ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN COLLEAU

Étude des propagateurs tensoriels et spinoriels

Annales de l'I. H. P., section A, tome 3, nº 3-4 (1965), p. 195-337
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__3_3-4_195_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. III, n° 3 et 4, 1965, p. 195-337. *Physique théorique.*

Étude des propagateurs tensoriels et spinoriels

par

Jean COLLEAU

INTRODUCTION

La théorie des propagateurs sur une variété riemannienne, introduite et développée depuis 1958 par A. Lichnerowicz, joue un rôle important dans la Physique mathématique moderne, par ses applications à la théorie classique des champs et à la théorie quantique des champs sur un espace-temps courbe.

En théorie classique des champs, le propagateur, et les deux noyaux élémentaires dont il est la différence, jouent un rôle essentiel pour l'obtention de potentiels astreints à un système linéaire hyperbolique du second ordre (équations de Klein-Gordon, par exemple), grâce aux deux *théorèmes* suivants :

— La composition au sens de Volterra de la « source » du champ avec l'un ou l'autre des noyaux élémentaires donne le potentiel retardé, ou avancé, généralisant à un espace-temps courbe ces notions classiques sur l'espace-temps de Minkowski.

— Toute solution-distribution du système homogène peut être obtenue par composition au sens de Volterra du propagateur avec une distribution qu'on peut choisir à support compact dans le passé et dans le futur (Y. Bruhat [*4*]).

En théorie quantique des champs, il est impossible d'étendre à un espace-temps courbe de la Relativité générale la méthode, basée sur la transformation de Fourier, de construction de commutateurs et d'anticommutateurs de champs, usuelle dans le cadre de la Relativité restreinte. Il faut donc utiliser une méthode équivalente, susceptible de s'étendre à un espace-temps courbe; cette méthode fait appel au «*propagateur de Jordan-Pauli*», qui est généralisé sur un espace-temps courbe par la différence des deux noyaux élémentaires relatifs à l'opérateur de Klein-Gordon sur les tenseurs-spineurs. D'autre part, A. Lichnerowicz a montré [*3*] comment, en introduisant à côté du propagateur un noyau symétrique qui lui est lié, on peut définir des opérateurs de création-annihilation.

Mais une différence fondamentale apparaît dans le passage du propagateur de Jordan-Pauli aux propagateurs sur les variétés riemanniennes : le phénomène de *diffusion des ondes*. Ce fait se traduit par la séparation des propagateurs du cas général en *termes de front* (seuls existant dans le propagateur de Jordan-Pauli correspondant à une masse nulle) et en *termes de diffusion* ou *de queue* (1).

Dans le cas du propagateur de Jordan-Pauli, A. Lichnerowicz [*1*] a montré que tous les propagateurs tensoriels-spinoriels se déduisent du propagateur scalaire par multiplication par les bi-tenseurs-spineurs de transport parallèle de B. S. De Witt et R. W. Brehme (réduits à l'identité $\delta^{A}_{R'}$ en coordonnées rectilignes). L'un des objets de ce travail est d'examiner comment, sur une variété riemannienne, on peut déduire les propagateurs tensoriels-spinoriels d'ordre quelconque du propagateur scalaire, ou du moins des propagateurs des premiers ordres. La propriété ci-dessus *ne s'étend qu'aux termes de front* des propagateurs du cas général. Nous obtenons pour les termes de diffusion une loi plus complexe, et nous l'exprimons de façon simple en approximation, sur un espace-temps « quasi minkowskien ».

C'est pourquoi une justification rigoureuse de telles *approximations* nous est apparue nécessaire. Elle est basée sur la définition de dérivées (qui sont des distributions) des noyaux élémentaires et du propagateur par rapport à des paramètres dont dépendent (différentiablement) les coefficients de l'opérateur. On déduit de ces dérivées des *développements limités*, suivant les puissances des paramètres, des noyaux élémentaires et du propagateur.

Dans I-A, nous rappelons les définitions fondamentales de la théorie des propagateurs dans le cas général.

Dans I-B, nous reprenons, en nous attachant à donner aux calculs une forme plus tensorielle, un exposé de la méthode utilisée pour la construction explicite des propagateurs. Cette méthode, initialement donnée par S. L. Sobolev pour résoudre le problème de Cauchy pour une équation linéaire hyperbolique du second ordre, a été développée par Y. Bruhat [*1*] [*2*] :

(1) Notation de B. S. De Witt et de C. Morette-De Witt, dont il faut signaler la contribution à la théorie des propagateurs.

elle donne les noyaux élémentaires comme noyaux résolvants d'un système d'équations intégrales de Volterra généralisant les formules de Kirchhoff. C'est le noyau de ces équations intégrales, nul dans les formules de Kirchhoff classiques (cas minkowskien) qui est à l'origine des termes de diffusion (itérées successives).

On se limite aux variétés de dimension 4, où cette méthode est notablement plus simple que l'extension donnée par Y. Bruhat [*2*] pour les variétés de dimension supérieure paire. Ce sont d'ailleurs les plus importantes pour les applications à la Physique.

Dans II cet exposé est complété par l'étude de la différentiabilité du propagateur par rapport à des paramètres, et par la justification de la méthode d'approximation.

Dans III sont étudiées les lois permettant de déduire les propagateurs tensoriels-spinoriels d'ordre quelconque des propagateurs des premiers ordres. Pour les termes de front, on trouve la proportionnalité au bi-tenseur-spineur de transport parallèle. Pour les termes de diffusion, la loi trouvée est plus complexe (« décompositions ») et ne porte que sur le noyau des équations intégrales de Volterra. Ce n'est que dans le cas quasi minkowskien, et en utilisant la méthode d'approximation, que l'on peut en déduire des résultats simples sur les propagateurs eux-mêmes (IV). En outre, dans III et IV, on montre comment la confrontation de ces résultats avec ceux obtenus en théorie de Petiau-Duffin-Kemmer sur une variété riemannienne ([2]), amène à considérer comme *primitifs* les éléments relatifs au spin 1/2; ce résultat est à rapprocher du « *principe de fusion* » *de Louis de Broglie.*

Dans V nous construisons, en application des méthodes développées précédemment, la première approximation quasi minkowskienne des propagateurs relatifs à l'espace-temps de Schwarzschild, sous une condition qui revient à restreindre l'étude à la propagation des ondes dans le vide, et non dans la matière.

L'étude des propagateurs m'a été suggérée par Mme Choquet-Bruhat. C'est grâce à sa sollicitude constante, à la clairvoyance et à la sûreté de ses conseils toujours fructueux, et aux encouragements qu'elle n'a cessé de me prodiguer que j'ai pu mener ce travail à bien. Qu'elle veuille bien trouver ici, ainsi que M. Lichnerowicz, l'expression de ma grande admiration et de ma profonde reconnaissance.

([2]) A. Lichnerowicz [*2*].

CONVENTIONS ET NOTATIONS

1° Indices *grecs* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots, \rho, \sigma, \ldots$: repères affines; valeurs 0, 1, 2, ..., n.

Indices *romains* h, i, j, k, ... : repères affines; valeurs 1, 2, ..., n.

Indices *italiques* $a, b, c, d, \ldots, m, n, \ldots, r, s, \ldots$: repères spinoriels; valeurs 1, 2, 3, 4 (pour $n+1=4$).

On utilise aussi les indices « condensés » suivants :

— Indices de *ronde* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{L}, \ldots, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \ldots$, pour les composantes des p-tenseurs :

$$\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p),$$

ainsi que des (p-1)- ou (p-2)-tenseurs :

$$\mathcal{A}^u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{u-1}, \alpha_{u+1}, \ldots, \alpha_p)\ ;$$

$$\mathcal{A}^{uv} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{u-1}, \alpha_{u+1}, \ldots, \alpha_{v-1}, \alpha_{v+1}, \ldots, \alpha_p).$$

— Indices *italiques minuscules encerclés* ⓐ, ⓑ, ..., ⓡ, ⓢ, ..., pour les composantes des ν-spineurs :

$$ⓐ = (a_1, \ldots, a_\nu)$$

ainsi que des (ν-1)- ou (ν-2)-spineurs :

$$ⓐ^w = (a_1, \ldots, a_{w-1}, a_{w+1}, \ldots, a_\nu)\ ;$$

$$ⓐ^{wx} = (a_1, \ldots, a_{w-1}, a_{w+1}, \ldots, a_{x-1}, a_{x+1}, \ldots, a_\nu).$$

— Les indices de *capitale romaine* A, B, ..., L, ..., R, S, ... désignent, aux chapitres premier et II, les composantes des champs U, V, f, etc.; aux chapitres III, IV et V où ce sont des champs de p-tenseurs-ν-spineurs, ces indices sont utilisés comme indices condensés :

$$\mathrm{A} = (\mathcal{A}, ⓐ), \qquad \mathrm{A}^u = (\mathcal{A}^u, ⓐ), \qquad \mathrm{A}^w = (\mathcal{A}, ⓐ^w),$$

$$\mathrm{A}^{uw} = (\mathcal{A}^u, ⓐ^w), \text{ etc...}$$

2° Les indices *gras* se rapportent aux coordonnées et au repère naturel qui leur est associé (ex. : $x^{\boldsymbol{\alpha}}$, $g^{\boldsymbol{\lambda\nu}}$, $p_{\boldsymbol{\nu}}$, ...).

Les indices *ordinaires* se rapportent à un repère mobile, précisé ou non (ex. : $\mathrm{U_A}$, f_{B}, $q_{\mathrm{j}'}$, $\tau^a_{r'}$, ...).

Les indices *affectés de ′ et ″* se rapportent respectivement aux points x' et x''; les indices *non affectés de ces signes* se rapportent au point x.

Exemples :

$$A^{\mu'}_{\nu'}(x') \quad , \quad G^{A}_{R'}(x', x) \quad , \quad M^{L''}_{R'}(x', x'').$$

3° Sauf indication explicite du contraire, la *convention de sommation* sera utilisée partout, pour des indices de nature quelconque.

4° On note par δ le *symbole de Kronecker* :

— nul si ses deux indices sont différents,

— égal à 1 si ses deux indices sont égaux,

quelles que soient la position et la nature de ces indices. Pour les indices condensés,

$$\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} U_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{B}} \quad , \quad \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{B}^u} U_{\mathcal{A}} = U_{\beta_1 \dots \beta_{u-1} \alpha_u \beta_{u+1} \dots \beta_p}, \text{ etc...}$$

On note par $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_q}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ le *symbole de Kronecker* à $2q$ indices,

— complètement antisymétrique dans chacun des groupes d'indices $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q)$;

— nul si dans les deux groupes ne figurent pas les mêmes indices ;

— égal à $+1$ ou -1 si $(\beta_1, \dots, \beta_q)$ est une permutation de $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, suivant la parité de la permutation.

On note par $\eta_{\alpha\beta}$ ou $\eta^{\alpha\beta}$ les nombres :

$$\begin{cases} \eta_{0\alpha} = \eta_{\alpha 0} = \delta_{0\alpha}, & \eta^{0\alpha} = \eta^{\alpha 0} = \delta^{0\alpha} \\ \eta_{ij} = -\delta_{ij}, & \eta^{ij} = -\delta^{ij}. \end{cases}$$

$\gamma^{\alpha a}{}_{b}$ ou $\gamma_{\alpha b}^{a}$ désigne les *matrices de Dirac*, caractérisées par :

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2\eta_{\alpha\beta} e.$$

Γ_{ab} et Γ^{ab} désignent les composantes covariantes et contravariantes de la *2-forme spinorielle fondamentale*.

5° $C^\alpha{}_\beta = C^\alpha{}_{\beta\mu}\theta^\mu$ désigne une *connexion affine*;

$C^a{}_b = C^a{}_{b\mu}\theta^\mu$ désigne une *connexion spinorielle*.

La connexion spinorielle canoniquement associée à la connexion riemannienne est :

$$C^a{}_b = -\frac{1}{4} C^\alpha{}_\beta (\gamma_\alpha \gamma^\beta)^a_b.$$

Courbure :

$$\Omega^\alpha{}_\beta = dC^\alpha{}_\beta + C^\alpha{}_\rho \wedge C^\rho{}_\beta,$$

2-forme de composantes strictes $R^\alpha{}_{\beta,\lambda\mu}$.

On note :

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = g_{\alpha\rho}R^{\rho}{}_{\beta,\lambda\mu} \\ R_{\alpha\beta} \quad = R^{\lambda}{}_{\alpha,\lambda\beta} \\ R \quad\;\; = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \end{cases} \qquad \text{(tenseur de Ricci)}$$

6° ∂ est le symbole de dérivation :

∂_{α} : dérivée partielle $\partial/\partial x^{\alpha}$;

∂_{β} : dérivée pfaffienne $\partial_{\beta} = A^{\alpha}_{\beta}\partial_{\alpha}$;

∇ est le symbole de dérivation covariante dans la connexion C.

7° On notera :

$$d^{n+1}x = dx^{0} \wedge dx^{1} \wedge \ldots \wedge dx^{n}$$
$$d^{n}x \quad = dx^{1} \wedge dx^{2} \wedge \ldots \wedge dx^{n}$$
$$d_{i}^{n-1}x = dx^{1} \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^{n}$$
$$d^{n-1}\Omega = \sin^{n-2}\theta'.\sin^{n-3}\theta'' \ldots \sin\theta^{(n-2)}\, d\theta' \wedge \ldots \wedge d\theta^{(n-1)}$$
$$= \Phi^{(n-1)}(\theta)d\theta' \wedge d\theta'' \wedge \ldots \wedge d\theta^{(n-1)}.$$

8° Pour les tenseurs-spineurs-distributions, les notations de A. Lichnerowicz [*1*] [*2*] seront utilisées de façon constante.

9° $\{ h(x) \}_{x'}$ désigne la restriction de la fonction h à $x \in \Gamma_{x'}$ (conoïde caractéristique de sommet x').

10° Les exceptions aux conventions ci-dessus sont indiquées de façon explicite dans le texte.

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

A. Noyaux élémentaires. Propagateurs. Paramétrix (1).

1) Opérateur linéaire hyperbolique ; conoïde caractéristique.

On étudie un opérateur différentiel linéaire L du second ordre, aux $(n + 1)$ variables x^{α} $(\alpha = 0, 1, \ldots, n)$, opérant sur un champ U, dont les m composantes U_{A} $(A = 1, \ldots, m)$ sont des fonctions ou distributions sur un ouvert Ω

(1) A. Lichnerowicz [*1*].

de R^{n+1} ([2]). L'opérateur L, à coefficients variables, est de la forme

(1-1) $$(LU)_B \equiv L_B^A U_A \equiv g^{\lambda\nu}(x)\partial_\lambda\partial_\nu U_B + h_B^{A\lambda}(x)\partial_\lambda U_A + k_B^A(x)U_A,$$

où on désigne par $g^{\lambda\nu}(x)$, $h_B^{A\lambda}(x)$, $k_B^A(x)$ des fonctions bornées sur Ω, dont les propriétés de continuité et de différentiabilité seront précisées ultérieurement.

On désigne par *L l'opérateur adjoint de L qui opère sur des champs V définis comme les champs U par leurs m composantes V^B

$$({}^*LV)^A \equiv {}^*L_B^A V^B \equiv \partial_\lambda\partial_\nu\{g^{\lambda\nu}(x)V^A\} - \partial_\lambda\{h_B^{A\lambda}(x)V^B\} + k_B^A(x)V^B.$$

Si l'intersection des supports des champs U et V est un compact de Ω,

(1-2) $$\langle L_B^A U_A, V^B\rangle_\Omega - \langle U_A, {}^*L_B^A V^B\rangle_\Omega = 0$$

(avec, par exemple, $V^B \in C^\infty(\Omega)$ et $U_A \in \mathcal{D}'_\Omega$, ...).

On suppose enfin que, en chaque point x de Ω, la forme quadratique aux $(n+1)$ variables p_ν

$$P(x, p_\nu) \equiv g^{\nu\pi}(x)p_\nu p_\pi$$

est de type hyperbolique normal à un carré positif et n carrés négatifs, *non dégénérée*. On choisit les variables x^α telles que $g^{00}(x) > 0$ et que la forme quadratique à n variables $g^{ik}(x)p_i p_k$ $(1 \leqslant i, k \leqslant n)$ soit définie négative (x^0 variable *temporelle*, x^i variables *spatiales* pour $1 \leqslant i \leqslant n$).

Ainsi, L et *L sont du type de d'Alembert. Leurs hypersurfaces caractéristiques sont les mêmes; ce sont les solutions du système différentiel extérieur

(1-3) $$P(x, p_\nu) \equiv g^{\nu\pi}(x)p_\nu p_\pi = 0, \quad p_\alpha dx^\alpha = 0.$$

Elles sont engendrées par les bicaractéristiques, solutions du système

(1-4) $$\frac{dx^\alpha}{g^{\alpha\nu}(x)p_\nu} = \frac{dp_\nu}{-\frac{1}{2}p_\lambda p_\pi \partial_\nu g^{\lambda\pi}(x)} = d\lambda.$$

Ce système est un système hamiltonien, où la variable indépendante λ est le paramètre canonique. Les solutions sont les géodésiques isotropes d'une variété $\mathcal{V}$ *improprement riemannienne* de dimension $(n+1)$ (coordonnées

---

([2]) Par exemple, U peut être un champ tensoriel (ou un tenseur-distribution), un champ spinoriel (ou un spineur-distribution), un champ de tenseurs-spineurs (-distributions) (cf. chap. III et IV), etc.

locales x^α définies sur l'ouvert Ω de R^{n+1}), dont la métrique (hyperbolique normale) est définie par

$$ds^2 = g_{\lambda\nu}(x)dx^\lambda dx^\nu, \qquad g_{\lambda\pi}(x)g^{\nu\pi}(x) = \delta^\nu_\lambda.$$

Les bicaractéristiques issues d'un même point x' engendrent une hypersurface caractéristique $\Gamma_{x'}$, qui a en x' un point singulier conique (le cône des tangentes est le cône élémentaire en x'), et qu'on appelle le *conoïde caractéristique* de sommet x'. Nous supposerons dans la suite que, pour chaque x' de Ω, $\Gamma_{x'}$ n'a dans Ω aucune autre singularité que x', les géodésiques isotropes issues de x' ne se recoupant pas dans Ω (au besoin, on réduit Ω). Le conoïde $\Gamma_{x'}$ se divise en deux nappes $\Gamma^+_{x'}$ et $\Gamma^-_{x'}$ (type hyperbolique normal) et partage $(\Omega - \Gamma_{x'})$ en trois régions : $\mathcal{A}_{x'}$, $\mathcal{E}^+_{x'}$ (futur de x',) $\mathcal{E}^-_{x'}$ (passé de x'). On note :

$$\mathcal{E}_{x'} = \mathcal{E}^+_{x'} \cup \mathcal{E}^-_{x'}, \quad \bar{\mathcal{E}}^\pm_{x'} = \mathcal{E}^\pm_{x'} \cup \Gamma^\pm_{x'}, \quad \bar{\mathcal{E}}_{x'} = \bar{\mathcal{E}}^+_{x'} \cup \bar{\mathcal{E}}^-_{x'} = \mathcal{E}_{x'} \cup \Gamma_{x'}.$$

Pour une partie K de Ω, on définit :

$$\mathcal{E}^\pm_K = \bigcup_{x' \in K} \mathcal{E}^\pm_{x'}, \qquad \bar{\mathcal{E}}^\pm_K = \bigcup_{x' \in K} \bar{\mathcal{E}}^\pm_{x'},$$
$$\mathcal{E}_K = \mathcal{E}^+_K \cup \mathcal{E}^-_K, \qquad \bar{\mathcal{E}}_K = \bar{\mathcal{E}}^+_K \cup \bar{\mathcal{E}}^-_K.$$

Définition (3). — Une partie K de Ω est compacte vers le futur (resp. vers le passé) si, pour tout x' de Ω, l'intersection de K avec $\bar{\mathcal{E}}^+_{x'}$ (resp. avec $\bar{\mathcal{E}}^-_{x'}$) est compacte ou vide.

2) Noyaux élémentaires. Propagateurs.

On définit les noyaux-distributions de Dirac, $D^A_{R'}(x', x)$ et $D^{S'}_B(x', x)$ comme fonctionnelles linéaires, en x' et x respectivement, sur les champs $(V^{R'})$ et (U_A), ou $(U_{S'})$ et (V^B) (dont les composantes sont des fonctions numériques continues) par

$$(2\text{-}1) \quad \begin{cases} \langle D^A_{R'}, V^{R'} \rangle (x) = V^A(x), \\ \langle D^A_{R'}, U_A \rangle (x') = U_{R'}(x'), \end{cases} \qquad \begin{cases} \langle D^{S'}_B, U_{S'} \rangle (x) = U_B(x) \\ \langle D^{S'}_B, V^B \rangle (x) = V^{S'}(x'). \end{cases}$$

Définitions. — On appelle *noyaux élémentaires avancé* $E^{+A}_{R'}(x', x)$ et *retardé*

(3) Cette définition, qui s'étend à tout système hyperbolique, est due à J. Leray.

$E^{-A}_{R'}(x', x)$ relatifs à l'opérateur L deux noyaux-distributions satisfaisant, pour chaque x' fixé, aux deux conditions :

— leurs supports sont inclus dans $\bar{\mathcal{E}}^+_{x'}$ et $\bar{\mathcal{E}}^-_{x'}$, respectivement ;
— ils vérifient, relativement à x,

$$(2\text{-}2)\qquad {}^*_xL^A_B E^{\pm B}_{R'}(x', x) = D^A_{R'}(x', x).$$

On appelle *propagateur* relatif à L le noyau-distribution

$$(2\text{-}3)\qquad G^A_{R'}(x', x) = E^{-A}_{R'}(x', x) - E^{+A}_{R'}(x', x).$$

Pour chaque x' fixé, le propagateur a son support inclus dans $\bar{\mathcal{E}}_{x'}$; il vérifie relativement à x l'équation homogène

$$ {}^*_xL^A_B G^B_{R'}(x', x) = {}^*_xL^A_B E^{-B}_{R'}(x', x) - {}^*_xL^A_B E^{+B}_{R'}(x', x) = 0.$$

On définit de même les noyaux élémentaires ${}^*E^{\pm S'}_B(x', x)$ et le propagateur ${}^*G^{S'}_B(x', x)$ relatifs à l'opérateur adjoint *L.

Théorème d'existence et d'unicité. — *Sous des conditions de régularité des coefficients* $g^{\lambda\nu}(x)$, $h^{A\lambda}_B(x)$, $k^A_B(x)$, *la définition détermine univoquement les noyaux élémentaires* (4).

Considérons le système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre :

$$(2\text{-}4)\qquad L^A_B U_A(x) = f_B(x)$$

où le champ $f_B(x)$, figurant au second membre, est donné et appartient à $\mathcal{D}'_\Omega$. On appelle *solution avancée* U^+_A ou *solution retardée* U^-_A de (2-4) une solution de ce système, à support compact vers le futur, ou vers le passé, respective-

(4) Il s'agit en fait d'un théorème *global*, valable pour les systèmes hyperboliques généraux de J. Leray, sur des variétés globalement hyperboliques (sous réserve que les champs U et V soient susceptibles d'une définition globale : c'est le cas des champs de tenseurs-spineurs).

Ce travail n'utilisera qu'un énoncé local, dans le domaine d'un système de coordonnées. La méthode de S. L. Sobolev et Y. Bruhat, exposée pour $n = 3$ à la section B de ce chapitre, donne, dans le cas du second ordre, une démonstration locale, et indique une méthode de construction des noyaux élémentaires (cf. une autre méthode dans J. Hadamard [*1*] et E. Combet [*1*]).

ment. Le théorème précédent permet d'établir l'*existence* et l'*unicité* de la solution avancée et de la solution retardée. En effet, les fonctions

$$(2\text{-}5)\quad U_A^+(x) = \langle {}^*E^{-R'}_{\ A}, f_{R'} \rangle(x) \qquad \text{et} \qquad U_A^-(x) = \langle {}^*E^{+R'}_{\ A}, f_{R'} \rangle(x),$$

dont les supports sont compacts vers le futur et vers le passé, respectivement, vérifient

$${}_xL^A_B U^\pm_A = \langle {}_xL^A_B {}^*E^{\mp R'}_{\ A}, f_{R'} \rangle(x) = \langle D^{R'}_B, f_{R'} \rangle(x) = f_B(x),$$

d'où le théorème d'existence. Si inversement on a une solution avancée U_A^+ ou retardée U_A^- de (2-4), elle vérifie

$$(2\text{-}6)\quad \begin{aligned} U_A^\pm(x) &= \langle D^{S'}_A, U^\pm_{S'} \rangle x = \langle {}^*_{x'}L^{S'}_{R'} E^{\pm R'}_{\ A}, U^\pm_{S'} \rangle(x) \\ &= \langle E^{\pm R'}_{\ A}, {}_{x'}L^{S'}_{R'} U^\pm_{S'} \rangle(x) = \langle E^{\pm R'}_{\ A}, f_{R'} \rangle(x), \end{aligned}$$

puisque les conditions de support permettent d'appliquer (1-2). D'où le théorème d'unicité.

(2-5) et (2-6) sont valables pour tout champ $f_{R'}$ de $\mathcal{D}^l_\Omega$; d'où les *relations d'échange*

$$(2\text{-}7)\quad {}^*E^{\mp R'}_{\ A}(x', x) = E^{\pm R'}_{\ A}(x, x')\ ; \qquad {}^*G^{R'}_A(x', x) = -\,G^{R'}_A(x, x').$$

Enfin, la composition du propagateur et du second membre donne un champ

$$\langle G^B_{R'}, f_B \rangle\,(x') = U^-_{R'}(x') - U^+_{R'}(x'),$$

ayant son support dans le futur et le passé du support de f_B, qui vérifie l'équation homogène $(LU)_B = 0$.

3) Paramétrix.

Définition. — On appelle paramétrix avancées $P^{+A}_{\ R'}(x', x)$ (resp. retardées $P^{-A}_{\ R'}(x', x)$) relatives à L des noyaux-distributions satisfaisant, pour chaque x' fixé, aux deux conditions

— être portées par $\Gamma^+_{x'}$ (resp. par $\Gamma^-_{x'}$);
— vérifier, relativement à x

$$(3\text{-}1)\quad {}^*_xL^A_B P^{\pm B}_{\ R'}(x', x) = D^A_{R'}(x', x) - M^{\pm A}_{\ R'}(x', x),$$

où les noyaux-distributions $M^{\pm A}_{\ R'}(x', x)$ sont, pour chaque x' fixé, des mesures de densité finie portées par $\Gamma^{\pm}_{x'}$ (c'est-à-dire des fonctions sur $\Gamma^{\pm}_{x'}$) ([5]).

Étant donné un champ $U_A \in \mathcal{D}^{l+2}_{\Omega}$, on déduit de (3-1)

$$\langle P^{\pm B}_{R'}, {}_xL^A_BU_A \rangle (x') = \langle {}^*_xL^A_BP^{\pm B}_{R'}, U_A \rangle (x') = \langle D^A_{R'} - M^{\pm A}_{R'}, U_A \rangle (x').$$

Il en résulte, en désignant par $\eta(x', x)d^nx$ une ([6]) n-forme élément de volume sur $\Gamma_{x'}$, exprimée dans les n variables $x^1, \ldots, x^n$, que le champ U_A vérifie les équations intégrales $\left(\int^{(n)}\right.$ désignant une intégrale multiple ordinaire, d'ordre n)

$$\text{(3-2)}\quad U_{R'}(x') = \langle P^{\pm B}_{R'}, L^A_BU_A \rangle (x') + \int^{(n)}_{x \in \Gamma^{\pm}_{x'} \cap S(U)} M^{\pm A}_{R'}(x', x)U_A(x)\eta(x', x)d^nx.$$

Si réciproquement un champ quelconque $U_A \in \mathcal{D}^{l+2}_{\Omega}$ vérifie l'équation intégrale (3-2), il vient

$$\langle {}^*_xL^A_BP^{\pm B}_{R'}, U_A \rangle (x') = \langle D^A_{R'} - M^{\pm A}_{R'}, U_A \rangle (x'),$$

ce qui prouve que $P^{\pm B}_{R'}(x', x)$ est une paramétrix, avancée ou retardée, relative à L.

Par la méthode d'*itération*, on obtient les *noyaux résolvants* de chacun des deux systèmes d'équations intégrales (3-2) :

$$\text{(3-3)}\qquad U_{R'}(x') = \left\langle \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{E}{}^{\pm A}_{R'}, L^B_AU_B \right\rangle (x')$$

$$\text{(3-4)}\qquad \langle \overset{0}{E}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle (x') = \langle P^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle (x')$$

(3-5)

$$\langle \overset{r+1}{E}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle (x') = \int^{(n)}_{x'' \in \Gamma^{\pm}_{x'} \cap S(U)} M^{\pm L''}_{R'}(x', x'') \langle \overset{r}{E}{}^{\pm A}_{L''}, f_A \rangle (x'')\eta(x', x'')d^nx''.$$

L'itération donne une série convergente pourvu que $| \eta M^{\pm A}_{R'} |$ soit absolument intégrable dans $\Gamma^{\pm}_{x'} \cap \Omega$, pour tout $x' \in \Omega$.

([5]) On peut être amené à poser des conditions moins restrictives sur la mesure $M^{\pm A}_{R'}(x', x)$, de façon à pouvoir étendre la notion de paramétrix à des cas où les coefficients de L présentent certaines singularités. Mais, dans la résolution par itération des équations intégrales (3-2), la convergence n'est établie ci-dessous que sous cette condition. Une démonstration de la convergence devra donc être donnée dans chaque cas où cette condition n'est pas réalisée.

([6]) $\Gamma_{x'}$ étant isotrope, il n'en existe aucune qui soit canonique.

Soit x' fixé. $\overset{0}{E}{}^{\pm A}_{R'}(x', x)$ est porté par $\Gamma^{\pm}_{x'}$. Dans $\langle \overset{1}{E}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle$, seuls apportent une contribution non nulle les points x tels que

$$x \in \Gamma^{\pm}_{x''}, \qquad \text{avec} \qquad x'' \in \Gamma^{\pm}_{x'}; \qquad \text{donc} \qquad x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}.$$

Dans $\langle \overset{2}{E}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle$, seuls apportent une contribution non nulle les points x tels que

$$x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x''}, \qquad \text{avec} \qquad x'' \in \Gamma^{\pm}_{x'}; \qquad \text{donc} \qquad x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}.$$

Par ce dernier raisonnement, on déduit de (3-5), par récurrence, qu'il en est ainsi pour tous les $\overset{r}{E}{}^{\pm A}_{R'}(x', x)$ pour $r \geqslant 2$. Les noyaux résolvants ont donc, pour chaque x' fixé, leurs supports dans $\bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}$.

Enfin, les noyaux résolvants vérifient (2-2). En effet, d'après (1-2) et (3-3), pour tout champ $U_B \in \mathfrak{D}^{l+2}_{\Omega}$,

$$\Big\langle {}^{*}_{x}L^{A}_{B} \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{E}{}^{\pm B}_{R'}, U_A \Big\rangle(x') = \Big\langle \sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{E}{}^{\pm B}_{R'}, {}_{x}L^{A}_{B} U_A \Big\rangle(x')$$
$$= \langle D^{A}_{R'}, U_A \rangle (x'),$$

ce qui prouve que les noyaux résolvants (3-3) sont deux noyaux élémentaires, l'un avancé, l'autre retardé :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \overset{r}{E}{}^{\pm A}_{R'}(x', x) = E^{\pm A}_{R'}(x', x). \tag{3-6}$$

L'existence de paramétrix implique donc l'existence de noyaux élémentaires (⁷).

4) Représentations du conoïde caractéristique.

Considérons l'intégrale générale du système bicaractéristique (1-4). Les $(2n + 2)$ constantes d'intégration

— coordonnées d'un point initial x' de la bicaractéristique,

— valeurs $p^{(0)}_{\nu'}$ des variables p_{ν} en x',

forment un système surabondant, par suite de l'homogénéité en p_{ν} et de la relation en x'

$$g^{\nu'\pi'}(x') p^{(0)}_{\nu'} p^{(0)}_{\pi'} = 0. \tag{4-1}$$

(⁷) Cf. Y. Bruhat [*3*] et A. Lichnerowicz [*1*].

On remplace les $(n+1)$ constantes surabondantes $p_{\nu'}^{(0)}$ par les $(n-1)$ constantes $\theta', \theta'', \ldots, \theta^{(n-1)}$, grâce aux relations

$$p_{\nu'}^{(0)} = A_{\nu'}^{0'} + A_{\nu'}^{j'} q_{j'}(\theta); \tag{4-2}$$

les coefficients $A_{\nu'}^{\mu'}$ définissent une base orthonormée en x', transformant (4-1) en

$$1 - \sum_{j=1}^{n} \{ q_{j'}(\theta) \}^2 = 0 ;$$

les fonctions $q_{j'}(\theta)$ donnent la représentation classique de l'hypersphère-unité $S^{(n-1)}$ de E_n, par les $(n-1)$ angles θ. On désigne l'élément d'aire de $S^{(n-1)}$ par

$$d^{n-1}\Omega = \Phi^{(n-1)}(\theta) d\theta' . d\theta'' \ldots d\theta^{(n-1)}. \tag{4-3}$$

On particularise la base orthonormée en x' par la condition

$$A_{0'}^{j'} = 0, \quad \text{d'où} \quad p_{0'}^{(0)} = A_{0'}^{0'}. \tag{4-4}$$

Les coefficients $A_{\nu'}^{\mu'}$ sont reliés à la métrique de $\mathcal{V}$ par les relations

$$\begin{cases} \| A_{\nu'}^{\mu'} \| = A_{0'}^{0'} \times \| A_{i'}^{j'} \| = \sqrt{- \| g_{\lambda'\nu'}(x') \|} = \sqrt{- g(x')} \\ A_{0'}^{0'} = \sqrt{g_{0'0'}(x')}. \end{cases} \tag{4-5}$$

Les coefficients $A_{\mu'}^{\nu'}$ de la matrice inverse sont définis par

$$A_{0'}^{0'} . A_{0'}^{0'} = 1, \quad A_{0'}^{i'} = 0, \quad A_{j'}^{i'} A_{k'}^{j'} = \delta_{k'}^{i'}. \tag{4-6}$$

La solution du système bicaractéristique (1-4) s'écrit ainsi sous la forme

$$x^{\alpha} = x'^{\alpha'} + \Phi^{\alpha}(x' ; \lambda ; \theta', \ldots, \theta^{(n-1)}) \tag{4-7}$$

$$p_{\nu} = A_{\nu'}^{0'} + A_{\nu'}^{j'} q_{j'}(\theta) + \psi_{\nu}(x' ; \lambda ; \theta', \ldots, \theta^{(n-1)}). \tag{4-8}$$

En fixant x', on déduit de (4-7) une représentation paramétrique du conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$, en fonction des n paramètres λ, θ.

On a une autre représentation paramétrique possible de $\Gamma_{x'}$, au moyen des n variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$. La transformation $\{ x^i \} / \{ \lambda, \theta^{(l)} \}$ sur $\Gamma_{x'}$ s'explicite au moyen des n équations (4-7) : $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. On désigne son jacobien par [8]

$$\Delta(x', \lambda, \theta) = \frac{D(\{ x^1 \}_{x'}, \{ x^2 \}_{x'}, \ldots, \{ x^n \}_{x'})}{D(\lambda, \theta', \theta'', \ldots, \theta^{(n-1)})}. \tag{4-9}$$

Les hypothèses faites au § 1 sur $\Gamma_{x'}$ entraînent que $\Delta / \Phi^{(n-1)}(\theta)$ n'a pas d'autre

---

[8] $\{ h(x) \}_{x'}$ désigne la restriction à $x \in \Gamma_{x'}$ de la fonction h; cf. « conventions et notations ».

singularité sur $\Gamma_{x'} \cap \Omega$ que le sommet x'. La formule de transformation correspondante de l'élément de volume est

$$(4\text{-}10) \qquad \begin{cases} \eta(x', x)d^n x = \zeta(x', \lambda, \theta)d\lambda d^{n-1}\Omega \\ \varsigma(x', \lambda, \theta) = \eta\,\{x', x(x', \lambda, \theta)\}\,\dfrac{\Delta(x', \lambda, \theta)}{\Phi^{(n-1)}(\theta)}. \end{cases}$$

Deux autres représentations paramétriques de $\Gamma_{x'}$ pourront être employées.

L'une utilise comme paramètres les $(n-1)$ angles θ et x^0, ou $y^0 = x^0 - x'^{0'}$. Elle est valable dans tout domaine où $g^{0\nu}(x)p_\nu$ ne s'annule pas.

L'autre utilise les n paramètres

$$(4\text{-}11) \qquad \lambda^j = \lambda q_{j'}(\theta) \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Le jacobien de cette transformation est égal à

$$(4\text{-}12) \qquad \frac{D(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)}{D(\lambda, \theta', \ldots, \theta^{(n-1)})} = \lambda^{n-1}\Phi^{(n-1)}(\theta).$$

5) Résolution explicite des équations intégrales.

La technique de résolution par itération des équations intégrales (3-2) peut être présentée de façon plus précise (⁹) dans l'hypothèse où les paramétrix, pour chaque x' fixé, sont des sommes finies de couches multiples (¹⁰) portées par $\Gamma_{x'}$:

$$(5\text{-}1) \quad \langle P^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle (x') = \int^{(n)}_{x \in \Gamma^{\pm}_{x'}} \sum_{s=0}^{\Sigma} \sigma^{\pm A}_{(s)R'}(x', x)\,.\,\Theta^s f_A(x)\,.\,\eta(x', x)\,.\,d^n x$$

Θ désigne une dérivation suivant une direction *transversale* à $\Gamma_{x'}$; les $\sigma^{\pm A}_{(s)R'}(x', x)$ sont, pour chaque x' fixé, des fonctions localement sommables sur $\Gamma^{\pm}_{x'} \cap \Omega$, qui dépendent évidemment du choix de Θ. L'hypothèse d'hyperbolicité normale entraîne que $\Gamma_{x'}$ n'a aucune tangente temporelle; on peut donc prendre pour Θ la dérivation par rapport à x^0.

