ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JAN TARSKI

Remarques sur les hamiltoniens des champs quantifiés

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, nº 3 (1969), p. 331-341
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_3_331_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XI, n° 3, 1969, p. 331-341.

Section A :
Physique théorique.

Remarques sur les hamiltoniens des champs quantifiés

par

Jan TARSKI
(Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies (*),
Faculté des Sciences de Paris).

SOMMAIRE. — Les hamiltoniens pour certains modèles simples de champs quantifiés sont examinés, et la nature des termes singuliers du couplage est clarifiée. En outre, le rapport entre la localité et l'existence d'un lagrangien et d'un hamiltonien est discuté en mettant à nouveau l'accent sur des modèles simples.

ABSTRACT. — The hamiltonians for certain simple models of quantized fields are examined, and the nature of singular interaction terms is clarified. Furthermore, a connection between locality and the existence of a lagrangian and of a hamiltonian is discussed, with emphasis again on simple models.

1. INTRODUCTION

Dans cette note nous montrons deux aspects de l'hamiltonien en théorie quantique des champs. Ces aspects élémentaires sont fondamentaux, mais semblent être peu appréciés.

Premièrement, si l'on fait l'hypothèse de la complétude asymptotique, l'évolution temporelle d'un champ conventionnel doit être décrite par l'hamil-

(*) Laboratoire associé au C. N. R. S.

tonien usuel, ou libre, dans l'espace de Fock. Cela entraîne une compensation entre termes singuliers dans les hamiltoniens totaux. On peut clarifier ainsi le comportement de certains modèles, auxquels les techniques récentes de renormalisation, dues à Glimm [*1*], ne sont pas applicables. D'ailleurs, la série de Gell-Mann et Low mène à des problèmes connexes.

Deuxièmement, il existe un rapport assez étroit entre la localité et l'existence d'un lagrangien ou d'un hamiltonien. En effet, cette connexion est liée à la structure canonique, qui est un des ingrédients principaux de la théorie des champs, mais qui a peu retenu l'attention précédemment. Ce n'est pas surprenant. En fait, les questions analogues pour les systèmes plus simples (sauf pour l'étude des systèmes dynamiques, qui est devenue assez spécialisée) ont également suscité peu d'intérêt.

Dans cette note, nous employons des modèles explicitement résolus pour illustrer ces aspects. Il s'agit de certains modèles relativistes dans l'espace-temps à deux dimensions, et d'un modèle semi-statique à quatre dimensions. Ces modèles ont une structure beaucoup plus simple que celle des modèles étudiés à présent [*1*] [*2*], et ils ont une dynamique triviale. Ils ont néanmoins enrichi la théorie des champs.

En outre, notre discussion nous mène à proposer (dans l'appendice) une variante aux méthodes récentes de [*2*].

Les modèles que nous examinons le plus en détail sont (1) celui de Bloch et Nordsieck; (2) celui de la transformation de jauge appliquée aux spineurs libres; nous l'appelons le modèle de jauge; et (3) le modèle de Federbush. Pour cause de simplicité, nous supposons que les champs ont des masses strictement positives. Les modèles de spineurs sans masse [*3*], bien qu'ils soient à certains égards très intéressants, semblent offrir peu d'intérêt supplémentaire.

Quant aux modèles, il semble possible de donner des formulations précises et des preuves complètes pour étayer nos affirmations. Cependant, nous ne tentons pas de le faire. Afin de fournir un contexte plus général pour nos exemples, nous comptons sur les résultats formels et sur les analogies.

