ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MICHEL CHEVRETON

Élimination des contraintes dans le lagrangien gravitationnel

Annales de l'I. H. P., section A, tome 4, nº 2 (1966), p. 119-138
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__4_2_119_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IV, n° 2, 1966, p. 119-138.

Section A :
Physique théorique.

Élimination des contraintes dans le lagrangien gravitationnel

par

Michel CHEVRETON
(Institut Henri Poincaré, Paris).

RÉSUMÉ. — On étudie comment écrire le lagrangien gravitationnel en fonction de variables non liées par des contraintes. Ceci est fait en développant les potentiels de gravitation en série (sous forme d'exponentielles) sur une métrique auxiliaire. Cette dernière et les variables de champ sont choisies de telle sorte que les développements soient simples et toujours convergents même pour des champs non faibles. On étudie les spineurs sur une variété munie de deux métriques et on donne le développement en série du lagrangien d'interaction avec le champ de Dirac.

SUMMARY. — It is shown how to write the gravitational lagrangian as a function of variables not connected by constraints. This is done by expanding the gravitational potentials as a power series (in exponentials) with respect to an auxiliary metric. The latter and the dynamic variables are chosen in such a way that the series converges even for strong fields. Spinors on a manifold endowed with two metrics are studied, and the seiies expansion of the lagrangian for interaction with a Dirac field is given.

1 INTRODUCTION

1.1 L'existence de contraintes algébriques.

Nous voudrions commencer par faire ressortir une difficulté qui se présente en relativité générale et à laquelle on ne prête souvent pas attention. Le champ de gravitation étant décrit par les potentiels $g_{\nu\mu}$, les équations du champ contiennent non seulement les variables $g_{\nu\mu}$, mais aussi les quantités [1] $\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}$ liées aux précédentes par les relations :

$$\overset{*}{g}{}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{1.1}$$

L'existence de ces contraintse algébriques entre les variables $\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}$ et $g_{\nu\mu}$ n'apparaît pas comme une difficulté théorique. Pour toutes les considérations mathématiques générales relatives aux équations d'Einstein il n'est pas gênant d'avoir une définition implicite des $\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}$. Il n'y a pas non plus de difficulté dans les problèmes où le champ de gravitation est supposé connu. Par contre, quand on veut résoudre explicitement les équations du champ on est amené à éliminer ces contraintes. Ce n'est pas une difficulté négligeable car le problème des équations du mouvement, c'est-à-dire la détermination effective d'une solution des équations du champ susceptible de correspondre à une situation physique donnée, est un problème essentiel pour l'application de la relativité générale à la physique.

Pour la quantification ces contraintes [2] sont certainement aussi une difficulté si on ne veut pas se contenter de calculs formels. Si nous supposons que les $g_{\nu\mu}$ sont des opérateurs et que nous en connaissons une représentation explicite dans un certain espace fonctionnel, il n'est pas très facile de trouver la représentation explicite des opérateurs $\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}$ définis par la relation (1.1). Aussi une approche possible est d'éliminer d'abord les contraintes et de quantifier ensuite.

Pour éliminer ces contraintes, l'expression élémentaire $\overset{*}{g}{}^{\nu\mu} =$ mineur $(g_{\nu\mu})/\det(g_{\nu\mu})$ est trop compliquée et n'est pas utilisable pratiquement. Aussi on s'oriente habituellement [3] vers l'emploi de développements en série qui se prêtent bien à des méthodes d'approximation.

1.2 Développement du lagrangien gravitationnel.

Ces développements en série ont été introduits dans les travaux classiques sur les équations du mouvement, mais l'élimination des contraintes y est

---

(1) Contrairement aux notations usuelles nous distinguons ici par un * $g_{\nu\mu}$ et $\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}$, car nous serons amenés à lever et abaisser les indices à l'aide d'une métrique auxiliaire. Les indices grecs prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, les indices latins les valeurs 1, 2, 3.

(2) Nous ne discutons pas ici des contraintes qui s'introduisent dans le formalisme canonique et qui soulèvent des difficultés très différentes de celles que nous envisageons.

(3) Signalons cependant une tentative de Pérès [*1*] qui est parvenu à une expression polynomiale pour le lagrangien gravitationnel mais en conservant une contrainte.

menée de front avec le calcul de perturbation et se fait à chaque ordre d'approximation. Si l'on se contente d'éliminer les contraintes, indépendamment d'un calcul d'approximation, on obtient le lagrangien et les équations du champ sous forme de développements en série [*2*, *3*]. Ceci est à la base d'une tentative de quantification de Gupta.

Pour introduire des développements en série de façon covariante on est amené à faire apparaître des tenseurs mixtes c'est-à-dire des opérateurs linéaires qui peuvent s'écrire sous forme de développements en série (alors qu'il n'est pas possible de construire un développement en série à partir uniquement d'un tenseur deux fois covariant). Ceci conduit à se donner sur la variété V_4, une métrique riemannienne auxiliaire $h_{\nu\mu}$.

On prend habituellement comme nouvelle variable de champ, l'écart entre les deux métriques (4) :

$$\Phi_{\nu\mu} = g_{\nu\mu} - h_{\nu\mu}.$$

Les indices étant levés et abaissés avec la métrique auxiliaire $h_{\nu\mu}$, soient G et Φ les matrices d'éléments g_{μ}^{ν} et Φ_{μ}^{ν}. On a $G = 1 + \Phi$ et on calcule par des développements en série de puissance de Φ :

$$\left(\overset{*}{g}{}_{\mu}^{\nu}\right) = G^{-1} = (1 + \Phi)^{-1} \qquad \text{et} \qquad (\det G)^{\frac{1}{2}} = [\det (1 + \Phi)]^{\frac{1}{2}}$$

la deuxième expression intervenant aussi dans le lagrangien.

On obtient ainsi le lagrangien et les équations du champ sous forme de développements en série ou n'apparaissent plus que les seules variables $\Phi_{\nu\mu}$ qui ne sont plus liées par des contraintes algébriques. Le lagrangien gravitationnel se présente ainsi sous une forme qui est habituelle en théorie des champs avec cependant une infinité de termes d'interaction.