Les équations: (3-5) pour $r = 0$, (3-4), (5-1), permettent d'évaluer $\langle \overset{1}{E}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle$ au moyen d'intégrales d'ordre $2n$. Le remplacement, comme variables d'intégration, des coordonnées spatiales des points $x \in \Gamma_{x''}$ et $x'' \in \Gamma_{x'}$ par les paramètres (λ, θ) sur $\Gamma_{x'}$ et $(\bar\lambda, \bar\theta)$ sur $\Gamma_{x''}$ s'effectue au moyen des équations (4-7).

(⁹) Cf. Y. Bruhat [*5*].

(¹⁰) Cf. I. M. Gelfand et G. E. Chilov [*1*], chap. III, 1.8, p. 231.

Soit x' fixé. Étudions la contribution à $\langle \overset{1}{\mathrm{E}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}, f_{\mathrm{A}} \rangle (x')$ des valeurs des $\partial^s_0 f_{\mathrm{A}} (0 \leqslant s \leqslant \Sigma)$ en un point x choisi dans $\bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}$. On trouve une infinité de chemins constitués de deux segments de bicaractéristique, reliant x à x' : on peut les caractériser, par exemple, par les $(n-1)$ paramètres $\theta^{(l)}$, qui fournissent une représentation de l'intersection $l^{\pm}(x', x)$ de $\Gamma^{\pm}_{x'}$ et de $\Gamma^{\mp}_{x}$: ils caractérisent en effet la bicaractéristique joignant x' au point x'' qui décrit $l^{\pm}(x', x)$. Les équations

$$(5\text{-}2) \qquad x^{\alpha} = x'^{\alpha'} + \varphi^{\alpha}(x', \lambda, \theta) + \varphi^{\alpha}\{ x'^{\sigma'} + \varphi^{\sigma}(x', \lambda, \theta), \bar{\lambda}, \bar{\theta}) \}$$

définissent un changement de variables d'intégration dont le jacobien

$$(5\text{-}3) \qquad \mathfrak{D}(x' \,;\, \bar{\lambda}, \bar{\theta} \,;\, \lambda, \theta) = \frac{\mathrm{D}(x^{\alpha}, \theta)}{\mathrm{D}(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \lambda, \theta)}$$

est égal à un déterminant d'ordre $(n+1)$ d'éléments

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{\theta}^{(m)}} = \dfrac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \bar{\theta}^{(m)}} \{ x'^{\sigma'} + \varphi^{\sigma}(x', \lambda, \theta), \bar{\lambda}, \bar{\theta} \} \\[2ex] \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{\lambda}} = \dfrac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \bar{\lambda}} \{ x'^{\sigma'} + \varphi^{\sigma}(x', \lambda, \theta), \bar{\lambda}, \bar{\theta} \} \\[2ex] \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \lambda} (x', \lambda, \theta) + \dfrac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x'^{\nu'}} \{ x'^{\sigma'} + \varphi^{\sigma}(x', \lambda, \theta), \bar{\lambda}, \bar{\theta} \} \dfrac{\partial \varphi^{\nu}}{\partial \lambda} (x', \lambda, \theta). \end{cases}$$

On obtient par ce changement de variables :

$$(5\text{-}4) \begin{cases} \langle \overset{1}{\mathrm{E}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}, f_{\mathrm{A}} \rangle (x') = \displaystyle\sum_{s=0}^{\Sigma} \int^{(n+1)}_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}} \overset{1}{\mathrm{E}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x) \,.\, \partial^s_0 f_{\mathrm{A}}(x) d^{n+1}x \\ \text{où} \\ \overset{1}{\mathrm{E}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x) = \displaystyle\int^{(n-1)}_{\mathcal{S}^{(n-1)}} \mathrm{W}^{\pm\mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x, \theta) d^{n-1}\Omega \\ \mathrm{W}^{\pm\mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x, \theta) = \dfrac{\mathrm{M}^{\pm\mathrm{L}''}_{\mathrm{R}'}(x', x'') \zeta(x', \lambda, \theta) \sigma^{\pm\mathrm{A}}_{(s)\mathrm{L}''}(x'', x) \zeta(x'', \bar{\lambda}, \bar{\theta})}{\mathfrak{D}(x' \,;\, \bar{\lambda}, \bar{\theta} \,;\, \lambda, \theta)} \Phi^{(n-1)}(\bar{\theta}) \\ \hfill \textit{modulo } (4\text{-}7) \text{ et } (5\text{-}2). \end{cases}$$

Pour $r = 1$, (3-5) donne ensuite l'intégrale d'ordre $(2n+1)$

$$(5\text{-}5) \quad \langle \overset{2}{\mathrm{E}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}, f_{\mathrm{A}} \rangle (x')$$

$$= \sum_{s=0}^{\Sigma} \int^{(n)}_{x'' \in \Gamma^{\pm}_{x'}} \mathrm{M}^{\pm\mathrm{L}''}_{\mathrm{R}'}(x', x'') \,.\, \eta(x' . \, x'') d^n x'' \int^{(n+1)}_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x''}} \overset{1}{\mathrm{E}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{(s)\mathrm{L}''}(x'', x) \partial^s_0 f_{\mathrm{A}}(x) d^{n+1}x.$$

Les points x' et x peuvent être joints par l'intermédiaire d'une infinité de points x'' vérifiant

$$x'' \in \Gamma^{\pm}_{x'}, \qquad x'' \in \bar{\mathcal{E}}^{\mp}_{x'}.$$

Ce sont les points de la partie *compacte* $\mathfrak{L}^{\pm}(x', x)$ de $\Gamma_{x'}$ comprise entre x' et $l^{\pm}(x', x)$. L'interversion des intégrations donne

$$(5\text{-}6)\quad \begin{cases} \langle \overset{2}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}, f_{\mathrm{A}} \rangle (x') = \displaystyle\sum_{s=0}^{\Sigma} \int^{(n+1)}_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x''}} \overset{2}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x) . \partial^{s}_{0} f_{\mathrm{A}}(x) . d^{n+1}x \\ \overset{2}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x, x) = \displaystyle\int^{(n)}_{x'' \in \mathfrak{L}^{\pm}(x', x)} \overset{1}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{L}''}(x'', x) . \mathrm{M}^{\pm \mathrm{L}''}_{\mathrm{R}'}(x', x'') . \eta(x', x'') d^{n}x''. \end{cases}$$

Le même procédé permet d'obtenir de proche en proche, pour tout $r \geqslant 2$

$$(5\text{-}7)\quad \begin{cases} \langle \overset{r}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}, f_{\mathrm{A}} \rangle (x') = \displaystyle\sum_{s=0}^{\Sigma} \int^{(n+1)}_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}} \overset{r}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x) . \partial^{s}_{0} f_{\mathrm{A}}(x) . d^{n+1}x \\ \overset{r}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x) = \displaystyle\int^{(n)}_{x'' \in \mathfrak{L}^{\pm}(x', x)} \overset{r-1}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{L}''}(x'', x) . \mathrm{M}^{\pm \mathrm{L}''}_{\mathrm{R}'}(x', x'') \eta(x', x'') d^{n}x''. \end{cases}$$

Les noyaux élémentaires sont donc de la forme

$$(5\text{-}8)\quad \begin{cases} \langle \mathrm{E}^{\pm \mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}, f_{\mathrm{A}} \rangle (x') = \displaystyle\sum_{s=0}^{\Sigma} \int^{(n)}_{x \in \Gamma^{\pm}_{x'}} \sigma^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x) . \partial^{s}_{0} f_{\mathrm{A}}(x) . \eta(x', x) d^{n}x \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{s=0}^{\Sigma} \int^{(n+1)}_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}} \mathrm{E}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x) . \partial^{s}_{0} f_{\mathrm{A}}(x) . d^{n+1}x \\ \mathrm{E}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \overset{r}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x). \end{cases}$$

REMARQUE 1. — Des résultats analogues s'obtiennent en faisant intervenir dans (5-1), au lieu de la seule dérivation ∂_0, les $(n+1)$ dérivations ∂_ν par rapport aux variables x^ν (cf. chap. II).

REMARQUE 2. — Si $\Sigma > 0$, les intégrales dans $\bar{\mathcal{E}}_{x'}$

$$\int^{(n+1)}_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}} \mathrm{E}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}(x', x) \partial^{s}_{0} f_{\mathrm{A}}(x) d^{n+1}x \qquad (s > 0)$$

écrites en (5-8) définissent les dérivées *au sens des distributions*

$$(-1)^{s} \partial^{s}_{0} \mathrm{E}^{\pm \mathrm{A}}_{(s)\mathrm{R}'}.$$

Si la fonction $E^{\pm A}_{(s)R'}(x', x)$ est localement sommable dans $\bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}$ et sur $\Gamma^{\pm}_{x'}$, ainsi que ses dérivées usuelles jusqu'aux ordres s et $(s - 1)$, cette dérivée-distribution est la somme d'une fonction localement sommable dans $\bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}$ (qui est la *dérivée usuelle*) et de couches multiples, jusqu'à l'ordre s, portées par $\Gamma^{\pm}_{x'}$:

$$(5\text{-}9)\quad \langle \partial^s_{\mathbf{0}} E^{\pm A}_{(s)R'}, f_A \rangle (x') = \int^{(n+1)}_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}} \partial^s_{\mathbf{0}} E^{\pm A}_{(s)R'}(x', x) f_A(x) d^{n+1}x$$
$$- \sum_{t=0}^{s-1} \int^{(n)}_{x \in \Gamma^{\pm}_{x'}} (-1)^t \partial^{s-1-t}_{\mathbf{0}} E^{\pm A}_{(s)R'}(x', x) \partial^t_{\mathbf{0}} f_A(x) \eta(x', x) d^n x$$

Si la fonction $E^{\pm A}_{(s)R'}(x', x)$ n'est pas suffisamment régulière pour justifier ces transformations, il n'est pas possible de séparer de façon canonique les termes de front et les termes de diffusion de cette dérivée-distribution.

B. Construction explicite (11) des propagateurs pour $n + 1 = 4$.

Le présent travail s'appuie entièrement sur la méthode de S. L. Sobolev et Y. Bruhat, pour établir quelques propriétés des propagateurs relatifs aux opérateurs linéaires (1-1). Nous reprenons ici rapidement l'exposé de cette méthode, en lui apportant quelques modifications de détail, inspirées par la commodité des calculs ou des raisonnements (procédé différent d'orthonormalisation en x', conservation de variables p_ν homogènes) qui donnent aux calculs une forme plus tensorielle.

6) Hypothèses.

On se limite dans ce travail à $n = 3$ (opérateurs à 4 variables) (12).

On suppose que les composantes du champ U sont des fonctions numériques, de classe C^2 au moins.

On fait en outre les hypothèses suivantes

a) Hypothèses de *régularité* de L : les coefficients $g^{\lambda\nu}(x)$, $h^{A\lambda}_B(x)$, $k^A_B(x)$ sont dans Ω des fonctions de classe C^4, C^2 et C^0 respectivement; ces fonctions

(11) Méthode initialement donnée par S. L. Sobolev [*1*] pour une équation, étendue par Y. Bruhat [*1*] aux systèmes linéaires (auxquels est limitée la présente étude), puis aux systèmes quasi linéaires.

(12) Y. Bruhat [*2*] a étendu cette méthode au cas où $n > 3$, impair (nombre pair de variables $n + 1 = 2\Sigma + 4$, $\Sigma > 0$).

et leurs dérivées partielles jusqu'aux ordres 4, 2 et 0, respectivement, sont bornées dans Ω.

b) Hypothèses d'*hyperbolicité normale* : le coefficient $g^{00}(x)$ est borné inférieurement dans Ω par un nombre positif. Le déterminant $\| g^{\lambda\nu}(x) \|$ est borné supérieurement dans Ω par un nombre négatif. La forme quadratique à 3 variables $g^{ik}p_i p_k$ vérifie dans Ω l'inégalité (γ : nombre positif)

$$g^{ik}(x)p_i p_k < -\gamma \,(\sup_{i=1,2,3} |p_i|)^2.$$

De *a)* et *b)* il résulte que

— Les composantes covariantes $g_{\lambda\nu}(x)$ de la métrique riemannienne sont continues et *bornées* dans Ω, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 4.

— Le déterminant $\| g^{ik}(x) \|$ est borné supérieurement dans Ω par un nombre négatif et $g_{00}(x)$ est borné inférieurement dans Ω par un nombre positif.

— Il est possible de trouver en tout point x' de Ω un repère orthonormé dont les coefficients $A^{\mu'}_{\nu}(x')$ (ainsi que ceux de la matrice inverse) soient continus [13] et bornés dans Ω.

— Si on introduit (sur $\Gamma_{x'}$) les fonctions

$$p^\lambda = \{ g^{\lambda\nu}(x) \}_{x'} p_\nu, \quad \text{vérifiant} \quad p^\nu p_\nu = 0,$$

on établit que (p^0/p_0) est borné inférieurement par un nombre positif. En effet,

$$2p^0 p_0 = 2p^0 p_0 - p^\nu p_\nu = g^{00}(p_0)^2 - g^{ik}p_i p_k$$

$$\frac{p^0}{p_0} = \frac{1}{2}\left(g^{00} - \frac{g^{ik}p_i p_k}{(p_0)^2}\right) > \frac{1}{2} \inf_{x\in\Omega} g^{00} > 0.$$

— On remarque que la valeur en x' de p_0,

$$p^{(0)}_{0'} = \sqrt{g_{0'0'}(x')}$$

est bornée inférieurement par un nombre positif.

c) Enfin, les seconds membres $f_B(x)$ du système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

$$\text{(6-1)} \qquad L^A_B U_A = f_B$$

sont des fonctions continues et bornées dans Ω.

---

[13] Au chapitre III, on utilisera également le fait qu'ils sont de classe C^2.

7) Étude du conoïde caractéristique.

Le changement de fonctions inconnues

$$(7\text{-}1) \qquad x^{\alpha} = x'^{\alpha'} + y^{\alpha}, \quad p_{\nu} = p^{(0)}_{\nu'} + r_{\nu} = A^{0'}_{\nu'}(x') + A^{j'}_{\nu'}(x')q_{j'}(\theta) + r_{\nu}$$

transforme le système bicaractéristique (1-4) en

$$(7\text{-}2) \quad \begin{cases} \dfrac{dy^{\alpha}}{d\lambda} = g^{\alpha\nu}(x'^{\sigma'}+y^{\sigma}).(A^{0'}_{\nu'}(x')+A^{j'}_{\nu'}(x')q_{j'}(\theta)+r_{\nu}) = p^{\alpha}(y, r, q_{j'}(\theta), x') \\ \dfrac{dr_{\nu}}{d\lambda} = -\dfrac{1}{2}\,\partial_{\nu} g^{\lambda\pi}(x'^{\sigma'} + y^{\sigma}) \times (A^{0'}_{\lambda'}(x') + A^{i'}_{\lambda'}(x')q_{i'}(\theta) + r_{\lambda}) \\ \qquad \times (A^{0'}_{\pi'}(x') + A^{j'}_{\pi'}(x')q_{j'}(\theta) + r_{\pi}) = R_{\nu}(y, r, q_{j'}(\theta), x') \end{cases}$$

dont on cherche la solution s'annulant pour $\lambda = 0$.

Les seconds membres p^{α} et R_{ν} sont des polynômes des coefficients $g^{\alpha\nu}$ et de leurs dérivées premières, des variables r_{ν}, des $q_{j'}$ et des $A^{\mu'}_{\nu'}$. Ils vérifient donc par rapport aux 8 inconnues $z(y^{\alpha}$ et $r_{\nu})$ des conditions de Lipschitz. L'application de la méthode d'itération de Picard montre l'existence et l'unicité de la solution cherchée, pour $|\lambda|$ suffisamment petit

$$(7\text{-}3) \qquad \begin{cases} y^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(x', \lambda, q_{j'}(\theta)) \\ r_{\nu} = \psi_{\nu}(x', \lambda, q_{j'}(\theta)). \end{cases} \qquad \text{cf (4-7) et (4-8)}$$

Cette solution $z(x', \lambda, q_{j'}(\theta))$ est continue par rapport à λ et vérifie

$$(7\text{-}4) \qquad \|z\| < M\,|\lambda|.$$

On en déduit que pour $|\lambda|$ suffisamment petit on a l'inégalité

$$(7\text{-}5) \qquad p_0 = \sqrt{g_{0'0'}(x')} + r_0(x', \lambda, \theta', \theta'') > \frac{1}{2} \operatorname*{Inf}_{x\in\Omega} \sqrt{g_{00}(x)} > 0.$$

Notons que d'ailleurs l'annulation de p_0 entraîne celle des p_i; de la sorte, la restriction faite sur Ω pour que p_0 ne s'annule pas est celle déjà faite pour la régularité du conoïde caractéristique.

A cette borne inférieure positive de p_0 correspond une borne inférieure positive de p^0. Sur $\Gamma_{x'} \cap \Omega$, on peut donc utiliser indifféremment λ ou x^0 comme paramètre le long des bicaractéristiques issues de x'.

La solution (7-3) ne dépend de θ' et θ'' que par l'intermédiaire de $q_{j'}(\theta)$. Il est donc normal d'étudier ses dérivées par rapport à θ' et θ'' par l'intermédiaire de ses dérivées par rapport aux $q_{j'}$, bien qu'elles soient surabondantes. Chaque groupe de 8 dérivées $z^{(p)}$ est la solution, nulle pour $\lambda = 0$, du système différentiel

$$
\text{(7-6)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dy^{\alpha(p)}}{d\lambda} &= B^{\alpha}_{\nu} y^{\nu(p)} + g^{\alpha\nu} r^{(p)}_{\nu} + Y^{\alpha(p)} \\
\frac{dr^{(p)}_{\nu}}{d\lambda} &= C_{\nu\alpha} y^{\alpha(p)} - B^{\alpha}_{\nu} r^{(p)}_{\alpha} + R^{(p)}_{\nu}.
\end{aligned}
\right.
$$

L'indice (p) précise la dérivation par rapport aux $q_{j'}$ pour $|p| \leqslant 3$.

$$
\text{(7-7)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
B^{\alpha}_{\nu} &= \partial_{\nu} g^{\alpha\lambda}(x'^{\sigma'} + y^{\sigma}) \times (A^{0'}_{\lambda'}(x') + A^{j'}_{\lambda'}(x') q_{j'}(\theta) + r_{\lambda}) \\
C_{\nu\alpha} &= -\frac{1}{2} \partial_{\nu} \partial_{\alpha} g^{\lambda\pi}(x'^{\sigma'} + y^{\sigma}) \times (A^{0'}_{\lambda'}(x') + A^{i'}_{\lambda'}(x') q_{i'}(\theta) + r_{\lambda}) \\
&\qquad \times (A^{0'}_{\pi'}(x') + A^{j'}_{\pi'}(x') q_{j'}(\theta) + r_{\pi})
\end{aligned}
\right.
$$

ont des expressions indépendantes de l'indice (p). Enfin, les expressions $Y^{\alpha(p)}$ et $R^{(p)}_{\nu}$ sont des polynômes des coefficients $g^{\lambda\nu}(x)$ et de leurs dérivées partielles, des coefficients $A^{\mu'}_{\nu'}$, des $q_{j'}$, des variables r_{ν} et des dérivées $z^{(p')}$ pour $|p'| < |p|$; de façon précise,

$$
\text{(7-7)}' \qquad \left\{
\begin{aligned}
&-\text{ pour } |p| = 1 : \\
&\qquad Y^{\alpha,j} = g^{\alpha\nu} A^{j'}_{\nu} = Y^{\alpha,j}(g, A), \\
&-\text{ pour } 1 < |p| \leqslant 3 : \\
&\qquad Y^{\alpha(p)} = Y^{\alpha(p)}(\partial^{q} g, A, q, z^{(p')}), \\
&\text{où} \\
&\quad 0 < q < |p|,\ 0 < |p'| < |p| \\
&-\text{ pour } 1 \leqslant |p| \leqslant 3 : \\
&\qquad R^{(p)}_{\nu} = R^{(p)}_{\nu}(\partial^{q} g, A, q, z^{(p')}), \\
&\text{où} \\
&0 < q < |p| + 1,\ 0 < |p'| < |p|.
\end{aligned}
\right.
$$

Les hypothèses du § 6 suffisent donc à montrer l'existence et la continuité des solutions $z^{(p)}(\lambda)$ de (7-6) pour $|p| \leqslant 3$, vérifiant les inégalités

$$
\text{(7-4)}' \qquad \| z^{(p)}(\lambda) \| < M |\lambda|.
$$

On en déduit les dérivées relatives à θ' et θ'' d'ordre 1, 2 et 3 de la solution $z(x'; \lambda; \theta', \theta'')$ de (7-2).

Enfin, les dérivées $\frac{\partial^m z^{(p)}}{\partial \lambda^m}$ sont données directement par les équations (7-6). Les hypothèses du § 6 permettent d'obtenir ainsi

$$\frac{\partial^m \underset{\nu}{r}^{(p)}}{\partial \lambda^m} \quad \text{pour} \quad m \leqslant 4 - |p| \qquad (|p| \leqslant 3)$$

$$\frac{\partial^m y^{\alpha(p)}}{\partial \lambda^m} \quad \text{pour} \quad m \leqslant 5 - |p|. \qquad (|p| \leqslant 3)$$

La solution $z(x'; \lambda; \theta', \theta'')$ du système bicaractéristique (7-2), ainsi que ses dérivées partielles d'ordre 1, 2 et 3 par rapport à λ, θ', θ'' sont donc continues par rapport à tous les arguments.

Il en résulte que le déterminant $\Delta(x', \lambda, \theta', \theta'')$ de la transformation $(x^1, x^2, x^3)/(\lambda, \theta', \theta'')$ sur le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$, et ses mineurs, ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à λ, θ', θ'', sont des fonctions continues de tous leurs arguments.

La première colonne du déterminant Δ est constituée par les p^i, et les deux autres par $y^{i,j}\frac{\partial q_{j'}}{\partial \theta}$. Par conséquent Δ, de même que sa troisième colonne, contient $\sin\theta'$ en facteur; et $(\Delta/\sin\theta')$ est un polynôme de (g, A, q, r, y'), homogène de degré 2 par rapport aux y' [14]. La quantité

$$D(x', \lambda, \theta', \theta'') = \Delta/\lambda^2 \sin\theta' \tag{7-8}$$

est donc un polynôme de $(g, A, q, r, \tilde{y}')$, en définissant

$$\tilde{y}^{i,j} = y^{i,j}.\lambda^{-1}, \qquad \tilde{y}^{i(p)} = y^{i(p)}.\lambda^{-1}, \tag{7-9}$$

quantités bornées d'après (7-4)'. La représentation de $\Gamma_{x'}$ par les 3 paramètres λ^j définis en (4-11) fait apparaître D, en vertu de (4-12), comme déterminant fonctionnel

$$D(x', \lambda, \theta', \theta'') = \frac{D(\{x^i\}_{x'})}{D(\lambda^j)}. \tag{7-10}$$

Les mineurs de la première colonne de Δ ont une propriété analogue à celle de Δ

$$\frac{\Delta_i^{(\lambda)}}{\sin\theta'} = \frac{\Delta}{\sin\theta'}\partial_i\lambda = \lambda^2 q_{j'} D_i^j = H_i^{(2)}(q, y').$$

---

[14] Pour $|p| = 1, 2, 3$, on note encore les fonctions $z^{(p)}$ par $z'(y'$ ou $r')$, $z''(y''$ ou $r'')$, $z'''(y'''$ ou $r''')$, respectivement.

Les mineurs des deux autres colonnes de Δ vérifient d'autre part

$$\frac{\Delta_i^{(\theta')}}{\sin\theta'}\cdot\frac{\partial q_{j'}}{\partial\theta'}+\Delta_i^{(\theta'')}\cdot\frac{1}{\sin\theta'}\frac{\partial q_{j'}}{\partial\theta''}=\frac{\Delta}{\sin\theta'}\partial_i q_{j'}$$
$$=\lambda(\delta_{j'h'}-q_{j'}q_{h'})\mathrm{D}_i^{h}=\mathrm{H}_{ij'}^{(1)}(g, \mathrm{A}, q, r, y').$$

On a désigné par $\mathrm{H}_i^{(2)}$ et $\mathrm{H}_{ij'}^{(1)}$ des polynômes homogènes, de degrés 2 et 1 respectivement, par rapport aux y'. On en déduit que les mineurs de D vérifient

$$(7\text{-}11)\qquad q_{j'}\mathrm{D}_i^{j}=\mathrm{H}_i^{(2)}(q, \tilde{y}'),\quad (\delta_{j'h'}-q_{j'}q_{h'})\mathrm{D}_i^{h}=\mathrm{H}_{ij'}^{(1)}(g, \mathrm{A}, q, r, \tilde{y}').$$

Les éléments de D sont

$$(7\text{-}12)\qquad \frac{\partial\{x^i\}_{x'}}{\partial\lambda^j}=\{g^{i\nu}\}_{x'}p_\nu q_{j'}+\tilde{y}^{i,h}(\delta_{h'j'}-q_{h'}q_{j'}).$$

Les fonctions z' étant nulles pour $\lambda=0$, il résulte de (7-6)

$$\lim_{\lambda=0}\tilde{y}^{i,h}=\lim_{\lambda=0}\frac{dy^{i,h}}{d\lambda}=\lim_{\lambda=0}\mathrm{Y}^{i,h}=g^{i'\nu'}(x')\mathrm{A}_{\nu'}^{h'}=\eta^{k'h'}\mathrm{A}_{k'}^{i'}.$$

On déduit alors de (7-12)

$$(7\text{-}13)\qquad \left\{\begin{aligned}&\lim_{\lambda=0}\frac{\partial\{x^i\}_{x'}}{\partial\lambda^j}=-\mathrm{A}_{j'}^{i'},\qquad \lim_{\lambda=0}\partial_i\lambda^j=-\mathrm{A}_{i'}^{j'}\\&\lim_{\lambda=0}\mathrm{D}=-\sqrt{\frac{g_{0'0'}(x')}{-g(x')}}=-\frac{p_{0'}^{(0)}}{\sqrt{-g(x')}}.\end{aligned}\right.$$

D et D^{-1}, et leurs dérivées d'ordre 1 et 2 par rapport à λ, θ', θ'' sont des fonctions continues de tous leurs arguments. Il en est de même de leurs mineurs, et des dérivées inverses $\partial_i\lambda^j$, ainsi que de

$$(7\text{-}14)\qquad \partial_i\lambda=\partial_i\lambda^j.q_{j'}(\theta', \theta'').$$

Pour les dérivées $\partial_i\theta$, il n'en est de même qu'en dehors d'une boule entourant x'.

8) Calculs sur le conoïde caractéristique.

En prenant pour multiplicateurs des fonctions $\sigma_{R'}^{B}(x', x)$ définies pour x sur $\Gamma_{x'}$, formons les combinaisons linéaires

$$(8\text{-}1)\qquad \mathrm{E}_{R'}(x', x)\equiv\sigma_{R'}^{B}(x', x).\{{}_x\mathrm{L}_B^A\mathrm{U}_A(x)\}_{x'}.$$

Les formules de dérivation sur $\Gamma_{x'}$ correspondant à sa représentation par les variables (x^1, x^2, x^3) sont

$$\partial_i \{ h \}_{x'} = \{ \partial_i h \}_{x'} - \frac{p_i}{p_0} \{ \partial_0 h \}_{x'}. \tag{8-2}$$

Elles permettent de ne faire apparaître dans $E_{R'}$ que des dérivées $\partial_i \{ h \}_{x'}$ sur le conoïde, et des dérivées $\{ \partial_0 h \}_{x'}$ transversales au conoïde. On utilise en outre, pourvu que les fonctions $\sigma^B_{R'}$ soient de classe C^2 des coordonnées x^α, la formule d'intégration par parties, de façon à rassembler autant de termes que possible dans une divergence calculée sur le conoïde ([15]).

$$E_{R'} \equiv \partial_i \{ E^i_{R'}(U) \} + \{ U_A \}_{x'} M^A_{R'} + \{ \partial_0 U_A \}_{x'} N^A_{R'} + \{ \partial_0 \partial_0 U_A \}_{x'} P . \sigma^A_{R'} \tag{8-3}$$

où

$$\begin{aligned} E^i_{R'}(U) \equiv {} & \{ g^{ik} \}_{x'} \sigma^A_{R'} \partial_k \{ U_A \}_{x'} + 2 \{ \partial_0 U_A \}_{x'} \sigma^A_{R'} \{ g^{i\nu} \}_{x'} \frac{p_\nu}{p_0} \\ & + \{ U_A \}_{x'} [- \partial_k (\{ g^{ik} \}_{x'} \sigma^A_{R'}) + \{ h^{Ai}_B \}_{x'} \sigma^B_{R'}], \end{aligned} \tag{8-4}$$

$$M^A_{R'} \equiv \partial_i \partial_k (\{ g^{ik} \}_{x'} \sigma^A_{R'}) - \partial_i (\{ h^{Ai}_B \}_{x'} \sigma^B_{R'}) + \{ k^A_B \}_{x'} \sigma^B_{R'} \tag{8-5}$$

$$\begin{aligned} N^A_{R'} \equiv {} & - 2 \{ g^{i\nu} \}_{x'} \frac{p_\nu}{p_0} \partial_i \sigma^A_{R'} + \frac{p_\nu}{p_0} \{ h^{A\nu}_B \}_{x'} \sigma^B_{R'} \\ & - \sigma^A_{R'} \left[\partial_i \left(\{ g^{i\nu} \}_{x'} \frac{p_\nu}{p_0} \right) + \frac{p_\nu}{p_0} \partial_i \{ g^{i\nu} \}_{x'} \right] \end{aligned} \tag{8-6}$$

$$P \equiv \{ g^{\nu\pi} \}_{x'} \frac{p_\nu p_\pi}{(p_0)^2} = 0. \tag{8-7}$$

L'annulation de P supprime de $E_{R'}$ la dérivée transversale seconde de U_A. Un choix convenable des multiplicateurs $\sigma^A_{R'}$, annulant les coefficients $N^A_{R'}$, supprime aussi sa dérivée transversale première : $\sigma^A_{R'}$ doit pour cela vérifier un système différentiel ordinaire en λ, linéaire et homogène, le long de chaque bicaractéristique issue de x'

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\sigma^A_{R'}}{d\lambda} = {} & p_\nu \{ h^{A\nu}_B \}_{x'} \sigma^B_{R'} - \sigma^A_{R'} \Big\{ p_\nu \partial_i \{ g^{i\nu} \}_{x'} \\ & + \partial_i (\{ g^{i\nu} \}_{x'} p_\nu) + \{ g^{i\nu} \}_{x'} p_\nu p_0 \partial_i \left(\frac{1}{p_0} \right) \Big\}. \end{aligned} \tag{8-8}$$

([15]) Cf. Y. Bruhat [*1*], chapitre premier.

Or le déterminant fonctionnel Δ vérifie l'équation différentielle linéaire homogène

$$(8\text{-}9) \qquad \frac{d\Delta}{d\lambda} = \Delta \partial_i(\{g^{i\nu}\}_{x'} p_\nu).$$

Il en résulte que les quantités

$$(8\text{-}10) \qquad \omega_{R'}^{A}(x', x) = \frac{\sigma_{R'}^{A}(x', x)}{K(x')} \sqrt{\left| \frac{\Delta(x', x)}{p_0 \sin \theta'} \right|},$$

où $K(x')$ est une constante ne dépendant que du point x' et dont la valeur sera précisée ultérieurement, vérifient le système différentiel linéaire homogène

$$(8\text{-}11) \qquad \frac{d\omega_{R'}^{A}}{d\lambda} = \frac{1}{2} p_\nu \{ h_B^{A\nu} \}_{x'} \omega_{R'}^{B} - \frac{1}{2} p_\nu \partial_i \{ g^{i\nu} \}_{x'} \omega_{R'}^{A} \equiv Q_B^A \omega_{R'}^{B}.$$

Les coefficients Q_B^A de (8-11) sont des fractions rationnelles, de dénominateur p_0, de $(\partial g, h, r, A, q)$ et sont donc continus et bornés pour $|\lambda|$ suffisamment petit. On choisit la solution égale en x' $(\lambda = 0)$ à $\delta_{R'}^{A'}$.

Soit $V_{\eta,N}^{-}(x')$ la portion bornée de $\Gamma_{x'}^{-}$ comprise entre les deux sections $l_N^{-}(x^0 = x'^0 - N)$ et $l_\eta^{-}(x^0 = x'^0 - \eta)$, $(N > \eta > 0)$. Une solution U_A du système (6-1) vérifie

$$(8\text{-}12) \qquad E_{R'}(U) - \sigma_{R'}^{B} \{ f_B \}_{x'} = 0.$$

L'intégration de (8-12) sur $V_{\eta,N}^{-}(x')$ donne, en transformant par la formule de Stokes

$$(8\text{-}13) \qquad \iint_{l_\eta^-} E_{R'}^{i}(U) d_i^2 x = \iiint_{x^0 = x'^0 - \eta}^{x^0 = x'^0 - N} [\{ U_A \}_{x'} M_{R'}^{A} - \{ f_B \}_{x'} \sigma_{R'}^{B}] \, d^3x + \iint_{l_N^-} E_{R'}^{i}(U) d_i^2 x.$$

L'intégration sur $V_{\eta,N}^{+}(x')$ conduit à une relation analogue.

Une étude du système différentiel (8-11), analogue à celle du § 7 sur le système bicaractéristique, montre, sous les hypothèses du § 6, l'existence et la continuité des dérivées $\omega_{R'}^{A\,(p)}$ pour $|p| \leqslant 2$; en outre, les fonctions

$$\tilde{\omega}_{R'}^{A\,(p)} = \omega_{R'}^{A\,(p)} . \lambda^{-1} \qquad (0 < |p| \leqslant 2)$$

sont bornées pour λ suffisamment petit. On trouve ainsi que les fonctions $\omega^{A}_{R'}$ sont de classe C^2 par rapport à λ, θ', θ''. Dans $V^{\pm}_{\eta,N}(x')$, il en est de même, d'après les résultats du § 7, de la fonction

$$(8\text{-}14)\quad \varpi(x'\,;\,\lambda,\theta',\theta'') = K(x')\sqrt{\left|\frac{p_0 \sin\theta'}{\Delta(x',\lambda,\theta',\theta'')}\right|} = \frac{K(x')}{|\lambda|}\sqrt{\frac{p_0}{-D}}$$

et par conséquent des fonctions $\sigma^{B}_{R'}$. Sous les hypothèses du § 6, les transformations ci-dessus sont donc justifiées.

9) Équations intégrales de Kirchhoff.

On les obtient en cherchant la limite, pour $\eta = 0$, des équations (8-13). Dans l'intégrale double au premier membre, on opère d'abord la transformation $(x^1, x^2, x^3)/(\lambda, \theta', \theta'')$ de jacobien Δ

$$d^2_i x = \Delta\,\{\,\partial_i\lambda d\theta' \wedge d\theta'' - \partial_i\theta' d\lambda \wedge d\theta'' + \partial_i\theta'' d\lambda \wedge d\theta'\,\}.$$

Puis, en remarquant que sur $l^{\pm}_{\eta}$,

$$\frac{\partial\,\{\,x^0\,\}_{x'}}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial\,\{\,x^0\,\}_{x'}}{\partial\theta'}\,d\theta' + \frac{\partial\,\{\,x^0\,\}_{x'}}{\partial\theta''}\,d\theta'' = 0,$$

on se ramène à utiliser θ' et θ'' comme variables d'intégration sur $l^{\pm}_{\eta}$:

$$(9\text{-}1)\qquad d^2_i x = \frac{\Delta}{p^0}\,\partial_i\{\,x^0\,\}_{x'} d\theta \wedge{}' d\theta'' = \frac{-\,p_i}{\{\,g^{0\nu}\,\}_{x'} p_\nu p_0}\,\lambda^2 D\,.\,d^2\Omega.$$

Il résulte alors de (8-4), ainsi que de (8-14) et (8-15), que

$$\begin{aligned}(9\text{-}2)\quad \lambda^2 p_i E^{i}_{R'}(U) = {}& |\lambda|\sqrt{\frac{p_0}{-D}}\,K(x')\omega^{B}_{R'} p_i [\,\{\,g^{ik}\,\}_{x'}\partial_k\{\,U_B\,\}_{x'} \\ &+ 2\frac{p_\nu}{p_0}\{\,g^{i\nu}\partial_0 U_B\,\}_{x'} + \{\,U_A\,\}_{x'}(-\,\delta^{A}_{B}\partial_k\{\,g^{ik}\,\}_{x'} + \{\,h^{Ai}_{B}\,\}_{x'})] \\ &-|\lambda|\sqrt{\frac{p_0}{-D}}\,K(x')\partial_k\omega^{A}_{R'} p_i\{\,g^{ik}U_A\,\}_{x'} - \lambda^2\partial_k\varpi\;\omega^{A}_{R'} p_i\{\,U_A g^{ik}\,\}_{x'}.\end{aligned}$$

Le premier terme a une limite nulle pour $\lambda = 0$. Puisque d'autre part

$$\lim_{\lambda=0}(\lambda\partial_k\omega^{A}_{R'}) = 0, \qquad \lim_{\lambda=\pm 0}(\lambda^2\partial_k\varpi) = \pm\,K(x')\sqrt[4]{-g(x')}A^{j'}_{k} q_{j'},$$

il résulte de (9-2)

$$\lim_{\eta=0} \iint_{l^{\pm}_{\eta}} E^{i}_{R'}(U) d^{2}_{i}x = \iint_{S(2)} \lim_{\lambda=\pm 0} \left\{ \frac{-D}{p_0} \frac{\lambda^2 p_i E^{i}_{R'}(U)}{\{g^{0\nu}\}_{x'} p_\nu} \right\} d^2\Omega$$

$$= \pm \frac{K(x')}{\sqrt[4]{-g(x')}} U_{R'}(x') \iint_{S(2)} \frac{-g^{i'k'}(x') p^{(0)}_{i'} A^{j'}_{k'} q_{j'}}{g^{0'\nu'} p^{(0)}_{\nu'}} d^2\Omega$$

$$= \pm \frac{\sqrt{g_{0'0'}(x')}}{\sqrt[4]{-g(x')}} K(x') . U_{R'}(x') . 4\pi.$$

On choisit

$$K(x') = \pm \frac{\sqrt[4]{-g(x')}}{\sqrt{g_{0'0'}(x')}}. \tag{9-3}$$

De la sorte, les équations intégrales (8-13) donnent, par passage à la limite $\eta = 0$, les *équations intégrales de Kirchhoff*

$$4\pi U_{R'}(x') = \iiint_{x \in V^{\pm}_{0,N}(x')} \{ M^{A}_{R'}(x', x) U_A(x) - \sigma^{B}_{R'}(x', x) f_B(x) \} d^3x + \iint_{l^{\pm}_{N}} E^{i}_{R'}(U) d^{2}_{i}x, \tag{9-4}$$

auxquelles est astreinte toute solution U_A, de classe C^2, du système (6-1).