Nous faisons maintenant une brève revue des trois modèles. La forme du modèle de Bloch et Nordsieck qui nous convient correspond au couplage

$$\mathrm{L}_{\mathrm{int}} \sim e_0 \psi^* \varphi \psi, \tag{1.1}$$

où ψ est un champ statique, et φ un champ scalaire et relativiste, voir [*4*]. Les équations de champs peuvent s'écrire dans la forme finie (d'après [*5*]),

$$(i\partial_t - m)\psi(x) = -e_0 \lim_{\varepsilon\to 0} \{ [\varphi(x+\varepsilon) - \mathrm{F}_1(\varepsilon)]\psi(x) \}, \tag{1.2a}$$

$$(\square - \mu^2)\varphi(x) = e_0 \lim_{\varepsilon\to 0} [\psi^*(x+\varepsilon)\psi(x)/\mathrm{F}_2(\varepsilon)], \tag{1.2b}$$

où ε est du genre espace ($\varepsilon^2 < 0$), et les fonctions F_j sont singulières à $\varepsilon = 0$. Ces termes de couplage, et les autres produits, seront écrits aussi sous la forme

$$(\varphi\psi)_{\text{ren}}, \qquad (\psi^*\psi)_{\text{ren}}. \tag{1.3}$$

Ces équations admettent la solution suivante (qui est, en effet, la solution F-ordonnée de [4]),

$$\psi(t, \boldsymbol{x}) = :e^{ie_0\Omega}:(t, \boldsymbol{x})e^{-ie_0^2(t-\mathrm{T})\Phi(\boldsymbol{x})}\psi^{(0)}(t, \boldsymbol{x}), \tag{1.4a}$$

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) = \varphi^{(0)}(t, \boldsymbol{x}) - e_0\Phi(\boldsymbol{x}), \tag{1.4b}$$

où

$$\Omega(t, \boldsymbol{x}) = \int_{t+i\infty}^{t} d\tau\varphi^{(0,+)}(\tau, \boldsymbol{x}) + \int_{t-i\infty}^{t} d\tau\varphi^{(0,-)}(\tau, \boldsymbol{x}), \tag{1.4c}$$

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{y}\,\frac{e^{-\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\psi^{(0)*}(t, \boldsymbol{y})\psi^{(0)}(t, \boldsymbol{y}). \tag{1.4d}$$

Ici, $\psi^{(0)}$ et $\varphi^{(0)}$ sont les champs libres correspondants à ψ et φ [*i. e.*, obtenus en faisant $e_0 = 0$ dans les équations (1.2)] et $\varphi^{(0,+)}$ est la partie création de $\varphi^{(0)}$. Dans ce modèle, $\psi^{(0)}$ est de la forme $\chi(\boldsymbol{x})e^{-imt}$, et ainsi, ni $\psi^{(0)*}\psi^{(0)}$ ni Φ ne dépendent de t.

Le modèle de jauge [3] [6] correspond au couplage

$$\mathrm{L}_{\text{int}} \sim ig\overline{\psi}(\eth\varphi)\psi, \tag{1.5}$$

avec un nombre quelconque de dimensions. La solution renormalisée est la suivante,

$$\psi = :\exp(ig\varphi^{(0)}):\psi^{(0)}, \qquad \varphi = \varphi^{(0)}, \tag{1.6}$$

et ψ vérifie une équation analogue à (1.2*a*).

Le modèle de Federbush [6] [7] correspond au couplage

$$\mathrm{L}_{\text{int}} \sim i\lambda j_{1\mu}k_2{}^{\mu} \sim i\lambda j_{1\mu}\varepsilon^{\mu\nu}j_{2\nu}, \tag{1.7}$$

où j_l et k_l sont les courants et les pseudo-courants des champs spinoriels ψ_l avec les masses m_l. Soit $k_l^{(0)}$ le pseudo-courant pour $\psi_l^{(0)}$, et soit σ_l le champ vérifiant

$$\partial_\mu\sigma_l = k_{l\mu}^{(0)}. \tag{1.8}$$

La solution du modèle prend alors la forme

$$\psi_1 = :e^{i\lambda\sigma_2}:\psi_1^{(0)}, \qquad \psi_2 = :e^{i\lambda\sigma_1}:\psi_2^{(0)}. \tag{1.9}$$

Le symbole : : dénote la soustraction de valeurs moyennes successives du vide, dans un développement en série.