La métrique auxiliaire $h_{\nu\mu}$ peut être en principe une métrique riemannienne arbitraire. Pratiquement cette méthode est employée dans l'étude des modèles d'univers tels que la variété V_4 est supposée simplement être l'espace numérique de quatre variables réelles R^4; on peut alors prendre comme métrique auxiliaire une métrique euclidienne et faire de V_4 un espace de Minkowski. C'est le cadre de l'interprétation minkowskienne de la relativité générale [*4*, *5*, *6*] selon le point de vue introduit par Rosen. Les potentiels $g_{\nu\mu}$ peuvent être considérés comme un champ phénoménologique dans l'espace-temps de Minkowski déterminé par $h_{\nu\mu}$. Ce cadre correspond évi-

---

(4) On emploie aussi des variables obtenues à partir des densités tensorielles

$$\mathfrak{g}^{\nu\mu} = \overset{*}{g}{}^{\nu\mu}\sqrt{-g};$$

les développements en série sont analogues.

demment à des modèles d'univers très simples et l'hypothèse faite sur la topologie de V_4 est une hypothèse mathématiquement très forte mais ces modèles peuvent avoir un intérêt physique quand on ne s'occupe pas de cosmologie.

1.3 Convergence des séries et champs faibles.

Cette méthode n'est cependant pas absolument satisfaisante car les développements en série utilisés ne convergent pas en général : il faut faire l'hypothèse restrictive que le champ est faible. De façon précise les développements ne sont convergents que si $\| \Phi \| < 1$ (soit $| \rho_i | < 1$, ρ_i étant les valeurs propres de Φ). C'est ce que nous appelons champ faible. Par ailleurs remarquons aussi que l'expression du développement de $(\det G)^{\frac{1}{2}}$ est assez compliquée.

Du point de vue mathématique cette hypothèse des champs faibles est très restrictive mais elle correspond cependant à des cas physiquement intéressants : quand on ne s'occupe pas de cosmologie les modèles d'univers susceptibles de représenter les champs gravitationnels macrophysiques connus sont des espaces-temps toujours très voisins d'un espace de Minkowski, c'est-à-dire qu'il est possible de choisir la métrique euclidienne auxiliaire $h_{\nu\mu}$ telle qu'on ait $\| \Phi \| < 1$ partout ou du moins dans le domaine intéressant la mécanique céleste c'est-à-dire pratiquement à l'extérieur et suffisamment loin des étoiles.

Cependant on peut penser qu'en microphysique il existe des champs gravitationnels intenses, par exemple au voisinage d'une particule. Du reste si on essaie de quantifier le champ de gravitation, c'est en partie avec l'espoir que dans le domaine des hautes énergies les interactions gravitationnelles puissent avoir un rôle prépondérant et permettent de résoudre certaines difficultés notamment celles des énergies propres des particules. Le domaine intéressant pourrait donc correspondre à des champs non nécessairement faibles. Aussi, avant même de quantifier il serait peut-être souhaitable d'avoir une théorie correcte de ce point de vue.

1.4 Développements convergents pour des champs non faibles.

Il est possible d'introduire des développements à la fois simples et convergents sans l'hypothèse assez arbitraire $\| \Phi \| < 1$ [*7*].

Prenons comme nouvelle variable de champ une matrice K d'éléments K^{ν}_{μ}, définie par :

$$G = e^{K} = 1 + K + \frac{1}{2} K^2 + \dots$$

on a alors

$$G^{-1} = e^{-K} = 1 - K + \frac{1}{2}K^2 - \dots$$

$$(\det G)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{tr} K} = 1 + \frac{1}{2}K^\nu_\nu + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}K^\nu_\nu\right)^2 + \dots$$

Ces développements en série sont convergents à la seule condition que K soit bornée. Ils coïncident au premier ordre avec ceux employés habituellement.

Ces développements permettraient donc de résoudre ce problème d'élimination des contraintes de façon rigoureuse. Il y a cependant quelques points à préciser; en particulier la matrice $K = \operatorname{Log} G$ qui est la variable du champ gravitationnel n'est pas *a priori* réelle et nous serons amenés à introduire la notion de métriques compatibles correspondant au cas intéressant où K est réelle. Nous verrons aussi que ces développements permettent d'éliminer les contraintes algébriques qui s'introduisent dans les questions relatives aux spineurs. Pour considérer des spineurs en relativité générale on introduit habituellement des repères orthonormés, c'est-à-dire quatre vecteurs astreints à vérifier des relations algébriques. Nous construirons explicitement un système de repères orthonormés à l'aide de développements en série et nous obtiendrons un lagrangien du champ de Dirac en interaction avec le champ gravitationnel où n'apparaîtront plus que des variables non liées par des contraintes.

2 MÉTRIQUES COMPATIBLES

2.1 Introduction. Définition.

Dans ce paragraphe nous allons esquisser l'étude mathématique d'une variété différentiable V_4 munie de deux métriques riemanniennes. En chaque point x de V_4 se trouvent donc définis deux tenseurs symétriques et réguliers $g(x)$ et $h(x)$ d'éléments respectifs $g_{\nu\mu}(x)$ et $h_{\nu\mu}(x)$ et on désigne par $\overset{*}{g}(x)$ et $\overset{*}{h}(x)$ les tenseurs vérifiant :

$$\overset{*}{g}{}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = \delta^\nu_\mu \,; \qquad \overset{*}{h}{}^{\nu\alpha} h_{\alpha\mu} = \delta^\nu_\mu .$$

Nous pouvons attacher à ces deux métriques un tenseur mixte. Soit $G(x)$ le tenseur d'éléments

(2.1) $$G^\nu_\mu = \overset{*}{h}{}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu}.$$

G est un tenseur mixte; nous pouvons donc aussi considérer que c'est un opérateur linéaire agissant sur les vecteurs. Ainsi nous parlerons indifféremment du tenseur G ou de l'opérateur G. L'étude algébrique de G est à la base de la plupart de nos considérations. Nous ne donnerons pas la démonstration des propriétés qui résultent directement de cette étude élémentaire et qui s'obtiennent très simplement en se plaçant dans un repère formé à partir des vecteurs propres de G par rapport à l'identité.

Pour commencer introduisons la définition suivante.

Nous dirons que les deux métriques g et h sont compatibles si G n'a pas de valeurs propres réelles négatives.

S'il en est ainsi, il existe un tenseur mixte réel $K(x)$ tel que l'opérateur G s'écrit :

$$G = e^{K}$$

(Nous pouvons comprendre comment cette propriété est liée à la définition précédente : à une valeur propre réelle ρ_i de K correspond pour G la valeur propre e^{ρ_i} qui est essentiellement positive). Notons que le tenseur K est symétrique dans les deux métriques; de façon précise nous voulons dire que les deux tenseurs d'éléments $K_{\nu\mu} = h_{\nu\alpha}K^{\alpha}_{\mu}$ et $K'_{\nu\mu} = g_{\nu\alpha}K^{\alpha}_{\mu}$ sont symétriques ([5]).