10) Existence et unicité des noyaux élémentaires.

Soit un champ $U_A \in \mathfrak{D}^{l+2}_{\Omega}$. Il vérifie les équations de Kirchhoff (9-4) où on a substitué

$$f_B(x) = L^{A}_{B} U_A(x) \in \mathfrak{D}^{l}_{\Omega}.$$

En outre, N peut être choisi de telle sorte que l'intégrale double s'annule. Il suffit de choisir une hypersurface $\mathcal{H}$, d'équation $x^0 = \text{Cte} = \xi$, telle que

$$\mathcal{H} \cap S(U) = \varnothing,$$

et d'intégrer

$$\begin{cases} \text{sur } V^{-}_{0,N}(x'), \text{ en prenant } N = x'^{0'} - \xi, \text{ si } x'^{0'} > \xi \,; \\ \text{sur } V^{+}_{0,N}(x'), \text{ en prenant } N = \xi - x'^{0'}, \text{ si } x'^{0'} < \xi \,; \end{cases}$$

Les équations de Kirchhoff (9-4) se réduisent alors à

$$(10\text{-}1)\quad 4\pi U_{R'}(x') = \iiint_{x\in V^{\pm}_{0,N}(x')} M^{A}_{R'}(x', x)U_A(x)d^3x - \iiint_{x\in V^{\pm}_{0,N}(x')} \sigma^{B}_{R'}(x', x)L^{A}_{B}U_A(x)d^3x.$$

La comparaison avec (3-2) montre que l'opérateur L admet les paramétrix avancée et retardée $P^{\pm A}_{R'}(x', x)$, distributions définies sur les champs $\varphi_A \in \mathfrak{D}^0_\Omega$ par

$$(10\text{-}2)\qquad \langle P^{\pm A}_{R'}, \varphi_A \rangle (x') = -\frac{1}{4\pi}\iiint_{x\in V^{\pm}_{0,N}(x')} \sigma^{A}_{R'}(x', x)\varphi_A(x)d^3x.$$

Ces paramétrix sont des *couches simples* portées par $\Gamma_{x'}$.

Selon le raisonnement du § 3, on obtient le noyau résolvant de chacune des deux équations intégrales (10-1) sous la forme d'une série dont la convergence a été établie par Y. Bruhat [*1*] (chap. I et III) dans une étude dont nous indiquons les grandes lignes.

Si on représente $\Gamma_{x'}$ par les paramètres x^0, θ', θ'', les équations (10-1) s'écrivent

$$(10\text{-}1)'\quad 4\pi U_{R'}(x') = \int_{x'^{0'}}^{\xi} dx^0 \iint_{S^{(2)}} [M^{A}_{R'}\{U_A\}_{x'} - \sigma^{B}_{R'}\{L^{A}_{B}U_A\}_{x'}] \frac{\Delta}{p^0 \sin\theta'} d^2\Omega.$$

On doit montrer que le noyau

$$\frac{M^{A}_{R'}\Delta}{p^0 \sin\theta'} = \frac{K^{A}_{R'}}{p^0}$$

a, en valeur absolue, une borne supérieure pour tout x' et tout x de Ω tels que $x \in \Gamma_{x'}$, $| x^0 - x'^{0'} | \leqslant N_0$ donné. On ordonne pour cela l'expression (8-5) de $M^{A'}_{R}$ selon ϖ, $\omega^{A}_{R'}$, et leurs dérivées partielles premières et secondes relatives à x^1, x^2, x^3.

Les dérivées logarithmiques de l'expression (8-14) de ϖ s'écrivent

$$(10\text{-}3)\qquad \frac{\partial_i \varpi}{\varpi} = -\frac{1}{2\lambda^2 D}\partial_i(\lambda^2 D) + \frac{1}{2p_0}\partial_i p_0.$$

On se trouve ainsi ramené à dériver sur $\Gamma_{x'}$ par rapport à x^1, x^2, x^3 des expressions $F(G, A, q_{h'}, Z)$; on désigne ici par G l'un des coefficients $g^{\lambda\nu}$, $h^{A\lambda}_{B}$, ou l'une de leurs dérivées partielles; par A l'un des coefficients $A^{\mu'}_{\nu'}$; par Z l'une des fonctions $z^{(p)}$ $(0 \leqslant |p| \leqslant 2)$, ω ou ω^{j}, obtenues en intégrant les systèmes différentiels (7-2), (7-6), (8-11) ou ses dérivés (8-11)′. Il vient

$$\text{(10-4)}\quad \partial_i \mathrm{F} = \sum \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{G}} \times \left(\partial_i \mathrm{G} - \frac{p_i}{p_0}\partial_0 \mathrm{G}\right) + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_{\mathrm{h}'}}\frac{1}{\lambda}(\delta_{\mathrm{h}'\mathrm{j}'} - q_{\mathrm{h}'}q_{\mathrm{j}'})\frac{\mathrm{D}^{\mathrm{j}}_i}{\mathrm{D}}$$
$$+ \sum \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Z}} \times \left\{ \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \lambda} q_{\mathrm{j}'}\frac{\mathrm{D}^{\mathrm{j}}_i}{\mathrm{D}} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial q_{\mathrm{h}'}}\cdot\frac{1}{\lambda}(\delta_{\mathrm{h}'\mathrm{j}'} - q_{\mathrm{h}'}q_{\mathrm{j}'})\frac{\mathrm{D}^{\mathrm{j}}_i}{\mathrm{D}}\right\}.$$

Selon la fonction Z envisagée, $\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \lambda}$ est exprimée par (7-2), ou (7-6), ou (8-11), ou (8-11)′ en fonction de (G, A, $q_{\mathrm{j}'}$, Z) et $\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial q_{\mathrm{h}'}}$ est l'une des fonctions

$$z^{(p)}(0 < |p| \leqslant 3) \qquad \text{ou} \qquad \omega^{(p)}(0 < |p| \leqslant 2).$$

On obtient alors, compte tenu de l'étude du § 7, les résultats suivants

$$\text{(10-5)}\quad \left\{\begin{aligned}
&\{g^{ik}\}_{x'}\left(\partial_k\partial_i\omega^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} + 2\frac{\partial_i\varpi}{\varpi}.\partial_k\omega^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}\right) = \frac{1}{(p_0)^2(\lambda^2\mathrm{D})^3}\\
&\qquad\qquad \times \mathrm{P}(g, \partial g, \partial^2 g, h, \partial h, \mathrm{A}, q, r, r', y', y'', \omega, \omega', \omega'')\\
&(2\delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\partial_k\{g^{ik}\}_{x'} - \{h^{\mathrm{A}i}_{\mathrm{B}}\}_{x'})\left(\partial_i\omega^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}'} + \omega^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}'}\frac{\partial_i\varpi}{\varpi}\right) = \frac{1}{(p_0)^2(\lambda^2\mathrm{D})^2}\\
&\qquad\qquad \times \mathrm{Q}(g, \partial g, h, \mathrm{A}, q, r, r', y', y'', \omega, \omega')\\
&(\delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\partial_i\partial_k\{g^{ik}\}_{x'} - \partial_i\{h^{\mathrm{A}i}_{\mathrm{B}}\}_{x'} + \{k^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\}_{x'})\omega^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}'} = \frac{1}{(p_0)^2\lambda^2\mathrm{D}}\\
&\qquad\qquad \times \mathrm{R}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}(g, \partial g, \partial^2 g, h, \partial h, k, \mathrm{A}, q, r, r', y')\omega^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}'}\\
&\{g^{ik}\}_{x'}\frac{\partial_i\partial_k\varpi}{\varpi}\omega^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = \frac{1}{(p_0)^2(\lambda^2\mathrm{D})^4}\\
&\qquad\qquad \times \mathrm{S}(g, \partial g, \partial^2 g, \mathrm{A}, q, r, r', r'', y', y'', y''')\omega^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}
\end{aligned}\right.$$

où les polynômes P, Q, $\mathrm{R}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$, S ont, relativement à leurs arguments y', y'', y''', ω', ω'' un degré minimal égal à 5, 3, 1, 6, respectivement. On en déduit

$$\text{(10-6)}\quad \frac{\mathrm{K}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}}{p^0} = \frac{\lambda\varpi}{p^0(p_0)^2}$$
$$\times\left\{\frac{\mathrm{T}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(g, \partial g, \partial^2 g, h, \partial h, k, \mathrm{A}, q, r, r', r'', y', y'', \omega, \omega', \omega'', \tilde{y}', \tilde{y}'', \tilde{\omega}', \tilde{\omega}'')}{\mathrm{D}^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde{\mathrm{S}}(g, \partial g, \partial^2 g, \mathrm{A}, q, r, r', r'', y', y'', y''', \tilde{y}', \tilde{y}'', \tilde{y}''')}{\lambda\mathrm{D}^3}\omega^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}\right\},$$

où $\mathrm{T}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ et $\tilde{\mathrm{S}}$ sont des polynômes de tous leurs arguments.

On remarque enfin que

$$\text{(10-7)}\quad \lim_{\lambda=0}\tilde{\mathrm{S}} = \lim_{\lambda=0}\frac{\mathrm{S}}{\lambda^6} = \sqrt{\frac{\{g_{0'0}(x')\}^7}{\{-g(x')\}^5}}\lim_{\lambda=0}\left(\lambda^3\{g^{ik}\}_{x'}\partial_i\partial_k\varpi\right) = 0.$$

Appliquons la formule de Taylor au polynôme $\tilde{S}(G, A, q, Z, \tilde{y})$, relativement à tous ses arguments, à partir de leurs valeurs pour $\lambda = 0$. Ce développement donne un polynôme de degré minimal 1 par rapport à

$$\{ G(x) - G(x') \}, \qquad Z(\lambda), \qquad \{ \tilde{y}(\lambda) - \tilde{y}(0) \}.$$

Or, les $g^{\lambda\nu}(x)$ sont quatre fois continûment différentiables; d'où

$$| G(x) - G(x') | < M_\alpha y^\alpha(\lambda). \tag{10-8}$$

D'autre part, en vertu de (7-4) et (7-4)'

$$| Z(\lambda) | < M | \lambda |.$$

Il vient enfin pour chaque $\tilde{y}^{(p)}$

$$\tilde{y}^{\alpha(p)}(0) = \lim_{\lambda=0} \frac{dy^{\alpha(p)}}{d\lambda} = Y^{\alpha(p)} \{ \partial^q g(x'), A, q, z^{(p')}(0) \}$$

pour $0 \leqslant q \leqslant | p |$ et $0 < | p' | < | p |$; d'où

$$\tilde{y}^{\alpha(p)}(\lambda) - \tilde{y}^{\alpha(p)}(0) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left\{ B^\alpha_\nu(\partial g, A, q, r) y^{\nu(p)} + g^{\alpha\nu} r^{(p)}_\nu + \left(Y^{\alpha(p)}\right)_\lambda - \left(Y^{\alpha(p)}\right)_0 \right\} d\lambda.$$

La formule de Taylor permet de développer le polynôme $\{ (Y^{\alpha(p)})_\lambda - (Y^{\alpha(p)})_0 \}$ en un polynôme de degré minimal 1 par rapport à $\{ G(x) - G(x') \}$ et $Z(\lambda)$. En appliquant, comme ci-dessus, (10-8) ainsi que (7-4) et (7-4)', et en remarquant que B^α_ν et $g^{\alpha\lambda}$ sont bornés, on obtient

$$| \tilde{y}^{\alpha(p)}(\lambda) - \tilde{y}^{\alpha(p)}(0) | < \frac{1}{| \lambda |} \int_0^{|\lambda|} Mu \mp du = \frac{M}{2} | \lambda |. \tag{10-9}$$

Il en résulte que $| \tilde{S}\lambda^{-1} |$ a une borne supérieure ne dépendant que des bornes mentionnées au § 6. Il en est de même de $\left(K^A_{R'}/p^0\right)$.

Le raisonnement des § 3 et 5 établit ainsi l'existence et l'unicité des noyaux élémentaires, et donne une méthode pour les calculer par une itération convergente, à partir des deux éléments fondamentaux suivants, définis pour x sur $\Gamma_{x'}$:

— $\sigma^A_{R'}(x', x)$, solution du système différentiel (8-8);

— $M^A_{R'}(x', x)$, défini par l'équation (8-5).

Chaque noyau élémentaire se sépare, pour chaque x', en *termes de front* (distributions portées par $\Gamma_{x'}$) et *termes de diffusion*, ou de *queue* [16] (distributions de support inclus dans $\bar{\mathcal{E}}_{x'}$). On démontre [17] que, avec les hypothèses de régularité ci-dessus, les distributions $\overset{r}{E}{}^{\pm A}_{R'}(x', x)$ pour $r \geqslant 1$, sont

[16] Notation de B. S. De Witt et C. Morette-De Witt.

[17] Y. Bruhat [5].

des fonctions localement sommables dans $\overline{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}$; de la sorte, le seul terme de front est

$$\overset{0}{\mathrm{E}}{}^{\pm}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = \mathrm{P}^{\pm}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x).$$

A. Dougliss [*1*] a montré que la condition *nécessaire* et suffisante *d'absence* de tout terme de diffusion est l'annulation du noyau $\mathrm{M}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x)$.

Pour cette raison, ce noyau est appelé *noyau de diffusion.* Par abus de langage, la fonction $\sigma^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x)$ sera appelée *paramétrix.*

CHAPITRE II

OPÉRATEUR DÉPENDANT DE PARAMÈTRES (1)

1) Hypothèses.

On considère maintenant un opérateur L à 4 variables x^1, x^2, x^3, x^0, dont les coefficients $g^{\lambda\nu}$, $h^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}}$, $k^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ sont fonctions de ces $n + 1 = 4$ coordonnées, et en outre de K paramètres $a_u (u = 1, 2, \ldots, \mathrm{K})$ variant dans un domaine $\mathcal{A}$ de R^{K}, voisinage d'un système de valeurs données $a^{(0)}_u$ des paramètres. On pourra se ramener au cas où $a^{(0)}_u = 0$ pour $u = 1, 2, \ldots, \mathrm{K}$.

On se propose d'utiliser la méthode exposée ci-dessus (chap. I, section B) pour étudier, moyennant des conditions portant sur la différentiabilité des coefficients de L, la différentiabilité des noyaux élémentaires par rapport aux paramètres a_u. On définira une dérivée quelconque (d'ordre $| k |$, k multi-entier) de l'un des noyaux élémentaires par

$$\left\langle \frac{\partial^{|k|} \mathrm{E}^{\pm}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}}{(\partial a)^k}, f_{\mathrm{A}} \right\rangle (x', a) = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial a)^k} \langle \mathrm{E}^{\pm}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}, f_{\mathrm{A}} \rangle (x', a). \tag{1-1}$$

Le but principal est de former, au voisinage du système de valeurs $a_u = 0$

(1) Il existe pour des systèmes généraux à coefficients constants, hyperboliques (J. Chaillou [*1*]), ou non (F. Trèves [*1*]), des théorèmes de dépendance continue d'une solution élémentaire par rapport à des paramètres figurant dans l'opérateur. Mais nous avons besoin ici d'un résultat plus explicite, et dans le cas de coefficients variables.

des paramètres, des développements limités des noyaux élémentaires, définis comme suit si

$$(1\text{-}2)\quad \langle \mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}, f_{\mathrm{A}} \rangle (x', a) = \sum_{0 \leqslant |k| \leqslant l} \frac{(a)^k}{|k|\,!} \langle \mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}(k)}_{\mathrm{R}'}, f_{\mathrm{A}} \rangle (x') + \frac{1}{l\,!}\, \varepsilon^{\pm}_{\mathrm{R}'}(x', a) \sum_{|k|=l} (a)^k,$$

où

$$\lim_{a_u=0} \varepsilon^{\pm}_{\mathrm{R}'}(x', a) = 0,$$

on dira que le noyau-distribution

$$(1\text{-}3)\qquad \sum_{0 \leqslant |k| \leqslant l} \frac{(a)^k}{|k|\,!} \mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}(k)}_{\mathrm{R}'}(x', x)$$

est le développement limité à l'ordre l du noyau élémentaire

$$\mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x, a).$$

Les dérivées (1-1) pourront être utilisées pour former des développements de Taylor, obtenus en choisissant dans (1-3)

$$(1\text{-}4)\qquad \mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}(k)}_{\mathrm{R}'}(x', x) = \frac{\partial^{|k|}\mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}}{(\partial a)^k}(x', x, 0).$$

On désigne par l un entier donné, positif ou nul (on peut étendre au cas $l = \infty$).

Les hypothèses *a) de régularité* du chapitre I (§ 6) sont complétées comme suit :

Les coefficients $g^{\lambda\nu}$ et leurs dérivées d'ordre 1, 2, 3, 4 par rapport aux coordonnées, les coefficients $h^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}}$ et leurs dérivées d'ordre 1 et 2 par rapport aux coordonnées, et les coefficients $k^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$, sont des fonctions de classe C^l de tous leurs arguments (coordonnées x^α et paramètres a_u) pour $x \in \Omega$ et $a = \{ a_u \} \in \mathcal{A}$.

Chacune des dérivées concernées a une borne supérieure, valable pour tout $x \in \Omega$ et tout $a \in \mathcal{A}$.

Les hypothèses *b) d'hyperbolicité normale* sont les mêmes, les bornes étant valables pour tout $x \in \Omega$, et tout $a \in \mathcal{A}$.

Il résulte de ces hypothèses que, en tout point x' de Ω, il est possible de trouver un repère orthonormé défini par des coefficients $\mathrm{A}^{\mu'}_{\nu'}(x', a)$, fonctions de classe C^l de tous leurs arguments, ainsi que les coefficients $\mathrm{A}^{\nu'}_{\mu'}(x', a)$ de la matrice inverse, pour $x' \in \Omega$ et $a \in \mathcal{A}$; en outre, ces coefficients et toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre l ont des bornes supérieures valables pour tout $x' \in \Omega$ et tout $a \in \mathcal{A}$.

L'hypothèse *c)* sur le champ donné au *second membre* de (I-6-1) est complétée comme suit :

Le champ f est de classe C^l par rapport aux coordonnées (il ne dépend pas des paramètres a_u). Il a dans Ω une borne supérieure, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre l.

2) **Différentiabilité des fonctions y, r, ω.**

Les fonctions y^α et r_ν sont définies comme constituant la solution du système (I-7-2) s'annulant pour $\lambda = 0$, et les fonctions $\omega_{R'}^{A}$ comme constituant la solution du système (I-8-11) égale à $\delta_{R'}^{A'}$ pour $\lambda = 0$. Ce sont des fonctions des arguments suivants :

— le paramètre canonique λ le long des bicaractéristiques;
— les deux paramètres θ' et θ'', par l'intermédiaire des $q_{j'}$;
— les 4 coordonnées $x'^{\sigma'}$ du sommet x' du conoïde caractéristique ;
— les K paramètres a_u dont dépendent les coefficients de L.

Les dérivées des fonctions y^α, r_ν, $\omega_{R'}^{A}$ dont on aura besoin dans la suite sont les dérivées jusqu'à l'ordre l par rapport aux arguments $x'^{\sigma'}$ et a_u :

— des fonctions y^α et r_ν et de leurs dérivées d'ordre 1, 2, 3 relatives à λ, θ', θ'' (ou λ, $q_{j'}$);

— des fonctions $\omega_{R'}^{A}$ et de leurs dérivées d'ordre 1 et 2 relatives à λ, θ', θ'' (ou λ, $q_{j'}$).

Désignons par $y^{\alpha(p,q,k)}$ et $r_\nu^{(p,q,k)}$ respectivement l'une (quelconque) des dérivées des fonctions y^α et r_ν, d'ordre p par rapport aux $q_{j'}$, d'ordre q par rapport aux $x'^{\sigma'}$, d'ordre k par rapport aux $a_u (p + q + k > 0)$. Ces 8 fonctions constituent la solution, nulle pour $\lambda = 0$, du système différentiel linéaire

$$\text{(2-1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy^{\alpha(p,q,k)}}{d\lambda} &= B_\nu^\alpha y^{\nu(p,q,k)} + g^{\alpha\nu} r_\nu^{(p,q,k)} + Y^{\alpha(p,q,k)} \\ \frac{dr_\nu^{(p,q,k)}}{d\lambda} &= C_{\nu\alpha} y^{\alpha(p,q,k)} - B_\nu^\alpha r_\alpha^{(p,q,k)} + R_\nu^{(p,q,k)}. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients B_ν^α et $C_{\nu\alpha}$ sont ceux définis en (I-7-7). Les fonctions $Y^{\alpha(p,q,k)}$ et $R_\nu^{(p,q,k)}$ sont des polynômes

— des coefficients $g^{\lambda\nu}$ et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre k par rapport aux paramètres a_u et, par rapport à l'ensemble des arguments, jusqu'à l'ordre $(p + q + k)$ pour les Y, jusqu'à l'ordre $(p + q + k + 1)$ pour les R;

— des coefficients $A_{\nu'}^{\mu'}$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre (q, k);

— des $q_{j'}$;

— des fonctions r_ν et des dérivées $z^{(p',q',k')}$ où $p' \leqslant p$, $q' \leqslant q$, $k' \leqslant k$, $0 < p' + q' + k' < p + q + k$.

De même, les dérivées $\omega_{R'}^{A\,(p,q,k)}$ des fonctions $\omega_{R'}^{A}$ constituent la solution, s'annulant pour $\lambda = 0$, du système différentiel linéaire

$$(2\text{-}2) \qquad \frac{d\omega_{R'}^{A(p,q,k)}}{d\lambda} = Q_B^A \omega_{R'}^{B(p,q,k)} + \frac{\Omega_{R'}^{A(p,q,k)}}{(p_0)^{p+q+k+1}}.$$

Les coefficients Q_B^A sont les mêmes qu'en (I-8-11). Les $\Omega_{R'}^{A\,(p,q,k)}$ sont des polynômes

— des dérivées partielles des coefficients $g^{\lambda\nu}$ jusqu'à l'ordre k par rapport aux paramètres a_u, jusqu'à l'ordre $(p + q + k + 1)$ par rapport à l'ensemble des arguments;

— des coefficients $h_B^{A\lambda}$ et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre k par rapport aux paramètres a_u, jusqu'à l'ordre $(p + q + k)$ par rapport à l'ensemble des arguments;

— des coefficients $A_{\nu'}^{\mu'}$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre (q, k);

— des $q_{j'}$;

— des fonctions r_ν et des dérivées $z^{(p',q',k')}$ où $p' \leqslant p$, $q' \leqslant q$, $k' \leqslant k$;

— des fonctions $\omega_{R'}^{A}$ et de leurs dérivées d'ordre inférieur strictement à (p, q, k).

L'existence et la continuité des dérivées cherchées ($q + k \leqslant l$; $p \leqslant 3$ pour les $z^{(p,q,k)}$, $p \leqslant 2$ pour les $\omega_{R'}^{A\,(p,q,k)}$) résultent de théorèmes classiques, sous les hypothèses énoncées ci-dessus. En outre, les systèmes différentiels (2-1) et (2-2) permettent d'obtenir directement les dérivées par rapport à λ des fonctions $y^{\alpha(p,q,k)}$, $r_\nu^{(p,q,k)}$ $\omega_{R'}^{A\,(p,q,k)}$ jusqu'aux ordres respectifs (5-p), (4-p), (3-p).

REMARQUE 1. — On a également besoin de l'existence et de la continuité des dérivées

$$\frac{d^m \tilde{y}^{\alpha(p,q,k)}}{d\lambda^m} = \frac{d^m}{d\lambda^m}\left(\frac{y^{\alpha(p,q,k)}}{\lambda}\right), \qquad \frac{d^m \tilde{\omega}_{R'}^{A(p,q,k)}}{d\lambda^m} = \frac{d^m}{d\lambda^m}\left(\frac{\omega_{R'}^{A(p,q,k)}}{\lambda}\right)$$

pour $q + k \leqslant l$, $m + p \leqslant 3$ et 2, respectivement. Elles sont assurées pour $\lambda \neq 0$. Les remarques ci-dessus sur la dérivabilité relative à λ montrent que ces dérivées ont une limite finie pour $\lambda = 0$.

REMARQUE 2. — Les hypothèses faites assurent l'existence et la continuité des dérivées jusqu'aux ordres suivants

$$\frac{d^m r_\nu^{(p,q,k)}}{d\lambda^m} \quad \text{pour } k \leqslant l, \quad p+q+k \leqslant l+3, \qquad m+p+q+k \leqslant l+4$$

$$\frac{d^m y^{\alpha(p,q,k)}}{d\lambda^m} \quad \text{pour } k \leqslant l, \quad p+q+k \leqslant l+3, \qquad m+p+q+k \leqslant l+5$$

$$\frac{d^m \omega_{R'}^{A(p,q,k)}}{d\lambda^m} \quad \text{pour } k \leqslant l, \quad p+q+k \leqslant l+2, \qquad m+p+q+k \leqslant l+3.$$

3) Différentiabilité des fonctions $\sigma_{R'}^{A}$ et $M_{R'}^{A}$.

Il résulte de la différentiabilité des fonctions $z(x'; \lambda, q_{j'}; a)$ que le déterminant fonctionnel Δ et ses mineurs possèdent des dérivées continues et bornées d'ordres respectifs p, q, k relativement à λ et θ, à $x'^{\sigma'}$, à a_u, pour $p \leqslant 2$, $q + k \leqslant l$.

La remarque 1 prouve qu'il en est de même pour le déterminant fonctionnel D, son inverse D^{-1}, ses mineurs D_i^j, et les quantités

$$(3\text{-}1) \qquad \begin{cases} D^{-1}D_i^j = \partial^i\lambda^j \\ D^{-1}q_{j'}D_i^j = q_{j'}\partial_i\lambda^j = \partial_i\lambda \\ D^{-1}(\delta_{j'h'} - q_{j'}q_{h'})D_i^h = \lambda\partial_i q_{j'} \end{cases}$$

$$(3\text{-}2) \qquad \frac{\sqrt[4]{-g(x', a)}}{\sqrt{g_{0'0'}(x', a)}}\sqrt{\frac{p_0}{-D}} = \lambda\varpi(x', \lambda, q_{j'}, a).$$

Il en est évidemment de même pour

$$\lambda\sigma_{R'}^{A}(x', \lambda, q_{j'}, a) = \lambda.\varpi(x', \lambda, q_{j'}, a) \quad \omega_{R'}^{A}(x', \lambda, q_{j'}, a)$$

et pour $\sigma_{R'}^{A}\Delta\,(\sin\theta')^{-1}$.

En dehors d'une boule entourant x', c'est-à-dire sur $V_{\eta,N}^{\pm}(x')$, il en est de même pour $(\Delta^{-1} \sin \theta')$, pour ϖ et $\sigma^{A}_{R'}$ et pour les dérivées $\partial_i q_{j'}$, $\partial_i \theta'$, $\partial_i \theta''$.

D'autre part, la substitution dans les coefficients

$$\{ g^{\lambda\nu}(x, a) \}_{x'}, \qquad \{ h^{A\lambda}_{B}(x, a) \}_{x'}, \qquad \{ k^{A}_{B}(x, a) \}_{x'}$$

de la solution du système bicaractéristique

$$x^{\alpha} = x'^{\alpha'} + y^{\alpha}(x', \lambda, q_{j'}(\theta), a)$$

les transforme en fonctions $\bar{g}^{\lambda\nu}$, $\bar{h}^{A\lambda}_{B}$, $\bar{k}^{A}_{B}$ des arguments λ, $q_{j'}(\theta)$, x', a. Ces fonctions, ainsi que les dérivées premières et secondes de $\bar{g}^{\lambda\nu}$ et $\bar{h}^{A\lambda}_{B}$ possèdent des dérivées relatives à $x'^{\sigma'}$ et a_u jusqu'à l'ordre l, fonctions continues de tous leurs arguments.

Dans $V^{\pm}_{\eta,N}(x')$, on calcule les dérivées d'une fonction définie sur $\Gamma_{x'}$, soit $h(x', \lambda, q_{j'}, a)$, au moyen de la règle

$$\partial_i h = \frac{\partial h}{\partial \lambda} \partial_i \lambda + \frac{\partial h}{\partial q_{j'}} \partial_i q_{j'}.$$

Des propriétés de différentiabilité de $\partial_i \lambda$, $\partial_i q_{j'}$, $\sigma^{A}_{R'}$, $\bar{g}^{\lambda\nu}$, $\bar{h}^{A\lambda}_{B}$, $\bar{k}^{A}_{B}$, il résulte que les fonctions $M^{A}_{R'}(x', \lambda, q_{j'}(\theta), a)$ définies par (I-8-5)

$$M^{A}_{R'} = \partial_i \partial_k \left(\{ g^{ik} \}_{x'} \sigma^{A}_{R'} \right) - \partial_i \left(\{ h^{Ai}_{B} \}_{x'} \sigma^{B}_{R'} \right) + \{ k^{A}_{B} \}_{x'} \sigma^{B}_{R'}$$

ont dans $V^{\pm}_{\eta,N}(x')$ des dérivées jusqu'à l'ordre l par rapport à $x'^{\sigma'}$ et a_u, fonctions continues de tous leurs arguments.

Il en est évidemment de même pour $K^{A}_{R'} = M^{A}_{R'} \Delta (\sin \theta')^{-1}$. En outre, ces fonctions et leurs dérivées $K^{A\,(q,k)}_{R'}$ d'ordre $q + k \leqslant l$ sont bornées dans $V^{\pm}_{0,N}(x')$. En effet, d'après (I-10-6),

$$K^{A}_{R'} = \frac{\lambda \varpi}{(p_0)^2} \left\{ \frac{T^{A}_{R'}(g, \partial g, \partial^2 g, h, \partial h, k, A, q, r, z', z'', \omega, \omega', \omega'', \tilde{y}', \tilde{y}'', \tilde{\omega}', \tilde{\omega}'')}{D^2} + \frac{\tilde{S}(g, \partial g, \partial^2 g, A, q, r, z', z'', y''', \tilde{y}', \tilde{y}'', \tilde{y}''')}{\lambda} \cdot \frac{\omega^{A}_{R'}}{D^3} \right\}$$

L'étude précédente montre que les fonctions $\lambda \varpi (p_0)^{-2}$, D, $\omega^{A}_{R'}$, $T^{A}_{R'}$, de $(\lambda, q_{j'}, x', a)$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre l par rapport à $x'^{\sigma'}$ et a_u, existent et sont continues pour $x \in V^{\pm}_{0,N}(x')$. Il faut montrer qu'il en est de même pour $(\tilde{S}\lambda^{-1})$.

Exprimons $\tilde{S}$ en fonction de $(\lambda, q_{j'}, x', a)$. Les dérivées $\tilde{S}^{(q,k)}$ de cette fonction par rapport à $x'^{\sigma'}$ et a_u existent et sont continues, en vertu des résultats précédents, pour $q + k \leqslant l$. Ce sont, en effet, des polynômes de :

— $g^{\lambda\nu}$ et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre k relativement à a, jusqu'à l'ordre $(q + k + 2)$ relativement à l'ensemble des arguments;
— $A^{\mu'}_{\nu'}$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre (q, k);
— $q_{j'}$;
— r_ν et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(2, q, k)$;
— les dérivées de y^α jusqu'à l'ordre $(3, q, k)$;
— les $\tilde{y}^{\alpha(p,q',k')}$ pour $p \leqslant 3$, $q' \leqslant q$, $k' \leqslant k$.

Puisque d'autre part la limite de $\tilde{S}$ pour $\lambda = 0$ est nulle pour tout $x' \in \Omega$ et tout $a \in \mathcal{A}$, la limite de $\tilde{S}^{(q,k)}$ pour $\lambda = 0$ est également nulle. Un raisonnement de même type que celui du chapitre I (§ 10) permet de conclure que $(\tilde{S}^{(q,k)}\lambda^{-1})$ est borné dans $V^{\pm}_{0,N}(x')$ pour $q + k \leqslant l$. En effet, en vertu des hypothèses, les dérivées de $g^{\lambda\nu}$ figurant dans le polynôme $\tilde{S}^{(q,k)}$ sont au moins deux fois différentiables par rapport aux coordonnées; et celles qui figurent dans $Y^{\alpha(3,q,k)}$ sont 1 fois différentiables par rapport aux coordonnées.

REMARQUE. — De la remarque 2 du § 2, on déduit que dans $V^{\pm}_{\eta,N}(x')$ les fonctions $M^{A}_{R'}$ sont de classe C^l par rapport à tous leurs arguments, et que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre l des fonctions $K^{A}_{R'}$ ont une limite finie pour $\lambda = 0$; ces dérivées sont donc bornées dans $V^{\pm}_{0,N}(x')$.

4) Différentiabilité des noyaux élémentaires.

On suppose désormais que le support du champ f_B est un compact de Ω. On a vu que le système linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$L^{A}_{B}U_{A} = f_{B}, \qquad f_{B} \in \mathcal{D}'^{l}_{\Omega}$$

admet une solution avancée et une solution retardée définies par

$$U^{\pm}_{R'}(x', a) = \langle E^{\pm A}_{R'}(a), f_A \rangle. \tag{4-1}$$

Conformément aux définitions (1-1) et (1-2)-(1-3), on étudie les dérivées relatives aux variables $x'^{\sigma'}$ et a_u de ces solutions pour établir que les noyaux élémentaires $E^{\pm A}_{R'}(x', x, a)$ et le propagateur $G^{A}_{R'}(x', x, a)$ dépendent différentiablement des variables $x'^{\sigma'}$ et a_u; on obtient de même des développements limités des noyaux élémentaires et du propagateur en formant des développements limités des solutions avancée et retardée (4-1).

On a obtenu les noyaux élémentaires au chapitre I (section B) en résolvant les équations intégrales de Kirchhoff satisfaites par les solutions avancée et retardée. Avec un choix convenable du domaine d'intégration $V^{\pm}_{0,N}(x') \subset \Gamma^{\pm}_{x'}$, ces équations s'écrivent

$$(4\text{-}2)\quad U^{\pm}_{R'}(x', a) = \Phi^{\pm}_{R'}(x', a) + \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} K^{A}_{R'}(x', \lambda, q_{j'}, a) U^{\pm}_{A}\{x'^{\alpha'} + y^{\alpha}(x', \lambda, q_{j'}, a), a\} \frac{d^2\Omega}{4\pi}.$$

$$(4\text{-}3)\quad \Phi^{\pm}_{R'}(x', a) = -\int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \frac{\Delta\sigma^{A}_{R'}}{\sin\theta'}(x', \lambda, q_{j'}, a) \cdot f_{A}\{x'^{\alpha'} + y^{\alpha}(x', \lambda, q_{j'}, a)\} \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$

est, d'après les résultats précédents et l'hypothèse *c)*, une fonction de classe C^l de tous ses arguments. Les équations de Kirchhoff (4-2) peuvent, par un changement de variable d'intégration, prendre la forme d'un système d'équations intégrales de Volterra

$$(4\text{-}4)\quad U_{R'}(x', a) = \Phi_{R'}(x', a) + \int_{x'^{0'}}^{\xi} dt \iint_{S^{(2)}} \frac{K^{A}_{R'}\{x', \lambda(x', t, q_{j'}, a), q_{j'}, a\}}{p^{0}\{x', \lambda(x', t, q_{j'}, a), q_{j'}, a\}} \times U_{A}[x'^{\alpha'} + y^{\alpha}\{x', \lambda(x', t, q_{j'}, a), q_{j'}, a\}, a] \frac{d^2\Omega}{4\pi}.$$

La borne fixe ξ est choisie de telle sorte que le support du champ f ne rencontre pas $x^0 = \xi$. La fonction $\lambda(x', x^0, q_{j'}, a)$ est obtenue par résolution de l'équation

$$x^0 = x'^{0'} + y^0(x', \lambda, q_{j'}, a).$$

En dérivant par rapport aux variables $x'^{\sigma'}$ ou a_u les équations intégrales (4-2) ou (4-4), on obtient de nouvelles équations intégrales

$$(4\text{-}5)\quad U^{(1,0)}_{R'}(x', a) = \frac{\partial\Phi_{R'}}{\partial x'} + \int_{x'^{0'}}^{\xi} dt \iint_{S^{(2)}} \frac{K^{A}_{R'}}{p^0}(\delta + y^{(1,0)}) \cdot U^{(1,0)}_{A} \frac{d^2\Omega}{4\pi} + \int_{x'^{0'}}^{\xi} dt \iint_{S^{(2)}} \frac{1}{p^0} \frac{\partial K^{A}_{R'}}{\partial x'} U_{A} \frac{d^2\Omega}{4\pi},$$

$$(4\text{-}6)\quad \mathrm{U}_{\mathrm{R}'}^{(0,1)}(x', a) = \frac{\partial \Phi_{\mathrm{R}'}}{\partial a} + \int_{x'^{0}}^{\xi} dt \iint_{\mathcal{S}^{(2)}} \frac{\mathrm{K}_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}}{p^{0}} \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(0,1)} \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$
$$+ \int_{x'^{0}}^{\xi} dt \iint_{\mathcal{S}^{(2)}} \frac{\mathrm{K}_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}}{p^{0}} y^{(0,1)} . \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(1.0)} \frac{d^2\Omega}{4\pi} + \int_{x'^{0}}^{\xi} dt \iint_{\mathcal{S}^{(2)}} \frac{1}{p^{0}} \frac{\partial \mathrm{K}_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}}{\partial a} \mathrm{U}_{\mathrm{A}} \frac{d^2\Omega}{4\pi}.$$

On peut considérer les équations (4-4), (4-5), (4-6) comme formant un système d'équations de Volterra simultanées, aux fonctions inconnues

$$(4\text{-}7)\quad \mathrm{U}_{\mathrm{R}'}^{\pm}(x', a)\,; \quad \frac{\partial \mathrm{U}_{\mathrm{R}'}^{\pm}}{\partial x'^{\sigma'}} = \left\langle \frac{\partial \mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}}{\partial x'^{\sigma'}}, f_{\mathrm{A}} \right\rangle; \quad \frac{\partial \mathrm{U}_{\mathrm{R}'}^{\pm}}{\partial a_u} = \left\langle \frac{\partial \mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}}{\partial a_u}, f_{\mathrm{A}} \right\rangle.$$

On les résout par itération en prenant pour termes initiaux

$$(4\text{-}8)\quad \overset{(0)}{\mathrm{U}}_{\mathrm{R}'}(x', a) = \Phi_{\mathrm{R}'}(x', a)\,; \quad \overset{(0)}{\mathrm{U}}{}_{\mathrm{R}'}^{(1,0)}(x', a) = \frac{\partial \Phi_{\mathrm{R}'}}{\partial x'}\,; \quad \overset{(0)}{\mathrm{U}}{}_{\mathrm{R}'}^{(0,1)}(x', a) = \frac{\partial \Phi_{\mathrm{R}'}}{\partial a}.$$

Par récurrence, on voit que l'on a, à chaque stade de l'itération,

$$(4\text{-}9)\quad \overset{(r)}{\mathrm{U}}{}_{\mathrm{R}'}^{(1,0)}(x', a) = \frac{\partial \overset{(r)}{\mathrm{U}}_{\mathrm{R}'}}{\partial x'}(x', a)\,; \qquad \overset{(r)}{\mathrm{U}}{}_{\mathrm{R}'}^{(0,1)}(x', a) = \frac{\partial \overset{(r)}{\mathrm{U}}_{\mathrm{R}'}}{\partial a}(x', a).$$

On a montré d'autre part que les noyaux de ces équations de Volterra ont des bornes supérieures quels que soient x' et x dans Ω tels que $x \in \Gamma_{x'}$, $| x^{0} - x'^{0'} | < \mathrm{N}_0$ donné, et quel que soit $a \in \mathcal{A}$. Il en résulte que la convergence des séries trouvées comme solutions de (4-5), (4-6), (4-7) est *uniforme* relativement à x' et a. La série $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}$ est donc dérivable terme à terme

$$(4\text{-}10)\quad \begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \overset{(r)}{\mathrm{U}}{}_{\mathrm{R}'}^{(1,0)}(x', a) &= \frac{\partial}{\partial x'} \sum_{r=0}^{\infty} \overset{(r)}{\mathrm{U}}_{\mathrm{R}'}(x', a)\,; \\ \sum_{r=0}^{\infty} \overset{(r)}{\mathrm{U}}{}_{\mathrm{R}'}^{(0,1)}(x', a) &= \frac{\partial}{\partial a} \sum_{r=0}^{\infty} \overset{(r)}{\mathrm{U}}_{\mathrm{R}'}(x', a). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses faites, on peut de même écrire un système d'équations simultanées de Volterra, constitué de (4-5), (4-6), (4-7), et des autres équations déduites de (4-4) ou (4-2) par des dérivations relatives à $x'^{\sigma'}$ ou a_u, jusqu'à l'ordre l (ou, si $l = \infty$, jusqu'à un ordre fini quelconque). Il a pour solution $\mathrm{U}_{\mathrm{R}'}(x', a)$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre l, ainsi que le montre un raisonnement analogue au précédent.