L'intérêt de ce modèle réside partiellement dans le fait que σ_l est un champ local, mais qui n'est pas local relativement à $\psi_l^{(0)}$. C'est-à-dire, en général

$$[\sigma_l(x), \psi_l^{(0)}(y)] \neq 0 \qquad \text{pour} \qquad (x-y)^2 < 0. \tag{1.10}$$

En terminant cette introduction, l'auteur voudrait remercier le Professeur K. Hepp pour une discussion, et le Laboratoire de Physique Théorique pour son hospitalité.

2. STRUCTURE DES HAMILTONIENS

Considérons un champ φ en interaction, pour une théorie vérifiant la complétude asymptotique (*i. e.*, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{in}$). Les conditions usuelles sur φ mènent au développement [9]

$$\varphi(x) = \varphi^{(0)}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^{s+1}y_1 \ldots d^{s+1}y_n \mathrm{K}_{y_1} \ldots \mathrm{K}_{y_n} \\ r(x-y_1, \ldots, x-y_n) : \varphi^{(0)}(y_1) \ldots \varphi^{(0)}(y_n) :, \tag{2.1}$$

où s est le nombre de dimensions spatiales. Pour un tel champ φ, l'évolution temporelle est déterminée par l'hamiltonien libre, ici $\mathrm{H}^{(0)} = \mathrm{H}^{(0)}(\varphi^{(0)})$. En fait, la relation

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \exp(it\mathrm{H}^{(0)})\varphi(0, \mathbf{x}) \exp(-it\mathrm{H}^{(0)}) \tag{2.2}$$

dérive de la relation correspondante pour $\varphi^{(0)}$.

On peut établir cette conclusion indépendamment pour les modèles de jauge et de Federbush pour lesquels on a, respectivement,

$$\mathrm{H}_{\mathrm{tot}}(\psi, \varphi) = \mathrm{H}^{(0)}(\psi^{(0)}, \varphi^{(0)}), \tag{2.3a}$$

$$\mathrm{H}_{\mathrm{tot}}(\psi_1, \psi_2) = \mathrm{H}^{(0)}(\psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}). \tag{2.3b}$$

Ici, les ψ représentent les paires $(\psi, \bar{\psi})$.

Il pourrait être instructif de regarder l'équation (2.3*a*) plus en détail. Les produits tels que $\bar{\psi}\partial_\mu\psi$ doivent être définis comme dans les équations (1.2). En fait, on peut trouver facilement une fonction F(*z*), singulière à $z = 0$, et telle que, pour $(x-y)^2 < 0$,

$$: \exp(ig\varphi^{(0)}) : (x) : \exp(-ig\varphi^{(0)}) : (y)/\mathrm{F}((x-y)^2) \to 1 \tag{2.4}$$

quand $x \to y$. Ainsi, en introduisant le facteur F, on obtient une loi de compensation pour des exponentielles Wick-ordonnées. L'équation (2.3*a*) résulte du calcul suivant pour les densités d'énergie,

$$\begin{aligned} T_{00}^{(0)}(\psi) + T_{00}^{(\mathrm{int})} &\sim (\partial L^{(0)}/\partial\dot{\psi})\dot{\psi} - L^{(0)}(\psi) + [(\partial L/\partial\dot{\varphi})\dot{\varphi} - L]^{\mathrm{int}} \\ &= [\bar{\psi}(\gamma^1\partial_1 + m)\psi + ig\bar{\psi}\gamma^0\dot{\varphi}\psi - ig\bar{\psi}(\delta\varphi)\psi]_{\mathrm{ren}} \\ &= (\bar{\psi} : e^{ig\varphi} : \partial_1\psi^{(0)} + m\bar{\psi}\psi)_{\mathrm{ren}} = T_{00}^{(0)}(\psi^{(0)}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pour le modèle de Bloch et Nordsieck, le facteur $e^{ie_0^2t\Phi}$ dans ψ détruit la validité de la condition asymptotique, qui est nécessaire pour l'équation (2.1). Alors, au lieu d'une équation de type (2.3), nous obtenons

$$H_{\mathrm{tot}}(\psi, \varphi) = H^{(0)}(\psi^{(0)}, \varphi^{(0)}) - A, \tag{2.6a}$$

où

$$A = \frac{e_0^2}{8\pi}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}\frac{e^{-\mu|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\psi^{(0)*}(x)\psi^{(0)*}(y)\psi^{(0)}(y)\psi^{(0)}(x). \tag{2.6b}$$

Les observations précédentes peuvent être reliées aux méthodes de renormalisation de Glimm [*1*]. Pour précision, nous faisons la comparaison avec la théorie Y_2, le couplage de Yukawa à deux dimensions.