Nous allons étudier à quelles conditions deux métriques h et g sont compatibles mais auparavant signalons deux cas particuliers de métriques compatibles :

— Les métriques conformes, c'est-à-dire vérifiant :

$$g = e^{2\sigma}.h$$

$\sigma(x)$ étant un scalaire réel. K est simplement multiple de l'opérateur unité :

$$K^{\nu}_{\mu} = 2\sigma\delta^{\nu}_{\mu}.$$

— Les métriques correspondant à ce que nous avons appelé champ faible, c'est-à-dire telles que :

$$\| G - 1 \| < 1$$

d'après cette condition les valeurs propres réelles de G sont bien positives. La notion de métriques compatibles est donc plus générale que celle de champ faible.

([5]) Ceci est vrai plus généralement pour tout opérateur F de la forme $F = f(G)$.

2.2 Conditions de compatibilité.

L'étude des valeurs propres de G conduit à la première condition :

Deux métriques compatibles ont nécessairement même signature.

Cette condition serait suffisante dans le cas de métriques définies. Pour le cas de la relativité générale qui nous intéresse, g est supposée de signature $(+ - - -)$ il faudra donc choisir h de même signature mais ce n'est pas suffisant, il faut en outre préciser la position respective des cônes caractéristiques.

Donnons d'abord quelques définitions pour préciser nos notations. Un vecteur $\vec{u}$ sera dit orienté dans le temps (respect. dans l'espace) par rapport à g si $g_{\nu\mu}u^\nu u^\mu > 0$ (respect. < 0) et un 3-plan d'équation $v_\alpha dx^\alpha = 0$ sera dit orienté dans l'espace (respect. dans le temps) si $\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}v_\nu v_\mu > 0$ (respect. < 0). Nous appellerons repère (ou tétrade) en un point x un ensemble de quatre vecteurs contravariants $\vec{e}_{\underline{\alpha}}$ (de composantes (6) $e^\nu_{\underline{\alpha}}$) linéairement indépendants (non nécessairement orthonormés par rapport à l'une des métriques). Un repère sera dit physiquement admissible relativement à la métrique g si le vecteur $\vec{e}_{\underline{0}}$ est orienté dans le temps et les trois vecteurs $\vec{e}_{\underline{i}}$ dans l'espace par rapport à g. Nous pourrons alors énoncer la condition suivante :

Pour que deux métriques g et h de même signature $(+ - - -)$ soient compatibles il faut et il suffit qu'il existe au moins un vecteur orienté dans le temps par rapport aux deux métriques et un 3-plan orienté dans l'espace par rapport aux deux métriques. C'est-à-dire qu'il existe u^α et v_α tels qu'on ait simultanément :

$$g_{\nu\mu}u^\nu u^\mu > 0 \qquad h_{\nu\mu}u^\nu u^\mu > 0$$

$$\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}v_\nu v_\mu > 0 \qquad \overset{*}{h}{}^{\nu\mu}v_\nu v_\mu > 0.$$

Ou encore sous une forme équivalente : pour que deux métriques de signature $(+ - - -)$ soient compatibles il faut et il suffit qu'il existe, en chaque point, un repère physiquement admissible simultanément pour les deux métriques.

Nous avons schématisé les positions respectives des cônes caractéristiques dans la figure 1 pour des métriques compatibles et dans la figure 2 pour des

---

(6) Les indices soulignés servent à numéroter les vecteurs, les indices non soulignés sont relatifs aux coordonnées locales.

métriques non compatibles (dans le cas 2*a* il n'existe pas de vecteur orienté dans le temps par rapport aux deux métriques, dans le cas 2*b* il n'existe pas de 3-plan orienté dans l'espace par rapport aux deux métriques).

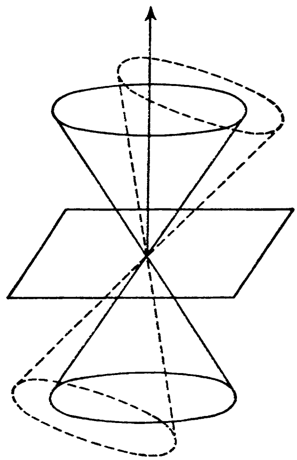
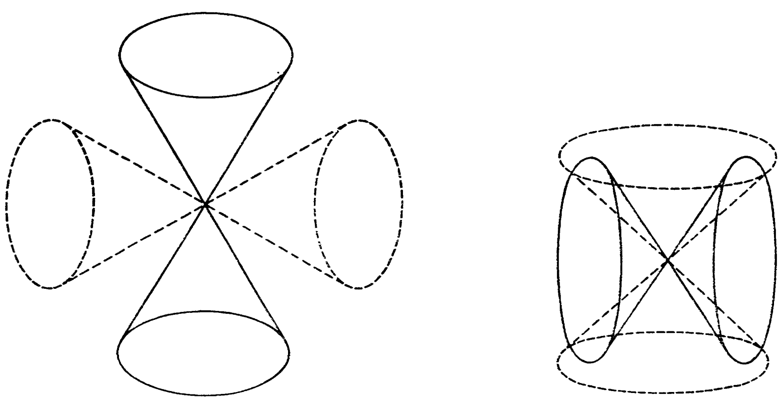


FIG. 1.



(*a*) (*b*)

FIG. 2.

2.3 Problème : Trouver une métrique euclidienne compatible à une métrique riemannienne donnée.

La variété V_4 est supposée munie d'une métrique riemannienne g de signature $(+---)$ et nous nous proposons de trouver une métrique euclidienne h compatible avec g.

Nous allons donner des solutions locales à ce problème, autrement dit nous allons construire sur un domaine ouvert de V_4 des métriques euclidiennes compatibles avec g.

On appelle repères naturels associés à un système de coordonnées locales les repères formés par les quatre vecteurs tangents en chaque point aux lignes de coordonnées (c'est-à-dire de composantes $e^{\nu}_{\underline{\alpha}} = \delta^{\nu}_{\alpha}$). Un système de coordonnées (x^{α}) sera dit physiquement admissible relativement à g si les repères naturels associés sont physiquement admissibles c'est-à-dire si les surfaces $x^0 = \text{Cte}$ sont orientées dans l'espace et les lignes $x = \text{Cte}$ sont orientées dans le temps par rapport à g (ce qui se traduit par $g_{00} > 0$ et $\overset{*}{g}{}^{00} > 0$).