Les solutions avancée et retardée (4-1) sont donc de classe C^{l} par rapport à tous leurs arguments.

En particulier, les hypothèses faites permettent d'en former un développement de Taylor suivant les puissances des K paramètres a_u, limité à l'ordre l (ou, si $l = \infty$, limité à un ordre arbitraire).

En ce qui concerne les noyaux élémentaires et le propagateur, on sait ainsi, sous les hypothèses ci-dessus, définir leurs dérivées par rapport aux variables $x'^{\sigma'}$ et a_u jusqu'à l'ordre l, au sens précisé en (1-1), et en former un développement suivant les puissances des K paramètres a_u, limité à l'ordre l (ou, si $l = \infty$, limité à un ordre arbitraire), au sens précisé en (1-2)-(1-3).

5) Étude pratique de la résolution par itération.

La résolution par itération du système (4-5), (4-6), (4-7) peut être effectuée suivant le modèle donné au chapitre I (§ 5).

Les éléments initiaux (4-8) de l'itération se calculent à partir de la définition (4-3) de $\Phi_{R'}$

$$(5\text{-}1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^{\pm}_{R'}}{\partial x'^{\sigma'}}(x', a) &= -\int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \left\{ \frac{\partial(\lambda^2 D\sigma^{A}_{R'})}{\partial x'^{\sigma'}} f_A \right. \\ &\qquad \left. + \lambda^2 D\sigma^{A}_{R'}\left(\delta^{\nu}_{\sigma} + \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x'^{\sigma'}}\right)\partial_{\nu} f_A \right\} \frac{d^2\Omega}{4\pi} \\ \frac{\partial \Phi^{\pm}_{R'}}{\partial a}(x', a) &= -\int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \left\{ \frac{\partial(\lambda^2 D\sigma^{A}_{R'})}{\partial a} f_A \right. \\ &\qquad \left. + \lambda^2 D\sigma^{A}_{R'} y^{\nu(0,1)} \partial_{\nu} f_A \right\} \frac{d^2\Omega}{4\pi}. \end{aligned}\right.$$

Il en résulte que les premières itérées vont se présenter sous la forme d'une fonctionnelle linéaire de f et de ses dérivées

$$(5\text{-}2)\quad \left\{\begin{aligned} \overset{(1)}{U}{}^{(1,0)}_{R'}(x', a) &= \iiiint_{x \in \overline{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}(a)} \{ \overset{(1)}{E}{}^{(1,0)A}{}_{R'}(x', x, a) f_A(x) \\ &\qquad + \overset{(1)}{E}{}^{(1,0)A\nu}{}_{R'}(x', x, a) \partial_{\nu} f_A(x) \} \, d^4x. \\ \overset{(1)}{U}{}^{(0,1)}_{R'}(x', a) &= \iiiint_{x \in \overline{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}(a)} \{ \overset{(1)}{E}{}^{(0,1)A}{}_{R'}(x', x, a) f_A(x) \\ &\qquad + \overset{(1)}{E}{}^{(0,1)A\nu}{}_{R'}(x', x, a) \partial_{\nu} f_A(x) \} \, d^4x. \end{aligned}\right.$$

La méthode de résolution par itération exposée au chapitre I, § 5, montre qu'il en est de même pour les itérées successives. Les dérivées premières de la solution des équations intégrales (4-2) apparaissent donc sous la forme

$$
(5\text{-}3)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial U^{\pm}_{R'}}{\partial x'^{\sigma'}}(x', a) = &-\int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \left\{ \frac{\partial(\lambda^2 D\sigma^{A}_{R'})}{\partial x'^{\sigma'}} \{ f_A \}_{x'} \right.\\
&\left. + \lambda^2 D\sigma^{A}_{R'} \left(\delta^{\nu}_{\sigma} + \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x'^{\sigma'}} \right) \{ \partial_{\nu} f_A \}_{x'} \right\} \frac{d^2\Omega}{4\pi}\\
&+ \iiiint_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}(a)} \{ E^{(1,0)A}_{R'}(x', x, a) f_A(x) + E^{(1,0)A\nu}_{R'}(x', x, a) \partial_{\nu} f_A(x) \} d^4x\\
\frac{\partial U^{\pm}_{R'}}{\partial a}(x', a) = &-\int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \left\{ \frac{\partial(\lambda^2 D\sigma^{A}_{R'})}{\partial a} \{ f_A \}_{x'} \right.\\
&\left. + \lambda^2 D\sigma^{A}_{R'} y^{\nu(0,1)} \{ \partial_{\nu} f_A \}_{x'} \right\} \frac{d^2\Omega}{4\pi}\\
&+ \iiiint_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}(a)} \{ E^{(0,1)A}_{R'}(x', x, a) f_A(x) + E^{(0,1)A\nu}_{R'}(x', x, a) \partial_{\nu} f_A(x) \} d^4x
\end{aligned}\right.
$$

Plus généralement, lorsqu'on dérive q fois par rapport aux coordonnées $x'^{\sigma'}$ et k fois par rapport aux paramètres $a_u (q + k \leqslant l)$ la définition (4-3) de $\Phi_{R'}$, on obtient pour $\Phi^{(q,k)}_{R'}(x', a)$ une intégrale triple où interviennent linéairement le champ f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $(q + k)$ par rapport aux coordonnées. On en déduit de même, par itération, que les dérivées (q, k) de la solution des équations intégrales (4-2) apparaissent sous la forme

$$
(5\text{-}4)\qquad U^{(q,k)}_{R'}(x', a) = \Phi^{(q,k)}_{R'}(x', a) + \iiiint_{x \in \bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}(a)} \sum_{s=0}^{q+k} E^{(q,k)A}_{(s)\ R'}(x', x, a) \partial^{(s)}_x f_A(x) d^4x.
$$

Il en résulte pour les dérivées des noyaux élémentaires

$$
(5\text{-}4)'\qquad \frac{\partial^{q+k} E^{\pm A}_{R'}}{(\partial x')^q (\partial a)^k} = P^{\pm(q,k)A}_{R'} + \sum_{s=0}^{q+k} (-1)^{|s|} \partial^{(s)}_x E^{\pm(q,k)A}_{(s)\ R'}.
$$

Les dérivées-distributions $\partial^{(s)}_x E^{\pm(q,k)A}_{(s)\ R'}$ ont leur support dans $\bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}(a)$ et sur $\Gamma^{\pm}_{x'}(a)$; mais ce n'est qu'exceptionnellement, si les fonctions $E^{\pm(q,k)A}_{(s)\ R'}(x', x, a)$ sont suffisamment régulières, qu'on peut séparer une fonction localement sommable dans $\bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'}(a)$ (qui est la dérivée usuelle) et une distribution portée par $\Gamma^{\pm}_{x'}(a)$ (cf. chap. I, § 5, remarque 2).

La distribution $P^{\pm(q,k)A}_{R'}$ portée par $\Gamma^{\pm}_{x'}(a)$ est définie par une intégrale analogue à (5-1). Dans cette définition, les dérivées de f_A peuvent être transformées au moyen de (I-8-2) (séparation sur $\Gamma_{x'}$ des dérivées transversales et tangentielles). Aux dérivées transversales $\partial_0^s f_A$ correspondent des *couches multiples* d'ordre $s + 1 \leqslant q + k + 1$; mais aux dérivées tangentielles $D^t\{\partial_0^s f_A\}_{x'}(t + s \leqslant q + k)$, ne correspondent en général que des *dérivées de couches multiples* (d'ordre $s + 1$).

Cependant, $P^{\pm(1,0)A}{}_{R'}$ et $P^{\pm(0,1)A}{}_{R'}$ sont sommes d'une couche simple et d'une couche double portées par $\Gamma_{x'}^{\pm}(a)$, car (5-1) se transforme en

$$
(5\text{-}5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^{\pm}_{R'}}{\partial x'^{\sigma'}}(x', a) &= \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \lambda^2 D \left\{ \left(\delta^i_\sigma + \frac{\partial y^i}{\partial x'^{\sigma'}}\right) \right.\\
&\quad \left. \left(\frac{\partial \sigma^A_{R'}}{\partial \lambda}\partial_i\lambda + \frac{\partial \sigma^A_{R'}}{\partial q_{j'}}\partial_i q_{j'}\right) - \frac{\partial \sigma^A_{R'}}{\partial x'^{\sigma'}} \right\} \{ f_A \}_{x'} \frac{d^2\Omega}{4\pi}\\
&\quad - \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \lambda^2 D \sigma^A_{R'} \frac{p_\nu}{p_0}\left(\delta^\nu_\sigma + \frac{\partial y^\nu}{\partial x'^{\sigma'}}\right)\{ \partial_0 f_A \}_{x'} \frac{d^2\Omega}{4\pi},\\
\frac{\partial \Phi^{\pm}_{R'}}{\partial a}(x', a) &= \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \lambda^2 D\\
&\quad \left\{ y^{i(0,1)}\left(\frac{\partial \sigma^A_{R'}}{\partial \lambda}\partial_i\lambda + \frac{\partial \sigma^A_{R'}}{\partial q_{j'}}\partial_i q_{j'}\right) - \frac{\partial \sigma^A_{R'}}{\partial a} \right\} \{ f_A \}_{x'} \frac{d^2\Omega}{4\pi}\\
&\quad - \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \lambda^2 D \sigma^A_{R'} \frac{p_\nu}{p_0} y^{\nu(0,1)} \{ \partial_0 f_A \}_{x'} \frac{d^2\Omega}{4\pi}.
\end{aligned}
\right.
$$

Par contre, cette particularité ne s'étend pas au calcul des $\dfrac{\partial^2 \Phi_{R'}}{\partial x'^{i'} \partial x'^{k'}}(x', a)$ et de leurs dérivées, à cause de la singularité de $\sigma^A_{R'}$ et des $\partial_i q_{j'}$ au sommet du conoïde caractéristique.

CHAPITRE III

ÉTUDE DE LA PARAMÉTRIX ET DU NOYAU DE DIFFUSION DANS LE CAS DES CHAMPS DE TENSEURS-SPINEURS

La méthode de S. L. Sobolev et Y. Bruhat de construction pratique des propagateurs (chap. I, section B) utilise les deux éléments $\sigma^A_{R'}(x', x)$ et $M^A_{R'}(x', x)$. L'objet du présent chapitre est d'étudier ces éléments dans le cas des propagateurs tensoriels et spinoriels, et de chercher si l'on peut obtenir de façon simple les éléments $\sigma_{R'}^{A}$ et $M_{R'}^{A}$ correspondant à des ordres tensoriel et spinoriel quelconques, connaissant ceux correspondant aux premiers ordres (qu'on appellera « éléments primitifs »).

La section B établit des résultats de cette nature, très simples, dans le cas des opérateurs $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$ sur les p-tenseurs-ν-spineurs. Ces résultats utilisent les bi-tenseurs-spineurs de transport parallèle $T_{R'}^{A}(x', x)$, ou du moins leurs restrictions $\{ T_{R'}^{A}(x', x) \}_{x'}$ à $x \in \Gamma_{x'}$. Pour $\sigma_{R'}^{A}$, la formule obtenue en (6-3) est la plus simple possible

$$\sigma_{R'}^{A}(x', x) = {}^{(0,0)}\sigma(x', x) \{ T_{R'}^{A}(x', x) \}_{x'}.$$

Pour $M_{R'}^{A}$, les résultats obtenus sont plus complexes. On peut exprimer les noyaux de diffusion d'ordre quelconque en fonction de ceux des cas scalaire, vectoriel, 1-spinoriel, 2-tensoriel, 2-spinoriel, 1-tensoriel-1-spinoriel (8-4). On peut aussi les exprimer en fonction des trois premiers seulement, la formule (8-7) comportant alors un terme complémentaire d'expression simple (8-9) en fonction du bi-1-tenseur et du bi-1-spineur de transport parallèle.

La section C étudie certains opérateurs (I-1-1) plus généraux, pour lesquels des propriétés analogues peuvent être obtenues, en leur associant une connexion $\bar{C}$ distincte de la connexion riemannienne C.

La section D s'applique à la même recherche dans le cas des dalembertiens et des opérateurs de Klein-Gordon, particulièrement intéressants en Physique mathématique; ce sont en effet ces opérateurs qui apparaissent dans les équations de champ (du second ordre) auxquelles sont astreints les potentiels des particules à spin. Ces potentiels sont représentés par les champs de tenseurs-spineurs suivants :

a) champs p-tensoriels $U_{\mathcal{A}}(\nu = 0)$ qui représentent le potentiel des « particules de spin entier p » : potentiel du méson π (spin 0 : champ scalaire), potentiel du photon, c'est-à-dire potentiel électromagnétique (spin 1 : champ vectoriel), potentiel de gravitation (spin 2 : champ tensoriel symétrique d'ordre 2);

b) champs p-tensoriels-1-spinoriels ($\nu = 1$), qui représentent le potentiel des particules « de spin demi-entier $\left(p + \frac{1}{2}\right)$ » : potentiel du neutrino, ou de l'électron (spin 1/2 : champ 1-spinoriel), etc... ;

c) champ 2-spinoriel qui, en théorie de Petiau-Duffin-Kemmer, représente le potentiel des particules de spin 0 et 1; cette théorie permet de faire l'étude des principales particules de spin entier dans le formalisme spinoriel; elle sera utilisée dans la présente étude pour assurer une liaison entre le cas des particules de spin entier et le cas des particules de spin demi-entier.

Pour la paramétrix $\sigma^{A}_{R'}$, les résultats sont évidemment les mêmes que pour les opérateurs $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$. Mais le coefficient k^{A}_{B} des opérateurs de Klein-Gordon, faisant intervenir la courbure riemannienne de $\mathcal{V}$, complique un peu les résultats concernant le noyau de diffusion $M^{A}_{R'}$.

Les résultats de ces trois sections présentent un intérêt essentiellement pratique, pour la construction de propagateurs d'ordre tensoriel et spinoriel élevé. En outre, comme on le verra dans IV, ils s'adaptent particulièrement aux calculs approchés.

La section E est consacrée à une confrontation de ces résultats avec ceux de la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer. Cette théorie traduit l'équivalence entre l'écriture, pour les potentiels des particules de spin 0 et 1, d'une part d'équations de champ 2-spinorielles, et d'autre part d'équations de champ scalaires et vectorielles; il en résulte des relations entre les propagateurs correspondants. Cette confrontation permet de réduire les éléments primitifs aux seuls éléments du cas 1-spinoriel. Ce résultat, qui doit être rapproché du « *principe de fusion* » *de Louis de Broglie*, présente un intérêt théorique en Physique mathématique.

A. Généralités.

1) Champs de tenseurs-spineurs.

On s'intéresse désormais à des champs de p-tenseurs-ν-spineurs, U_A ou V^B, de variance duale les uns des autres. On représentera le plus souvent les champs U par leurs composantes covariantes U_A, et les champs V par leurs composantes contravariantes V^B. Cependant, cette convention ne correspond pas à la représentation la plus courante en Physique mathématique dans les cas particuliers *b)* $(U^{a}_{\mathcal{A}}, V^{\mathcal{B}}_{b})$ et *c)* (U^{a}_{c}, V^{d}_{b}). On utilisera, éventuellement, pour passer de l'une à l'autre de ces représentations, l'isomorphisme canonique défini en chaque point x entre les p-tenseurs-ν-spineurs de variances différentes : cet isomorphisme se construit au moyen du tenseur métrique $g_{\lambda\nu}(x)$, et de la 2-forme spinorielle fondamentale Γ_{ab} qui traduit l'isomorphisme (obtenu par composition de la conjugaison de charge et de l'adjonction de Dirac) entre l'espace vectoriel S_x des spineurs en x et son dual S^{*}_{x}.

Dans le cas *a)* les champs tensoriels peuvent être représentés par leurs composantes dans le repère *naturel* associé aux coordonnées

$$U_{\mathcal{A}} = U_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}; \qquad V^{\mathcal{A}} = V^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}.$$

Au contraire dans les cas particuliers *b)* et *c)*, ainsi que dans le cas général, la représentation des champs U_A par leurs composantes dans un repère spinoriel exige l'emploi d'un repère *orthonormé*, qui en dehors du cas plat ne peut être qu'un *repère mobile*. Dans ce repère, l'opérateur L s'explicite en

$$\text{(1-1)} \qquad (LU)_B \equiv L^A_B U_A \equiv \eta^{\mu\xi}\partial_\mu\partial_\xi U_A + \zeta^{A\mu}_B(x)\partial_\mu U_A + \varkappa^A_B(x)U_A.$$

Mais la méthode de construction des propagateurs exposée au chapitre I (section B) ne s'applique pas directement dans cette écriture. En effet, d'une part ∂_μ et ∂_ξ désignent des *dérivations pfaffiennes, non commutables*; d'autre part, le théorème de Stokes s'applique avec des dérivées partielles relatives aux coordonnées. Il en résulterait divers termes complémentaires dans les calculs.

Une écriture mixte est donc préférable : on effectue les dérivations par rapport aux coordonnées, et de même le vecteur de composantes p_α est rapporté au repère naturel; les champs sont au contraire représentés par leurs composantes dans le repère mobile (repère orthonormé + repère spinoriel). Cette écriture mixte est en accord avec la convention d'indices gras ou non employée dans les chapitres I et II. En outre, les indices A, B, R', ..., dont le seul objet était le numérotage des inconnues et des équations, prennent désormais un sens précis, mais dans un repère mobile auxiliaire.

Précisons les relations entre les coefficients qui figurent dans (1-1) et $g^{\lambda\nu}(x)$, $h^{A\lambda}_B(x)$, $k^A_B(x)$. Des formules définissant le repère mobile

$$\text{(1-2)} \qquad \theta^\mu = A^\mu_\lambda(x)dx^\lambda, \qquad \partial_\mu h = A^\lambda_\mu(x)\partial_\lambda h,$$

il résulte que

(1-3)
$$\partial_\mu\partial_\xi h = A^\lambda_\mu(x)\partial_\lambda\,\{\,A^\nu_\xi(x)\partial_\nu h\,\} = A^\lambda_\mu(x)A^\nu_\xi(x)\partial_\lambda\partial_\nu h + A^\lambda_\mu(x)\partial_\lambda A^\nu_\xi(x)\partial_\nu h.$$

L'identification des deux écritures de L donne

$$\text{(1-4)} \qquad g^{\lambda\nu}(x) = A^\lambda_\mu(x)A^\nu_\xi(x)\eta^{\mu\xi},$$

$$\text{(1-5)} \qquad h^{A\lambda}_B(x) = A^\lambda_\mu(x)\,\{\,\zeta^{A\mu}_B(x) - \delta^A_B g^{\nu\pi}(x)\partial_\nu A^\mu_\pi(x)\,\},$$

$$\text{(1-6)} \qquad k^A_B(x) = \varkappa^A_B(x).$$

2) Équivalence des repères mobiles auxiliaires.

Le repère auxiliaire servant à la représentation des champs se trouve être largement arbitraire. Dans le cas où $\nu \neq 0$, tout repère spinoriel, et le repère orthonormé sur lequel il se projette canoniquement, est admissible : un tel repère est déterminé à une transformation du groupe Spin (4) près. Si $\nu = 0$, tout repère, orthonormé ou non, est admissible, *y compris le repère naturel* associé aux coordonnées : le repère auxiliaire n'est alors déterminé qu'à une transformation du groupe GL(4) près.

Il convient d'examiner tout d'abord comment se transforment, par un tel changement de repère admissible, les deux éléments $\tilde{\sigma}^{A}_{R'}(x', x)$ et $\bar{M}^{A}_{R'}(x', x)$.

On désigne par $\Gamma^{\tilde{C}}_{\bar{A}}(x)$ et $\Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}}(x)$ les deux matrices, inverses l'une de l'autre, par lesquelles se transforment, dans le changement de repère admissible considéré, les composantes des champs de p-tenseurs-ν-spineurs :

$$(2\text{-}1) \qquad U_{\bar{A}}(x) = \Gamma^{\tilde{C}}_{\bar{A}}(x) U_{\tilde{C}}(x), \qquad\qquad U_{\tilde{C}}(x) = \Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}}(x) U_{\bar{A}}(x).$$

Si $\nu > 0$, désignons par $\Lambda^{\tilde{c}}_{\bar{a}}(x)$ et $\Lambda^{\bar{a}}_{\tilde{c}}(x)$ les deux matrices du groupe Spin (4), inverses l'une de l'autre, qui traduisent le changement de repère spinoriel; désignons par $A^{\tilde{\gamma}}_{\bar{\alpha}}(x)$ et $A^{\bar{\alpha}}_{\tilde{\gamma}}(x)$ leurs projections canoniques respectives sur le groupe L(4). Les matrices Γ sont alors définies par

$$(2\text{-}2)' \qquad \begin{cases} \Gamma^{\tilde{C}}_{\bar{A}}(x) = A^{\tilde{\gamma}_1}_{\bar{\alpha}_1} \times \ldots \times A^{\tilde{\gamma}_p}_{\bar{\alpha}_p} \times \Lambda^{\tilde{c}_1}_{\bar{a}_1} \times \ldots \times \Lambda^{\tilde{c}_\nu}_{\bar{a}_\nu}. \\ \Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}}(x) = A^{\bar{\alpha}_1}_{\tilde{\gamma}_1} \times \ldots \times A^{\bar{\alpha}_p}_{\tilde{\gamma}_p} \times \Lambda^{\bar{a}_1}_{\tilde{c}_1} \times \ldots \times \Lambda^{\bar{a}_\nu}_{\tilde{c}_\nu}. \end{cases}$$

Si $\nu = 0$, désignons par $A^{\tilde{\gamma}}_{\bar{\alpha}}(x)$ et $A^{\bar{\alpha}}_{\tilde{\gamma}}(x)$ les deux matrices du groupe GL(4), inverses l'une de l'autre, qui traduisent le changement de repère auxiliaire (éventuellement le passage du repère naturel à un repère mobile). Les matrices Γ sont alors définies par

$$(2\text{-}2)'' \qquad \Gamma^{\tilde{\mathcal{C}}}_{\bar{\mathcal{A}}} = A^{\tilde{\gamma}_1}_{\bar{\alpha}_1} \times \ldots \times A^{\tilde{\gamma}_p}_{\bar{\alpha}_p}, \qquad\qquad \Gamma^{\bar{\mathcal{A}}}_{\tilde{\mathcal{C}}} = A^{\bar{\alpha}_1}_{\tilde{\gamma}_1} \times \ldots \times A^{\bar{\alpha}_p}_{\tilde{\gamma}_p}.$$

La démonstration exposée ci-dessous vaut aussi bien pour l'un et l'autre cas. Elle est basée sur la relation de *transparence*

$$(2\text{-}3) \qquad \Gamma^{\bar{B}}_{\tilde{D}}(x) L^{\bar{A}}_{\bar{B}} U_{\bar{A}}(x) \equiv L^{\tilde{C}}_{\tilde{D}}\left(\Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}} U_{\bar{A}}\right)(x)$$

et sur le *théorème d'unicité*. Du théorème d'unicité résulte en effet la *covariance* des noyaux élémentaires

$$(2\text{-}4) \qquad E^{\pm \bar{A}}_{\bar{R}'}(x', x) = \Gamma^{\tilde{S}'}_{\bar{R}'}(x') E^{\pm \tilde{C}}_{\tilde{S}'}(x', x) \Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}}(x).$$

Il en est de même, séparément, de leurs termes de front et de leurs termes de diffusion. Il vient ainsi, pour les premiers,

$$(2\text{-}5) \qquad < \overset{(0)}{E}{}^{\pm\bar{A}}_{\bar{R}'}, f_{\bar{A}} > (x') = \Gamma^{\tilde{S}'}_{\bar{R}'}(x') < \overset{(0)}{E}{}^{\pm\tilde{C}}_{\tilde{S}'}, \Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}} f_{\bar{A}} > (x'),$$

quel que soit le champ $(f_{\bar{A}})$, *à support compact*; (2-5) s'explicite en

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{x\in\Gamma^{\pm}_{x'}} \left\{ \sigma^{\bar{A}}_{\bar{R}'}(x', x) - \Gamma^{\tilde{S}'}_{\bar{R}'}(x')\sigma^{\tilde{C}}_{\tilde{S}'}(x', x)\Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}}(x) \right\} f_{\bar{A}}(x)d^3x = 0.$$

On en déduit que

$$(2\text{-}6) \qquad \sigma^{\bar{A}}_{\bar{R}'}(x', x) = \Gamma^{\tilde{S}'}_{\bar{R}'}(x')\sigma^{\tilde{C}}_{\tilde{S}'}(x', x) \left\{ \Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}}(x) \right\}_{x'}.$$

Les relations (2-3) et (2-6) impliquent la relation entre noyaux de diffusion

$$(2\text{-}7) \qquad M^{\bar{A}}_{\bar{R}'}(x', x) = \Gamma^{\tilde{S}'}_{\bar{R}'}(x')M^{\tilde{C}}_{\tilde{S}'}(x', x) \left\{ \Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}}(x) \right\}_{x'}.$$

Soit en effet un champ U quelconque, à support compact. Ses composantes $U_{\bar{A}}$ dans l'un des repères auxiliaires vérifient les équations de Kirchhoff

$$4\pi U_{\bar{R}'}(x') = \iiint_{x\in\Gamma^{\pm}_{x'}} \left\{ M^{\bar{A}}_{\bar{R}'}(x', x)U_{\bar{A}}(x) - \sigma^{\bar{B}}_{\bar{R}'}(x', x)L^{\bar{A}}_{\bar{B}}U_{\bar{A}}(x) \right\} d^3x.$$

Ses composantes $U_{\tilde{C}} = \Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}}U_{\bar{A}}$ dans l'autre repère admissible vérifient également des équations de Kirchhoff

$$4\pi U_{\tilde{S}'}(x') = \iiint_{x\in\Gamma^{\pm}_{x'}} \left\{ M^{\tilde{C}}_{\tilde{S}'}(x', x)U_{\tilde{C}}(x) - \sigma^{\tilde{D}}_{\tilde{S}'}(x', x)L^{\tilde{C}}_{\tilde{D}}U_{\tilde{C}}(x) \right\} d^3x.$$

La comparaison de ces deux systèmes d'équations de Kirchhoff montre, compte tenu de la relation de transparence (2-3), et de la relation (2-6) établie ci-dessus, que

$$(2\text{-}8) \qquad \iiint_{x\in\Gamma^{\pm}_{x'}} \left\{ M^{\bar{A}}_{\bar{R}'}(x', x) - \Gamma^{\tilde{S}'}_{\bar{R}'}(x')M^{\tilde{C}}_{\tilde{S}'}(x', x)\Gamma^{\bar{A}}_{\tilde{C}}(x) \right\} U_{\bar{A}}(x)d^3x = 0$$

pour tout champ U *à support compact.* (2-7) en résulte.

Les relations (2-6) et (2-7) peuvent aussi être établies par un calcul direct basé sur les définitions données au chapitre I (section B) de la paramétrix et du noyau de diffusion. Ce calcul direct établit également la relation

$$(2\text{-}9) \qquad E^{i}_{\bar{R}'}(U) - \Gamma^{\tilde{S}'}_{\bar{R}'}(x')E^{i}_{\tilde{S}'}(U) = 0.$$

Remarque. — Dans cette démonstration, le système de coordonnées locales x^λ a été considéré comme choisi une fois pour toutes. Dans un changement de coordonnées, la paramétrix $\sigma^{A}_{R'}(x', x)$ et le noyau de diffusion $M^{A}_{R'}(x', x)$ ne se transforment pas par des formules tensorielles.

3) Rappels sur le bi-tenseur et le bi-spineur de transport parallèle.

Soit une famille de courbes $C(x')$ passant par x' telle que, quel que soit x dans Ω, il existe une courbe et une seule de la famille joignant x' et x.

Le transport parallèle le long des courbes $C(x')$ définit un isomorphisme entre $T_{x'}$ et T_x, auquel B. S. De Witt et R. W. Brehme [*1*] (1) ont associé un bi-1-tenseur $t^{\alpha}_{\rho'}(x', x)$. En désignant par $v^{\nu}(x)$ le vecteur tangent en x à la courbe $C(x')$ passant par x, et par φ le paramètre correspondant $\left(v^{\nu} = \dfrac{dx^{\nu}}{d\varphi}\right)$, le bi-1-tenseur $t^{\alpha}_{\rho'}(x', x)$ peut être caractérisé analytiquement par

$$(3\text{-}1)\qquad v^{\mu}\nabla_{\mu}t^{\alpha}_{\rho'} = \frac{dt^{\alpha}_{\rho'}}{d\varphi} + v^{\mu}C^{\alpha}{}_{\gamma\mu}t^{\gamma}_{\rho'} = 0\,; \qquad t^{\alpha}_{\rho'} = \delta^{\alpha'}_{\rho'} \text{ pour } \varphi = 0.$$

Son dual $\overset{*}{t}{}^{\sigma'}_{\beta}(x', x)$ satisfait à une condition analogue.

Le transport parallèle le long des courbes $C(x')$ définit de même un isomorphisme entre $S_{x'}$ et S_x auquel on peut associer (E. Combet [*1*]) le bi-1-spineur $\tau^{a}_{r'}(x', x)$. Ce bi-1-spineur peut être caractérisé analytiquement de la même façon, ainsi que son dual $\overset{*}{\tau}{}^{s'}_{b}(x', x)$

$$(3\text{-}1)'\qquad v^{\mu}\nabla_{\mu}\tau^{a}_{r'} = \frac{d\tau^{a}_{r'}}{d\varphi} + C^{a}{}_{m\mu}\tau^{m}_{r'} = 0\,; \qquad \tau^{a}_{r'} = \delta^{a'}_{r'} \text{ pour } \varphi = 0.$$

On désigne par $C^{a}{}_{b\mu}$ les coefficients de la connexion spinorielle canoniquement associée à la connexion riemannienne :

$$(3\text{-}2)\qquad C^{a}{}_{b\mu} = -\frac{1}{4}C^{\varphi}{}_{\psi\mu}(\gamma_{\varphi}\gamma^{\psi})^{a}_{b}.$$

Par produit tensoriel de ces quatre éléments, on peut définir des bi-tenseurs-spineurs de transport parallèle de nature, d'ordre et de variance quelconques, soit $T^{A}_{R'}(x', x)$.

On peut prendre la restriction à $x \in \Gamma_{x'}$ de ces bi-tenseurs-spineurs : le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$ est en effet engendré par les géodésiques isotropes issues de x' qui, d'après les hypothèses faites, peuvent être prises dans Ω comme courbes $C(x')$. Si on prend pour φ le *paramètre canonique* λ, les

(1) Voir aussi A. Lichnerowicz [*1*]. B. S. De Witt et R. W. Brehme prennent pour famille $C(x')$ les géodésiques issues de x'.

composantes du vecteur tangent correspondant s'écrivent, en repère naturel, d'après (I-1-4),

$$v^{\nu}(x) = \frac{d\{x^{\nu}\}_{x'}}{d\lambda} = \{g^{\lambda\nu}(x)\}_{x'}p_{\lambda}, \tag{3-3}$$

ou, en repère mobile orthonormé,

$$v^{\mu}(x) = \{A^{\mu}_{\nu}(x)\}_{x'}v^{\nu}(x) = \eta^{\mu\xi}\{A^{\lambda}_{\xi}(x)\}_{x'}p_{\lambda}. \tag{3-3)'$$

On en déduit les caractérisations analytiques

$$(3\text{-}4)\left\{\begin{aligned} &\frac{d\{t^{\alpha}_{\rho'}\}_{x'}}{d\lambda} = -\eta^{\mu\xi}p_{\lambda}\{C^{\alpha}{}_{\gamma\mu}A^{\lambda}_{\xi}t^{\gamma}_{\rho'}\}_{x'}; \quad \frac{d\{\overset{*}{t}{}^{\sigma'}_{\beta}\}_{x'}}{d\lambda} = \eta^{\mu\xi}p_{\lambda}\{C^{\gamma}{}_{\beta\mu}A^{\lambda}_{\xi}\overset{*}{t}{}^{\sigma'}_{\gamma}\}_{x'},\\ &\frac{d\{\tau^{a}_{r'}\}_{x'}}{d\lambda} = -\eta^{\mu\xi}p_{\lambda}\{C^{a}{}_{m\mu}A^{\lambda}_{\xi}\tau^{m}_{r'}\}_{x'}; \quad \frac{d\{\overset{*}{\tau}{}^{s'}_{b}\}_{x'}}{d\lambda} = \eta^{\mu\xi}p_{\lambda}\{C^{m}{}_{b\mu}A^{\lambda}_{\xi}\overset{*}{\tau}{}^{s'}_{m}\}_{x'}. \end{aligned}\right.$$

$$\frac{d\{{}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}\}_{x'}}{d\lambda} = -\eta^{\mu\xi}p_{\lambda}\left\{A^{\lambda}_{\xi}\left(\sum_{u=1}^{p}\delta^{A^{u}}_{B^{u}}C^{\alpha_u}{}_{\beta_u\mu} + \sum_{w=1}^{\nu}\delta^{A^{w}}_{B^{w}}C^{a_w}{}_{b_w\mu}\right){}^{(p,\nu)}T^{B}_{R'}\right\}_{x'} \tag{3-5}$$

les valeurs pour $\lambda = 0$ étant respectivement $\delta^{\alpha'}_{\rho'}$, $\delta^{\sigma'}_{\beta'}$, $\delta^{a'}_{r'}$, $\delta^{s'}_{b'}$, $\delta^{A'}_{R'}$.

B. L'opérateur $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$.

4) Introduction : décompositions canoniques.

On commence l'étude par le plus simple des opérateurs de la forme (I-1-1), qui s'écrit sous forme covariante

$$L^{A}_{B}U_{A} \equiv \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}U_{B} \equiv \eta^{\mu\xi}\nabla_{\mu}\nabla_{\xi}U_{B}, \tag{4-1}$$

U étant un champ de p-tenseurs-ν-spineurs représenté par ses composantes covariantes U_B(∇_{μ} désigne la dérivation covariante dans la connexion riemannienne et la connexion spinorielle canonique (3-2)).

Désignons par ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$ l'espace vectoriel des p-tenseurs-ν-spineurs covariants en x, obtenu par produit tensoriel de $T^{*}_{x}\,p$ fois et de $S^{*}_{x}\,\nu$ fois. L'étude qui suit repose sur les « décompositions canoniques » des matrices carrées opérant sur ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$. Considérons une famille de matrices opérant sur les divers espaces vectoriels ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$ (p et ν prenant des valeurs quelconques) ; l'intérêt d'une « décomposition » vérifiée par cette famille de matrices est la détermination simple de la matrice de la famille correspondant à l'ordre tensoriel et spinoriel (p, ν) connaissant les matrices correspondant aux premiers ordres. Par exemple, si on désigne par ${}^{(p,\nu)}C^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}\mu}\theta^{\mu}$ la matrice de connexion à l'aide de laquelle se calcule la différentielle absolue (riemannienne) d'un champ de p-tenseurs-ν-spineurs, on sait que (²)

$$(4\text{-}2) \qquad {}^{(p,\nu)}C^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}\mu}\theta^{\mu} = \sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{B}^u}\delta^{ⓐ}_{ⓑ}C^{\alpha_u}{}_{\beta_u\mu}\theta^{\mu} + \sum_{w=1}^{\nu} \delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\delta^{ⓐ^w}_{ⓑ^w}C^{a_w}{}_{b_w\mu}\theta^{\mu}.$$

De même, on aura à étudier les « décompositions canoniques » des matrices carrées opérant de ${}^{(p,\nu)}F^*_x$ dans ${}^{(p,\nu)}F^*_{x'}$, telles que ${}^{(p,\nu)}T^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x)$, ${}^{(p,\nu)}\sigma^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x)$, ${}^{(p,\nu)}M^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x)$.