Dans [*1*], on commence avec les champs libres au temps $t = 0$, et l'on cherche une transformée d'habillement T telle que

$$H_{\mathrm{tot}}^h(\psi^{(0)}, \varphi^{(0)})T \sim TH^{(0)}(\psi^{(0)}, \varphi^{(0)}), \tag{2.7}$$

où H_{tot}^h comprend le cut-off spatial spécifié par la fonction h, ainsi que les contre-termes. On espère alors que H_{tot}^h maintiendra la localité et que nous pourrons retirer le cut-off, comme dans [*2*]. On obtiendrait ainsi (par la construction ΓHS) les champs en interaction, qui devraient avoir les propriétés attendues. En particulier, nous devrions trouver

$$H_{\mathrm{tot}}(\psi, \varphi) = H^{(0)}(\psi_{in}, \varphi_{in}). \tag{2.8}$$

Une telle méthode laisse les champs libres ψ_{in}, φ_{in} et $\psi^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ totalement indépendants. Cependant, on peut essayer de modifier la procédure par l'introduction des champs en interaction,

$$T^{-1}\psi^{(0)}T = \psi^h, \qquad T^{-1}\varphi^{(0)}T = \varphi^h, \tag{2.9a}$$

et alors

$$H_{\mathrm{tot}}^h(\psi^h, \varphi^h) \sim H^{(0)}(\psi^{(0)}, \varphi^{(0)}). \tag{2.9b}$$

En principe, il doit être possible de retirer le cut-off ici, sans abandonner l'espace de Fock original. Voir l'exemple dans l'appendice.

Pour le modèle de jauge, la transformée T doit être telle que

$$\mathrm{T}^{-1}\psi^{(0)}\mathrm{T} = \psi = \psi^{(0)} : e^{ig\varphi^{(0)}} :, \qquad \mathrm{T}^{-1}\varphi^{(0)}\mathrm{T} = \varphi^{(0)}, \tag{2.10}$$

sur un domaine commode. Formellement, cette transformée aurait des singularités plus fortes que T pour Y_2. Cependant, il semble raisonnable que, pour les autres théories avec $\mathrm{Z}_2 = 0$, certaines des singularités de T correspondent à celles induites par (2.10).

Il y a encore un aspect des hamiltoniens d'interaction que nous devons noter. Les trois modèles ont des développements en série convergents. De tels développements sont donnés (au moins formellement) par la série de Gell-Mann et Low [9]. Pour le cas d'un champ φ, on a

$$\langle (\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n))_+ \rangle_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ig)^m}{m\,!} \int d^{s+1}y_1\ldots d^{s+1}y_m$$
$$\langle (\varphi^{(0)}(x_1)\ldots\varphi^{(0)}(x_n)\mathrm{H}_\mathrm{I}(y_1)\ldots\mathrm{H}_\mathrm{I}(y_m))_+ \rangle_0^\mathrm{T}, \tag{2.11}$$

où $g\mathrm{H}_\mathrm{I}(y)$ est la densité dont l'intégrale spatiale donne $\mathrm{H}_{\mathrm{int}}(\varphi^{(0)})$, et T indique les fonctions tronquées. En général, $g\mathrm{H}_\mathrm{I}$ comprend des contre-termes d'ordre g^2 ou plus élevé,

$$g\mathrm{H}_\mathrm{I} = g\mathrm{H}_\mathrm{I}^0 + g^2\mathrm{C}. \tag{2.12}$$

Or, une intégrale de H_I^0 n'est pas un opérateur pour les trois modèles. Le terme (fini) d'ordre g d'une valeur moyenne doit pouvoir s'identifier, cependant, avec l'intégrale correspondante d'un tel développement.