Considérons un tel système de coordonnées locales physiquement admissible [7] (x^{α}) et définissons une métrique euclidienne h en nous donnant ses composantes $h_{\nu\mu}(x^{\alpha}) = \eta_{\nu\mu}$ [8] dans ce système de coordonnées. h est bien une métrique euclidienne puisque ses composantes sont des constantes dans le système de coordonnée (x^{α}); elle est bien compatible avec g car les repères naturels associés au système de coordonnées (x^{α}) sont physiquement admissibles simultanément pour les deux métriques h et g (condition suffisante du paragraphe précédent).

2.4 Introduction d'une métrique auxiliaire en relativité générale.

Revenons un peu sur la question de l'introduction d'une deuxième métrique en relativité générale en nous plaçant d'un point de vue purement mathématique. De ce point de vue la première justification de l'introduction d'une métrique auxiliaire est qu'elle permet d'obtenir un traitement covariant pour certaines questions. En effet, il ne faut pas oublier qu'en relativité générale les potentiels $g_{\nu\mu}$ sont des variables dynamiques et sont en principe inconnus *a priori*. Justement un des problèmes essentiels est de les déter-

---

(7) De tels systèmes de coordonnées locales existent; il est en effet possible de trouver localement une famille régulière d'hypersurfaces orientées dans l'espace et une congruence de ligne de temps.

(8) $\eta_{\nu\mu}$ est la métrique de Minkowski,

$$\eta_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

miner en résolvant les équations du champ. Il est intéressant de se donner *a priori* sur V_4 une métrique auxiliaire ce qui permet d'avoir une situation comparable à celle de la théorie des champs et de traiter de façon covariante en particulier ce problème de la résolution des équations du champ et aussi le problème de l'énergie gravitationnelle (alors qu'autrement ces problèmes sont traités dans un système de coordonnées particulier). Pour des raisons de simplicité, nous avons en général intérêt à choisir si possible la métrique auxiliaire euclidienne par contre du point de vue mathématique rien ne nous force à prendre une signature $(+---)$. Ce sont des considérations physiques qui conduisent à choisir comme métrique auxiliaire la métrique de Minkowski qui est supposée représenter l'espace-temps en l'absence d'interactions gravitationnelles.

Nous nous sommes posé ici un problème purement mathématique : l'élimination des contraintes dans le lagrangien gravitationnel. Pour traiter ce problème de manière rigoureuse nous avons été conduits à introduire une métrique auxiliaire supposée compatible avec la métrique fondamentale $g_{\nu\mu}$. Le champ de gravitation est alors décrit par un tenseur K^{ν}_{μ} réel (tel que $G = e^{K}$) et le lagrangien gravitationnel ainsi que toutes les grandeurs intéressantes s'expriment en fonction de K^{ν}_{μ} par des développements en série qui sont convergents dans tous les cas. Ainsi des considérations purement mathématiques conduisent à introduire une métrique auxiliaire et imposent des restrictions dans le choix de cette métrique. Les conditions de compatibilité imposent de choisir la métrique auxiliaire de signature $(+---)$ et amènent à distinguer dans une certaine mesure la coordonnée temporelle et les coordonnées spaciales. Ces conditions mathématiques sont en accord avec le point de vue physique.

Malgré ces restrictions le choix de la métrique auxiliaire reste largement arbitraire; les équations du champ peuvent être mises sous la même forme quelle que soit la métrique choisie.

3 LAGRANGIEN DU CHAMP DE GRAVITATION

3.1 Variables de champ. Composantes irréductibles.

Dans ce paragraphe nous allons supposer que la variété V_4 munie de la métrique h est l'espace-temps de Minkowski et que h et g sont compatibles. Le champ de gravitation peut être alors considéré comme un champ phénoménologique dans cet espace de Minkowski et décrit par un tenseur réel et symétrique K^{ν}_{μ} tel que $G = e^{K}$. Nous allons donner des expressions explicites du lagrangien gravitationnel. Auparavant voyons quelles variables de champ nous pouvons utiliser; en effet, nous ne sommes pas absolument tenus à employer les K^{ν}_{μ}, il est équivalent d'employer des combinaisons linéaires qui peuvent être plus intéressantes dans certains cas.

En particulier on obtient souvent des expressions plus simples en considérant des variables liées à la densité tensorielle :

$$\mathfrak{g}^{\nu\mu} = \overset{*}{g}{}^{\nu\mu}\sqrt{-g}.$$

Introduisons donc les variables suivantes :

$$H^{\nu}_{\mu} = -K^{\nu}_{\mu} + \frac{1}{2}K^{\alpha}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\mu} \tag{3.1}$$

auxquelles nous pouvons faire correspondre les tenseurs E^{ν}_{μ} et $\overset{*}{E}{}^{\nu}_{\mu}$ définis en tant qu'opérateurs linéaires par les expressions :

$$E = e^{H}\,; \qquad \overset{*}{E} = e^{-H} \tag{3.2}$$

et nous avons manifestement :

$$\mathfrak{g}^{\nu\mu} = E^{\nu\mu}\sqrt{-h}.$$

Nous pouvons aussi considérer les composantes irréductibles du champ, c'est-à-dire un scalaire (spin 0) et un tenseur symétrique de trace nulle (spin 2 pur). Soient donc :

$$B = \frac{1}{2}K^{\nu}_{\nu}\,; \qquad C^{\nu}_{\mu} = K^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}B\delta^{\nu}_{\mu}. \tag{3.3}$$

L'intérêt de cette décomposition est que chaque partie irréductible a un sens géométrique séparément :

— La composante scalaire B définit l'élément de volume riemannien de V_4. Nous avons avec les notations habituelles :

$$\sqrt{-g} = e^{B}\sqrt{-h}$$

où $\sqrt{-h}$ est connu *a priori*, en coordonnées cartésiennes $\sqrt{-h} = 1$.

— La composante de spin 2 est invariante dans les transformations conformes de la métrique g, c'est-à-dire dans les transformations

$$g_{\nu\mu} \Rightarrow e^{2\sigma} g_{\nu\mu}$$

où $\sigma(x)$ est un scalaire réel quelconque. Les éléments géométriques de V_4 qui sont invariants dans les transformations conformes ne sont fonctions que de cette composante (et bien entendu de $h_{\nu\mu}$ qui est connu *a priori*), en particulier le tenseur de courbure conforme de H. Weyl s'exprime uniquement en fonction de $C_{\nu\mu}$ et est indépendant de la composante de spin 0.

3.2 Lagrangiens gravitationnels.

Pour des questions dimensionnelles nous modifions légèrement les notations en introduisant la constante de gravitation χ, nous poserons maintenant :

$$G = e^{\beta K} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\beta^2}{4} = \chi.$$

Enfin, dans toute la suite, ∂_ν et ∇_ν désigneront les symboles de dérivation covariante relatifs à $h_{\nu\mu}$ et $g_{\nu\mu}$ respectivement.