Avant de donner une définition précise des « décompositions canoniques », il convient de faire une *nouvelle convention* destinée à simplifier l'écriture. A titre *exceptionnel*, dans ce chapitre et le chapitre IV, on utilisera la *notation* suivante : un indice romain tel que a, b, c, d, r′, s′ remplace indistinctement l'indice grec α, β, γ, δ, ρ', σ' (se rapportant à un repère affine) ou l'indice italique a, b, c, d, r', s' (se rapportant à un repère spinoriel), respectivement. Seuls les indices romains h, i, j, k continuent, selon les conventions générales, à se rapporter aux repères affines, en ne prenant que les valeurs 1, 2, 3.

On désignera ainsi par $C^{\mathrm{a}}{}_{\mathrm{b}\mu}$, soit les coefficients $C^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ de la connexion riemannienne, soit les coefficients $C^{a}{}_{b\mu}$ de la connexion spinorielle canonique; $t^{\mathrm{a}}_{\mathrm{r}'}$ désignera, soit le bi-1-tenseur $t^{\alpha}_{\rho'}$, soit le bi-1-spineur $\tau^{a}_{r'}$, etc... On notera (³)

$$\sum_{u=1}^{p+\nu} {}^{(p+\nu-1)}R^{\mathrm{A}^u(1)}_{\mathrm{B}^u}S^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{b}_u} = \sum_{u=1}^{p} {}^{(p-1,\nu)}R^{\mathcal{A}^u ⓐ\,(1,0)}_{\mathcal{B}^u ⓑ}S^{\alpha_u}_{\beta_u} + \sum_{w=1}^{\nu} {}^{(p,\nu-1)}R^{\mathcal{A}ⓐ^w(0,1)}_{\mathcal{B}ⓑ^w}S^{a_w}_{b_w},$$

$$\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} {}^{(p+\nu-2)}R^{\mathrm{A}^{uv}(2)}_{\mathrm{B}^{uv}}S^{\mathrm{a}_u\mathrm{a}_v}_{\mathrm{b}_u\mathrm{b}_v} = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p} {}^{(p-2,\nu)}R^{\mathcal{A}^{uv}ⓐ\,(2,0)}_{\mathcal{B}^{uv}ⓑ}S^{\alpha_u\alpha_v}_{\beta_u\beta_v}$$

$$+ \sum_{u=1}^{p}\sum_{w=1}^{\nu} {}^{(p-1,\nu-1)}R^{\mathcal{A}^u ⓐ^w(1,1)}_{\mathcal{B}^u ⓑ^w}S^{\alpha_u a_w}_{\beta_u b_w} + \sum_{1\leqslant w<x\leqslant\nu} {}^{(p,\nu-2)}R^{\mathcal{A}ⓐ^{wx}(0,2)}_{\mathcal{B}ⓑ^{wx}}S^{a_w a_x}_{b_w b_x},$$

etc...

(²) Pour l'explication des notations, se reporter à la liste des conventions et notations au début de ce mémoire.

(³) De même que ci-dessus, se reporter à la liste des conventions et notations.

A titre d'exemple, cette convention permet l'écriture plus simple de (4-2)

$$(4\text{-}2)' \qquad {}^{(p,\nu)}C^{A}{}_{B\mu}\theta^{\mu} = \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{B^u} C^{a_u}{}_{b_u\mu}\theta^{\mu}.$$

Soit ${}^{(p,\nu)}H^{A}_{B}(x)$ une famille (quand p et ν prennent toute valeur entière positive ou nulle) de matrices, opérant chacune sur ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$. On dira qu'elle satisfait à une « décomposition canonique » d'ordre 0, 1, 2, 3, etc..., si, respectivement,

$$(4\text{-}3) \quad \left\{ \begin{aligned} {}^{(p,\nu)}H^{A}_{B} &= \delta^{A}_{B}{}^{(0,0)}H, \\ {}^{(p,\nu)}H^{A}_{B} &= \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{B^u}{}^{(1)}H^{a_u}_{b_u} - (p+\nu-1)\delta^{A}_{B}{}^{(0,0)}H, \\ {}^{(p,\nu)}H^{A}_{B} &= \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \delta^{A^{uv}}_{B^{uv}}{}^{(2)}H^{a_u a_v}_{b_u b_v} - (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^u}_{B^u}{}^{(1)}H^{a_u}_{b_u} \\ &\qquad + \frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2}\delta^{A}_{B}{}^{(0,0)}H. \\ {}^{(p,\nu)}H^{A}_{B} &= \frac{1}{0\,!}\sum_{1\leqslant u<v<w\leqslant p+\nu} \delta^{A^{uvw}}_{B^{uvw}}{}^{(3)}H^{a_u a_v a_w}_{b_u b_v b_w} \\ &\qquad - \frac{(p+\nu-3)}{1\,!}\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \delta^{A^{uv}}_{B^{uv}}{}^{(2)}H^{a_u a_v}_{b_u b_v} \\ &\qquad + \frac{(p+\nu-3)(p+\nu-2)}{2\,!}\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^u}_{B^u}{}^{(1)}H^{a_u}_{b_u} \\ &\qquad - \frac{(p+\nu-3)(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{3\,!}\delta^{A}_{B}{}^{(0,0)}H, \end{aligned} \right.$$

etc...

Si des matrices ${}^{(p,\nu)}H^{A}_{B}(x)$ vérifient l'une de ces formules, elles vérifient *a fortiori* toutes les formules d'ordre supérieur. En particulier, les matrices-identités de chacun des ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$, ou toute famille de matrices proportionnelles, vérifient toutes ces décompositions.

Inversement, si les matrices de la famille ${}^{(p,\nu)}H^{A}_{B}(x)$ sont « m-décomposables » (c'est-à-dire vérifient la formule (4-3) de décomposition canonique d'ordre m), la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient également (m-1)-décomposables est que toutes les matrices ${}^{(p',\nu')}H^{A}_{B}(x)$ d'ordre $p' + \nu' = m$ soient (m-1)-décomposables.

Considérons de même une famille de matrices ${}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}(x', x)$, chacune opérant de ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$ dans ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x'}$. On dira qu'elle vérifie une « décomposition canonique » d'ordre 0, 1, 2, 3, etc..., si elle vérifie des relations analogues à (4-3), mais où les matrices-identités δ^{A}_{B} sont partout remplacées par les bi-tenseurs-spineurs de transport parallèle correspondants, c'est-à-dire si, respectivement,

$$
\left\{
\begin{aligned}
{}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}(x', x) &= {}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}(x', x)\,{}^{(0,0)}S(x', x),\\
{}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}(x', x) &= \sum_{u=1}^{p+\nu} {}^{(p+\nu-1)}T^{A\,u}_{R'\,u}(x', x)\,{}^{(1)}S^{a_u}_{r'_u}(x', x)\\
&\qquad - (p+\nu-1)\,{}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}(x', x)\,{}^{(0,0)}S(x', x),\\
{}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'} &= \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p+\nu} {}^{(p+\nu-2)}T^{A\,uv}_{R'\,uv}\,{}^{(2)}S^{a_u a_v}_{r'_u r'_v}\\
&\qquad - (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu} {}^{(p+\nu-1)}T^{A\,u}_{R'\,u}\,{}^{(1)}S^{a_u}_{r'_u}\\
&\qquad + \frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2}\,{}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}\,{}^{(0,0)}S,\\
{}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'} &= \frac{1}{0\,!}\sum_{1 \leqslant u < v < w \leqslant p+\nu} {}^{(p+\nu-3)}T^{A\,uvw}_{R'\,uvw}\,{}^{(3)}S^{a_u a_v a_w}_{r'_u r'_v r'_w}\\
&\qquad - \frac{(p+\nu-3)}{1\,!}\sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p+\nu} {}^{(p+\nu-2)}T^{A\,uv}_{R'\,uv}\,{}^{(2)}S^{a_u a_v}_{r'_u r'_v}\\
&\qquad + \frac{(p+\nu-3)(p+\nu-2)}{2\,!}\sum_{u=1}^{p+\nu} {}^{(p+\nu-1)}T^{A\,u}_{R'\,u}\,{}^{(1)}S^{a_u}_{r'_u}\\
&\qquad - \frac{(p+\nu-3)(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{3\,!}\,{}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}\,{}^{(0,0)}S,\\
&\text{etc...}
\end{aligned}
\right.
\tag{4-4}
$$

Si les matrices ${}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}(x', x)$ ne sont définies que pour $x \in \Gamma_{x'}$, ce sont évidemment les restrictions $\{ T^{A}_{R'}(x', x) \}_{x'}$ de $T^{A}_{R'}(x', x)$ à $x \in \Gamma_{x'}$ qui figurent dans (4-4).

Les décompositions canoniques (4-4) possèdent les propriétés énoncées ci-dessus des décompositions canoniques (4-3). D'autre part, une dérivation D en x conserve la propriété de vérifier une décomposition canonique, mais en augmentant (en général) d'une unité l'ordre minimal de décomposition (pour les décompositions (4-3), l'ordre minimal n'est évidemment pas modifié par D). Soit en effet une famille de matrices ${}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}(x', x)$, m-décomposable; écrivons l'expression de $D^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}$, pour p et ν quelconques, déduite par dérivation de la décomposition (4-4) d'ordre m; écrivons aussi cette expression pour chacun des couples (p', ν') tels que $p' + \nu' = m + 1$. L'élimination des $Dt^{a_u}_{r'_u}$ entre ces diverses expressions conduit à la décomposition canonique d'ordre $(m + 1)$ de $D^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}$ (vérification aisée pour $m = 0$ et 1, seuls cas utiles ici). La décomposition canonique ainsi obtenue est bien la décomposition d'ordre minimal de la famille des matrices $D^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}$, à moins que $Dt^{a}_{r'} \equiv 0$, comme le prouve l'écriture des $D^{(p',\nu')}S^{A}_{R'}$ pour $p' + \nu' = m + 1$: on a, par exemple, pour des ${}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}$ 0-décomposables,

$$D^{(1)}S^{a}_{r'} - t^{a}_{r'}D^{(0,0)}S = {}^{(0,0)}SDt^{a}_{r'}\ ; \tag{4-5}$$

ou, pour des ${}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}$ 1-décomposables, mais non 0-décomposables,

$$\begin{aligned} &D^{(2)}S^{a_1a_2}_{r'_1r'_2} - t^{a_2}_{r'_2}D^{(1)}S^{a_1}_{r'_1} - t^{a_1}_{r'_1}D^{(1)}S^{a_2}_{r'_2} + t^{a_1}_{r'_1}t^{a_2}_{r'_2}D^{(0,0)}S \\ &\qquad = ({}^{(1)}S^{a_1}_{r'_1} - t^{a_1}_{r'_1}{}^{(0,0)}S)Dt^{a_2}_{r'_2} + ({}^{(1)}S^{a_2}_{r'_2} - t^{a_2}_{r'_2}{}^{(0,0)}S)Dt^{a_1}_{r'_1}\ ; \end{aligned} \tag{4-6}$$

etc...

A côté des décompositions canoniques (4-3) ou (4-4), linéaires homogènes par rapport aux matrices $H^{A}_{B}(x)$ ou $S^{A}_{R'}(x', x)$ des divers ordres (p, ν), on utilisera également des « décompositions avec reste » : lorsqu'une famille de matrices ${}^{(p,\nu)}H^{A}_{B}(x)$ opérant sur ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$, ou ${}^{(p,\nu)}S^{A}_{R'}(x', x)$ opérant de ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$ dans ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x'}$, n'est pas m-décomposable (soit qu'elle ne vérifie aucune décomposition canonique, soit que son ordre minimal de décomposition soit supérieur), il peut être cependant intéressant de mettre en évidence le *reste* de la décomposition canonique d'ordre m. Par exemple, (4-5) et (4-6) sont des décompositions avec reste, d'ordres respectifs 0 et 1.

Les coefficients des opérateurs $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$ sur les p-tenseurs-ν-spineurs sont des matrices $g^{\lambda\nu}(x)\delta^{A}_{B}$, ${}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B}(x)$, ${}^{(p,\nu)}k^{A}_{B}(x)$ opérant sur ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$. Des décompositions, sans ou avec reste, vérifiées par ces familles de matrices, découlent les principaux résultats de cette section.

Grâce aux propriétés des coefficients ${}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B}(x)$, on établira la relation (6-3) vérifiée par la paramétrix

$${}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}(x', x) = \{{}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}(x', x)\}_{x'}{}^{(0,0)}\sigma(x', x).$$

Cette relation signifie que la famille de matrices ${}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}(x', x)$ opérant de ${}^{(p,\nu)}F^*_x$ dans ${}^{(p,\nu)}F^*_{x'}$, pour $x \in \Gamma_{x'}$, est *0-décomposable*.

La relation (6-3) donne à la paramétrix une forme covariante, à partir de la paramétrix du cas scalaire. D'où l'intérêt d'une expression explicite de ${}^{(0,0)}\sigma(x', x)$, objet du § 7.

Le § 8 est consacré à l'étude des décompositions vérifiées par la famille de matrices ${}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'}(x', x)$ opérant de ${}^{(p,\nu)}F^*_x$ dans ${}^{(p,\nu)}F^*_{x'}$. En s'appuyant sur les propriétés des coefficients des opérateurs $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$ sur les p-tenseurs-ν-spineurs, on montrera d'abord en (8-4) que le noyau de diffusion est 2-décomposable; d'où l'expression directe du noyau de diffusion d'ordre (p, ν) quelconque, connaissant ceux des cas scalaire, vectoriel, 1-spinoriel, 2-tensoriel, 2-spinoriel, 1-tensoriel-1-spinoriel. On étudiera enfin le reste de la décomposition d'ordre 1 de ${}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'}$, et on le mettra sous une forme simple; cette décomposition avec reste permet d'exprimer le noyau de diffusion d'ordre (p, ν) quelconque en fonction des trois premiers éléments primitifs seulement, et d'un terme complémentaire simple.

5) Coefficients de l'opérateur $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$.

Il faut, pour les calculer, expliciter la double dérivation covariante au moyen des coefficients $C^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ de la connexion riemannienne dans le repère mobile orthonormé (coefficients de rotation de Ricci), et des coefficients $C^{a}{}_{b\mu}$ de la connexion spinorielle canonique (3-2). On met ainsi (4-1) successivement sous la forme (1-1), puis (I-1-1), afin de calculer les coefficients ${}^{(p,\nu)}k^{A}_{B}(x)$, ${}^{(p,\nu)}\zeta^{A\mu}_{B}(x)$, ${}^{(p,\nu)}h^{\lambda A}_{B}(x)$ correspondants

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\xi}\nabla_{\mu}\nabla_{\xi}U_{B} &= \eta^{\mu\xi}\partial_{\mu}\partial_{\xi}U_{B} + {}^{(p,\nu)}\zeta^{A\mu}_{B}(x)\partial_{\mu}U_{A} + {}^{(p,\nu)}k^{A}_{B}(x)U_{A}\\ &= g^{\lambda\nu}(x)\partial_{\lambda}\partial_{\nu}U_{B} + {}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B}(x)\partial_{\lambda}U_{A} + {}^{(p,\nu)}k^{A}_{B}(x)U_{A}.\end{aligned}$$

Il vient, dans un premier temps,

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\xi}\nabla_{\mu}\nabla_{\xi}U_{\beta_1\ldots\beta_p,b_1\ldots b_\nu} &= \eta^{\mu\xi}\{\partial_{\mu}(\nabla_{\xi}U_{\beta_1\ldots\beta_p,b_1\ldots b_\nu}) - C^{\lambda}{}_{\xi\mu}\nabla_{\lambda}U_{\beta_1\ldots\beta_p,b_1\ldots b_\nu}\\ &- \sum_{u=1}^{p}C^{\alpha_u}{}_{\beta_u\mu}\nabla_{\xi}U_{\beta_1\ldots\alpha_u\ldots\beta_p,b_1\ldots b_\nu} - \sum_{w=1}^{\nu}C^{a_w}{}_{b_w\mu}\nabla_{\xi}U_{\beta_1\ldots\beta_p,b_1\ldots a_w\ldots b_\nu}\}.\end{aligned}$$

Après explicitation complète, le regroupement des termes semblables donne les coefficients de (4-1)

(5-1)
$$
\begin{aligned}
{}^{(p,\nu)}k^{A}_{B}(x) \equiv \eta^{\mu\xi}\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^u}_{B^u}\left(-\partial_\mu C^{a_u}{}_{b_u\xi} + C^{\lambda}{}_{\xi\mu}C^{a_u}{}_{b_u\lambda} + C^{a_u}{}_{d\xi}C^{d}{}_{b_u\mu}\right) \\
+ 2\eta^{\mu\xi}\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu}\delta^{A^{uv}}_{B^{uv}}C^{a_u}{}_{b_u\mu}C^{a_v}{}_{b_v\xi}.
\end{aligned}
$$

(5-2)
$$
{}^{(p,\nu)}\zeta^{A\mu}_{B}(x) \equiv -\eta^{\nu\xi}C^{\mu}{}_{\nu\xi}\delta^{A}_{B} - 2\eta^{\mu\xi}\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^u}_{B^u}C^{a_u}{}_{b_u\xi}.
$$

Grâce à (1-5), on déduit enfin de (5-2)

$$
{}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B}(x) \equiv -\delta^{A}_{B}g^{\nu\pi}\left(A^{\lambda}_{\mu}A^{\chi}_{\nu}A^{\xi}_{\pi}C^{\mu}{}_{\chi\xi} + A^{\lambda}_{\mu}\partial_{\nu}A^{\mu}_{\pi}\right) - 2A^{\lambda}_{\mu}\eta^{\mu\xi}\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^u}_{B^u}C^{a_u}{}_{b_u\xi}.
$$

On reconnaît dans le premier terme les transformés par changement de repère des coefficients de la connexion : on trouve ainsi les coefficients $C^{\lambda}{}_{\nu\pi}$ de la connexion riemannienne en repère naturel (symboles de Christoffel de 2e espèce)

(5-3)
$$
{}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B}(x) \equiv -\delta^{A}_{B}g^{\nu\pi}C^{\lambda}{}_{\nu\pi} - 2A^{\lambda}_{\mu}\eta^{\mu\xi}\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^u}_{B^u}C^{a_u}{}_{b_u\xi}.
$$

6) Proportionnalité de la paramétrix au bi-tenseur-spineur de transport parallèle.

La paramétrix ${}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}(x', x)$ relative à l'opérateur (4-1) sur les p-tenseurs-ν-spineurs vérifie, le long de chaque bicaractéristique issue de x', le système différentiel (I-8-8)

$$
2\frac{d\,{}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}}{d\lambda} = p_{\lambda}\left\{{}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B}\right\}_{x'}{}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'} - {}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}\left\{p_0\partial_i\left(\left\{g^{i\lambda}\right\}_{x'}\frac{p_\lambda}{p_0}\right) + p_\lambda\partial_i\left\{g^{i\lambda}\right\}_{x'}\right\}.
$$

Or le coefficient ${}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B}(x)$ défini par (5-3) vérifie la formule de décomposition d'ordre 0, avec reste

(6-1)
$$
{}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B} = \delta^{A}_{B}\,{}^{(0,0)}h^{\lambda} - 2A^{\lambda}_{\mu}\eta^{\mu\xi}\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^u}_{B^u}C^{a_u}{}_{b_u\xi},
$$

qui permet d'écrire (I-8-8) sous la forme

(6-2)
$$
2\frac{d\,{}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}}{d\lambda} = -2p_{\lambda}\eta^{\mu\xi}\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^u}_{B^u}\left\{A^{\lambda}_{\mu}C^{a_u}{}_{b_u\xi}\right\}_{x'}{}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'} + 2\frac{{}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}}{{}^{(0,0)}\sigma}\frac{d\,{}^{(0,0)}\sigma}{d\lambda}.
$$

Les quantités $\dfrac{{}^{(p,\nu)}\sigma_{R'}^{A}(x', x)}{{}^{(0,0)}\sigma(x', x)}$ vérifient donc le même système différentiel (3-5) que $\{{}^{(p,\nu)}T_{R'}^{A}(x', x)\}_{x'}$; leur limite pour $\lambda = 0$ ($x = x'$) est

$$\lim_{\lambda=0} \frac{{}^{(p,\nu)}\sigma_{R'}^{A}(x', x)}{{}^{(0,0)}\sigma(x', x)} = \lim_{\lambda=0} \frac{\varpi(x', x)\,{}^{(p,\nu)}\omega_{R'}^{A}(x', x)}{\varpi(x', x)\,{}^{(0,0)}\omega(x', x)} = \delta_{R'}^{A'}.$$

Il en résulte l'égalité

$$(6\text{-}3) \qquad {}^{(p,\nu)}\sigma_{R'}^{A}(x', x) = \{{}^{(p,\nu)}T_{R'}^{A}(x', x)\}_{x'}\,{}^{(0,0)}\sigma(x', x).$$

7) **Étude de la paramétrix dans le cas scalaire.**

Dans le cas scalaire, l'équation différentielle ${}^{(0,0)}N = 0$ s'écrit, compte tenu de (5-3)

$$(7\text{-}1) \qquad \frac{2}{{}^{(0,0)}\sigma} \frac{d^{(0,0)}\sigma}{d\lambda} = -\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\lambda} + \frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{d\lambda} - p_\lambda\left(\left\{g^{\nu\pi}C^{\lambda}{}_{\nu\pi}\right\}_{x'} + \partial_i\left\{g^{i\lambda}\right\}_{x'}\right).$$

Or

$$g^{\nu\pi}C^{\lambda}{}_{\nu\pi} = g^{\nu\pi}g^{\lambda\sigma}\{\sigma, \nu\pi\} = -\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\frac{\partial_\sigma g}{g}\partial_\nu g^{\nu\lambda},$$

d'où

$$(7\text{-}2) \qquad \frac{2}{{}^{(0,0)}\sigma}\frac{d^{(0,0)}\sigma}{d\lambda} = -\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\lambda} + \frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{d\lambda} + \frac{1}{2\{g\}_{x'}}\frac{d\{g\}_{x'}}{d\lambda} + p_\lambda\frac{p_\nu}{p_0}\{\partial_0 g^{\nu\lambda}\}_{x'}.$$

Puisque, en vertu du système bicaractéristique (I-1-4)

$$(7\text{-}3) \qquad \frac{dp_\pi}{d\lambda} = -\frac{1}{2}p_\lambda p_\nu\{\partial_\pi g^{\nu\lambda}\}_{x'},$$

l'équation (7-2) entraîne que

$$(7\text{-}4) \qquad {}^{(0,0)}\sigma(x', x) \times \frac{\sqrt{|\Delta p_0|}}{\sqrt[4]{-\{g(x)\}_{x'}}} = \text{Cte}.$$

Or, d'après (I-8-14) et (I-9-3),

$$(7\text{-}5) \qquad \lim_{x=x'} \sqrt{\left|\frac{\Delta}{p_0}\right|}\,{}^{(0,0)}\sigma(x', x) = \operatorname{sgn}(\lambda)\,\frac{\sqrt[4]{-g(x')}}{p_{0'}^{(0)}}\sqrt{|\sin\theta'|}.$$

On en déduit la valeur (sgn (λ) $\sqrt{|\sin\theta'|}$) de la constante de (7-4). D'où le résultat [4]

$$(7\text{-}6)\qquad {}^{(0,0)}\sigma(x', x) = \frac{|\lambda|}{\lambda}\sqrt{\left|\frac{\sin\theta'}{\Delta p_0}\right|}\sqrt[4]{-\{g(x)\}_{x'}} = \frac{\sqrt[4]{-\{g(x)\}_{x'}}}{\lambda\sqrt{-\mathrm{D}p_0}}.$$

8) Décompositions du noyau de diffusion.

On rappelle que le noyau de diffusion est défini, pour $x \in \Gamma_{x'}$, par (I-8-5)

$$\mathrm{M}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = \partial_i\partial_k(\{g^{ik}\}_{x'}\sigma^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}) - \partial_i(\{h^{\mathrm{A}i}_{\mathrm{B}}\}_{x'}\sigma^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}'}) + \{k^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\}_{x'}\sigma^{\mathrm{B}}_{\mathrm{R}'}.$$

Il résulte de l'expression (5-3), ou (6-1), des coefficients ${}^{(p,\nu)}h^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}}$ qu'ils sont 1-décomposables. En effet, l'élimination des termes $(-\,2\mathrm{A}^{\lambda}_{\mu}\eta^{\mu\xi}\mathrm{C}^{\mathrm{a}_u}{}_{\mathrm{b}_u\xi})$ entre les expressions (6-1) de ${}^{(p,\nu)}h^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}}$ et de ${}^{(1)}h^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{b}_u}$,

$$\left\{\begin{aligned} {}^{(p,\nu)}h^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}} &= \delta^{\mathrm{A}(0,0)}_{\mathrm{B}}h^{\lambda} + \sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{B}^u}\left(-\,2\mathrm{A}^{\lambda}_{\mu}\eta^{\mu\xi}\mathrm{C}^{\mathrm{a}_u}{}_{\mathrm{b}_u\xi}\right)\\ {}^{(1)}h^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{b}_u} &= \delta^{\mathrm{a}u(0,0)}_{\mathrm{b}_u}h^{\lambda} - 2\mathrm{A}^{\lambda}_{\mu}\eta^{\mu\xi}\mathrm{C}^{\mathrm{a}_u}{}_{\mathrm{b}_u\xi}\end{aligned}\right.$$

donne la décomposition canonique d'ordre 1

$$(8\text{-}1)\qquad {}^{(p,\nu)}h^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}} = \sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{B}^u}{}^{(1)}h^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{b}_u} - (p+\nu-1)\delta^{\mathrm{A}(0,0)}_{\mathrm{B}}h^{\lambda}.$$

D'après (6-1), ces coefficients ne sont pas 0-décomposables.

Considérons de même l'expression (5-1) de ${}^{(p,\nu)}k^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$. On en déduit les expressions de ce coefficient pour $0 \leqslant p+\nu \leqslant 2$: ${}^{(2)}k^{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2}_{\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2}$, ${}^{(1)}k^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}}$, ${}^{(0,0)}k = 0$. L'élimination, entre ces expressions, des coefficients de la connexion, conduit à la décomposition canonique (4-3) d'ordre 2

$$(8\text{-}2)\qquad {}^{(p,\nu)}k^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^{uv}(2)}_{\mathrm{B}^{uv}}k^{\mathrm{a}_u\mathrm{a}_v}_{\mathrm{b}_u\mathrm{b}_v} - (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^u(1)}_{\mathrm{B}^u}k^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{b}_u}.$$

---

(4) Il aurait été souhaitable de savoir exprimer ${}^{(0,0)}\sigma$ en fonction d'invariants différentiels liés à la géométrie de l'espace-temps; mais, pour les surfaces isotropes, l'étude de tels invariants reste un problème ouvert. A défaut, cette relation, bien que peu maniable, peut rendre quelques services.

Mais ces coefficients ne sont pas 1-décomposables, car

$$(8\text{-}3)\qquad {}^{(2)}k^{a_1a_2}_{b_1b_2} - \delta^{a_2}_{b_2}{}^{(1)}k^{a_1}_{b_1} - \delta^{a_1}_{b_1}{}^{(1)}k^{a_2}_{b_2} = 2\eta^{\mu\xi}C^{a_1}{}_{b_1\mu}C^{a_2}{}_{b_2\xi}.$$

Quant aux coefficients des dérivées secondes, ils sont évidemment 0-décomposables, puisque égaux à

$$g^{\lambda\nu}\delta^{A}_{B}.$$

En vertu de (6-3), la multiplication par la paramétrix ${}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'}(x', x)$ des coefficients des opérateurs (4-1) donne des matrices, opérant de ${}^{(p,\nu)}F^*_x$ dans ${}_{(p,\nu)}F^*_{x'}$, satisfaisant à des décompositions canoniques (4-4) de même ordre : les expressions

$$\{ g^{\lambda\nu} \}_{x'}{}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}, \qquad \{ {}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B} \}_{x'}{}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'}, \qquad \{ {}^{(p,\nu)}k^{A}_{B} \}_{x'}{}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'}$$

sont, respectivement, 0-, 1- et 2-décomposables. Il résulte des propriétés énoncées au § 4 que chacun des trois termes de ${}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'}$ est 2-décomposable

$$(8\text{-}4)\qquad {}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'} = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \{ {}^{(p+\nu-2)}T^{Auv}_{R'uv} \}_{x'}{}^{(2)}M^{a_ua_v}_{r'_ur'_v} - (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu} \{ {}^{(p+\nu-1)}T^{Au}_{R'u} \}_{x'}{}^{(1)}M^{a_u}_{r'_u} + \frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2}\{ {}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'} \}_{x'}{}^{(0,0)}M.$$

Mais les ${}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'}$ ne sont pas 1-décomposables, comme le montre l'étude de ${}^{(2)}M^{a_1a_2}_{r'_1r'_2}$. Posons, en effet

$$(8\text{-}5)\qquad {}^{(p,\nu)}\Sigma^{Ai}_{R'} = \partial_k\left(\{ g^{ik} \}_{x'}{}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}\right) - \{ {}^{(p,\nu)}h^{Ai}_{B} \}_{x'}{}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'}.$$

Ainsi

$${}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'} = \partial_i{}^{(p,\nu)}\Sigma^{Ai}_{R'} + \{ {}^{(p,\nu)}k^{A}_{B} \}_{x'}{}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'}.$$

Il résulte de (4-5) et (6-1) que

$$(8\text{-}6)\qquad {}^{(1)}\Sigma^{ai}_{r'} - \{ t^{a}_{r'} \}_{x'}{}^{(0,0)}\Sigma^{i} = {}^{(0,0)}\sigma\left(\{ g^{ik} \}_{x'}\partial_k \{ t^{a}_{r'} \}_{x'} + 2\eta^{\mu\xi}\{ A^{i}_{\mu}C^{a}{}_{b\xi}t^{b}_{r'} \}_{x'}\right).$$

Les relations (4-6) et (8-6) d'une part, (8-3) d'autre part, font donc apparaître un *reste* dans la décomposition (4-4) d'ordre 1 de ${}^{(2)}M^{a_1a_2}_{r'_1r'_2}$

$$(8\text{-}7)\qquad {}^{(2)}M^{a_1a_2}_{r'_1r'_2} - \{ t^{a_2}_{r'_2} \}_{x'}{}^{(1)}M^{a_1}_{r'_1} - \{ t^{a_1}_{r'_1} \}_{x'}{}^{(1)}M^{a_2}_{r'_2} + \{ t^{a_1}_{r'_1}t^{a_2}_{r'_2} \}_{x'}{}^{(0,0)}M = 2{}^{(0,0)}\sigma Q\left(\{ t^{a_1}_{r'_1} \}_{x'}, \{ t^{a_2}_{r'_2} \}_{x'}\right)$$

où l'on désigne par Q l'opérateur

$$(8\text{-}8)\quad Q\left(\left\{ t^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'}, \left\{ t^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}\right) = \left\{ g^{ik} \right\}_{x'} \partial_i \left\{ t^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'} \partial_k \left\{ t^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}$$
$$+ \eta^{\mu\xi}\Big(\left\{ A^i_\mu C^{a_1}{}_{b_1\xi} t^{b_1}_{r'_1} \right\}_{x'} \partial_i \left\{ t^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}$$
$$+ \left\{ A^k_\mu C^{a_2}{}_{b_2\xi} t^{b_2}_{r'_2} \right\}_{x'} \partial_k \left\{ t^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'} + \left\{ C^{a_1}{}_{b_1\mu} t^{b_1}_{r'_1} C^{a_2}{}_{b_2\xi} t^{b_2}_{r'_2} \right\}_{x'}\Big).$$

Des calculs sur $\Gamma_{x'}$, basés sur la caractérisation (3-4) de $\{ t^{\alpha}_{\rho'} \}_{x'}$ et $\{ \tau^{a}_{r'} \}_{x'}$, et sur l'isotropie du vecteur p_α, permettent de réduire l'opérateur Q à la forme condensée

$$(8\text{-}9)\qquad Q\left(\left\{ t^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'}, \left\{ t^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}\right) = \left\{ \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu t^{a_1}_{r'_1} \nabla_\xi t^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}.$$

On établit également une seconde expression qui peut être plus maniable pour certains calculs pratiques sur le conoïde caractéristique

$$(8\text{-}10)\quad Q\left(\left\{ t^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'}, \left\{ t^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}\right) = \{ g^{ik} \}_{x'}\left(\{ A^{\mu}_{i} \}_{x'} - \frac{p_i}{p_0}\{ A^{\mu}_{0} \}_{x'}\right)$$
$$\left(\{ A^{\xi}_{k} \}_{x'} - \frac{p_k}{p_0}\{ A^{\xi}_{0} \}_{x'}\right)\left\{ \nabla_\mu t^{a_1}_{r'_1} \nabla_\xi t^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}.$$

Remarque. — On pourrait de même former la décomposition d'ordre 0 avec reste

$${}^{(1)}M^{a}_{r'} - \{ t^{a}_{r'} \}_{x'}\,{}^{(0,0)}M = \dots ;$$

mais elle ne peut être utilisable pratiquement que si son reste peut être réduit à une expression simple, ce qui ne semble pas être le cas.

C. Extension à certains opérateurs plus généraux.

9) Étude de la paramétrix.

L'opérateur (I-1-1) le plus général sur les p-tenseurs-ν-spineurs, peut s'écrire sous forme covariante

$$(9\text{-}1)\qquad L^{A}_{B}U_{A} \equiv \eta^{\mu\xi}\nabla_\mu\nabla_\xi U_{B} + b^{A\mu}_{B}(x)\nabla_\mu U_{A} + l^{A}_{B}(x)U_{A}.$$

En chaque point x, $b^{A\mu}_{B}$ est une matrice de vecteurs contravariants et l^{A}_{B} une matrice à coefficients scalaires, opérant sur ${}^{(p,\nu)}F^{*}_{x}$.

En explicitant la dérivation covariante, on obtient les contributions $h''^{A\lambda}_{B}$ et k''^{A}_{B} de $(b^{A\mu}_{B}\nabla_{\mu})$ aux coefficients h^{A}_{B} et $k^{A\lambda}_{B}$ de L

(9-2)
$$\begin{cases} {}^{(p,\nu)}h''^{A\lambda}_{B}(x) = A^{\lambda}_{\mu}(x)\,{}^{(p,\nu)}b^{A\mu}_{B}(x) \\ {}^{(p,\nu)}k''^{A}_{B}(x) = -\,{}^{(p,\nu)}b^{C\mu}_{B}(x)\displaystyle\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^u}_{C^u}C^{a_u}{}_{c_u\mu}(x). \end{cases}$$

Si on désigne désormais par $g^{\lambda\nu}$, $h''^{A\lambda}_{B}$ et k'^{A}_{B} les coefficients de l'opérateur $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$, il vient pour ceux de l'opérateur (9-1)

(9-3)
$$\begin{cases} {}^{(p,\nu)}h^{A\lambda}_{B}(x) = {}^{(p,\nu)}h'^{A\lambda}_{B}(x) + {}^{(p,\nu)}h''^{A\lambda}_{B}(x) \\ {}^{(p,\nu)}k^{A}_{B}(x) = {}^{(p,\nu)}k'^{A}_{B}(x) + {}^{(p,\nu)}k''^{A}_{B}(x) + {}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}(x). \end{cases}$$

Il est clair que l^{A}_{B} n'intervient pas dans le calcul de la paramétrix, mais uniquement dans le calcul du noyau de diffusion. Pour cette raison, l'étude des transformations qu'il apporte aux résultats obtenus à la section B sera reportée à la fin; son influence est d'ailleurs très secondaire. On étudie donc d'abord l'opérateur

(9-4)
$$\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}U_{B} + b^{A\mu}_{B}\nabla_{\mu}U_{A} \equiv g^{\lambda\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}U_{B} + (h'^{A\lambda}_{B} + h''^{A\lambda}_{B})\partial_{\lambda}U_{A} + (k'^{A}_{B} + k''^{A}_{B})U_{A}.$$

Étudions la paramétrix correspondante. Dans le cas scalaire, il vient, au lieu de (7-2),

(9-5)
$$\frac{2}{{}^{(0,0)}\sigma}\frac{d\,{}^{(0,0)}\sigma}{d\lambda} = -\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\lambda} - \frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{d\lambda} + \frac{1}{2\{g\}_{x'}}\frac{d\{g\}_{x'}}{d\lambda} + p_{\nu}\{{}^{(0,0)}b^{\mu}(x)A^{\mu}_{\nu}(x)\}_{x'}.$$

On peut désigner par $\alpha(x';\ \lambda,\ q_{j'})$ la solution, égale à 1 pour $\lambda = 0$, de l'équation différentielle

(9-6)
$$\frac{2}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\lambda} = p_{\nu}\{A^{\nu}_{\mu}(x)\,{}^{(0,0)}b^{\mu}(x)\}_{x'}.$$

Il vient alors, au lieu de (7-6),

(9-7)
$${}^{(0,0)}\sigma(x', x) = \frac{1}{\lambda}\frac{\sqrt[4]{-\{g(x)\}_{x'}}}{\sqrt{-Dp_0}}\alpha(x', x).$$

D'autre part, on déduit de (I-8-8) que la paramétrix ${}^{(p,\nu)}\sigma_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}$ vérifie, au lieu de (6-2),

$$\text{(9-8)}\quad \begin{aligned} &\frac{1}{{}^{(0,0)}\sigma}\left(\frac{d^{(p,\nu)}\sigma_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}}{d\lambda} - \frac{{}^{(p,\nu)}\sigma_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}}{{}^{(0,0)}\sigma}\frac{d^{(0,0)}\sigma}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{{}^{(p,\nu)}\sigma_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}}{{}^{(0,0)}\sigma}\right) \\ &= \frac{{}^{(p,\nu)}\sigma_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{B}}}{{}^{(0,0)}\sigma}\, p_\nu \{\mathrm{A}_\mu^\nu\}_{x'}\left(-\eta^{\mu\xi}\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta_{\mathrm{B}^u}^{\mathrm{A}^u}\left\{\mathrm{C}^{a_u}{}_{b_u\xi}\right\}_{x'} + \frac{1}{2}\left\{{}^{(p,\nu)}b_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}\mu} - \delta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}\,(0,0)}b^\mu\right\}_{x'}\right). \end{aligned}$$

Il est donc naturel d'étudier le rôle joué par les fonctions

$$\text{(9-9)}\quad {}^{(p,\nu)}\overline{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}\xi}(x) = \sum_{u=1}^{p+\nu}\delta_{\mathrm{B}^u}^{\mathrm{A}^u}\mathrm{C}^{a_u}{}_{b_u\xi}(x) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\xi}\left\{{}^{(p,\nu)}b_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}\mu}(x) - \delta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}\,(0,0)}b^\mu(x)\right\}.$$

Or les coefficients ${}^{(p,\nu)}b_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}\mu}$ sont les composantes de champs de tenseurs-spineurs, et les coefficients ${}^{(0,0)}b^\mu(x)$ sont les composantes contravariantes d'un champ vectoriel. Il en résulte que l'on peut définir, à l'aide des fonctions (9-9), une dérivation covariante sur les champs de p-tenseurs-ν-spineurs, autre que la dérivation covariante riemannienne

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\nabla}_\xi \mathrm{V}^{\mathrm{A}} &= \partial_\xi \mathrm{V}^{\mathrm{A}} + {}^{(p,\nu)}\overline{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}\xi}\mathrm{V}^{\mathrm{B}} = \nabla_\xi \mathrm{V}^{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\xi}({}^{(p,\nu)}b_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}\mu} - \delta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}\,(0,0)}b^\mu)\mathrm{V}^{\mathrm{B}} \\ \overline{\nabla}_\xi \mathrm{U}_{\mathrm{B}} &= \partial_\xi \mathrm{U}_{\mathrm{B}} - {}^{(p,\nu)}\overline{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}\xi}\mathrm{U}_{\mathrm{A}} = \nabla_\xi \mathrm{U}_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\xi}({}^{(p,\nu)}b_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}\mu} - \delta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}\,(0,0)}b^\mu)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}. \end{aligned}\right.$$

On dira que les fonctions (9-9) définissent une « connexion p-lorentzienne-ν-spinorielle » (5). A cette connexion on fait correspondre un bi-p-tenseur-ν-spineur de transport parallèle ${}^{(p,\nu)}w_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}(x', x)$ caractérisé par

$$\text{(9-10)}\qquad v^\mu \overline{\nabla}_\mu {}^{(p,\nu)}w_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}} = \frac{d^{(p,\nu)}w_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}}{d\varphi} + v^{\mu\,(p,\nu)}\overline{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}\mu}\,{}^{(p,\nu)}w_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{B}} = 0,$$

$${}^{(p,\nu)}w_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}} = \delta_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}'} \quad \text{pour} \quad \varphi = 0.$$

Il est associé à l'isomorphisme entre ${}^{(p,\nu)}\mathrm{F}_{x'}$ et ${}^{(p,\nu)}\mathrm{F}_x$ défini par le transport parallèle selon la connexion ${}^{(p,\nu)}\overline{\mathrm{C}}$, le long de la famille de courbes $\mathrm{C}(x')$. En choisissant x sur $\Gamma_{x'}$, et $v^\mu(x)$ défini par (3-3)'

$$v^\mu(x) = \eta^{\mu\xi}\{\mathrm{A}_\xi^\nu(x)\}_{x'}p_\nu,$$

(5) Cf. A. Lichnerowicz [*2*], § 13.

on obtient la restriction $\{ {}^{(p,\nu)}w^{A}_{R'}(x', x) \}_{x'}$ de ${}^{(p,\nu)}w^{A}_{R'}$ au conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$. On déduit alors de (9-8) et (9-10)

$$(9\text{-}11) \qquad {}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}(x', x) = \{ {}^{(p,\nu)}w^{A}_{R'}(x', x) \}_{x'} {}^{(0,0)}\sigma(x', x),$$

au lieu de (6-3). Mais, au contraire de ce qui se passait pour ${}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}$, le bi-p-tenseur-ν-spineur ne se construit en général pas par produit tensoriel à partir des éléments d'ordre 1, ${}^{(1)}w^{a}_{r'}(x', x)$.

