivées $\partial_{4'}\Phi_{j'}$ toutes calculées sur $\overline{\Sigma}$] de sorte que, d'elles déduites les tenseurs de $\overline{\Sigma}$

$$\overline{\gamma}_{\alpha'\beta'} = \overline{g}_{\alpha'\beta'} + \overline{\eta}_{\alpha'}\overline{\eta}_{\beta'} \qquad \left[\eta_{i'} = \left(\frac{g_{4'i'}}{\sqrt{-g_{4'4'}}}\right)_{\overline{\Sigma}}, \qquad \overline{\gamma}^{4'}\overline{\eta}_{4'} = -1\right],$$

$$\overline{\varphi}_{\alpha'\beta'} = \overline{\gamma}^{4'}\overline{\psi}_{\alpha'\beta'}$$

$$\overline{\mathrm{F}}_{\alpha'\beta'} = (\partial_{\alpha'}\Phi_{\beta'} - \partial_{\beta'}\Phi_{\alpha'})_{\overline{\Sigma}}, \qquad \overline{\mathrm{F}}_{4'\alpha'} = \overline{\mathrm{Z}}_{4'\alpha'} - \partial_{\alpha'}\overline{\Phi}_{4'}, \qquad \overline{\mathrm{F}}_{4'4'} \equiv 0$$

et les vecteurs

$$\overline{\mathrm{E}}_{\alpha'} = \overline{\gamma}_{\alpha'r'}\overline{\eta}_{s'}\overline{\mathrm{F}}^{r's'} \quad , \quad \mathscr{H}_{\alpha'} = \frac{1}{2}\tilde{\eta}_{\alpha'\rho'\tau'}\overline{\mathrm{F}}^{\rho'\tau'},$$

les équations de compatibilité (39) des données initiales et la condition supplémentaire [cf. (53)]

$$\overline{g}^{\alpha'i'}\partial_{\alpha'}\overline{\Phi}_{i'} + \overline{g}^{4'i'}\overline{\mathrm{Z}}_{4'i'} = 0 \tag{56}$$

soient satisfaites. De plus les fonctions $\overline{\psi}_{4'j'}$ sont déterminées par les conditions supplémentaires [cf. (52)]

$$\overline{g}^{r'k'}\left\{{}_{r'}{}^{i'}{}_{k'}\right\}_{\overline{\Sigma}} = 0$$

(en les explicitant, on substitue les $(\partial_{4'}g_{i'k'})_{\overline{\Sigma}}$ avec les données correspondantes $\overline{\psi}_{i'k'}$). Si les deux ensembles de données $\{\overline{g}_{i'k'}, \overline{\Phi}_{j'}\}$ et $\{\overline{\psi}_{i'j'}, \overline{\mathrm{Z}}_{4'j'}\}$ sont de classes respectives C^6 et C^5, un théorème d'existence et unicité de Mme Bruhat ([22]) est valable pour le système (54')-(22''). Pour ce théorème dans un voisinage W' de $\overline{\Sigma}$ le problème de Cauchy pour le système d'équations (54')-(22'') a une solution unique $g_{i'k'}(x')$, $\Phi_{j'}(x')$ de classe C^5. Les conditions supplémentaires

$$g^{i'k'}\left\{{}_{i'}{}^{s'}{}_{k'}\right\} = 0$$

sont satisfaites automatiquement dans W', et le tenseur champ électromagnétique $\mathrm{F}_{i'j'}$ défini par (50') peut satisfaire aux équations de Maxwell

$$\mathscr{F}_{j'} \equiv \nabla_{i'}\mathscr{F}_{j'}{}^{i'} \equiv \nabla_{i'}(*\mathrm{F})_{j'}{}^{i'} = 0.$$

Cela posé, considérons un changement de coordonnées du type

$$x^{i'} = x^i + (x^4)^2\varphi^{i'}(x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{57}$$

([22]) Théorème d'existence... cité en ([2]).

et remarquons tout de suite que pour un choix quelconque des fonctions $\varphi^{i'}$ les conditions (46) sur $\overline{\Sigma}$ sont vérifiées; il s'en suit que pour chaque transformation (57) toutes les composantes des tenseurs $\overline{\gamma}_{i'j'}$, $\overline{\varphi}_{i'j'}$, $\overline{F}_{i'j'}$ conservent numériquement les mêmes valeurs. Choisissons les fonctions $\varphi^{i'}$ de sorte que les nouvelles composantes g_{4i} du tenseur métrique $g_{i'k'}$ satisfont aux relations ([23])

$$g_{4i} \equiv \partial_4 x^{r'} \cdot \partial_i x^{s'} \cdot g_{r's'} = -\eta_4(x)\eta_i(x). \tag{58}$$

Une telle transformation faite, le champ de vecteurs $g_{4i}(x)/\sqrt{-g_{44}(x)}$ s'identifie dans un voisinage W de $\overline{\Sigma}$ avec le champ de vecteurs $\eta_i(x)$ donné dans le problème des données initiales, et le champ de vecteurs contravariants $\gamma^i(x)$ de même fixé dans le problème des données initiales représente bien son expression contravariante

$$\left[\eta^\alpha(x) = 0 \quad , \quad \eta^4(x) = -\frac{1}{\eta_4(x)} = \gamma^4(x)\right].$$

Les nouvelles coordonnées x^i résultent ainsi adaptées au repère physique S que le champ de vecteurs unitaires $\gamma(x)$ spécifié.