Les équations d'Einstein s'obtiennent à partir de l'action :

$$\int \left(Lm - \frac{1}{2\chi} R \right) \sqrt{-g} \sim \int (L\overset{\circ}{m} + Lg) \sqrt{-h}$$

où Lm est le lagrangien matériel et R la courbure riemannienne scalaire. On peut obtenir des lagrangiens gravitationnels indépendants des dérivées secondes du champ; il y a en particulier l'expression classique :

$$(3.4) \qquad Lg = -\frac{1}{2\chi} \overset{*}{g}{}^{\nu\mu} (\Delta^{\beta}_{\mu\alpha} \Delta_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} - \Delta_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} \Delta_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta}) (\det G)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$(3.5) \qquad \Delta^{\rho}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \overset{*}{g}{}^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}).$$

Le tenseur $\Delta^{\rho}_{\nu\mu}$ est simplement la différence des deux connexions. Ce lagrangien peut s'exprimer en fonction des variables $E_{\nu\mu}$ et $\overset{*}{E}{}^{\nu\mu}$ introduites dans le paragraphe précédent; on obtient [*9*] :

$$(3.6) \quad Lg = -\frac{1}{8\chi} \left[E^{\nu\mu} \partial_\nu \overset{*}{E}_{\rho\sigma} \partial_\mu E^{\rho\sigma} + 2 E^{\nu\mu} \partial_\nu B \cdot \partial_\mu B + 2 \overset{*}{E}_{\rho\sigma} \partial_\nu E^{\rho\mu} . \partial_\mu E^{\nu\sigma} \right]$$

où

$$B = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left[\det \left(E_{\mu}^{\nu} \right) \right].$$

Nous allons maintenant nous placer dans une jauge particulière en imposant quatre conditions à nos variables de champ (de manière équivalente nous pourrions parler de conditions de coordonnées). C'est l'analogue de ce qui est fait habituellement en électrodynamique et l'intérêt est en particulier de simplifier le lagrangien mais surtout de permettre l'obtention d'un lagrangien régulier du point de vue du formalisme canonique ([9]).

Employons d'abord une jauge analogue à la jauge de Coulomb de l'électrodynamique et imposons $K_0^{\nu} = 0$ en coordonnées cartésiennes (il reste donc six variables dynamiques $K_j^i(x)$) ce qui correspond à l'emploi de coordonnées de Gauss associées à une section d'espace (c'est en effet équivalent à $g_{00} = 1$, $g_{0i} = 0$). En fonction des variables E_j^i et $\overset{*}{E}{}_j^i$ nous obtenons, toujours en coordonnées cartésiennes :

$$Lg = \left[-\frac{1}{2\beta^2} e^{\beta B} \partial_0 \overset{*}{E}_{ij} \partial_0 E^{ij} - \frac{3}{2} e^{\beta B} (\partial_0 B)^2 + \frac{1}{2\beta^2} E^{ij} \partial_i \overset{*}{E}_{kl} \partial_j E^{kl} - \frac{1}{2} E^{ij} \partial_i B \partial_j B + \frac{1}{\beta^2} \overset{*}{E}_{ij} \partial_l E^{ik} \cdot \partial_k E^{jl} \right]$$

où

$$\beta B = \operatorname{Log} \left[\det \left(E_j^i \right) \right]$$

soit, en prenant comme variables indépendantes les H_j^i :

$$(3.7) \quad Lg = \left[-e^{\beta H_i^i} \left[\frac{2}{\beta^2} \partial_0 e^{\beta H_k^j} \cdot \partial_0 e^{-\beta H_j^k} - \frac{3}{2} (\partial_0 H_j^j)^2 \right] + e^{\beta H_j^i} \left(\frac{1}{2\beta^2} \partial_i e^{-\beta H_l^k} \cdot \partial^j e^{\beta H_k^l} + \frac{1}{2} \partial_i H_k^k \partial^j H_l^l \right) + \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta H_j^i} \partial_l e^{\beta H_k^j} \cdot \partial^k e^{\beta H_i^l}. \right]$$

où par abus de notation, $e^{\beta H_j^i}$ désigne l'élément $(e^{\beta H})_j^i$ de la matrice $e^{\beta H}$.

([9]) Un problème régulier dans le formalisme canonique est celui où il est possible d'exprimer les $\dot{q}$ en fonction des p. Ce n'est pas le cas du lagrangien gravitationnel général qui est invariant par un groupe $G_{4\infty}$.

Il suffit bien entendu de remplacer les exponentielles par leur développement en série pour obtenir ce lagrangien sous forme d'un développement en série. Notons que ce lagrangien est régulier du point de vue du formalisme canonique, mais il n'est pas facile d'en donner une expression simple en fonction des variables H^i_j et de leurs moments conjugués.

Plaçons-nous maintenant dans la jauge analogue à la jauge de Lorentz de l'électrodynamique et imposons la condition suivante que nous pouvons appeler condition « d'isothermie » :

$$\partial_\nu E^{\nu\rho} = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \overset{*}{g}{}^{\nu\mu} \Delta^\rho_{\nu\mu} = 0.$$

Dans cette jauge la forme (3.4) du lagrangien se simplifie mais Lg reste singulier du point de vue du formalisme canonique. On peut obtenir un lagrangien $L'g$ plus satisfaisant de ce point de vue et équivalent à Lg en vertu de la condition d'isothermie :

$$\begin{aligned} L'_g &= Lg + \frac{1}{4\chi} h_{\nu\mu} \partial_\rho E^{\nu\sigma} \partial_\sigma E^{\mu\rho} \\ &= Lg + \frac{1}{4\chi} \partial_\sigma (h_{\nu\mu} E^{\mu\rho} \partial_\rho E^{\nu\sigma}) \end{aligned}$$

soit explicitement :

$$L'_g = -\frac{1}{8\chi} [E^{\nu\mu} \partial_\nu \overset{*}{E}_{\rho\sigma} \partial_\mu E^{\rho\sigma} + 2E^{\nu\mu} \partial_\nu B \partial_\mu B + 2(\overset{*}{E}_{\rho\sigma} - h_{\rho\sigma}) \partial_\nu E^{\rho\mu} \partial_\mu E^{\nu\sigma}]$$

où

$$B = \frac{1}{2} \operatorname{Log} [\det (E^\rho_\sigma)].$$

En remplaçant E^ν_μ et $\overset{*}{E}{}^\nu_\mu$ par les exponentielles correspondantes on obtient pour $L'g$ le développement en série suivant :

$$(3.8) \quad L'_g = \left[\begin{aligned} - e^{\beta H^\nu_\mu} \left(\frac{1}{2\beta^2} \partial_\nu e^{-\beta H^\rho_\sigma} \cdot \partial^\mu e^{\beta H^\sigma_\rho} + \frac{1}{4} \partial_\nu H^\alpha_\alpha \cdot \partial^\mu H^\beta_\beta \right) & \\ - \frac{1}{\beta^2} \left(e^{-\beta H^\rho_\sigma} - \delta^\rho_\sigma \right) \partial^\nu e^{\beta H^\mu_\rho} \cdot \partial_\mu e^{\beta H^\sigma_\nu} & \end{aligned} \right]$$

avec la condition d'isothermie ([10]) qui s'écrit :

$$\partial_\nu e^{\beta H^\nu_\mu} = 0.$$

([10]) De même que la condition de Lorentz en électrodynamique, cette condition d'isothermie peut être considérée comme une condition initiale et non comme une contrainte sur les variables de champ.