10) Cas où les connexions ${}^{(p,\nu)}\overline{C}$ sont en correspondance canonique.

Le cas intéressant est celui où les coefficients ${}^{(p,\nu)}b^{A\mu}_{B}(x)$ forment une famille de matrices 1-décomposable

$$(10\text{-}1) \qquad {}^{(p,\nu)}b^{A\mu}_{B}(x) = \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{B^u} {}^{(1)}b^{a_u\mu}_{b_u}(x) - (p+\nu-1)\delta^{A}_{B} {}^{(0,0)}b^{\mu}(x).$$

Cette hypothèse peut aussi être écrite sous la forme

$$(10\text{-}1)' \qquad {}^{(p,\nu)}b^{A\mu}_{B}(x) - \delta^{A}_{B} {}^{(0,0)}b^{\mu}(x) = {}^{(p,\nu)}B^{A\mu}_{B}(x) = \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{B^u} {}^{(1)}B^{a_u\mu}_{b_u}(x).$$

Elle implique la propriété suivante des connexions p-lorentziennes-ν-spinorielles ${}^{(p,\nu)}\overline{C}^{A}{}_{B\xi}(x)$

$$(10\text{-}2) \qquad {}^{(p,\nu)}\overline{C}^{A}{}_{B\xi}(x) = \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{B^u} \overline{C}^{a_u}{}_{b_u\xi}(x).$$

Cette formule signifie que toutes ces connexions généralisées se construisent à partir de la connexion lorentzienne et de la connexion spinorielle

$$(10\text{-}3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{C}^{\alpha}{}_{\beta\xi}(x) &= C^{\alpha}{}_{\beta\xi}(x) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\xi} {}^{(1,0)}B^{\alpha\mu}_{\beta}(x) \\ \overline{C}^{a}{}_{b\xi}(x) &= C^{a}{}_{b\xi}(x) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\xi} {}^{(0,1)}B^{a\mu}_{b}(x). \end{aligned} \right.$$

REMARQUE. — Dans le cas général, à chaque connexion p-lorentzienne-ν-spinorielle ${}^{(p,\nu)}\overline{C}^{A}{}_{B\xi}$ correspondent une connexion lorentzienne $\tilde{C}^{\alpha}{}_{\beta\xi}(p, \nu)$ et une connexion spinorielle $\tilde{C}^{a}{}_{b\xi}(p, \nu)$ telles que

$${}^{(p,\nu)}\overline{C}^{A}{}_{B\xi} = \sum_{u=1}^{p} \delta^{A^u}_{B^u} \tilde{C}^{\alpha_u}{}_{\beta_u\xi}(p, \nu) + \sum_{w=1}^{\nu} \delta^{A^w}_{B^w} \tilde{C}^{a_w}{}_{b_w\xi}(p, \nu) = \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{B^u} \tilde{C}^{a_u}{}_{b_u\xi}(p, \nu);$$

mais ces deux connexions dépendent en général de p et ν. Dans le cas particulier envisagé, ces connexions sont les mêmes pour toutes valeurs de p et ν; ce sont la connexion lorentzienne ${}^{(1,0)}\overline{C}{}^{\alpha}{}_{\beta\xi}$ et la connexion spinorielle ${}^{(0,1)}\overline{C}{}^{a}{}_{b\xi}$, définies en (10-3).

On voit aisément que l'hypothèse faite en (10-1) ou (10-2) est la *condition nécessaire et suffisante* pour que

(10-4)
$$ {}^{(p,\nu)}w^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = \prod_{u=1}^{p} {}^{(1,0)}w^{\alpha_u}_{\rho'_u}(x', x) \times \prod_{w=1}^{\nu} {}^{(0,1)}w^{a_w}_{r'_w}(x', x) = \prod_{u=1}^{p+\nu} {}^{(1)}w^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u}(x', x)\,; $$

${}^{(1)}w^{\mathrm{a}}_{\mathrm{r}'}(x', x)$ désigne le bi-1-tenseur ou le bi-1-spineur de transport parallèle selon la connexion lorentzienne ou spinorielle (10-3).

Sous l'hypothèse (10-1), l'ordre minimal de décomposition des coefficients ${}^{(p,\nu)}h''^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}}$ et ${}^{(p,\nu)}k''^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ précisés en (9-2) est respectivement 1 et 2. Il vient en effet pour les seconds, puisque ${}^{(0,0)}k'' = 0$,

$$ (10\text{-}5)\quad {}^{(p,\nu)}k''^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} - \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{B}^u}\, {}^{(1)}k''^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{b}_u} = - \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p+\nu} \delta^{\mathrm{A}^{uv}}_{\mathrm{B}_{uv}} \left(\mathrm{C}^{\mathrm{a}_u}{}_{\mathrm{b}_u\mu}\, {}^{(1)}\mathrm{B}^{\mathrm{a}_v\mu}_{\mathrm{b}_v} + \mathrm{C}^{\mathrm{a}_v}{}_{\mathrm{b}_v\mu}\, {}^{(1)}\mathrm{B}^{\mathrm{a}_u\mu}_{\mathrm{b}_u} \right). $$

Or des résultats semblables ont été obtenus, en (8-1) et (6-1) pour ${}^{(p,\nu)}h'^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}}$, en (8-2) et (8-3) pour ${}^{(p,\nu)}k'^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$. On en déduit par addition que les coefficients de l'opérateur (9-4) sont respectivement 1-décomposables et 2-décomposables

$$ (10\text{-}6)\quad \left\{ \begin{aligned} {}^{(p,\nu)}h^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}} - \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\, {}^{(0,0)}h^{\lambda} &= -2\eta^{\mu\xi}\mathrm{A}^{\lambda}_{\mu} \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{B}^u} \overline{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{a}_u}{}_{\mathrm{b}_u\xi} \\ {}^{(p,\nu)}k^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} - \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{B}^u}\, {}^{(1)}k^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{b}_u} &= 2 \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p+\nu} \delta^{\mathrm{A}^{uv}}_{\mathrm{B}_{uv}} \Big(\eta^{\mu\xi} \overline{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{a}_u}{}_{\mathrm{b}_u\mu} \overline{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{a}_v}{}_{\mathrm{b}_v\xi} \\ &\qquad - \frac{1}{4}\eta_{\mu\xi}\, {}^{(1)}\mathrm{B}^{\mathrm{a}_u\mu}_{\mathrm{b}_u}\, {}^{(1)}\mathrm{B}^{\mathrm{a}_v\xi}_{\mathrm{b}_v} \Big). \end{aligned} \right. $$

Un raisonnement analogue à celui du § 8 montre alors que le noyau de diffusion relatif à l'opérateur (9-4) est 2-décomposable

$$ \begin{aligned} (10\text{-}7)\quad {}^{(p,\nu)}\mathrm{M}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = &\sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p+\nu} \left\{ {}^{(p+\nu-2)}w^{\mathrm{A}^{uv}}_{\mathrm{R}'_{uv}} \right\}_{x'} {}^{(2)}\mathrm{M}^{\mathrm{a}_u\mathrm{a}_v}_{\mathrm{r}'_u\mathrm{r}'_v} \\ &- (p+\nu-2) \sum_{u=1}^{p+\nu} \left\{ {}^{(p+\nu-1)}w^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{R}'_u} \right\}_{x'} {}^{(1)}\mathrm{M}^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u} \\ &+ \frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2} \left\{ {}^{(p,\nu)}w^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} \right\}_{x'} {}^{(0,0)}\mathrm{M}. \end{aligned} $$

Quant aux équations (8-7), elles doivent être remplacées par

$$(10\text{-}8)\quad {}^{(2)}\mathrm{M}^{a_1a_2}_{r'_1r'_2} - \left\{ {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'} {}^{(1)}\mathrm{M}^{a_1}_{r'_1} - \left\{ {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'} {}^{(1)}\mathrm{M}^{a_2}_{r'_2} + \left\{ {}^{(2)}w^{a_1a_2}_{r'_1r'_2} \right\}_{x'} {}^{(0,0)}\mathrm{M}$$
$$= 2\,{}^{(0,0)}\sigma\,\overline{\mathrm{Q}}\left(\left\{ {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}\right)$$

où le terme complémentaire est défini par

$$(10\text{-}9)\quad \overline{\mathrm{Q}}\left(\left\{ {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}\right) = \left\{ g^{ik} \right\}_{x'} \partial_i \left\{ {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'} \partial_k \left\{ {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}$$
$$+ \eta^{\mu\xi}\left(\left\{ \mathrm{A}^i_\mu \overline{\mathrm{C}}^{a_1}{}_{b_1\xi}\, {}^{(1)}w^{b_1}_{r'_1} \right\}_{x'} \partial_i \left\{ {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'} + \left\{ \mathrm{A}^i_\mu \overline{\mathrm{C}}^{a_2}{}_{b_2\xi}\, {}^{(1)}w^{b_2}_{r'_2} \right\}_{x'} \partial_i \left\{ {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'}\right)$$
$$+ \eta^{\mu\xi} \left\{ \overline{\mathrm{C}}^{a_1}{}_{b_1\mu} \overline{\mathrm{C}}^{a_2}{}_{b_2\xi}\, {}^{(2)}w^{b_1b_2}_{r'_1r'_2} \right\}_{x'} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\xi} \left\{ {}^{(1)}\mathrm{B}^{a_1\mu}_{b_1}\, {}^{(1)}\mathrm{B}^{a_2\xi}_{b_2}\, {}^{(2)}w^{b_1b_2}_{r'_1r'_2} \right\}_{x'}.$$

L'isotropie du vecteur p_α, ainsi que la définition (9-10) du bi-1-tenseur ou bi-1-spineur ${}^{(1)}w^{a}_{r'}$ conduisent, de même qu'en (8-9), à la forme réduite

$$\overline{\mathrm{Q}}\left(\left\{ {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}\right) = \left\{ \eta^{\mu\xi} \overline{\nabla}_\mu {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1} \overline{\nabla}_\xi {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\xi}\, {}^{(1)}\mathrm{B}^{a_1\mu}_{b_1}\, {}^{(1)}\mathrm{B}^{a_2\xi}_{b_2}\, {}^{(2)}w^{b_1b_2}_{r'_1r'_2} \right\}_{x'}.$$

Compte tenu de la définition de la connexion lorentzienne ou spinorielle $\overline{\mathrm{C}}^{a}{}_{b\mu}$, et de (10-1), cette expression se ramène à

$$(10\text{-}10)\quad \overline{\mathrm{Q}}\left(\left\{ {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}\right) = \left\{ \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1} \nabla_\xi {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right.$$
$$- \frac{1}{2}\, {}^{(2)}b^{a_1a_2\mu}_{b_1b_2} \nabla_\mu {}^{(2)}w^{b_1b_2}_{r'_1r'_2} + \frac{1}{2}\, {}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2}\, {}^{(1)}b^{a_1\mu}_{b_1} \nabla_\mu {}^{(1)}w^{b_1}_{r'_1}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\, {}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1}\, {}^{(1)}b^{a_2\mu}_{b_2} \nabla_\mu {}^{(1)}w^{b_2}_{r'_2} \right\}_{x'}.$$

Une expression étendant (8-10) à ce cas peut également être obtenue.

11) Cas particuliers.

Trois cas particuliers intéressants de l'hypothèse (10-1) peuvent être signalés.

Cas particulier 1. — Si ${}^{(0,0)}b^{\mu}(x) = 0$, la paramétrix ${}^{(0,0)}\sigma$ n'est pas modifiée, et est donnée par (7-6).

Cas particulier 2. — Si ${}^{(p,\nu)}\mathrm{B}^{A\mu}_{B}(x) = 0$, c'est-à-dire si

$$(11\text{-}1)\qquad {}^{(p,\nu)}b^{A\mu}_{B}(x) = \delta^{A}_{B}\, {}^{(0,0)}b^{\mu}(x),$$

les connexions $\bar{C}$ coïncident avec les connexions riemannienne et spinorielle canonique C; donc

$$ {}^{(p,\nu)}w^{A}_{R'}(x', x) = {}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}(x', x). $$

On a toujours (6-3), où ${}^{(0,0)}\sigma$ s'exprime par (9-7) au lieu de (7-6).

En outre, (11-1) entraîne que les coefficients ${}^{(p,\nu)}h''^{A\lambda}_{B}$ et ${}^{(p,\nu)}k''^{A}_{B}$ précisés en (9-2) sont respectivement 0- et 1-décomposables. Les coefficients de l'opérateur (9-4) vérifient alors les mêmes relations (8-1) et (6-1), (8-2) et (8-3) que ceux de l'opérateur $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$. Il en résulte que le noyau de diffusion relatif à un tel opérateur (9-4) satisfait aux mêmes décompositions (8-4) et (8-7) exactement que le noyau de diffusion relatif à l'opérateur $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$.

Cas particulier 3. — En plus de l'hypothèse (10-1), on suppose qu'il existe un (6) repère spinoriel tel que

$$ \bar{C}^{\mathrm{a}}_{\tilde{}\,\mathrm{b}\mu} = C^{\mathrm{a}}_{\tilde{}\,\mathrm{b}\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\xi}\,{}^{(1)}B^{\mathrm{a}\xi}_{\tilde{\mathrm{b}}} = 0. \tag{11-2} $$

Dans ce repère, l'opérateur (9-4) se réduit à

$$ \left\{\begin{aligned} (LU)_{B} &\equiv g^{\lambda\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}U_{B} + \left({}^{(0,0)}b^{\mu}A^{\lambda}_{\mu} - g^{\nu\pi}C^{\lambda}_{\nu\pi}\right)\partial_{\lambda}U_{B} + k^{A}_{B}U_{A} \\ {}^{(p,\nu)}k^{A}_{B}(x) &\equiv \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^{u}}_{B^{u}}\Big\{ -\nabla_{\lambda}{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{b}_u} + \eta_{\lambda\nu}\Big(\frac{1}{2}{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{d}}\,{}^{(1)}B^{\mathrm{d}\nu}_{\mathrm{b}_u} \\ &\qquad - {}^{(1)}B^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{b}_u}\,{}^{(0,0)}b^{\nu}\Big)\Big\} - \frac{1}{2}\eta_{\lambda\nu}\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu}\delta^{A^{uv}}_{B_{uv}}\,{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{b}_u}\,{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_v\nu}_{\mathrm{b}_v}. \end{aligned}\right. \tag{11-3} $$

D'autre part, les bi-tenseurs-spineurs de transport parallèle selon la connexion $\bar{C}$ *se réduisent à l'identité* dans ce repère. Le reste (10-9) de la décomposition (10-8) se réduit donc à

$$ \bar{Q}\left(\delta^{\mathrm{a}_1}_{\mathrm{r}'_1}, \delta^{\mathrm{a}_2}_{\mathrm{r}'_2}\right) = -\frac{1}{4}\left\{\eta_{\lambda\nu}\,{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_1\lambda}_{\mathrm{r}_1}\,{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_2\nu}_{\mathrm{r}_2}\right\}_{x'}. \tag{11-4} $$

Il en résulte en outre que l'ordre minimal de décomposition est conservé par dérivation. Ainsi, $\left(\partial_{i}{}^{(p,\nu)}\Sigma^{A}_{R'}{}^{i}\right)$ est 0-décomposable; d'où

$$ \begin{aligned} {}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'} - \delta^{A}_{R'}\,{}^{(0,0)}M = \frac{{}^{(0,0)}\sigma}{2}\Big\{\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{A^{u}}_{R'^{u}}\Big\{ &-\nabla_{\lambda}{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{r}_u} \\ &+ \eta_{\lambda\nu}\Big(\frac{1}{2}{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{d}}\,{}^{(1)}B^{\mathrm{d}\nu}_{\mathrm{r}_u} - {}^{(1)}B^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{r}_u}\,{}^{(0,0)}b^{\nu}\Big)\Big\}_{x'} \\ &- \eta_{\lambda\nu}\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu}\delta^{A^{uv}}_{R'_{uv}}\left\{{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_u\lambda}_{\mathrm{r}_u}\,{}^{(1)}B^{\mathrm{a}_v\nu}_{\mathrm{r}_v}\right\}_{x'}\Big\}. \end{aligned} \tag{11-5} $$

Des coefficients l^{A}_{B} convenables (cf. ci-dessous, § 13) peuvent en outre amener la simplification ou la disparition de ce reste.

(6) Il s'agit d'une condition non covariante.

Dans un repère spinoriel quelconque, on a les mêmes relations (11-4) et (11-5). Mais le bi-tenseur ou bi-spineur de transport parallèle, au lieu d'être réduit à l'identité $\delta^{\mathrm{a}}_{\tilde{\mathrm{r}}'}$, est égal à

$$\text{(11-6)} \qquad \{\, {}^{(1)}w^{\mathrm{a}}_{\mathrm{r}'}(x', x) \,\}_{x'} = \{\, \Gamma^{\mathrm{a}}_{\tilde{\mathrm{s}}}(x) \,\}_{x'} \, \Gamma^{\mathrm{s}'}_{\tilde{\mathrm{r}}'}(x').$$

12) Hypothèses plus faibles sur $b^{\mathrm{A}\mu}_{\mathrm{B}}$.

Trois principaux types d'hypothèses plus faibles peuvent être envisagés

a) Au lieu de (10-1), supposons seulement que chaque connexion ${}^{(p,\nu)}\overline{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}\mu}$ soit obtenue canoniquement à partir des connexions p-lorentzienne ${}^{(p,0)}\overline{\mathrm{C}}{}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}\mu}$ et ν-spinorielle ${}^{(0,\nu)}\overline{\mathrm{C}}{}^{@}{}_{ⓑ\mu}$

$$\text{(12-1)} \qquad {}^{(p,\nu)}\overline{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}\mu} = \delta^{@}_{ⓑ}\, {}^{(p,0)}\overline{\mathrm{C}}{}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}\mu} + \delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\, {}^{(0,\nu)}\overline{\mathrm{C}}{}^{@}{}_{ⓑ\mu}.$$

Il en résulte que

$$\text{(12-2)} \qquad {}^{(p,\nu)}w^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = {}^{(p,0)}w^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}(x', x)\, {}^{(0,\nu)}w^{@}_{ⓡ'}(x', x),$$

mais les bi-p-tenseurs ${}^{(p,0)}w^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}$ et les bi-ν-spineurs ${}^{(0,\nu)}w^{@}_{ⓡ'}$ ne s'obtiennent pas par produit tensoriel à partir de ${}^{(1,0)}w^{\alpha}_{\rho'}$ ou ${}^{(0,1)}w^{a}_{r'}$.

On montre aisément que sous cette hypothèse le noyau de diffusion relatif à l'opérateur (9-4) vérifie la relation

$$\text{(12-3)} \qquad \begin{aligned} &{}^{(p,\nu)}\mathrm{M}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} - \left\{ {}^{(0,\nu)}w^{@}_{ⓡ'} \right\}_{x'} {}^{(p,0)}\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'} - \left\{ {}^{(p,0)}w^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'} \right\}_{x'} {}^{(0,\nu)}\mathrm{M}^{@}_{ⓡ'} \\ &\quad + \left\{ {}^{(p,0)}w^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}\, {}^{(0,\nu)}w^{@}_{ⓡ'} \right\}_{x'} {}^{(0,0)}\mathrm{M} \\ &\quad = 2\, {}^{(0,0)}\sigma\, \overline{\mathrm{Q}}\left(\left\{ {}^{(p,0)}w^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(0,\nu)}w^{@}_{ⓡ'} \right\}_{x'} \right), \end{aligned}$$

où l'opérateur $\overline{\mathrm{Q}}$ a une expression analogue à (10-9) ou (10-10). En effet, (12-3) généralise la décomposition (10-8) de ${}^{(1,1)}\mathrm{M}^{\alpha\,a}_{\rho' r'}$ et s'obtient par les mêmes raisonnements.

b) On peut aussi envisager, au lieu de (10-1), des hypothèses *partielles* de décomposition : à chaque ordre spinoriel ν fixé, suivant l'ordre tensoriel

$$\text{(12-4)} \qquad {}^{(p,\nu)}b^{\mathrm{A}\mu}_{\mathrm{B}}(x) = \sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{B}^u}\, {}^{(1,\nu)}b^{\alpha_u @\mu}_{\beta_u ⓑ}(x) - {}^{(p-1)}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\, {}^{(0,\nu)}b^{@\mu}_{ⓑ}(x),$$

ou, à chaque ordre tensoriel p fixé, selon l'ordre spinoriel

$$\text{(12-4)}' \qquad {}^{(p,\nu)}b^{\mathrm{A}\mu}_{\mathrm{B}}(x) = \sum_{w=1}^{\nu} \delta^{@^w}_{ⓑ^w}\, {}^{(p,1)}b^{\mathcal{A}a_w\mu}_{\mathcal{B}b_w}(x) - (\nu-1)\delta^{@}_{ⓑ}\, {}^{(p,0)}b^{\mathcal{A}\mu}_{\mathcal{B}}(x).$$

De ces hypothèses résultent des décompositions partielles de la paramétrix et du noyau de diffusion relatifs à (9-4). De la première, par exemple, résultent

$$(12\text{-}5)\quad \begin{cases} {}^{(p,\nu)}\sigma^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = {}^{(0,\nu)}\sigma^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}(x', x)\prod_{u=1}^{p}\left\{ {}^{(1,0)}w^{\alpha_u}_{\rho'_u}(x', x)\right\}_{x'} \\ {}^{(p,\nu)}\mathrm{M}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} - \sum_{u=1}^{p}\left\{ {}^{(p-1,0)}w^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{R}'^u}\right\}_{x'} {}^{(1,\nu)}\mathrm{M}^{\alpha_u\textcircled{a}}_{\rho'_u\textcircled{r}'} + (p-1)\left\{ {}^{(p,0)}w^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}\right\}_{x'} {}^{(0,\nu)}\mathrm{M}^{\textcircled{s}}_{\textcircled{r}'} \\ \quad = 2\,{}^{(0,\nu)}\sigma^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'} \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p}\left\{ {}^{(p-2,0)}w^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{R}'^{uv}}\right\}_{x'} \bar{\mathrm{Q}}\left(\left\{ {}^{(1,0)}w^{\alpha_u}_{\rho'_u}\right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1,0)}w^{\alpha_v}_{\rho'_v}\right\}_{x'}\right). \end{cases}$$

c) On peut enfin s'intéresser à des hypothèses de *décomposition d'ordre supérieur.*

Soit ${}^{(p,\nu)}b^{\mathrm{A}\mu}_{\mathrm{B}}$ m-décomposable. Il n'en résulte pas entre les bi-tenseurs-spineurs ${}^{(p,\nu)}w^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ de relation exploitable suivant une méthode analogue à celle des § 8 et 10, mais seulement une relation différentielle qui, pour $m = 2$ par exemple, s'écrit

$$(12\text{-}6)\quad {}^{(p,\nu)}\overset{*}{w}{}^{\mathrm{R}'}_{\mathrm{B}} \frac{d\,{}^{(p,\nu)}w^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}}{d\varphi} = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \delta^{\mathrm{A}^{uv}}_{\mathrm{B}^{uv}}\,{}^{(2)}\overset{*}{w}{}^{\mathrm{r}'_u\mathrm{r}'_v}_{\mathrm{b}_u\mathrm{b}_v} \frac{d\,{}^{(2)}w^{\mathrm{a}_u\mathrm{a}_v}_{\mathrm{r}'_u\mathrm{r}'_v}}{d\varphi} - (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{B}^u}\,{}^{(1)}\overset{*}{w}{}^{\mathrm{r}'_u}_{\mathrm{b}_u}\frac{d\,{}^{(1)}w^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u}}{d\varphi}.$$

Les cas des décompositions d'ordre 1 et 0 sont, de ce point de vue, exceptionnels.

On peut, *inversement*, prendre pour hypothèse une décomposition d'ordre m de la famille de matrices ${}^{(p,\nu)}w^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$, de coefficients

$${}^{(p',\nu')}\mathrm{X}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = \prod_{u=1}^{p'+\nu'} {}^{(1)}w^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u}.$$

La décomposition d'ordre 2, par exemple, s'écrit

$$(12\text{-}7)\quad {}^{(p,\nu)}w^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} {}^{(p+\nu-2)}\mathrm{X}^{\mathrm{A}^{uv}}_{\mathrm{R}'^{uv}}\,{}^{(2)}w^{\mathrm{a}_u\mathrm{a}_v}_{\mathrm{r}'_u\mathrm{r}'_v} - (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu}{}^{(p+\nu-1)}\mathrm{X}^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{R}'^u}\,{}^{(1)}w^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u} + \frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2}\,{}^{(p,\nu)}\mathrm{X}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}.$$

Le dual ${}^{(p,\nu)}\overset{*}{w}{}^{\pm\mathrm{R}'}_{\mathrm{A}}(x', x)$ satisfaisant à la même condition, on montre que, en tout point x, ${}^{(p,\nu)}\mathrm{B}^{\mathrm{A}\mu}_{\mathrm{B}}(x)$ est $\mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right)$-décomposable. Il en résulte que les cas $m = 2$ et $m = 3$ ne diffèrent en fait pas de $m = 0$ (cette propriété est évidente pour $m = 1$).

Pour $m \geqslant 4$, on obtiendra au moins une décomposition d'ordre $\left\{ m + \mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right) + 1 \right\}$ du noyau de diffusion.

13) Influence du terme $l_B^A U_A$.

On suppose ici que les coefficients ${}^{(p,\nu)}b_B^{A\mu}$ vérifient (10-1), de sorte que les bi-p-tenseurs-ν-spineurs ${}^{(p,\nu)}w_{R'}^A$ se construisent par produit tensoriel. Cette hypothèse limite l'étude à une décomposition simple de la paramétrix et du noyau de diffusion.

Remarquons qu'il est possible aussi de se limiter aux hypothèses plus larges du § 12 pour étudier l'influence de ce terme sur les résultats qui y ont été obtenus. L'étude ci-dessous s'étend aisément à de tels cas.

a) Cas où les ${}^{(p,\nu)}l_B^A$ *sont 2-décomposables ou 1-décomposables.*

On fait l'hypothèse suivante

$$(13\text{-}1)\qquad {}^{(p,\nu)}l_B^A - \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta_{B u}^{A^u}\,{}^{(1)}l_{b_u}^{a_u} + (p+\nu-1)\delta_B^A\,{}^{(0,0)}l = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \delta_{B uv}^{A uv} J_{b_u b_v}^{a_u a_v}.$$

Alors la contribution $(\{{}^{(p,\nu)}l_B^A\}_{x'}\,{}^{(p,\nu)}\sigma_{R'}^B)$ du terme $l_B^A U_A$ au noyau de diffusion ${}^{(p,\nu)}M_{R'}^A$ relatif à l'opérateur (9-1) est 2-décomposable suivant une formule du type (10-7). Le noyau de diffusion ${}^{(p,\nu)}M_{R'}^A$ relatif à (9-1) vérifie donc (10-7).

La présence du terme $l_B^A U_A$ modifie par contre les relations (10-8), en ajoutant un second terme complémentaire,

$$(13\text{-}2)\qquad \{J_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}\}_{x'}\,{}^{(2)}\sigma_{r_1' r_2'}^{b_1 b_2}.$$

Si, outre (13-1), on fait l'hypothèse

$$(13\text{-}3)\qquad J_{b_1 b_2}^{a_1 a_2} = 0,$$

(coefficients ${}^{(p,\nu)}l_B^A$ 1-décomposables), on voit que toutes les relations obtenues au § 10 pour l'opérateur (9-4) sont valables sans modification pour l'opérateur (9-1).

Si, outre l'hypothèse (11-2) du 3e cas particulier du § 11, on fait l'hypothèse suivante (covariante)

$$(13\text{-}4)\qquad J_{b_1 b_2}^{a_1 a_2} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\xi}\,{}^{(1)}B_{b_1}^{a_1\mu}\,{}^{(1)}B_{b_2}^{a_2\xi},$$

la formule (11-5) se trouve simplifiée. On peut même supposer en outre que

$$(13\text{-}5)\qquad {}^{(1)}l_b^a - \delta_b^a\,{}^{(0,0)}l = \frac{1}{2}\left\{\nabla_\mu\,{}^{(1)}B_b^{a\mu} + \eta_{\mu\xi}\left(-\frac{1}{2}\,{}^{(1)}B_d^{a\mu}\,{}^{(1)}B_b^{d\xi} + {}^{(1)}B_b^{a\mu}\,{}^{(0,0)}b^\xi\right)\right\}$$

Alors,

$$(13\text{-}6)\qquad {}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'}(x', x) = \{ \Gamma^{A}_{\underset{\sim}{S}}(x) \}_{x'} \Gamma^{S'}_{\tilde{R}'}(x')\, {}^{(0,0)}M(x', x),$$

ce qui est naturel, car L opère séparément sur chacune des composantes.

b) Si aucune hypothèse n'est faite sur ${}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}$, on trouvera, dans chaque décomposition du noyau de diffusion relatif à l'opérateur (9-1) un terme complémentaire provenant de la décomposition (avec reste) de $(\{ {}^{(p,\nu)}l^{A}_{B} \}_{x'}, {}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'})$. La décomposition d'ordre 2 étendant (8-4) et (10-7) a alors un reste, et perd ainsi son principal intérêt ; on écrira directement la décomposition d'ordre 1 avec reste

$$(13\text{-}7)\qquad {}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'} - \sum_{u=1}^{p+\nu} \left\{ {}^{(p+\nu-1)}w^{A^{u}}_{R'u} \right\}_{x'} {}^{(1)}M^{a_u}_{\underset{u}{1'}} + (p+\nu-1) \left\{ {}^{(p,\nu)}w^{A}_{R'} \right\}_{x'} {}^{(0,0)}M$$
$$= 2 \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p+\nu} {}^{(p+\nu-2)}\sigma^{A^{uv}}_{R'uv}\, \bar{Q}\left(\left\{ {}^{(1)}w^{a_u}_{r'_u} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1)}w^{a_v}_{r'_v} \right\}_{x'} \right)$$
$$+ \left\{ {}^{(p,\nu)}l^{A}_{B} - \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^{u}}_{B^{u}}\, {}^{(1)}l^{a_u}_{b_u} + (p+\nu-1)\delta^{A}_{B}\, {}^{(0,0)}l \right\}_{x'} {}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'}.$$

Des hypothèses partielles de décomposition de ${}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}$, par exemple à p fixé ou à ν fixé, peuvent permettre d'écrire des décompositions partielles (7) d'ordre 2, sans reste, du noyau de diffusion relatif à l'opérateur (9-1).

D. Dalembertiens et opérateurs de Klein-Gordon.

Il est particulièrement intéressant du point de vue de la Physique mathématique d'étudier plus en détail le cas des propagateurs relatifs aux dalembertiens et opérateurs de Klein-Gordon. Ce sont en effet ces opérateurs qui figurent au premier membre des équations de champ des particules à spin sans masse (dalembertiens) ou avec masse (opérateurs de Klein-Gordon) : le potentiel U_A de la particule considérée, de masse m (constante), est astreint au système d'équations aux dérivées partielles du second ordre

$$(\square U)_B + m^2 U_B = 0$$

($\square$ désigne le dalembertien riemannien, précisé au § 14 ci-dessous pour les champs de tenseurs-spineurs des divers ordres).

(7) Cf. le cas des dalembertiens, étudié ci-dessous.

Les résultats les plus intéressants de cette section sont ceux qui concernent les trois cas particuliers

a) champs p-tensoriels (particules de spin entier);
b) champs p-tensoriels-1-spinoriels (particules de spin demi-entier);
c) champs 2-spinoriels (théorie de Petiau-Duffin-Kemmer).

Le § 16, à la fin de cette section, est consacré à présenter les résultats concernant précisément ces trois cas particuliers.

14) Dalembertiens sur les p-tenseurs-ν-spineurs.

Dans les trois cas particuliers *a)*, *b)* et *c)* énumérés ci-dessus, le dalembertien riemannien est défini de la façon suivante

a) Sur les champs p-tensoriels ($\nu = 0$), on emploie le dalembertien de G. de Rham et A. Lichnerowicz [*1*] :

$$(14\text{-}1)\quad (\Box \mathrm{U})_{\mathcal{B}} \equiv \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu \nabla_\xi \mathrm{U}_{\mathcal{B}} + \Big(- \sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{B}^u} \mathrm{R}^{\alpha_u}_{\beta_u} + 2 \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{B}^{uv}} \mathrm{R}^{\alpha_u}{}_{\beta_u}{}^{\alpha_v}{}_{\beta_v} \Big) \mathrm{U}_{\mathcal{A}}.$$

Dans les cas particuliers ($p < 2$) des champs scalaires et vectoriels, ce dalembertien se réduit à

$$(14\text{-}2)\qquad \begin{cases} \Box \mathrm{U} \equiv \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu \nabla_\xi \mathrm{U} \\ (\Box \mathrm{U})_\beta \equiv \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu \nabla_\xi \mathrm{U}_\beta - \mathrm{R}^\alpha_\beta \mathrm{U}_\alpha. \end{cases}$$

Grâce à la métrique, qui établit un isomorphisme canonique entre T_x et T^*_x, (14-1) suffit à définir le dalembertien sur les champs p-tensoriels de variance quelconque.

b) Sur les champs p-tensoriels-1-spinoriels ($p \geqslant 0$, $\nu = 1$), les dalembertiens employés (Dirac : spin 1/2, Rarita-Schwinger : spin 3/2, etc...) s'écrivent (A. Lichnerowicz [*2*])

$$(14\text{-}3)\quad (\Box \mathrm{U})_{\mathrm{B}} \equiv (\Box \mathrm{U})^b_{\mathcal{B}} \equiv - (\gamma^\mu \gamma^\xi)^b_a \nabla_\mu \nabla_\xi \mathrm{U}^a_{\mathcal{B}}$$
$$\equiv \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu \nabla_\xi \mathrm{U}^b_{\mathcal{B}} - \frac{\mathrm{R}}{4} \mathrm{U}^b_{\mathcal{B}} - \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{p} \mathrm{R}^{\alpha_u}{}_{\beta_u}{}^{\xi}{}_{\mu} (\gamma^\mu \gamma_\xi)^b_a \mathrm{U}^a_{\beta_1 \ldots \alpha_u \ldots \beta_p}.$$

Grâce à la 2-forme spinorielle fondamentale, qui établit un isomorphisme canonique entre S_x et S_x^*, et à la métrique, (14-3) suffit à définir le dalembertien sur les champs de variance différente. Par exemple,

$$(14\text{-}4) \quad (\Box' U)_{\mathcal{B}b} \equiv \Gamma_{bd} \Box^{\mathcal{A}d}_{\mathcal{B}c}(\Gamma^{ac} U_{\mathcal{A}a}) \equiv - \nabla_\mu \nabla_\xi U_{\mathcal{B}a}(\gamma^\xi \gamma^\mu)^a_b$$
$$\equiv \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu \nabla_\xi U_{\mathcal{B}b} - \frac{R}{4} U_{\mathcal{B}b} - \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{p} R^{\alpha_u}{}_{\beta_u}{}^{\xi}{}_{\mu} (\gamma_\xi \gamma^\mu)^a_b U_{\beta_1 \ldots \alpha_u \ldots \beta_p a}.$$

c) Le dalembertien utilisé en théorie de Petiau-Duffin-Kemmer (A. Lichnerowicz [*2*]) sur les (1,1)-spineurs est

$$(14\text{-}5) \quad (\Box U)_B \equiv (\Box U)^b_d \equiv - (\gamma^\mu \gamma^\xi)^b_a \nabla_\mu \nabla_\xi U^a_d \equiv - \nabla_\mu \nabla_\xi U^b_c (\gamma^\xi \gamma^\mu)^c_d$$
$$\equiv \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu \nabla_\xi U^b_d - \frac{R}{4} U^b_d + \frac{1}{8} R_{\lambda\mu,\nu\xi} (\gamma^\mu \gamma^\lambda)^b_a (\gamma^\nu \gamma^\xi)^c_d U^a_c.$$

Ces dalembertiens sont tous des opérateurs auto-adjoints (en identifiant chacun avec ceux qui s'en déduisent par dualité).