La solution de ce paradoxe dépend du fait que pour ces modèles (et aussi pour certains autres), on doit poser

$$\int d^{s+1}y\mathrm{H}_\mathrm{I}^0(y) = 0. \tag{2.13}$$

En fait, pour le modèle de jauge, l'intégration par parties donne

$$\int d^2y : \bar\psi^{(0)}(\partial\!\!\!/\varphi^{(0)})\psi^{(0)} : \sim - \int d^2y\varphi^{(0)}\partial^\mu j_\mu^{(0)} = 0. \tag{2.14}$$

Nous avons négligé les termes à l'infini. Strictement parlant, ceci n'est pas justifié, car e. g.

$$\mathrm{A}(y^0) = \int dy^1\varphi^{(0)} : \bar\psi^{(0)}\gamma_0\psi^{(0)} : \tag{2.15}$$

n'est pas un opérateur bien défini, cf. [*1*]. Alors, la limite quand $y^0 \to \pm\infty$ n'a pas de sens. Ce fait montre le caractère formel du développement (2.11).

Pour le modèle de Federbush, on trouve, de la même manière,

$$\int d^2y j^{(0)}_{1\mu} k^{(0)\mu}_2 \sim - \int d^2y \sigma_2 \partial^\mu j^{(0)}_{1\mu} = 0, \tag{2.16}$$

et pour celui de Bloch et Nordsieck,

$$\int d^4y \psi^{(0)*} \varphi^{(0)} \psi^{(0)} \sim - \int d^4y \Omega \partial_t (\psi^{(0)*} \psi^{(0)}) = 0. \tag{2.17}$$

Considérons maintenant, à titre d'exemple, la fonction de vertex pour le modèle de jauge, à l'ordre g. Supposons que $x^0_1 > x^0_2 > x^0_3$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \bar\psi(x_1)\varphi(x_2)\psi(x_3) \rangle = - ig \int d^2y \langle (\bar\psi^{(0)}(x_1)\varphi^{(0)}(x_2)\psi^{(0)}(x_3) \\ \times :\bar\psi^{(0)}(\eth\varphi^{(0)})\psi^{(0)} :(y))_+ \rangle_0 + O(g^2).\end{aligned} \tag{2.18}$$

En employant les règles standards pour les produits chronologiques et ceux de Wick [*10*], on peut ramener la dernière intégrale à

$$- i \int d^2y S^c(x_1 - y) [\eth_y \Delta^c(x_2 - y)] S^c(x_3 - y). \tag{2.19}$$

Nous utilisons maintenant

$$S^c(x) = \theta(x^0) S(x) + S^{(+)}(x), \tag{2.20a}$$

et suivant la discussion précédente, nous intégrons par parties. Vu la conservation du courant, les contributions ne viennent que si $\eth$ agit sur θ. Dans ce cas

$$[\eth\theta(x^0)] S(x) = i\delta(x), \tag{2.20b}$$

et le résultat final est en accord avec la solution (1.6).

3. LA LOCALITÉ ET LE LAGRANGIEN

Dans la théorie quantique des champs, la localité dépend surtout de la validité des relations canoniques de commutation (ou d'anticommutation). Dans la mécanique classique, il résulte de l'invariance du crochet de Poisson que le mouvement est décrit par un hamiltonien, ou par un lagrangien, au moins localemnt [*11* (prop. 16.4)] [*12*].