Par quelques transformations il est possible d'obtenir une autre expression de $L'g$ en fonction des composantes irréductibles :

$$\text{(3.9)} \quad L'_g = -e^{\frac{\beta}{2}B}\left[\begin{array}{r} e^{-\beta C^\nu_\mu}\left(\frac{1}{2\beta^2}\partial_\nu e^{-\beta C^\rho_\sigma}\cdot\partial^\mu e^{\beta C^\sigma_\rho} + \frac{1}{2}\partial_\nu B.\partial^\mu B\right) \\ + \frac{1}{\beta^2}\left(e^{\beta C^\nu_\mu} - \delta^\nu_\mu\right)\partial^\rho e^{-\beta C^\sigma_\nu}\cdot\partial_\sigma e^{-\beta C^\mu_\rho} \\ - \frac{1}{2\beta}\left(e^{-\beta C^\nu_\mu} - \delta^\nu_\mu\right)\partial_\nu e^{-\beta C^\mu_\rho}\cdot\partial^\rho B \end{array}\right]$$

Tandis que la condition d'isothermie s'écrit :

$$\partial_\nu e^{\frac{\beta}{2}\left(B\delta^\nu_\mu - 2C^\nu_\mu\right)} = 0.$$

Cette forme du lagrangien est sensiblement plus compliquée que la précédente par contre les termes du plus bas ordre du développement que nous pouvons appeler lagrangien du champ de gravitation libre car c'est aussi celui que nous obtenons si $\beta \to 0$, ont une forme qui peut être comparée aux lagrangiens rencontrés en théorie des champs :

$$\text{(3.10)} \qquad L_0 = \frac{1}{2}\partial_\nu C_{\rho\sigma}\cdot\partial^\nu C^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial_\nu B\cdot\partial^\nu B.$$

Nous pouvons interpréter le premier terme comme le lagrangien du champ d'une particule de spin 2 pur. Le deuxième terme est analogue au lagrangien d'une particule de spin 0 mais il est précédé du signe moins et il correspond à des énergies négatives. Bien entendu les états de spin 0 n'apparaissent pas à l'état pur grâce à la condition d'isothermie qui à cet ordre se réduit à

$$\partial_\nu C^\nu_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu B$$

et il n'apparaît pas d'état à énergie négative, l'énergie totale associée au lagrangien L_0 est toujours positive [*8*]. C'est une situation analogue à celle des états de polarisation temporelle pour le lagrangien du champ électromagnétique libre en jauge de Lorentz.

3.3 Lagrangiens matériels.

Nous pouvons bien entendu exprimer aussi les lagrangiens d'interaction de champs tensoriels ou spinoriels avec le champ de gravitation à l'aide des variables $K_{\nu\mu}$ ou $C_{\nu\mu}$ et B. C'est à peu près immédiat dans le cas de champs tensoriels : nous connaissons l'expression des lagrangiens en fonction des variables $g_{\nu\mu}$ et $\overset{*}{g}{}^{\nu\mu}$ et il suffit de remplacer ces grandeurs par les exponentielles correspondantes. Le cas des champs spinoriels est un peu moins simple aussi nous allons l'examiner plus en détail.

4 CHAMP DE DIRAC

4.1 Champs de tenseurs mixtes sur une variété riemannienne.

Nous allons d'abord indiquer une méthode générale pour traiter les questions relatives aux spineurs et aux repères orthonormés dans le cadre d'une variété munie de deux métriques. Ceci nous permettra d'obtenir une expression explicite du lagrangien du champ de Dirac en interaction avec le champ de gravitation directement en fonction des variables K^{ν}_{μ} alors qu'habituellement on introduit des variables intermédiaires liées par de nombreuses contraintes algébriques. Cette méthode pourrait permettre aussi l'interprétation minkowskienne des théories où le champ de gravitation est décrit non par une métrique mais par un champ de repères, telle la théorie de Møller [*10*]; dans l'interprétation minkowskienne de telles théories, le champ de gravitation pourrait être décrit par un tenseur $A_{\nu\mu}$ analogue à $K_{\nu\mu}$ mais non symétrique.

La méthode employée va consister à faire apparaître un champ de tenseur mixte A^{ν}_{μ} qui va nous permettre en particulier de construire des repères orthonormés relativement à la métrique $g_{\nu\mu}$ à partir de repères orthonormés relativement à la métrique $h_{\nu\mu}$. Pour mettre en évidence ces tenseurs mixtes il est commode de considérer au préalable une variété munie non pas de deux métriques mais d'une structure légèrement différente constituée par une métrique h et un champ de tenseurs mixtes réguliers A. Dans tout ce qui suit il n'est pas nécessaire de supposer que la métrique $h_{\nu\mu}$ est euclidienne, nous traitons donc le cas d'une métrique riemannienne quelconque mais dans l'application pratique, $h_{\nu\mu}$ sera la métrique de Minkowski.

Donnons-nous donc en chaque point d'une variété riemannienne V_4 de métrique $h_{\nu\mu}$ un tenseur mixte A^{ν}_{μ} réel et régulier. Nous pouvons considérer A comme un opérateur linéaire agissant sur les vecteurs covariants; $\vec{a}$ étant un vecteur covariant, on note par $\vec{b} = A(\vec{a})$ le vecteur transformé défini par :

$$\vec{b} = A(\vec{a}) = \vec{a} \cdot A \qquad \text{soit} \qquad b_{\nu} = a_{\mu} A^{\mu}_{\nu}.$$

Sur un vecteur contravariant $\vec{u}$ nous ferons agir A^{-1} et nous noterons toujours par $\vec{v} = A(u)$ le vecteur transformé défini par :

$$\vec{v} = A(u) = A^{-1} \cdot \vec{u} \qquad \text{soit} \qquad v^{\nu} = \overset{*}{A}{}^{\nu}_{\mu} u^{\mu}$$

où on note pour simplifier par $\overset{*}{A}$ le tenseur défini par :

$$\overset{*}{A}{}^{\nu}_{\alpha} A^{\alpha}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}.$$

En tant qu'opérateur linéaire ou matrice, $\overset{*}{A}$ est l'inverse de A ($\overset{*}{A} = A^{-1}$).