Dans le cas général des p-tenseurs-ν-spineurs, aucun des dalembertiens proposés jusqu'alors ne possède toutes les propriétés qui seraient souhaitables pour les applications à la Physique mathématique. On se tiendra à une forme générale

$$(14\text{-}6) \qquad (\Box U)_B \equiv \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu \nabla_\xi U_B + {}^{(p,\nu)} l^A_B(x) U_A.$$

Il s'agit ainsi d'un opérateur (9-1) où ${}^{(p,\nu)} b^{A\mu}_B(x) \equiv 0$, et où on fait sur la matrice ${}^{(p,\nu)} l^A_B$ les *hypothèses* suivantes

— dans les cas particuliers *a)*, *b)*, *c)*, le dalembertien (14-6) se réduit à la forme écrite ci-dessus :

$$(14\text{-}1)' \qquad {}^{(p,0)} l^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \equiv - \sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{B}^u} R^{\alpha_u}_{\beta_u} + 2 \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{B}^{uv}} R^{\alpha_u}{}_{\beta_u}{}^{\alpha_v}{}_{\beta_v},$$

$$(14\text{-}2)' \qquad {}^{(p,1)} l^{\mathcal{A}a}_{\mathcal{B}b} \equiv - \frac{R}{4} \delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \delta^a_b - \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{B}^u} R^{\alpha_u}{}_{\beta_u}{}^{\xi}{}_{\mu} (\gamma_\xi \gamma^\mu)^a_b,$$

$$(14\text{-}3)' \qquad {}^{(0,2)} l^{bc}_{ad} \equiv - \frac{R}{4} \delta^b_a \delta^c_d + \frac{1}{8} R_{\lambda\mu,\nu\xi} (\gamma^\mu \gamma^\lambda)^b_a (\gamma^\nu \gamma^\xi)^c_d ;$$

— la matrice ${}^{(p,\nu)} l^A_B$ ne dépend, dans le cas général comme dans ces cas particuliers, que du tenseur de courbure de la connexion riemannienne associée à la métrique $g^{\lambda\nu}(x)$;

— des hypothèses de décomposition sont explicitées ci-dessous.

De l'expression (14-6) et de la seconde hypothèse, ainsi que des calculs faits aux § 1 et 5, on déduit que les coefficients d'un tel opérateur se calculent tous à partir des coefficients $g^{\lambda\nu}(x)$ et de la matrice $A^{\mu}_{\lambda}(x)$ définissant le repère auxiliaire : $h^{A\lambda}_{B}(x)$ s'exprime en fonction de ces quantités et de leurs dérivées premières; $k^{A}_{B}(x)$ s'exprime en fonction de ces quantités et de leurs dérivées premières et secondes. Finalement, ils ne dépendent que de la métrique, car le choix du repère orthonormé est conditionné (partiellement) par la donnée de la métrique. Si les fonctions $g^{\lambda\nu}(x)$ sont de classe C^{l}, on peut choisir les fonctions $A^{\mu}_{\lambda}(x)$ de classe C^{l}, de sorte que les coefficients $h^{A\lambda}_{B}(x)$ et $k^{A}_{B}(x)$ seront de classe C^{l-1} et C^{l-2}, respectivement.

Indiquons trois exemples de dalembertiens sur les p-tenseurs-ν-spineurs, généralisant les dalembertiens usuels des cas particuliers *a), b)* et *c).*

1° Tran Van Tan [*1*] a proposé, pour $\nu > 0$, le dalembertien suivant, dont il a établi le caractère auto-adjoint

$$(14\text{-}7) \qquad (\square U)_{B} \equiv -\frac{1}{\nu}\sum_{w=1}^{\nu} \nabla_{\mu}\nabla_{\xi} U_{\mathcal{B}b_{1}\ldots a_{w}\ldots b_{\nu}}(\gamma^{\xi}\gamma^{\mu})^{a_{w}}_{b_{w}}.$$

La matrice ${}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}$ correspondante s'écrit

$$(14\text{-}7)' \quad {}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}(x) \equiv -\frac{R}{4}\delta^{A}_{B} - \frac{1}{2\nu}\sum_{u=1}^{p}\sum_{w=1}^{\nu} \delta^{\mathcal{A}^{u}}_{\mathcal{B}^{u}}\delta^{ⓐ^{w}}_{ⓑ^{w}} R^{\alpha_{u}}{}_{\beta_{u}}{}^{\xi}{}_{\mu}(\gamma_{\xi}\gamma^{\mu})^{a_{w}}_{b_{w}}$$
$$+\frac{1}{4\nu}\sum_{1\leqslant v<w\leqslant\nu} \delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\delta^{ⓐ^{vw}}_{ⓑ^{vw}} R_{\lambda\mu,\nu\xi}(\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu})^{a_{v}}_{b_{v}}(\gamma^{\nu}\gamma^{\xi})^{a_{w}}_{b_{w}}$$

(14-4) et (14-5) sont des cas particuliers de (14-7).

2° Tran Van Tan [*2*] a proposé un autre dalembertien pour $\nu > 0$, généralisant (14-4) et (14-5)

$$(14\text{-}8) \qquad (\square U)_{B} \equiv -\nabla_{\mu}\nabla_{\xi} U_{\mathcal{B}a_{0}ⓑ^{0}}(\gamma^{\xi}\gamma^{\mu})^{a_{0}}_{b_{0}}.$$

Il lui correspond la matrice ${}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}(x)$

$$(14\text{-}8)' \quad {}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}(x) \equiv -\frac{R}{4}\delta^{A}_{B} - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^{u}}_{\mathcal{B}^{u}}\delta^{ⓐ^{0}}_{\bigcirc^{0}} R^{\alpha_{u}}{}_{\beta_{u}}{}^{\xi}{}_{\mu}(\gamma_{\xi}\gamma^{\mu})^{a_{0}}_{b_{0}}$$
$$+\frac{1}{8}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\sum_{w=1}^{\nu-1} \delta^{ⓐ^{0w}}_{ⓑ^{0w}} R_{\lambda\mu,\nu\xi}(\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu})^{a_{0}}_{b_{0}}(\gamma^{\nu}\gamma^{\xi})^{a_{w}}_{b_{w}}.$$

Le dalembertien (14-8) est également auto-adjoint, sous réserve d'associer dans la dualité les indices spinoriels particularisés.

3° On peut aussi former un dalembertien sur les p-tenseurs-ν-spineurs, à partir du dalembertien sur les p-tenseurs-q-formes-(ν — 2)-spineurs, au moyen de la relation de récurrence

$$(14\text{-}9)\quad {}^{(p,\nu)}l^{\mathcal{A}ⓐ}_{\mathcal{B}ⓑ} = \frac{1}{4}\sum_{q=0}^{4}\frac{1}{(q\,!)^2}\,{}^{(p+q,\nu-2)}l^{\mathcal{A}\,\mathcal{L}\,a_1\ldots a_{\nu-2}}_{\mathcal{B}\mathcal{M}b_1\ldots b_{\nu-2}} \times \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\xi_1\ldots\xi_q}\left(\gamma^{\xi_1}\ldots\gamma^{\xi_q}\right)_{b_{\nu-1}b_\nu}\left(\gamma_{\lambda_1}\ldots\gamma_{\lambda_q}\right)^{a_{\nu-1}a_\nu}.$$

Ainsi, ${}^{(p,\nu)}l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ est déterminé par récurrence, pour toute valeur paire de ν à partir de (14-1)′, et pour toute valeur impaire de ν à partir de (14-4)′. Les expressions explicites, de forme compliquée dès $\nu = 2$ et $\nu = 3$, ne seront pas écrites.

Cherchons maintenant quelles formules de décomposition peuvent être imposées aux coefficients ${}^{(p,\nu)}l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$. Les exemples cités en (14-7), (14-8) et (14-9) ne présentent aucune symétrie entre indices tensoriels et indices spinoriels; on n'imposera donc à ${}^{(p,\nu)}l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ aucune hypothèse de décomposition complète (4-3), qui serait en contradiction avec ces exemples. On se limitera à des *décompositions partielles*, suivant l'ordre tensoriel, à *un ordre spinoriel fixé* ν. Sauf pour $\nu = 0$ et $\nu = 1$, elles dépendront du dalembertien choisi, et se présenteront comme une *hypothèse sur les coefficients* $l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$. Cette hypothèse est la suivante :

Les coefficients ${}^{(p,\nu)}l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ des dalembertiens (14-6) sur les p-tenseurs-ν-spineurs sont, pour chaque ordre spinoriel ν fixé, 2-décomposables suivant l'ordre tensoriel, mais pas toujours 1-décomposables

$$(14\text{-}10)\quad {}^{(p,\nu)}l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} = \sum_{u=1}^{p}\delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{B}^u}\,{}^{(1,\nu)}l^{\alpha_uⓐ}_{\beta_uⓑ} - (p-1)\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\,{}^{(0,\nu)}l^{ⓐ}_{ⓑ} + \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p}\delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{B}^{uv}}\,{}^{(\nu)}\mathrm{J}^{\alpha_u\alpha_vⓐ}_{\beta_u\beta_vⓑ}.$$

L'étude des cas particuliers (14-1) et (14-4), et des exemples de généralisation (14-7), (14-8) et (14-9) permet de vérifier aisément qu'ils possèdent cette propriété :

les matrices ${}^{(p,0)}l^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ définies en (14-1)′ pour $\nu = 0$ sont 2-décomposables mais non 1-décomposables, car

$$(14\text{-}11)\qquad {}^{(0)}\mathrm{J}^{\alpha_u\alpha_v}_{\beta_u\beta_v} = 2\mathrm{R}^{\alpha_u}{}_{\beta_u}{}^{\alpha_v}{}_{\beta_v}\ ;$$

les matrices ${}^{(p,1)}l^{\mathcal{A}a}_{\mathcal{B}b}$ définies en (14-4)′ pour $\nu = 1$ sont 1-décomposables

$$(14\text{-}12)\qquad {}^{(1)}\mathrm{J}^{\alpha_u\alpha_va}_{\beta_u\beta_vb} = 0,$$

ainsi que les matrices ${}^{(p,\nu)}l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ définies en (14-7)′ et (14-8)′ (dalembertiens généralisés de Tran Van Tan)

$$(14\text{-}13)\qquad {}^{(\nu)}\mathrm{J}^{\alpha_u\alpha_vⓐ}_{\beta_u\beta_vⓑ} = 0\ ;$$

quant au troisième exemple (14-9) de généralisation, on obtient par récurrence, à partir de (14-11) pour $\nu = 2\nu'$, et de (14-12) pour $\nu = 2\nu' + 1$,

$$(14\text{-}14) \qquad {}^{(2\nu')}J^{\alpha_u\alpha_v ⓐ}_{\beta_u\beta_v ⓑ} = 2\delta^{ⓐ}_{ⓑ} R^{\alpha_u \quad \alpha_v}_{\quad \beta_u \quad \beta_v}, \qquad {}^{(2\nu'+1)}J^{\alpha_u\alpha_v ⓐ}_{\beta_u\beta_v ⓑ} = 0.$$

Aucune autre hypothèse de décomposition ne sera faite sur les coefficients ${}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}$ des dalembertiens (14-6).

Un opérateur de Klein-Gordon avec terme de masse $(\square + m^2)$, où m est une constante, associé à un dalembertien riemannien $\square$ quelconque (14-6), est aussi un opérateur de la forme (14-6), le coefficient ${}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}(x)$ y étant remplacé par

$$(14\text{-}15) \qquad {}^{(p,\nu)}l'^{A}_{B}(x) = {}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}(x) + m^2\delta^{A}_{B}.$$

Il est clair que ${}^{(p,\nu)}l'^{A}_{B}$ vérifie les mêmes formules de décomposition que ${}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}$.

15) **Paramétrix et noyau de diffusion.**

Puisque $b^{A\mu}_{B} = 0$, la paramétrix est la même que pour l'opérateur $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$. Elle vérifie donc (6-3)

$${}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}(x', x) = \{ {}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}(x', x) \}_{x'} \, {}^{(0,0)}\sigma(x', x),$$

où ${}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'}$ désigne le bi-p-tenseur-ν-spineur de transport parallèle selon la connexion riemannienne et la connexion spinorielle canonique (3-2). ${}^{(0,0)}\sigma$ est définie par (7-6).

Si on essaie d'écrire la relation (8-4) entre les noyaux de diffusion relatifs aux opérateurs de Klein-Gordon, on trouve un reste

$$\begin{aligned}
&\left\{ {}^{(p,\nu)}l^{A}_{B} - \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \delta^{A\,uv}_{B\,uv} \, {}^{(2)}l^{a_u a_v}_{b_u b_v} + (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A\,u}_{B\,u} \, {}^{(1)}l^{a_u}_{b_u} \right\}_{x'} {}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'} \\
&\qquad = {}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'} \left\{ {}^{(p,\nu)}l^{A}_{B} - 2\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p} \delta^{A\,uv}_{B\,uv} R^{\alpha_u \quad \alpha_v}_{\quad \beta_u \quad \beta_v} \right. \\
(15\text{-}1) \qquad &\qquad - (\nu-1)\sum_{u=1}^{p} \delta^{A\,u}_{B\,u} R^{\alpha_u}_{\beta_u} - \frac{\nu(\nu-3)}{8} R\delta^{A}_{B} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{p}\sum_{w=1}^{\nu} \delta^{A\,uw}_{B\,uw} R^{\alpha_u \quad \xi}_{\quad \beta_u \quad \mu} (\gamma_{\xi}\gamma^{\mu})^{a_w}_{b_w} \\
&\qquad \left. - \frac{1}{8}\sum_{1\leqslant w<x\leqslant \nu} \delta^{A\,wx}_{B\,wx} R_{\lambda\mu,\nu\xi} (\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu})^{a_w}_{b_w} (\gamma^{\nu}\gamma^{\xi})^{a_x}_{b_x} \right\}_{x'}.
\end{aligned}$$

De même, dans les décompositions avec reste (8-7) de ${}^{(2,0)}\mathrm{M}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}$, ${}^{(1,1)}\mathrm{M}^{\alpha a}_{\rho' r'}$, ${}^{(0,2)}\mathrm{M}^{a_1a_2}_{r'_1r'_2}$, apparaissent, outre ${}^{(0,0)}\sigma\mathrm{Q}$, de nouveaux termes complémentaires qui s'écrivent, respectivement,

$$(15\text{-}2)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2\left\{ \mathrm{R}^{\alpha_1}{}_{\alpha_2}{}^{\beta_1}{}_{\beta_2} \right\}_{x'} {}^{(2,0)}\sigma^{\beta_1\beta_2}_{\rho'_1\rho'_2} \\ \left\{ \mathrm{R}^{\alpha}_{\beta}\delta^a_b - \dfrac{1}{2}\mathrm{R}^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\xi}{}_{\mu}(\gamma_\xi\gamma^\mu)^a_b \right\}_{x'} {}^{(1,1)}\sigma^{\beta b}_{\rho' r'} \\ \left\{ \dfrac{\mathrm{R}}{4}\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2} + \dfrac{1}{8}\mathrm{R}_{\lambda\mu,\nu\xi}(\gamma^\lambda\gamma^\mu)^{a_1}_{b_1}(\gamma^\nu\gamma^\xi)^{a_2}_{b_2} \right\}_{x'} {}^{(0,2)}\sigma^{b_1b_2}_{r'_1r'_2}. \end{array}\right.$$

La décomposition d'ordre 2, ayant un reste (15-1), perd de l'intérêt; c'est la décomposition d'ordre 1 avec reste qui, pratiquement, est intéressante. Cette décomposition, qui associe (8-4) et (8-7), ainsi que les termes complémentaires (15-1) et (15-2), permet d'exprimer ${}^{(p,\nu)}\mathrm{M}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ en fonction de ${}^{(0,0)}\mathrm{M}$ et des éléments d'ordre 1, ${}^{(1,0)}\mathrm{M}^{\alpha}_{\rho'}$ et ${}^{(0,1)}\mathrm{M}^{a}_{r'}$.

Il paraît cependant préférable, au lieu d'écrire directement cette décomposition, de l'effectuer par étapes, en s'inspirant des propriétés des coefficients $l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ (absence de symétrie entre indices tensoriels et spinoriels).

Ainsi, (14-10) suggère de rechercher, à chaque ordre spinoriel ν, une décomposition d'ordre 2 selon l'ordre tensoriel. Cette décomposition s'écrit

$$(15\text{-}3)\qquad \begin{aligned} {}^{(p,\nu)}\mathrm{M}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = &\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p} \left\{ {}^{(p-2,0)}\mathrm{T}^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{R}'_{uv}} \right\}_{x'} {}^{(2,\nu)}\mathrm{M}^{\alpha_u\alpha_v ⓐ}_{\rho'_u\rho'_v ⓡ'} \\ &- (p-2)\sum_{u=1}^{p} \left\{ {}^{(p-1,0)}\mathrm{T}^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{R}'_u} \right\}_{x'} {}^{(1,\nu)}\mathrm{M}^{\alpha_u ⓐ}_{\rho'_u ⓡ'} \\ &+ \frac{(p-2)(p-1)}{2}\left\{ {}^{(p,0)}\mathrm{T}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'} \right\}_{x'} {}^{(0,\nu)}\mathrm{M}^{ⓐ}_{ⓡ'}. \end{aligned}$$

On montre d'abord que les noyaux de diffusion ${}^{(p,\nu)}\mathrm{M}'^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ relatifs aux opérateurs $\nabla^\mu\nabla_\mu$ vérifient (15-3); on écrit en effet (8-4) pour

$${}^{(p,\nu)}\mathrm{M}'^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'},\quad {}^{(2,\nu)}\mathrm{M}'^{\alpha_1\alpha_2 ⓐ}_{\rho'_1\rho'_2 ⓡ'},\quad {}^{(1,\nu)}\mathrm{M}'^{\alpha ⓐ}_{\rho' ⓡ'},\quad {}^{(0,\nu)}\mathrm{M}'^{ⓐ}_{ⓡ'},$$

puis on vérifie que

$${}^{(0,0)}\mathrm{M}',\quad {}^{(1,0)}\mathrm{M}'^{\alpha}_{\rho'},\quad {}^{(0,1)}\mathrm{M}'^{a}_{r'},\quad {}^{(2,0)}\mathrm{M}'^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2},\quad {}^{(1,1)}\mathrm{M}'^{\alpha a}_{\rho' r'},\quad {}^{(0,2)}\mathrm{M}'^{a_1a_2}_{r'_1r'_2}$$

s'éliminent entre ces relations, pour donner une relation du type (15-3). D'autre part, en vertu de (14-10), $\left(\left\{{}^{(p,\nu)}l^{A}_{B}\right\}_{x'}\ {}^{(p,\nu)}\sigma^{B}_{R'}\right)$ vérifie aussi (15-3).

Cette décomposition d'ordre 2 est complétée par une décomposition d'ordre 1 *avec reste*, elle aussi à ordre spinoriel ν fixé. On déduit en effet des expressions (8-7) de

$$ {}^{(2,\nu)}M'^{\alpha_1\alpha_2 ⓐ}_{\rho'_1\rho'_2 ⓡ'},\quad {}^{(1,\nu)}M'^{\alpha\, ⓐ}_{\rho' ⓡ'},\quad {}^{(0,\nu)}M'^{ⓐ}_{ⓡ'}, $$

la relation

$$ \begin{aligned} &{}^{(2,\nu)}M'^{\alpha_1\alpha_2 ⓐ}_{\rho'_1\rho'_2 ⓡ'} - \left\{t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'} {}^{(1,\nu)}M'^{\alpha_1 ⓐ}_{\rho'_1 ⓡ'} - \left\{t^{\alpha_1}_{\rho'_1}\right\}_{x'} {}^{(1,\nu)}M'^{\alpha_2 ⓐ}_{\rho'_2 ⓡ'} \\ &\qquad + \left\{t^{\alpha_1}_{\rho'_1} t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'} {}^{(0,\nu)}M'^{ⓐ}_{ⓡ'} \\ (15\text{-}4) \qquad &= \left\{{}^{(0,\nu)}T^{ⓐ}_{ⓡ'}\right\}_{x'} \Big[{}^{(2,0)}M'^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2} - \left\{t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'} {}^{(1,0)}M'^{\alpha_1}_{\rho'_1} - \left\{t^{\alpha_1}_{\rho'_1}\right\}_{x'} {}^{(1,0)}M'^{\alpha_2}_{\rho'_2} \\ &\qquad + \left\{t^{\alpha_1}_{\rho'_1} t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'} {}^{(0,0)}M' \Big] \\ &= 2^{(0,\nu)}\sigma^{ⓐ}_{ⓡ'} Q\left(\left\{t^{\alpha_1}_{\rho'_1}\right\}_{x'}, \left\{t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'}\right) = 2^{(0,\nu)}\sigma^{ⓐ}_{ⓡ'} \left\{\eta^{\mu\xi} \nabla_\mu t^{\alpha_1}_{\rho'_1} \nabla_\xi t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'}. \end{aligned} $$

On déduit d'autre part de (14-10)

$$ \begin{aligned} &\left\{{}^{(2,\nu)}l^{\alpha_1\alpha_2 ⓐ}_{\beta_1\beta_2 ⓑ}\right\}_{x'} {}^{(2,\nu)}\sigma^{\beta_1\beta_2 ⓑ}_{\rho'_1\rho'_2 ⓡ'} - \left\{t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'} \left\{{}^{(1,\nu)}l^{\alpha_1 ⓐ}_{\beta_1 ⓑ}\right\}_{x'} {}^{(1,\nu)}\sigma^{\beta_1 ⓑ}_{\rho'_1 ⓡ'} \\ (15\text{-}5) \qquad &- \left\{t^{\alpha_1}_{\rho'_1}\right\}_{x'} \left\{{}^{(1,\nu)}l^{\alpha_2 ⓐ}_{\beta_2 ⓑ}\right\}_{x'} {}^{(1,\nu)}\sigma^{\beta_2 ⓑ}_{\rho'_2 ⓡ'} + \left\{t^{\alpha_1}_{\rho'_1} t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'} \left\{{}^{(0,\nu)}l^{ⓐ}_{ⓑ}\right\}_{x'} {}^{(0,\nu)}\sigma^{ⓑ}_{ⓡ'} \\ &= \left\{{}^{(\nu)}J^{\alpha_1\alpha_2 ⓐ}_{\beta_1\beta_2 ⓑ}\right\}_{x'} {}^{(2,\nu)}\sigma^{\beta_1\beta_2 ⓑ}_{\rho'_1\rho'_2 ⓡ'}. \end{aligned} $$

Il résulte de (15-4) et (15-5), pour les opérateurs de Klein-Gordon

$$ \begin{aligned} (15\text{-}6)\quad &{}^{(2,\nu)}M^{\alpha_1\alpha_2 ⓐ}_{\rho'_1\rho'_2 ⓡ'} - \left\{t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'} {}^{(1,\nu)}M^{\alpha_1 ⓐ}_{\rho'_1 ⓡ'} - \left\{t^{\alpha_1}_{\rho'_1}\right\}_{x'} {}^{(1,\nu)}M^{\alpha_2 ⓐ}_{\rho'_2 ⓡ'} + \left\{t^{\alpha_1}_{\rho'_1} t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'} {}^{(0,\nu)}M^{ⓐ}_{ⓡ'} \\ &= 2^{(0,\nu)}\sigma^{ⓐ}_{ⓡ'} \left\{\eta^{\mu\xi} \nabla_\mu t^{\alpha_1}_{\rho'_1} \nabla_\xi t^{\alpha_2}_{\rho'_2}\right\}_{x'} + \left\{{}^{(\nu)}J^{\alpha_1\alpha_2 ⓐ}_{\beta_1\beta_2 ⓑ}\right\}_{x'} {}^{(2,\nu)}\sigma^{\beta_1\beta_2 ⓑ}_{\rho'_1\rho'_2 ⓡ'}. \end{aligned} $$

Par ailleurs, la relation obtenue en (12-3) dans un cas plus général peut être appliquée à $\nabla^\mu \nabla_\mu$. Il vient en particulier pour $p = 1$

$$ \begin{aligned} (15\text{-}7)\quad &{}^{(1,\nu)}M'^{\alpha\, ⓐ}_{\rho' ⓡ'} - \left\{{}^{(0,\nu)}T^{ⓐ}_{ⓡ'}\right\}_{x'} {}^{(1,0)}M'^{\alpha}_{\rho'} - \left\{t^{\alpha}_{\rho'}\right\}_{x'} {}^{(0,\nu)}M'^{ⓐ}_{ⓡ'} + \left\{{}^{(1,\nu)}T^{\alpha\, ⓐ}_{\rho' ⓡ'}\right\}_{x'} {}^{(0,0)}M' \\ &= 2 \sum_{w=1}^{\nu} {}^{(0,\nu-1)}\sigma^{ⓐ\, w}_{ⓡ' w} \left\{\eta^{\mu\xi} \nabla_\mu t^{\alpha}_{\rho'} \nabla_\xi \tau^{a_w}_{r'_w}\right\}_{x'}. \end{aligned} $$

Les noyaux de diffusion relatifs aux opérateurs de Klein-Gordon vérifient une relation analogue, avec un second terme complémentaire

$$\begin{aligned}
&{}^{(1,\nu)}M^{\alpha\,\textcircled{a}}_{\rho'\,\textcircled{r}'} - \left\{ {}^{(0,\nu)}T^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'} \right\}_{x'} {}^{(1,0)}M^{\alpha}_{\rho'} - \left\{ t^{\alpha}_{\rho'} \right\}_{x'} {}^{(0,\nu)}M^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'} + \left\{ {}^{(1,\nu)}T^{\alpha\,\textcircled{a}}_{\rho'\,\textcircled{r}'} \right\}_{x'} {}^{(0,0)}M \\
\text{(15-8)}\qquad &= 2\,{}^{(0,0)}\sigma\Big[\sum_{w=1}^{\nu} \left\{ {}^{(0,\nu-1)}T^{\textcircled{a}\,w}_{\textcircled{r}',w}\, \eta^{\mu\xi} \nabla_{\mu} t^{\alpha}_{\rho'} \nabla_{\xi} \tau^{\;a_w}_{r'_w} \right\}_{x'} \\
&+ \left\{ \left({}^{(1,\nu)}l^{\alpha\,\textcircled{a}}_{\beta\,\textcircled{b}} - \delta^{\textcircled{a}}_{\textcircled{b}}\, {}^{(1,0)}l^{\alpha}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\, {}^{(0,\nu)}l^{\textcircled{a}}_{\textcircled{b}} \right) {}^{(1,\nu)}T^{\beta\,\textcircled{b}}_{\rho'\,\textcircled{r}'} \right\}_{x'} \Big].
\end{aligned}$$

Il reste une dernière étape : former le reste de la décomposition d'ordre 1 de ${}^{(0,\nu)}M^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}$, suivant l'ordre spinoriel. Une telle décomposition des noyaux de diffusion relatifs à $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$ se déduit de (8-4) et (8-7), écrites pour $p = 0$. Pour les opérateurs de Klein-Gordon, il vient, compte tenu de (14-4)'

$$\begin{aligned}
&{}^{(0,\nu)}M^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'} - \sum_{w=1}^{\nu} \left\{ {}^{(0,\nu-1)}T^{\textcircled{a}\,w}_{\textcircled{r}',w} \right\}_{x'} {}^{(0,1)}M^{a_w}_{r'_w} + (\nu - 1) \left\{ {}^{(0,\nu)}T^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'} \right\}_{x'} {}^{(0,0)}M \\
\text{(15-9)}\qquad &= 2^{(0,0)}\sigma\Big[\sum_{1 \leqslant v < w \leqslant \nu} \left\{ {}^{(0,\nu-2)}T^{\textcircled{a}\,vw}_{\textcircled{r}',vw}\, \eta^{\mu\xi} \nabla_{\mu} \tau^{\;a_v}_{r'_v} \nabla_{\xi} \tau^{\;a_w}_{r'_w} \right\}_{x'} \\
&+ \left\{ \left({}^{(0,\nu)}l^{\textcircled{a}}_{\textcircled{b}} + \frac{\nu}{4} R \delta^{\textcircled{a}}_{\textcircled{b}} \right) {}^{(0,\nu)}T^{\textcircled{b}}_{\textcircled{r}'} \right\}_{x'} \Big].
\end{aligned}$$

Les relations (15-3), (15-6), (15-8) et (15-9) permettent bien, comme on le cherchait, d'exprimer un noyau de diffusion d'ordre quelconque, relatif à un opérateur de Klein-Gordon, en fonction :

— des *trois éléments primitifs* ${}^{(0,0)}M$, ${}^{(1,0)}M^{\alpha}_{\rho'}$, ${}^{(0,1)}M^{a}_{r'}$;

— des termes complémentaires définis en (8-9);

— d'autres termes complémentaires faisant intervenir la *courbure* de la connexion riemannienne.

16) Application à la Physique mathématique.

Les formules les plus intéressantes sont celles qui concernent les trois cas particuliers *a)*, *b)* et *c)*.

a) Spin entier p; $\nu = 0$.

Les relations intéressant ce cas sont (15-3) et (15-6). Compte tenu de (14-1)', elles s'écrivent pour $\nu = 0$

$$\begin{aligned}
\text{(15-3)}_a\qquad {}^{(p)}M^{\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'} = &\sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p} \left\{ {}^{(p-2,0)}T^{\mathcal{A}\,uv}_{\mathfrak{R}',uv} \right\}_{x'} {}^{(2)}M^{\alpha_u \alpha_v}_{\rho'_u \rho'_v} \\
&- (p-2) \sum_{u=1}^{p} \left\{ {}^{(p-1,0)}T^{\mathcal{A}\,u}_{\mathfrak{R}',u} \right\}_{x'} {}^{(1)}M^{\alpha_u}_{\rho'_u} + \frac{(p-2)(p-1)}{2} \left\{ {}^{(p,0)}T^{\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'} \right\}_{x'} {}^{(0)}M
\end{aligned}$$

$$(15\text{-}6)_a \quad {}^{(2)}M^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho_1'\rho_2'} - \left\{ t^{\alpha_2}_{\rho_2'} \right\}_{x'} {}^{(1)}M^{\alpha_1}_{\rho_1'} - \left\{ t^{\alpha_1}_{\rho_1'} \right\}_{x'} {}^{(1)}M^{\alpha_2}_{\rho_2'} + \left\{ t^{\alpha_1}_{\rho_1'} t^{\alpha_2}_{\rho_2'} \right\}_{x'} {}^{(0)}M$$
$$= 2\,{}^{(0)}\sigma \left\{ \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu t^{\alpha_1}_{\rho_1'} \nabla_\xi t^{\alpha_2}_{\rho_2'} + R^{\alpha_1}{}_{\beta_1}{}^{\alpha_2}{}_{\beta_2} t^{\beta_1}_{\rho_1'} t^{\beta_2}_{\rho_2'} \right\}_{x'}.$$

Le noyau de diffusion relatif à tout spin entier s'exprime ainsi en fonction des noyaux de diffusion relatifs aux spins 0 et 1, et de termes complémentaires simples.

b) Spin demi-entier $\left(p + \frac{1}{2}\right)$; $\nu = 1$.

Les relations intéressant ce cas sont (15-3), (15-6) et (15-8). Compte tenu de (14-3), ces relations s'écrivent pour $\nu = 1$, en changeant la variance spinorielle,

$$(15\text{-}3)_b \quad {}^{(p+1/2)}M^{\mathcal{A}r'}_{\mathcal{R}'a} = \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p} \left\{ {}^{(p-2,0)}T^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{R}'^{uv}} \right\}_{x'} {}^{(5/2)}M^{\alpha_u\alpha_v r'}_{\rho_u'\rho_v' a}$$
$$- (p-2) \sum_{u=1}^{p} \left\{ {}^{(p-1,0)}T^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{R}'^u} \right\}_{x'} {}^{(3/2)}M^{\alpha_u r'}_{\rho_u' a}$$
$$+ \frac{(p-2)(p-1)}{2} \left\{ {}^{(p,0)}T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'} \right\}_{x'} {}^{(1/2)}M^{r'}_a$$

$$(15\text{-}6)_b \quad {}^{(5/2)}M^{\alpha_1\alpha_2 r'}_{\rho_1'\rho_2' a} - \left\{ t^{\alpha_2}_{\rho_2'} \right\}_{x'} {}^{(3/2)}M^{\alpha_1 r'}_{\rho_1' a} - \left\{ t^{\alpha_1}_{\rho_1'} \right\}_{x'} {}^{(3/2)}M^{\alpha_2 r'}_{\rho_2' a}$$
$$+ \left\{ t^{\alpha_1}_{\rho_1'} t^{\alpha_2}_{\rho_2'} \right\}_{x'} {}^{(1/2)}M^{r'}_a = 2\,{}^{(1/2)}\sigma^{r'}_a \left\{ \eta^{\mu\xi} \nabla_\mu t^{\alpha_1}_{\rho_1'} \nabla_\xi t^{\alpha_2}_{\rho_2'} \right\}_{x'}$$

$$(15\text{-}8)_b \quad {}^{(3/2)}M^{\alpha r'}_{\rho' a} - \left\{ \overset{*}{\tau}{}^{r'}_a \right\}_{x'} {}^{(1)}M^{\alpha}_{\rho'} - \left\{ t^{\alpha}_{\rho'} \right\}_{x'} {}^{(1/2)}M^{r'}_a + \left\{ t^{\alpha}_{\rho'} \overset{*}{\tau}{}^{r'}_a \right\}_{x'} {}^{(0)}M$$
$$= {}^{(0)}\sigma \left\{ 2\eta^{\mu\xi} \nabla_\mu t^{\alpha}_{\rho'} \nabla_\xi \overset{*}{\tau}{}^{r'}_a + \left[R^{\alpha}_{\beta}\delta^a_b - \frac{1}{2} R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\xi}{}_{\mu} (\gamma^\mu \gamma_\xi)^b_a \right] t^{\beta}_{\rho'} \overset{*}{\tau}{}^{r'}_b \right\}_{x'}.$$

Le noyau de diffusion relatif à tout spin demi-entier s'exprime ainsi en fonction de ceux des spins 0,1 et 1/2 et de termes complémentaires simples.

c) Théorie de Petiau-Duffin-Kemmer; $\nu = 2$, $p = 0$.

La relation intéressant ce cas est (15-9). Compte tenu de (14-5)', elle s'écrit pour $\nu = 2$, en passant aux spineurs mixtes,

$$(15\text{-}9)_c \quad {}^{S}M^{r'c}_{as'} - \left\{ \tau^c_{s'} \right\}_{x'} {}^{(1/2)}M^{r'}_a - \left\{ \overset{*}{\tau}{}^{r'}_a \right\}_{x'} {}^{(1/2)}\overset{*}{M}{}^c_{s'} + \left\{ \overset{*}{\tau}{}^{r'}_a \tau^c_{s'} \right\}_{x'} {}^{(0)}M$$
$$= {}^{(0)}\sigma \left\{ 2\eta^{\mu\xi} \nabla_\mu \overset{*}{\tau}{}^{r'}_a \nabla_\xi \tau^c_{s'} + \frac{R}{4} \overset{*}{\tau}{}^{r'}_a \tau^c_{s'} + \frac{1}{8} R_{\lambda\mu,\nu\xi} (\gamma^\mu\gamma^\lambda)^b_a (\gamma^\nu\gamma^\xi)^c_d \overset{*}{\tau}{}^{r'}_b \tau^d_{s'} \right\}_{x'}.$$

Elle exprime le noyau de diffusion correspondant en fonction de ceux des spins 0 et 1/2, et de termes complémentaires simples.

E. Méthode de « fusion ».

La théorie de Petiau-Duffin-Kemmer traduit dans le formalisme des (1,1)-spineurs les équations de champ (du second ordre) des particules de spin 0 et 1. L'intérêt principal de cette théorie, qui s'écarte de notre propos, est d'en déduire des équations de champ du premier ordre (équations de Dirac) pour ces particules, de même que pour celles de spin demi-entier.

Le résultat intéressant pour ce travail est l'expression des propagateurs scalaire et vectoriel (spins 0 et 1) en fonction du propagateur (1,1)-spinoriel. On établit ici un résultat analogue pour les *paramétrix* et pour les *noyaux de diffusion.* Or, dans les sections précédentes, ont été formées des expressions de la paramétrix et du noyau de diffusion (1,1)-spinoriels en fonction des éléments scalaire et 1-spinoriel (décompositions d'ordre 1). La confrontation de ces résultats permet donc de prendre pour *seuls éléments primitifs* ceux du cas 1-spinoriel (spin 1/2), en accord avec le *principe de « fusion » de Louis de Broglie.*

17) La théorie de Petiau-Duffin-Kemmer.