Pour la mécanique quantique, un résultat analogue n'a été obtenu que récemment (et partiellement) par Segal [*13*]. Son lemme 1.2 énonce, en particulier, ce qui suit. Choisissons un temps $t = t_0$, et les variables canoniques q_j, p_j où $1 \leqslant j \leqslant n$, vérifiant

$$[p_j, q_k]_{t_0} = i^{-1}\delta_{jk}, \qquad \text{aussi} \qquad (d/dt)\,[p_j, q_k]\,|_{t=t_0} = 0, \text{ etc.} \tag{3.1}$$

On suppose par ailleurs les équations de mouvement,

$$\dot{q}_j = f_j(q_1, \ldots, p_n), \qquad \dot{p}_j = g_j(q_1, \ldots, p_n), \tag{3.2}$$

où les f_j et les g_j sont des polynômes. Alors il existe un polynôme $\mathrm{H}(q_1, \ldots p_n)$ tel que

$$\dot{q}_j = i[\mathrm{H}, q_j], \qquad \dot{p}_j = i[\mathrm{H}, p_j]. \tag{3.3}$$

L'étude de la structure canonique en théorie classique des champs n'a pas encore permis, semble-t-il, d'obtenir de tels résultats concrets. Nous citons deux travaux [*14*] [*15*] pour référence.

Dans le cas de la théorie quantique des champs, on peut étudier un rapport entre la localité et l'existence d'un lagrangien sur des exemples. Nous présentons ainsi trois systèmes d'équations de champs :

$$\begin{cases} (\Box - \mu_1^2)\varphi_1 = g : \varphi_2^n :, & (3.4a) \\ (\Box - \mu_2^2)\varphi_2 = 0; & (3.4b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\eth + m)\psi_1 = i\lambda(k_{2\mu}\gamma^\mu\psi_1)_{\mathrm{ren}}, & (3.5a) \\ (\eth + m)\psi_2 = 0; & (3.5b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (i\partial_t - m)\psi = -\, e_0 : \varphi\psi :, & (3.6a) \\ (\Box - \mu^2)\varphi = 0. & (3.6b) \end{cases}$$

(Les équations pour les $\bar{\psi}$ et ψ^* restent analogues à celles pour ψ.) La non-localité des deux premiers systèmes est en effet connue depuis quelques années. Cependant, apparemment, personne n'avait fait l'hypothèse qu'elle est liée à la non-existence d'un lagrangien.

Pour le système (3.4), la non-localité fut établie dans [*16*] [*17*]. En ce qui concerne (3.5), la non-localité est induite par celle de $[\sigma_2, \psi_2^{(0)}]$, cf. l'inégalité (1.10), et si

$$\psi_1 = \,\vdots\, e^{i\lambda\sigma_2} \,\vdots\, \psi \qquad \psi_2 = \psi_2^{(0)}, \tag{3.7}$$

alors $[\psi_1, \psi_2]_+$ est également non local. Dans le cas de (3.6), le commutateur $\left[\int d\tau\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)}\right]$ n'est pas local. Pour la solution

$$\psi = :e^{ie_0\Omega}:\psi^{(0)}, \qquad \varphi = \varphi^{(0)}, \tag{3.8}$$

voir l'équation (1.4*c*), et pour un temps fixé t, on trouve alors

$$[\psi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})] = e_0(4\pi\,|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,|\,)^{-1}e^{-\mu|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\psi(\mathbf{x}). \tag{3.9}$$

La deuxième équation de chaque système ci-dessus est celle du champ libre. Ce choix fut fait pour qu'on puisse étudier, ou même résoudre, le système. Il est possible de montrer, assez généralement mais dans le cadre des séries formelles, que l'existence d'un lagrangien découle de la localité [*18*].

Les solutions précédentes, et aussi la solution suivante du système (3.4),

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} - g\Delta^r * :\varphi_2^{(0)n}:, \qquad \varphi_2 = \varphi_2^{(0)}, \tag{3.10}$$

vérifient (paraît-il) la condition asymptotique. Pour ces solutions, l'évolution temporelle est celle qu'on obtient avec l'hamiltonien libre $H^{(0)}$. Nous voyons ici des exemples où les hamiltoniens existent mais les lagrangiens n'existent pas. Cependant, les hamiltoniens expriment surtout l'invariance des systèmes par translation temporelle, et ne sont plus une partie de la structure canonique.