Ceci étant, nous pouvons en particulier construire la transformée $g = A(h)$ de la métrique h par l'opérateur A :

$$g_{\nu\mu} = h_{\rho\sigma} A^{\rho}_{\nu} A^{\sigma}_{\mu} \tag{4.1}$$

ce qui définit une métrique riemannienne g de même signature que la métrique h.

Nous nous retrouvons ainsi avec une variété munie de deux métriques, mais la situation obtenue se prête bien aux considérations relatives aux spineurs et aux repères orthonormés. Supposons que la variété soit munie d'une structure spinorielle relativement à la métrique h, c'est-à-dire que se trouve défini un système de tenseurs-spineurs γ_{ν} tels que :

$$\gamma_{\nu}\gamma_{\mu} + \gamma_{\mu}\gamma_{\nu} = -2h_{\nu\mu}. \tag{4.2}$$

Considérons les tenseurs-spineurs Γ_{ν} définis par :

$$\Gamma_{\nu} = A(\gamma_{\nu}) = \gamma_{\sigma} A^{\sigma}_{\nu}.$$

D'après les relations (4.1) et (4.2) ils vérifient :

$$\Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu} + \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} = -2g_{\nu\mu}$$

et ils définissent une structure spinorielle relative à la métrique g.

De même étant donné un système de repères $\vec{e}_{\underline{\alpha}}$ (de composantes $e^{\nu}_{\underline{\alpha}}$) orthonormés relativement à la métrique h, c'est-à-dire tels que :

$$h_{\underline{\nu}\underline{\mu}} = h_{\rho\sigma} e^{\rho}_{\underline{\nu}} e^{\sigma}_{\underline{\mu}} = \eta_{\nu\mu}. \tag{4.3}$$

Nous pouvons construire les repères $\vec{e}'_{\underline{\alpha}} = A(e_{\underline{\alpha}})$, soit :

$$e'^{\nu}_{\underline{\alpha}} = \overset{*}{A}{}^{\nu}_{\rho} e^{\rho}_{\underline{\alpha}}. \tag{4.4}$$

A partir des relations (4.1) et (4.3) nous pouvons voir que ces repères sont orthonormés relativement à la métrique $g = \mathrm{A}(h)$ c'est-à-dire, vérifient :

$$g'_{\underline{\nu}\,\underline{\mu}} = g_{\rho\sigma} e'^{\rho}_{\underline{\nu}} e'^{\sigma}_{\underline{\mu}} = \eta_{\nu\mu}.$$

Dans le cas pratique où la métrique h est euclidienne, nous obtenons sans difficulté des repères orthonormés $(\vec{e}_{\underline{\alpha}})$ en considérant les repères naturels relatifs à des coordonnées cartésiennes et de même pour les tenseurs-spineurs γ_ν. Nous avons donc ici un procédé pour construire les tenseurs-spineurs Γ_ν ou les repères $(\vec{e}'_{\underline{\alpha}})$ orthonormés relatifs à g.

Il nous faut maintenant nous ramener à la situation que nous venons d'envisager, c'est-à-dire étant donné deux métriques h et g trouver un tenseur A tel que $g = \mathrm{A}(h)$. Nous pouvons voir que si h et g ont même signature il est effectivement possible de construire en chaque point un tel tenseur A. Ce tenseur A n'est pas unique, tous les tenseurs de la forme L.A conviennent aussi, si L est un tenseur mixte tel que $\mathrm{L}(h) = h$ (l'ensemble des opérateurs linéaires L se trouve naturellement muni d'une loi de groupe, groupe qui est isomorphe au groupe de Lorentz). Dans le cas où les métriques h et g sont compatibles, il y a un champ de tenseurs A qui vérifie $g = \mathrm{A}(h)$ et dont nous pouvons donner une expression explicite très simple. C'est, toujours avec nos notations précédentes :

$$\mathrm{A} = \mathrm{G}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{K}}.$$

Si nous remarquons que A est symétrique $\left(\mathrm{A}_{\nu\mu} = \mathrm{A}_{\mu\nu}\right.$ où $\left.\mathrm{A}_{\nu\mu} = h_{\nu\alpha}\mathrm{A}^{\alpha}_{\mu}\right)$ nous pouvons voir que A vérifie bien l'équation (4.1).

C'est ce champ de tenseurs que nous emploierons pour exprimer le lagrangien du champ de Dirac à l'aide de nos variables de champ gravitationnel $\mathrm{K}_{\nu\mu}$. Si nous employions un autre tenseur A solution de l'équation $g = \mathrm{A}(h)$, cela reviendrait à faire un changement de représentation des matrices de Dirac et bien entendu le lagrangien serait équivalent.

4.2 Lagrangien du champ de Dirac.

Donnons-nous un système de tenseurs-spineurs γ_α relatifs à la métrique h, qu'il est commode de définir à partir de repères orthonormés $(\vec{e}_{\underline{\alpha}})$ et d'un système de matrice de Dirac habituel $\overset{\circ}{\gamma}_\alpha$ vérifiant :

$$\overset{\circ}{\gamma}_\alpha\overset{\circ}{\gamma}_\beta + \overset{\circ}{\gamma}_\beta\overset{\circ}{\gamma}_\alpha = -\,2\eta_{\alpha\beta}$$

et nous prenons

$$\gamma^\alpha = e^\alpha_{\underline{\rho}} \overset{\circ}{\gamma}{}^\rho .$$

Désignons par $\gamma^{\nu\mu}$ et $\gamma^{\nu\mu\rho}$ les produits antisymétrisés de deux et trois matrices γ^ν :

$$\gamma^{\nu\mu} = \frac{1}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu) \qquad \gamma^{\nu\mu\rho} = \frac{1}{3\,!}\delta^{\nu\mu\rho}_{\alpha\beta\gamma}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma .$$

ψ étant un spineur écrivons l'expression de $\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi$ qui va nous être utile pour expliciter le lagrangien [11]

$$\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi = \overset{\circ}{\gamma}{}^\nu e^\alpha_{\underline{\nu}}\psi_{,\alpha} + \frac{1}{4}(e^\alpha_{\underline{\sigma}} e^\lambda_{\underline{\nu}}\partial_\alpha e_{\mu\lambda})\overset{\circ}{\gamma}{}^\sigma\overset{\circ}{\gamma}{}^{\nu\mu}\psi \tag{4.5}$$

l'expression dans la parenthèse n'étant autre que les coefficients de rotation de Ricci des repères $(\vec{e}_{\underline{\alpha}})$.