Naturellement comme les composantes respectives $g_{i'k'}$, $F_{i'k'}$ du tenseur métrique $\underline{\underline{g}}$ de V_4 et du tenseur champ électromagnétique $\underline{\underline{F}}$ vérifient le système d'équations (50′), (54′), (22″), ainsi les nouvelles composantes g_{ik}, F_{ik} des mêmes tenseurs $\underline{\underline{g}}$, $\underline{\underline{F}}$ satisfont au système d'équations transformé, que nous pouvons écrire

$$\begin{cases} F_j = 0 \quad , \quad \mathscr{F}_j = 0 \\ R_{ij} = -\chi T_{ij} . \end{cases} \tag{59}$$

Dans le repère physique déterminé par le champ de vecteurs $\underline{\gamma}(x)$, avec les coordonnées adaptées x^i, le tenseur métrique d'espace a pour composantes

$$\gamma_{ij} = g_{ij} + \gamma_i\gamma_j ; \tag{60}$$

la décomposition naturelle des équations (59) [cf. (5′), (6′), (22′)] donne

$$\begin{aligned} &\tilde{F}_j = 0 \quad , \quad F_\theta = 0 ; \qquad \tilde{\mathscr{F}}_j = 0 \quad , \quad \mathscr{F}_\theta = 0 ; \qquad s_{\alpha\beta} = -\chi\tilde{P}_{\alpha\beta}, \\ &\qquad S_\alpha = -\frac{\chi}{c}\tilde{P}_\alpha \quad , \quad \tilde{R}^* + \mathscr{I} = -2\chi h. \end{aligned} \tag{59'}$$

([23]) Si nous voulons éviter de résoudre le système d'équations (58) il suffit de formuler le problème des données initiales en choisissant le champ de vecteurs covariants $\eta_i(x)$ avec la liberté accordée du choix très grand des fonctions $\varphi^{i'}(x)$ qui interviennent dans (58).

On peut dire alors que en supposant inconnus les champs de tenseurs g_{ik}, F_{ik}, le système d'équations de Maxwell-Einstein (59) (cf. (4)) est équivalent au système d'équations

$$\tilde{F}_j = 0 \quad , \quad \tilde{\mathscr{F}}_j = 0 \quad , \quad s_{\alpha\beta} = -\chi\tilde{P}_{\alpha\beta}$$

et aux conditions de compatibilité des données initiales

$$F_\theta = 0 \quad , \quad \mathscr{F}_\theta = 0 ; \qquad S_\alpha = -\frac{\chi}{c}\tilde{P}_\alpha ; \qquad \tilde{R}^* + \mathscr{I} = -2\chi h \qquad (\text{sur } \overline{\Sigma}).$$

Puisque les deux champs de tenseurs g_{ik}, F_{ik} qui satisfont au problème de Cauchy pour le système d'équations (59) sont définis univoquement et que de même leur décomposition naturelle dans le repère physique S est unique, on en déduit que le champ de tenseurs (60) et les deux champs de vecteurs $\underline{E}$, $\underline{\mathscr{H}}$ qui s'obtiennent du tenseur champ électromagnétique F_{ij} [cf. n° 2] représentent au voisinage de $\overline{\Sigma}$ la solution unique du problème restreint d'évolution, qui sur $\overline{\Sigma}$ vérifie les données de Cauchy

$$\begin{array}{llll} (\gamma_{\alpha\beta})_{\overline{\Sigma}} = \overline{\gamma}_{\alpha\beta} & (\gamma_{4i} \equiv 0) ; & (\tilde{K}_{\alpha\beta})_{\overline{\Sigma}} \equiv (\gamma^4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta})_{\overline{\Sigma}} = \overline{\varphi}_{\alpha\beta} ; & \\ (E_\alpha)_{\overline{\Sigma}} = \overline{E}_\alpha & (E_4 \equiv 0) ; & (\mathscr{H}_\alpha)_{\overline{\Sigma}} = \overline{\mathscr{H}}_\alpha & (\mathscr{H}_4 \equiv 0). \end{array}$$

Manuscrit reçu le 7 juillet 1969 .