On peut aussi bien construire d'autres solutions, e. g. en faisant l'hypothèse des champs libres au temps $t = 0$. Pour le système (3.5), on trouve alors

$$\psi_b(t, \mathbf{x}) = :e^{ie_0[\Omega(t,\mathbf{x})-\Omega(0,\mathbf{x})]}:\psi^{(0)}(t, \mathbf{x}). \tag{3.11}$$

Cette solution est bilocale et en général, $[\psi_b, \varphi^{(0)}] \neq 0$ pour les temps égaux.

Il est facile à démontrer la non-localité directement. D'ailleurs, pour $t = 0$, on peut réduire le problème à celui d'un nombre fini de degrés de la liberté, en considérant des valeurs moyennes particulières (comme $\langle\, 0\,|\,\varphi(f_1)\,|\,f_2\,\rangle$). Il résulte alors des équations (3.1-3), que l'évolution temporelle ne laisse pas invariantes les relations canoniques. (Cet argument est donné plus haut pour les cas de commutateurs. Mais on peut supposer ici que ψ est un champ de bosons plutôt que de fermions. Ou bien, les résultats de [*13*] doivent s'étendre aux systèmes mixtes des commutateurs et anticommutateurs.)

Il serait souhaitable d'étendre les résultats de [*13*] aux cas plus généraux en théorie des champs, et ainsi, de fournir un cadre pour les exemples particuliers décrits plus haut. Cela ne semble pas facile.

APPENDICE

Dans cet appendice, nous voudrions développer un peu une remarque de la section 2, concernant la possibilité de retirer le cut-off spatial d'interaction dans le cadre de l'espace de Fock. En soi, ce changement ne résoudra pas les problèmes restants, ni ne simplifiera nécessairement les solutions déjà connues.

Nous allons discuter le couplage $\lambda\varphi^4$ à deux dimensions, plutôt que Y_2. Pour celui-là, nous pouvons nous appuyer sur l'analyse extensive de [*2*].

Soit g une fonction donnant le cut-off spatial pour l'interaction. Alors, il existe un vecteur fondamental ψ_{0g} pour H_{tot}, définissant un état d'une C*-algèbre commode de Weyl,

$$\omega_g(A_t) = \langle \psi_{0g}, A_t\psi_{0g} \rangle, \tag{A.1a}$$

où e. g.

$$A_t = \exp\,[i\varphi^{(0)}(f_1)]\,\exp\,[i\dot{\varphi}^{(0)}(f_2)], \tag{A.1b}$$

et les fonctions f_j sont définies sur R^1. Puisque $\psi_{0g} \in \mathcal{H}_{Fock}$, la représentation déterminée par ω_g de cette C*-algèbre est équivalente à la représentation standard.

Soit U_g un opérateur unitaire donnant cette équivalence. Posons

$$\varphi^{(g)} = U_g^{-1}\varphi^{(0)}U_g, \tag{A.2a}$$

et alors

$$\langle \exp\,[i\varphi^{(0)}(f)]\rangle_{\psi_{0g}} = \langle \exp\,[i\varphi^{(g)}(f)]\rangle_{\Psi^{(0)}}. \tag{A.2b}$$

$\Psi^{(0)}$ étant le vide.

En outre, ψ_{0g} appartient au domaine invariant D_g, auquel on peut appliquer les polynômes en $\varphi^{(0)}$ avec les fonctions d'essai sur R^2, et dans $\mathcal{S}$. (Voir [*2*], 2^e papier, sec. 3.2; l'argument y est donné pour le champ φ_g qui y est introduit, mais il s'applique aussi bien à $\varphi^{(0)}$.) Il en résulte que

$$U_g^{-1}\varphi^{(0)}(h)\varphi^{(0)}(h_1)\ldots\varphi^{(0)}(h_n)\psi_{0g} = \varphi^{(g)}(h)\varphi^{(g)}(h_1)\ldots\varphi^{(g)}(h_n)\Psi^{(0)}, \tag{A.3}$$