Étant donné un tenseur A vérifiant $g = \mathrm{A}(h)$ nous définissons comme précédemment les matrices $\Gamma_\alpha = \mathrm{A}(\gamma_\alpha)$ et les repères $\vec{e}\,'_{\underline{\alpha}} = \mathrm{A}(e_\alpha)$. Écrivons alors l'expression de $\Gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi$ qui a la même forme :

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi &= \overset{\circ}{\gamma}{}^\nu e'^\alpha_{\underline{\nu}}\psi_{,\alpha} + \frac{1}{4}(e'^\alpha_{\underline{\sigma}} e'^\lambda_{\underline{\nu}}\nabla_\alpha e'_{\underline{\mu}\lambda})\overset{\circ}{\gamma}{}^\sigma\overset{\circ}{\gamma}{}^{\nu\mu}\psi \\ &= \overset{\circ}{\gamma}{}^\nu e'^\alpha_{\underline{\nu}}\psi_{,\alpha} + \frac{1}{4}e'^\alpha_{\underline{\sigma}} e'^\lambda_{\underline{\nu}}(\partial_\alpha e'_{\underline{\mu}\lambda} - \Delta^\rho_{\alpha\lambda}e'_{\underline{\mu}\rho})\overset{\circ}{\gamma}{}^\sigma\overset{\circ}{\gamma}{}^{\nu\mu}\psi\end{aligned}$$

où $\Delta^\nu_{\mu\rho}$ est le tenseur différence des deux connexions défini par la relation (3.5). Remplaçons $\vec{e}_\alpha$ par sa valeur $\vec{e}\,'_\alpha = \mathrm{A}(e_\alpha)$ définie par la relation (4.4) et comparons à l'équation (4.5).

Nous obtenons :

$$\Gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi = \overset{*}{\mathrm{A}}{}^\nu_\mu\gamma^\mu\partial_\nu\psi + \frac{1}{4}\overset{*}{\mathrm{A}}{}^\alpha_\sigma\overset{*}{\mathrm{A}}{}^\lambda_\nu(\partial_\alpha \mathrm{A}^\mu_\lambda - \Delta^\rho_{\alpha\lambda}\mathrm{A}^\mu_\rho)\gamma^\sigma\gamma^\nu_{\ \mu}\psi .$$

Écrivons maintenant le lagrangien du champ de Dirac

$$\mathrm{L_D}\sqrt{-h} = \left[\frac{1}{2}(\bar{\psi}\Gamma^\alpha\nabla_\alpha\psi - \nabla_\alpha\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) - m\bar{\psi}\psi\right]\sqrt{-g}$$

et nous avons :

$$\mathrm{L_D} = (\det \mathrm{G})^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\overset{*}{\mathrm{A}}{}^\nu_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \frac{1}{4}\overset{*}{\mathrm{A}}{}^\alpha_\sigma\overset{*}{\mathrm{A}}{}^\lambda_\nu\partial_\alpha \mathrm{A}^\mu_\lambda\cdot\bar{\psi}\gamma^{\sigma\nu}{}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi\right]. \tag{4.6}$$

---

[11] $\psi_{,\nu}$ désigne la dernière partielle de ψ tandis que $\partial_\nu\psi$ désigne toujours la dérivée covariante relative à h.

Les termes en $\Delta^{\nu}_{\mu\rho}$ disparaissent du fait de la symétrie de $\Delta^{\nu}_{\mu\rho}$ par rapport aux deux indices inférieurs. En prenant pour A la solution $A = e^{\frac{1}{2}\beta K}$ nous obtenons :

$$(4.7) \quad L_D = e^{\frac{1}{2}\beta K^{\rho}_{\rho}} \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{\beta}{2} K^{\nu}_{\mu}} (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\psi - \partial_{\nu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) + \frac{1}{4} e^{-\frac{\beta}{2} K^{\alpha}_{\sigma}} e^{-\frac{\beta}{2} K^{\lambda}_{\nu}} \cdot \partial_{\alpha} e^{\frac{\beta}{2} K^{\mu}_{\lambda}} \cdot \bar{\psi}\gamma^{\sigma\nu}{}_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \right]$$

Donnons encore une autre forme pour L_D en fonction des composantes irréductibles $C_{\nu\mu}$ et B et après le changement de variables $\psi \Rightarrow e^{3/8\beta B}\psi$

$$(4.8) \quad L_D = \frac{1}{2} e^{-\frac{\beta}{2} C^{\nu}_{\mu}} (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\psi - \partial_{\nu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) + \frac{1}{4} e^{-\frac{\beta}{2} C^{\alpha}_{\nu}} e^{-\frac{\beta}{2} C^{\sigma}_{\mu}} \cdot \partial_{\alpha} e^{\frac{\beta}{2} C^{\rho}_{\sigma}} \cdot \bar{\psi}\gamma^{\nu\mu}{}_{\rho}\psi - m e^{\frac{\beta}{4} B} \cdot \bar{\psi}\psi.$$

Je suis heureux d'exprimer toute ma reconnaissance à M. Kichenassamy pour de nombreuses et profitables discussions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Pérès, *Nuovo Cim.*, t. 28, 1963, p. 865.
[2] S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc.*, t. 265, 1952, p. 608.
[3] L. Halpern, *Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sc.*, t. 49, 1963, p. 226.
[4] N. Rosen, *Phys. Rev.*, t. 57, 1942, p. 147; *Ann. Phys.*, t. 22, 1963, p. 1.
[5] A. Papapetrou, *Proc. Roy. Irish Acad.*, t. A52, 1948, p. 11.
[6] D. Burlankov, *Soc. Phys. J. E. T. P.*, t. 17, 1963, p. 1306.
[7] M. Chevreton, *C. R. Acad. Sc.*, t. 259, 1964, p. 304.
[8] A. Capella, *Cahiers Phys.*, t. 16, 1962, p. 330.
[9] V. Fock, *Space time and gravitation.* Pergamon Press, 1959, Appendice B.
[10] C. Møller, *Proc. Int. School Phys.* « *Enrico Fermi* » *Course 20.* Acad. Press, 1962, p. 252.

(Manuscrit reçu le 15 décembre 1965).