pour h, $h_j \in \mathcal{S}$. En restreignant $h_1, \ldots, h_n$ dans l'espace d'impulsion, et par un choix commode d'un polynôme P, on peut s'assurer que

$$P\{\varphi^{(g)};\, h_1, \ldots, h_n\}\,\Psi^{(0)} \tag{A.4}$$

est un vecteur de n particules, avec les fonctions d'onde dans $\mathcal{S}$. Les combinaisons linéaires finies de tels vecteurs donnent le domaine standard D_0, et il s'ensuit que

$$D_0 \subset D(\varphi^{(g)}(h)). \tag{A.5}$$

On peut ainsi construire, pour $\varphi^{(g)}$, un développement analogue à (2.1).

Or, nous pouvons choisir une suite $\{g_m\}$ des fonctions de cut-off, telle que la suite d'états $\{ \omega_{g_m} \}$ soit convergente. On espère alors que les coefficients des développements des $\varphi^{(g)}$ convergent de même (pour un bon choix de phases des U_g). Mais cette hypothèse dépasse de beaucoup les résultats de [*2*].

On doit ajouter que l'unitaire U_g n'est pas nécessairement une transformée d'habillement, bien qu'il y ait des analogies. Il semble (voir e. g. [*19*]) que l'existence d'une telle transformée n'a pas encore été établie même pour des couplages aussi faiblement singuliers que $\lambda\varphi^4$ à deux dimensions s'ils mènent à la polarisation du vide. [On note que T introduit dans (2.7) ne donne pas une égalité rigoureuse.]

RÉFÉRENCES

[*1*] J. GLIMM, Conférences de Varenna, 1968 *(à paraître)*; *Commun. math. Phys.*, t. **5**, p. 343 et t. **6**, p. 61, 1967.

[*2*] J. GLIMM et A. JAFFE, *Phys. Rev.*, t. **176**, 1968, p. 1945 et *à paraître.*

[*3*] D. A. DUBIN et J. TARSKI, *Ann. Phys.* (New York), t. **43**, 1967, p. 263.

[*4*] J. TARSKI, *J. Math. Phys.*, t. **7**, 1966, p. 560.

[*5*] W. ZIMMERMANN, *Commun. math. Phys.*, t. **6**, p. 161; t. **8**, p. 66 et t. **10**, p. 325, 1967-1968.

[*6*] A. S. WIGHTMAN, Conférences de 1964, publiées dans *Cargese lectures in theoretical physics*, édité par M. Lévy (Gordon and Breach, New York, 1967).

[*7*] J. L. CHALLIFOUR, *J. Math. Phys.*, t. **9**, 1968, p. 1137.

[*8*] V. GLASER, H. LEHMANN et W. ZIMMERMANN, *Nuovo Cimento*, t. **6**, 1957, p. 1122.

[*9*] M. GELL-MANN et F. LOW, *Phys. Rev.*, t. **84**, 1951, p. 350.

[*10*] N. N. BOGOLOUBOV et D. V. CHIRKOV, *Introduction à la théorie quantique des champs*, § 19. Dunod, Paris, 1960.

[*11*] R. ABRAHAM, *Foundations of mechanics.* W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[*12*] R. JOST, *Rev. Mod. Phys.*, t. **36**, 1964, p. 572.

[*13*] I. SEGAL, *Topology*, t. **7**, 1968, p. 147.

[*14*] P. A. STURROCK, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 43.

[*15*] J. SNIATYCKI, preprint (University of Sheffield).

[*16*] A. S. WIGHTMAN et H. EPSTEIN, *Ann. Phys.* (New York), t. **11**, 1960, p. 201.

[*17*] H. ARAKI, R. HAAG et B. SCHROER, *Nuovo Cimento*, t. **19**, 1961, p. 90.

[*18*] I. BIALYNICKI-BIRULA, *non publié.*

[*19*] R. HOEGH-KROHN, *J. Math. Phys.*, t. **9**, 1968, p. 2075 et t. **10**, 1969, p. 639.

(Manuscrit reçu le 4 juillet 1969).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1649*a*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5925. 12-1969.