Elle est basée sur l'isomorphisme entre 2-spineurs et éléments (non homogènes) de l'algèbre extérieure des formes

$$(17\text{-}1) \qquad \chi_c^a = (S\varphi)_c^a = \sum_{q=0}^{4} \frac{1}{q\,!}(\gamma^{\alpha_1} \dots \gamma^{\alpha_q})_c^a \varphi^{(q)}_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$$

$$(17\text{-}2) \qquad \varphi^{(q)}_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4}(\gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\alpha_q})_a^c \chi_c^a = (\Phi^{(q)}\chi)_{\alpha_1 \dots \alpha_q}.$$

Il est sous-entendu dans ces équations, et dans toute cette section, que, dans tout produit $(\gamma_{\alpha_1} \dots \gamma_{\alpha_q})_a^c$ de matrices de Dirac, les q indices $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont supposés *tous distincts.*

La théorie de Petiau-Duffin-Kemmer a été faite, en vue de ses applications à la Physique mathématique, dans le cas des opérateurs de Klein-Gordon. Elle s'étend à des opérateurs de la forme générale (I-1-1), ou (9-1), $\widehat{{}^q\mathrm{L}}$ sur les q-formes et ${}^s\mathrm{L}$ sur les (1,1)-spineurs, astreints seulement aux conditions de *transparence* à l'isomorphisme (17-1)-(17-2)

$$(17\text{-}3)\quad \left|\begin{aligned} &\sum_{q=0}^{4}\frac{1}{q\,!}(\gamma^{\beta_1}\ldots\gamma^{\beta_q})^b_d\,{}^q\widehat{\mathrm{L}}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\beta_1\ldots\beta_q}\mathrm{U}^{(q)}_{\alpha_1\ldots\alpha_q} \\ &\qquad\qquad\qquad = {}^s\mathrm{L}^{bc}_{ad}\left\{\sum_{q=0}^{4}\frac{1}{q\,!}(\gamma^{\alpha_1}\ldots\gamma^{\alpha_q})^a_c\mathrm{U}^{(q)}_{\alpha_1\ldots\alpha_q}\right\} \\ &\frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4}(\gamma_{\beta_1}\ldots\gamma_{\beta_q})^{d}_{b}\,{}^s\mathrm{L}^{bc}_{ad}\mathrm{U}^a_c = {}^q\widehat{\mathrm{L}}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\beta_1\ldots\beta_q}\left\{\frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4}(\gamma_{\alpha_1}\ldots\gamma_{\alpha_q})^c_a\mathrm{U}^a_c\right\}\end{aligned}\right.$$

Cette transparence, moyennant le théorème d'unicité des noyaux élémentaires, implique [8] que les noyaux élémentaires, ou les propagateurs, vérifient des relations

$$(17\text{-}4)\quad {}^s\mathrm{G}^{r'c}_{as'}(x', x) = \sum_{q=0}^{4}\frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4(q\,!)^2}(\gamma_{\alpha_1}\ldots\gamma_{\alpha_q})^c_a(\gamma^{\rho'_1}\ldots\gamma^{\rho'_q})^{r'}_{s'}\,{}^q\widehat{\mathrm{G}}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\rho'_1\ldots\rho'_q}(x', x).$$

18) Relations entre paramétrix et entre noyaux de diffusion.

Il faut rattacher ce résultat à la méthode de construction des propagateurs, en établissant des relations analogues à (17-4) entre paramétrix et entre noyaux de diffusion. Ces relations peuvent être établies par l'une ou l'autre de deux méthodes.

a) La première déduit les relations cherchées de la relation (17-4) établie en théorie de Petiau-Duffin-Kemmer. Les noyaux élémentaires vérifiant (17-4), il en est de même, séparément, de leurs termes de front et de leurs termes de diffusion. Il vient ainsi, pour les premiers,

$$(18\text{-}1)\quad \left\langle {}^s\overset{(0)}{\mathrm{E}}{}^{\pm r'c}_{as'}, f^a_c\right\rangle = \sum_{q=0}^{4}\frac{1}{(q\,!)^2}\left(\gamma^{\rho'_1}\ldots\gamma^{\rho'_q}\right)^{r'}_{s'}\left\langle {}^q\widehat{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\rho'_1\ldots\rho'_q}, (\Phi^{(q)}f)_{\alpha_1\ldots\alpha_q}\right\rangle,$$

valable pour tout champ (1,1)-spinoriel f^a_c, *à support compact.* (18-1) s'explicite en

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{x\in\Gamma^{\pm}_{x'}}\left\{{}^s\sigma^{r'c}_{as'}(x', x) - \sum_{q=0}^{4}\frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4(q\,!)^2}\left(\gamma^{\rho'_1}\ldots\gamma^{\rho'_q}\right)^{r'}_{s'}\right.$$
$$\left.(\gamma_{\alpha_1}\ldots\gamma_{\alpha_q})^c_a\,{}^q\widehat{\sigma}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\rho'_1\ldots\rho'_q}(x', x)\right\}f^a_c(x)d^3x = 0,$$

---

[8] A. Lichnerowicz [*2*].

d'où résulte

$$(18\text{-}2)\quad {}^{s}\sigma_{as'}^{r'c}(x', x) = \sum_{q=0}^{4} \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4(q\,!)^2} \left(\gamma^{\rho'_1} \ldots \gamma^{\rho'_q}\right)_{s'}^{r'} (\gamma_{\alpha_1} \ldots \gamma_{\alpha_q})_{c}^{a} \widehat{{}^{(q)}\sigma}{}_{\rho'_1 \ldots \rho'_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(x', x).$$

Cette relation et la condition de transparence (17-3) impliquent la relation entre noyaux de diffusion

$$(18\text{-}3)\quad {}^{s}\mathrm{M}_{as'}^{r'c}(x', x) = \sum_{q=0}^{4} \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4(q\,!)^2} \left(\gamma^{\rho'_1} \ldots \gamma^{\rho'_q}\right)_{s'}^{r'} (\gamma_{\alpha_1} \ldots \gamma_{\alpha_q})_{a}^{c}\, {}^{q}\widehat{\mathrm{M}}{}_{\rho'_1 \ldots \rho'_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(x', x).$$

Soit en effet un champ (1,1)-spinoriel quelconque U_c^a, à support compact. Il vérifie les équations de Kirchhoff

$$4\pi \mathrm{U}_{s'}^{r'}(x') = \iiint_{x \in \Gamma_{x'}^{\pm}} \left\{ {}^{s}\mathrm{M}_{as'}^{r'c}(x', x)\mathrm{U}_c^a(x) - {}^{s}\sigma_{bs'}^{r'd}(x', x)\, {}^{s}\mathrm{L}_{ad}^{bc}\mathrm{U}_c^a(x) \right\} d^3x.$$

Les q-formes $(\Phi^{(q)}\mathrm{U})$ vérifient chacune les équations de Kirchhoff

$$4\pi(\Phi^{(q)}\mathrm{U})_{\rho'_1 \ldots \rho'_q}(x') = \iiint_{x \in \Gamma_{x'}^{\pm}} \left\{ {}^{q}\widehat{\mathrm{M}}{}_{\rho'_1 \ldots \rho'_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(x', x)(\Phi^{(q)}\mathrm{U})_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(x) \right.$$
$$\left. - {}^{q}\widehat{\sigma}{}_{\rho'_1 \ldots \rho'_q}^{\beta_1 \ldots \beta_q}(x', x)\, {}^{q}\widehat{\mathrm{L}}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(\Phi^{(q)}\mathrm{U})_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(x) \right\} d^3x.$$

La comparaison de ces deux systèmes d'équations de Kirchhoff montre que, compte tenu des définitions (17-1) et (17-2) de S et $\Phi^{(q)}$, des conditions de transparence (17-3), et de la relation (18-2) établie ci-dessus,

$$(18\text{-}4)\quad \iiint_{x \in \Gamma_{x'}^{\pm}} \left\{ {}^{s}\mathrm{M}_{as'}^{r'c}(x', x) - \sum_{q=0}^{4} \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4(q\,!)^2} \left(\gamma^{\rho'_1} \ldots \gamma^{\rho'_q}\right)_{s'}^{r'} (\gamma_{\alpha_1} \ldots \gamma_{\alpha_q})_{a}^{c} \right.$$
$$\left. {}^{q}\widehat{\mathrm{M}}{}_{\rho'_1 \ldots \rho'_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(x', x) \right\} \mathrm{U}_c^a(x) d^3x = 0,$$

pour tout champ (1,1)-spinoriel U_c^a *à support compact.* (18-3) en résulte.

Les équations (18-2) et (18-3) se résolvent sur le modèle de (17-2) pour $q = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$(18\text{-}5)\quad \left\{ \begin{aligned} {}^{q}\widehat{\sigma}{}_{\rho'_1 \ldots \rho'_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(x', x) &= \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4} \left(\gamma_{\rho'_1} \ldots \gamma_{\rho'_q}\right)_{r'}^{s'} (\gamma^{\alpha_1} \ldots \gamma^{\alpha_q})_{c}^{a}\, {}^{s}\sigma_{as'}^{r'c}(x', x) \\ {}^{q}\widehat{\mathrm{M}}{}_{\rho'_1 \ldots \rho'_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}(x', x) &= \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4} \left(\gamma_{\rho'_1} \ldots \gamma_{\rho'_q}\right)_{r'}^{s'} (\gamma^{\alpha_1} \ldots \gamma^{\alpha_q})_{c}^{a}\, {}^{s}\mathrm{M}_{as'}^{r'c}(x', x)\cdot \end{aligned} \right.$$

b) Une autre démonstration est basée sur l'étude des conditions de transparence (17-3). Ces conditions se traduisent sur les coefficients $g^{\lambda\nu}\delta^{A}_{B}$, $h^{A\lambda}_{B}$, k^{A}_{B} de l'opérateur (I-1-1) considéré, par des relations de la forme

$$(18\text{-}6)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\gamma^{\beta_1}\ldots\gamma^{\beta_q})^{b}_{d}\,{}^{(q,0)}\mathrm{H}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\beta_1\ldots\beta_q} = {}^{s}\mathrm{H}^{bc}_{ad}(\gamma^{\alpha_1}\ldots\gamma^{\alpha_q})^{a}_{c}\\ &{}^{(q,0)}\mathrm{H}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\beta_1\ldots\beta_q}(\gamma_{\alpha_1}\ldots\gamma_{\alpha_q})^{c}_{a} = (\gamma_{\beta_1}\ldots\gamma_{\beta_q})^{ds}_{b}\mathrm{H}^{bc}_{ad}.\end{aligned}\right.$$

Ces relations sont également vérifiées par les coefficients $b^{A\mu}_{B}$ et l^{A}_{B} des opérateurs L mis sous forme covariante (9-1) : la dérivation covariante selon la connexion riemannienne et la connexion spinorielle canonique (3-2) est en effet transparente aux matrices de Dirac.

Les relations (18-6) sont aussi satisfaites par

$$(18\text{-}7)\qquad \left\{\begin{aligned} &{}^{(q,0)}\overline{\mathrm{C}}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}{}_{\beta_1\ldots\beta_q\mu} = -\frac{1}{2}\,\eta_{\mu\xi}\mathrm{A}^{\xi}_{\lambda}\left({}^{(q,0)}h^{\alpha_1\ldots\alpha_q\lambda}_{\beta_1\ldots\beta_q} - \delta^{\alpha_1}_{\beta_1}\ldots\delta^{\alpha_q}_{\beta_q}{}^{(0,0)}h^{\lambda}\right)\\ &{}^{s}\overline{\mathrm{C}}^{c,b}_{a,d\mu} = -\frac{1}{2}\,\eta^{\mu\xi}\mathrm{A}^{\xi}_{\lambda}\left({}^{s}h^{bc\lambda}_{ad} - \delta^{b}_{a}\delta^{c}_{d}{}^{(0,0)}h^{\lambda}\right),\end{aligned}\right.$$

coefficients respectifs des connexions q-lorentziennes et (1,1)-spinorielle associées aux opérateurs L considérés. Les relations (18-6) sur ces coefficients s'écrivent

$$(18\text{-}8)\qquad \left\{\begin{aligned} &{}^{(q,0)}\overline{\mathrm{C}}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}{}_{\beta_1\ldots\beta_q\mu}(\gamma^{\beta_1}\ldots\gamma^{\beta_q})^{b}_{d} - {}^{s}\overline{\mathrm{C}}^{c,b}_{a,d\mu}(\gamma^{\alpha_1}\ldots\gamma^{\alpha_q})^{a}_{c} = 0\\ &{}^{(q,0)}\overline{\mathrm{C}}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}{}_{\beta_1\ldots\beta_q\mu}(\gamma_{\alpha_1}\ldots\gamma_{\alpha_q})^{c}_{a} - {}^{s}\overline{\mathrm{C}}^{c,b}_{a,d\mu}(\gamma_{\beta_1}\ldots\gamma_{\beta_q})^{d}_{b} = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces relations expriment que chaque q-forme-(1,1)-spineur défini par produit de matrices de Dirac est à dérivée covariante nulle dans la connexion q-lorentzienne-(1,1)-spinorielle construite canoniquement à partir des connexions (18-7).

Cette propriété peut encore s'exprimer par des relations de *transport parallèle*. A la connexion q-lorentzienne ${}^{(q,0)}\overline{\mathrm{C}}^{\alpha_1\ldots\alpha_q}{}_{\beta_1\ldots\beta_q\mu}$ correspond le bi-q-tenseur de transport parallèle ${}^{(q,0)}w^{\alpha_1\ldots\alpha_q}_{\rho_1\ldots\rho_q}(x', x)$; à la connexion (1,1)-spinorielle ${}^{s}\overline{\mathrm{C}}^{c,b}_{a,d\mu}$ correspond le bi-(1,1)-spineur de transport parallèle

${}^{s}w^{r'c}_{as'}(x', x)$; aux connexions opposées correspondent les bi-tenseurs ou bi-spineurs duals de transport parallèle.

(18-9)

$$\begin{cases} \dfrac{d^{(q,0)}w^{\alpha_1\dots\alpha_q}_{\rho'_1\dots\rho'_p}}{d\varphi} = -v^{\mu}\,{}^{(q,0)}\overline{C}^{\alpha_1\dots\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_q\mu}\,{}^{(q,0)}w^{\beta_1\dots\beta_q}_{\rho'_1\dots\rho'_q}, \quad {}^{(q,0)}w^{\alpha_1\dots\alpha_q}_{\rho'_1\dots\rho'_q}(0) = \delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\dots\delta^{\alpha'_q}_{\rho'_q} \\ \dfrac{d^{(q,0)}\overset{*}{w}{}^{\rho'_1\dots\rho'_q}_{\beta_1\dots\beta_q}}{d\varphi} = v^{\mu}\,{}^{(q,0)}\overline{C}^{\alpha_1\dots\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_q\mu}\,{}^{(q,0)}\overset{*}{w}{}^{\rho'_1\dots\rho'_q}_{\alpha_1\dots\alpha_q}, \quad {}^{(q,0)}\overset{*}{w}{}^{\rho'_1\dots\rho'_q}_{\beta_1\dots\beta_q}(0) = \delta^{\rho'_1}_{\beta'_1}\dots\delta^{\rho'_q}_{\beta'_q} \\ \dfrac{d\,{}^{s}w^{r'c}_{as'}}{d\varphi} = -v^{\mu}\,{}^{s}\overline{C}^{c,b}_{a,d\mu}\,{}^{s}w^{r'd}_{bs'} = v^{\mu}\,{}^{s}\overline{C}^{b,c}_{d,a\mu}\,{}^{s}w^{r'd}_{bs'}, \quad {}^{s}w^{r'c}_{as'}(0) = \delta^{r'}_{a'}\delta^{c'}_{s'}. \end{cases}$$

De (17-3) résultent donc les relations de transport parallèle des produits de matrice de Dirac

$$(18\text{-}10) \qquad \begin{cases} (\gamma^{\alpha_1}\dots\gamma^{\alpha_q})^b_d = {}^{(q,0)}w^{\alpha_1\dots\alpha_q}_{\rho'_1\dots\rho'_q}\,{}^{s}w^{s'b}_{dr'}\left(\gamma^{\rho'_1}\dots\gamma^{\rho'_q}\right)^{r'}_{s'} \\ (\gamma_{\beta_1}\dots\gamma_{\beta_q})^c_a = {}^{(q,0)}\overset{*}{w}{}^{\rho'_1\dots\rho'_q}_{\beta_1\dots\beta_q}\,{}^{s}w^{r'c}_{as'}\left(\gamma_{\rho'_1}\dots\gamma_{\rho'_q}\right)^{s'}_{r'}. \end{cases}$$

On en déduit, en vertu de (9-11)

$$(18\text{-}11) \qquad \widehat{{}^{q}\sigma}{}^{\beta_1\dots\beta_q}_{\rho'_1\dots\rho'_q}\left(\gamma^{\rho'_1}\dots\gamma^{\rho'_q}\right)^{r'}_{s'} = (\gamma^{\beta_1}\dots\gamma^{\beta_q})^b_d\,{}^{s}\sigma^{r'd}_{bs'}\ ;$$

puis, en vertu de (18-6) et (18-11),

$$\widehat{{}^{q}\mathrm{H}}{}^{\alpha_1\dots\alpha_q}_{\beta_1\dots\beta_q}\widehat{{}^{q}\sigma}{}^{\beta_1\dots\beta_q}_{\rho'_1\dots\rho'_q}\left(\gamma^{\rho'_1}\dots\gamma^{\rho'_q}\right)^{r'}_{s'} = (\gamma^{\alpha_1}\dots\gamma^{\alpha_q})^{as}_{c}\mathrm{H}^{bcs}_{ad}\sigma^{r'd}_{bs'}.$$

Les matrices de Dirac étant des constantes, une telle relation peut être dérivée sans modification : 1 fois pour $\mathrm{H}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} = h^{\mathrm{A}\lambda}_{\mathrm{B}}$, 2 fois pour $\mathrm{H}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}g^{\lambda\nu}$; d'où

$$(18\text{-}12) \qquad \widehat{{}^{q}\mathrm{M}}{}^{\alpha_1\dots\alpha_q}_{\rho'_1\dots\rho'_q}\left(\gamma^{\rho'_1}\dots\gamma^{\rho'_q}\right)^{r'}_{s'} = (\gamma^{\alpha_1}\dots\gamma^{\alpha_q})^{as}_{c}\mathrm{M}^{r'c}_{as'}.$$

De (18-11) et (18-12) on déduit sans difficulté (18-1) et (18-3). On a ainsi *une autre démonstration* des relations (18-1) et (18-3), ou (18-5) (⁹).

(⁹) Le calcul par itération des noyaux élémentaires comme noyaux résolvants des équations intégrales de Kirchhoff, montre que (18-2) et (18-3) impliquent (17-4).

19) Réduction du nombre d'éléments primitifs.

a) Considérons tout d'abord le cas des opérateurs de Klein-Gordon définis au § 14. (18-5) exprime ${}^{q}\widehat{M}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}_{\rho_1 \dots \rho_q}$ en fonction de ${}^{s}M^{r'c}_{as'}$, donc, en vertu de $(15\text{-}9)_c$, en fonction de ${}^{(1/2)}M^{r'}_{a}$, de ${}^{(0)}M$, et de termes complémentaires simples. Or *deux des trois éléments primitifs* trouvés à la section D, ${}^{(0)}M$ et ${}^{(1)}M^{\alpha}_{\rho'}$, sont précisément parmi ceux qui vérifient (18-5); d'où *réduction des éléments primitifs à un seul,* ${}^{(1/2)}M^{r'}_{a}$.

De façon explicite, on obtient pour ${}^{(0)}M$, compte tenu des identités vérifiées par le tenseur de courbure (A. Lichnerowicz [*2*], § 15)

$$
\begin{aligned}
{}^{(0)}M = \frac{1}{4}\,\delta^{s'}_{r'}\delta^{a}_{c}\,{}^{s}M^{r'c}_{as'} &= \frac{1}{4}\{\tau^{a}_{r'}\}_{x'}\,{}^{(1/2)}M^{r'}_{a} + \frac{1}{4}\{\overset{*}{\tau}{}^{s'}_{c}\}_{x'}\,{}^{(1/2)}\overset{*}{M}{}^{c}_{s'} - {}^{(0)}M \\
&\quad + \frac{{}^{(0)}\sigma}{2}\{\eta^{\mu\xi}\nabla_{\mu}\tau^{a}_{r'}\nabla_{\xi}\overset{*}{\tau}{}^{r'}_{a} + R\}_{x'}
\end{aligned}
$$

d'où

$$
(19\text{-}1) \qquad {}^{(0)}M = \frac{1}{4}\{\tau^{a}_{r'}\}_{x'}\,{}^{(1/2)}M^{r'}_{a} + \frac{1}{4}\,{}^{(0)}\sigma\{\eta^{\mu\xi}\nabla_{\mu}\tau^{a}_{r'}\nabla_{\xi}\overset{*}{\tau}{}^{r'}_{a} + R\}_{x'}.
$$

On obtient de même pour ${}^{(1)}M^{\alpha}_{\rho'}$

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}M^{\alpha}_{\rho'} = &-\frac{1}{4}\,\gamma^{\alpha a}{}_{c}\gamma_{\rho'}{}^{s'}{}_{r'}\left(\{\tau^{c}_{s'}\}_{x'}\,{}^{(1/2)}M^{r'}_{a} + \{\overset{*}{\tau}{}^{r'}_{a}\}_{x'}\,{}^{(1/2)}\overset{*}{M}{}^{c}_{s'}\right) \\
&- \{t^{\alpha}_{\rho'}\}_{x'}\,{}^{(0)}M + {}^{(0)}\sigma\left[-\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha a}{}_{c}\gamma_{\rho'}{}^{s'}{}_{r'}\{\eta^{\mu\xi}\nabla_{\mu}\overset{*}{\tau}{}^{r'}_{a}\nabla_{\xi}\tau^{c}_{s'}\}_{x'} + \left\{\left(\frac{R}{2}\,\delta^{\alpha}_{\beta} - R^{\alpha}_{\beta}\right)t^{\beta}_{\rho'}\right\}_{x'}\right].
\end{aligned}
$$

La substitution de (19-1) donne

$$
\begin{aligned}
(19\text{-}2) \qquad {}^{(1)}M^{\alpha}_{\rho'} = &-\frac{1}{4}\left(2\gamma^{\alpha a}{}_{c}\gamma_{\rho'}{}^{s'}{}_{r'} + \{t^{\alpha}_{\rho'}\}_{x'}\delta^{a}_{c}\delta^{s'}_{r'}\right)\Big({}^{(1/2)}M^{r'}_{a}\{\tau^{c}_{s'}\}_{x'} \\
&+ {}^{(0)}\sigma\{\eta^{\mu\xi}\nabla_{\mu}\overset{*}{\tau}{}^{r'}_{a}\nabla_{\xi}\tau^{c}_{s'}\}_{x'}\Big) + \frac{1}{4}\{R\delta^{\alpha}_{\beta} - 4R^{\alpha}_{\beta}\}_{x'}\,{}^{(1)}\sigma^{\beta}_{\rho'}.
\end{aligned}
$$

REMARQUE. — Le second terme complémentaire de (19-2), qui fait intervenir la courbure riemannienne, s'annule sur un espace-temps d'Einstein.

Les équations (19-1) et (19-2) montrent que *tous les noyaux de diffusion* relatifs aux opérateurs de Klein-Gordon (14-6), pour p et ν quelconques, peuvent être exprimés en fonction du *seul élément primitif* ${}^{(1/2)}M_a^{r'}$ et de termes complémentaires simples ([10]).

La paramétrix vérifie des relations analogues. On déduit en effet de (6-3) la décomposition d'ordre 1

$$ {}^{s}\sigma_{as'}^{r'c} = {}^{(0)}\sigma \{ \overset{*}{\tau}{}_a^{r'} \tau_{s'}^{c} \}_{x'} = \{ \tau_{s'}^{c} \}_{x'} {}^{(1/2)}\sigma_a^{r'} + \{ \overset{*}{\tau}{}_a^{r'} \}_{x'} {}^{(1/2)}\overset{*}{\sigma}{}_{s'}^{c} - \{ \overset{*}{\tau}{}_a^{r'} \tau_{s'}^{c} \}_{x'} {}^{(0)}\sigma. $$

Il en résulte, en vertu de (18-5),

$$ {}^{(0)}\sigma = \frac{1}{4}\, \delta_{r'}^{s'} \delta_c^{a}\, {}^{s}\sigma_{a\,s'}^{r'c} = \frac{1}{4} \{ \tau_{r'}^{a} \}_{x'} {}^{(1/2)}\sigma_a^{r'} + \frac{1}{4} \{ \overset{*}{\tau}{}_a^{r'} \}_{x'} {}^{(1/2)}\sigma_{r'}^{a} - {}^{(0)}\sigma, $$

soit

$$ {}^{(0)}\sigma = \frac{1}{4} \{ \tau_{r'}^{a} \}_{x'} {}^{(1/2)}\sigma_a^{r'} \; ; \tag{19-3} $$

$$ \begin{aligned} {}^{(1)}\sigma_{\rho'}^{\alpha} &= - \frac{1}{4} \gamma_{\rho' r'}^{\;\;s'} \gamma^{\alpha a}{}_{c}\, {}^{s}\sigma_{as'}^{r'c} \\ &= - \frac{1}{4} \gamma_{\rho' r'}^{\;\;s'} \gamma^{\alpha a}{}_{c} (\{ \tau_{s'}^{c} \}_{x'} {}^{(1/2)}\sigma_a^{r'} + \{ \overset{*}{\tau}{}_a^{r'} \}_{x'} {}^{(1/2)}\overset{*}{\sigma}{}_{s'}^{c}) - \{ t_{\rho'}^{\alpha} \}_{x'} {}^{(0)}\sigma \end{aligned} $$

d'où

$$ {}^{(1)}\sigma_{\rho'}^{\alpha} = - \frac{1}{4} (2 \gamma_{\rho' r'}^{\;\;s'} \gamma^{\alpha a}{}_{c} + \{ t_{\rho'}^{\alpha} \}_{x'} \delta_c^{a} \delta_{r'}^{s'}) \{ \tau_{s'}^{c} \}_{x'} {}^{(1/2)}\sigma_a^{r'}. \tag{19-4} $$

Enfin, en vertu de (18-10), il vient pour le bi-1-tenseur de transport parallèle

$$ t_{\rho'}^{\alpha}(x', x) = - \frac{1}{4} \gamma_{\rho' r'}^{\;\;s'} \gamma^{\alpha a}{}_{c} \overset{*}{\tau}{}_a^{r'}(x', x) \tau_{s'}^{c}(x', x). \tag{19-5} $$

THÉORÈME DE « FUSION ». — *Les éléments* $\sigma_{R'}^{A}(x', x)$ *et* $M_{R'}^{A}(x', x)$, *à partir desquels se calculent par itération noyaux élémentaires et propagateurs, peuvent être exprimés, pour un spin quelconque, en fonction des* **éléments relatifs au spin 1/2,** *et de termes complémentaires simples, en accord avec le* **principe de « fusion » de Louis de Broglie.**

b) Cette propriété s'étend évidemment à d'autres opérateurs. Il suffit de considérer des opérateurs (9-1) satisfaisant à l'hypothèse (10-1), et dont les coefficients $b_B^{A\mu}$ et l_B^A vérifient les conditions de transparence (18-6).

([10]) Dans les formules (19-1) et (19-2) on peut faire intervenir, au lieu du noyau de diffusion ${}^{(1/2)}M_a^{r'}$ du cas 1-spinoriel, le noyau de diffusion du cas spinoriel « de type positif », et le noyau de diffusion du cas spinoriel « de type négatif » (cf. A. Lichnerowicz [*4*]), le type étant le même en x' et en x ; c'est-à-dire les noyaux de diffusion du cas des « spineurs à 2 composantes ». Il suffit pour le voir de façon simple de choisir un système particulier de matrices de Dirac, bien adapté à la séparation des types positif et négatif.

L'étude de la section C montre que ${}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'}$ s'exprime en fonction de ${}^{(0,0)}M$, ${}^{(1,0)}M^{\alpha}_{\rho'}$, ${}^{(0,1)}M^{a}_{r'}$, et de termes complémentaires simples. En particulier, ${}^{(0,2)}M^{a_1a_2}_{r'_1r'_2}$ s'exprime en fonction de ${}^{(0,1)}M^{a}_{r'}$ et de termes complémentaires simples; les relations (18-5) permettent alors de réduire les éléments primitifs à ${}^{(0,1)}M^{a}_{r'}$.

Avec l'hypothèse $l^{A}_{B} = 0$, par exemple, il vient ainsi

$$(19\text{-}6)\quad {}^{(0,0)}M = \frac{1}{4}\left\{ {}^{(0,1)}\overset{*}{w}{}^{r'}_{a} \right\}_{x'} {}^{(0,1)}M^{a}_{r'} + \frac{1}{4}\,{}^{(0,0)}\sigma \left\{ \eta^{\mu\xi} \nabla_{\mu}\, {}^{(0,1)}w^{a}_{r'} \nabla_{\xi}\, {}^{(0,1)}\overset{*}{w}{}^{r'}_{a} \right\}_{x'}$$

$$(19\text{-}7)\quad {}^{(1,0)}M^{\alpha}_{\rho'} = \frac{1}{4}\left(2\gamma^{r'_1r'_2}_{\rho'}\gamma^{\alpha}_{a_1a_2} - \left\{ {}^{(1,0)}w^{\alpha}_{\rho'} \right\}_{x'} \Gamma_{a_1a_2}\Gamma^{r'_1r'_2}\right)$$
$$\times \left(\left\{ {}^{(0,1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'} {}^{(0,1)}M^{a_1}_{r'_1} + {}^{(0,0)}\sigma \left\{ \eta^{\mu\xi} \nabla_{\mu}\, {}^{(0,1)}w^{a_1}_{r'_1} \nabla_{\xi}\, {}^{(0,1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}\right).$$

Quant à (19-3), (19-4) et (19-5), il suffit de les transcrire en remplaçant $t^{\alpha}_{\rho'}$ et $\tau^{a}_{r'}$ par ${}^{(1,0)}w^{\alpha}_{\rho'}$ et ${}^{(0,1)}w^{a}_{r'}$ et en changeant certaines variances spinorielles.

c) Remarque. — Une méthode formellement analogue utilisant, par exemple dans le cas des opérateurs de Klein-Gordon, la transparence

$$\eta_{\beta_1\beta_2} LU \equiv L^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}(\eta_{\alpha_1\alpha_2} U),$$

et le caractère uniforme du champ $\eta_{\alpha_1\alpha_2}$, exprime ${}^{(0)}M$ en fonction de ${}^{(2)}M^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_2\rho'_1}$ et donc de ${}^{(1)}M^{\alpha}_{\rho'}$. Il vient d'abord

$$(19\text{-}8)\qquad {}^{(0)}\sigma = \frac{1}{4}\eta_{\alpha_1\alpha_2}\,{}^{(2)}\sigma^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}\eta^{\rho'_1\rho'_2}\,; \qquad {}^{(0)}M = \frac{1}{4}\eta_{\alpha_1\alpha_2}\,{}^{(2)}M^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}\eta^{\rho'_1\rho'_2}.$$

On en déduit

$$(19\text{-}9)\qquad {}^{(0)}M = \frac{1}{4}\left\{ \overset{*}{t}{}^{\rho'}_{\alpha} \right\}_{x'} {}^{(1)}M^{\alpha}_{\rho'} + \frac{1}{4}\,{}^{(0)}\sigma \left\{ \eta^{\mu\xi} \nabla_{\mu} t^{\alpha}_{\rho'} \nabla_{\xi} \overset{*}{t}{}^{\rho'}_{\alpha} + R \right\}_{x'}$$

$$(19\text{-}10)\qquad {}^{(0)}\sigma = \frac{1}{4}\left\{ \overset{*}{t}{}^{\rho'}_{\alpha} \right\}_{x'} {}^{(1)}\sigma^{\alpha}_{\rho'}.$$

Ces relations sont compatibles, respectivement, avec (19-1) et (19-2), avec (19-3) et (19-4). On peut d'ailleurs aussi les obtenir par élimination de ${}^{(1/2)}M^{r'}_{a}$, ou ${}^{(1/2)}\sigma^{r'}_{a}$, entre ces relations.

20) Extension aux ordres tensoriels et spinoriels supérieurs.

Ainsi qu'on l'a vu au § 19, la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer présente un intérêt particulier pour les opérateurs dont la paramétrix et le noyau de diffusion vérifient une relation de décomposition d'ordre 1, sans reste ou avec un reste simple.

Supposons que l'on n'ait pas de telles décompositions, mais seulement des décompositions d'ordre $m \geqslant 2$ [11]. On peut toujours, grâce aux relations obtenues en théorie de Petiau-Duffin-Kemmer, exprimer ${}^{(0,0)}M$ et ${}^{(1,0)}M^{\alpha}_{\rho'}$ en fonction de ${}^{(0,2)}M^{a_1 a_2}_{r'_1 r'_2}$; mais ce dernier, qui est un élément primitif, n'est pas décomposable; d'autre part, il y aurait lieu de considérer aussi les autres éléments primitifs : ${}^{(1,1)}M^{\alpha a}_{\rho' r'}$, ${}^{(2,0)}M^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}$, ...

On se propose ici d'exprimer tout élément primitif ${}^{(p',\nu')}M^{A}_{R'}$ $(p' + \nu' \leqslant m)$ en fonction du *seul élément primitif* ${}^{(0,m)}M^{a_1 \dots a_m}_{r'_1 \dots r'_m}$.

L'isomorphisme S associe en effet également à toute forme à valeurs p-tensorielles-ν-spinorielles

$$\varphi_{\mathcal{A}@} = \sum_{q=0}^{4} \overset{(q)}{\varphi}_{\alpha_1 \dots \alpha_p, a_1 \dots a_\nu, \beta_1 \dots \beta_q}$$

un p-tenseur-$(\nu + 2)$-spineur

$$\text{(20-1)} \qquad \chi_{\mathcal{A}@}{}^{c}_{e} = (S\varphi_{\mathcal{A}@})^{c}_{e} = \sum_{q=0}^{4} \frac{1}{q\,!} (\gamma^{\beta_1} \dots \gamma^{\beta_q})^{c}_{e} \overset{(q)}{\varphi}_{\mathcal{A}@\beta_1 \dots \beta_q}$$

$$\text{(20-2)} \qquad \overset{(q)}{\varphi}_{\mathcal{A}@\beta_1 \dots \beta_q} = (\Phi^{(q)} \chi_{\mathcal{A}@})_{\beta_1 \dots \beta_q} = \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4} (\gamma_{\beta_1} \dots \gamma_{\beta_q})^{e}_{c} \chi_{\mathcal{A}@}{}^{c}_{e}.$$

On déduit d'autre part de l'isomorphisme S des isomorphismes $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(M)}$, ... qui associent, respectivement, à toute double-forme, triple-forme, ..., M-multiple-forme, ... :

$$\varphi^{\text{II}} = \sum_{q,q'=0}^{4} \overset{(q,q')}{\varphi}_{\alpha_1 \dots \alpha_q, \beta_1 \dots \beta_{q'}},$$

$$\varphi^{\text{III}} = \sum_{q,q',q''=0}^{4} \overset{(q,q',q'')}{\varphi}_{\alpha_1 \dots \alpha_q, \beta_1 \dots \beta_{q'}, \gamma_1 \dots \gamma_{q''}},$$

etc...,

---

[11] Cf. chapitre IV, § 8.

un (2,2)-spineur, un (3,3)-spineur, . . ., un (M,M)-spineur, . . . :

$$
(20\text{-}3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\chi^{a_1a_2}_{c_1c_2} = (S^{(2)}\varphi^{\mathrm{II}})^{a_1a_2}_{c_1c_2} = \sum_{q,q'=0}^{4} \frac{1}{q\,!\,q'\,!}(\gamma^{\alpha_1}\ldots\gamma^{\alpha_q})^{a_1}_{c_1}(\gamma^{\beta_1}\ldots\gamma^{\beta_{q'}})^{a_2}_{c_2} \\
&\qquad\qquad \varphi^{(q,q')}_{\alpha_1\ldots\alpha_q,\beta_1\ldots\beta_{q'}} \\
&\chi^{a_1a_2a_3}_{c_1c_2c_3} = (S^{(3)}\varphi^{\mathrm{III}})^{a_1a_2a_3}_{c_1c_2c_3} = \sum_{q,q',q''=0}^{4} \frac{1}{q\,!\,q'\,!\,q''\,!}(\gamma^{\alpha_1}\ldots\gamma^{\alpha_q})^{a_1}_{c_1}(\gamma^{\beta_1}\ldots\gamma^{\beta_{q'}})^{a_2}_{c_2} \\
&\qquad\qquad (\gamma^{\gamma_1}\ldots\gamma^{\gamma_{q''}})^{a_3}_{c_3}\varphi^{(q,q',q'')}_{\alpha_1\ldots\alpha_q,\beta_1\ldots\beta_{q'},\gamma_1\ldots\gamma_{q''}} \\
&\text{etc...}
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations, comme (17-1), se résolvent par rapport aux doubles-formes, triples-formes, etc... :

$$\varphi^{(q,q')}_{\alpha_1\ldots\alpha_q,\beta_1\ldots\beta_{q'}} = (\Phi^{(q,q')}\chi)_{\alpha_1\ldots\alpha_q,\beta_1\ldots\beta_{q'}}, \text{ etc...}$$

avec des expressions se déduisant aisément de (17-2).

De même que S, chaque isomorphisme $S^{(M)}$ associe enfin à toute M-multiple-forme à valeurs p-tensorielles-ν-spinorielles un p-tenseur-$(\nu + 2M)$-spineur.

Considérons alors une famille d'opérateurs L *transparente à tous ces isomorphismes.* Moyennant le théorème d'unicité, les relations entre propagateurs de la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer s'étendent à ces différents cas. Par exemple,

$$
(20\text{-}4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&{}^{(1,0)s}G^{\alpha r'c}_{\rho' a s'} = \sum_{q=0}^{4} \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}}{4q\,!}(\gamma_{\beta_1}\ldots\gamma_{\beta_q})^c_a(\gamma^{\sigma'_1}\ldots\gamma^{\sigma'_q})^{r'}_{s'}\,{}^{(1,0)}\hat{q}\,G^{\alpha\beta_1\ldots\beta_q}_{\rho'\sigma'_1\ldots\sigma'_q} \\
&{}^{ss}G^{r'_1r'_2c_1c_2}_{a_1a_2s'_1s'_2} = \sum_{q,q'=0}^{4} \frac{(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}+\frac{q'(q'+1)}{2}}}{16q\,!\,q'\,!}(\gamma_{\alpha_1}\ldots\gamma_{\alpha_q})^{c_1}_{a_1}(\gamma_{\beta_1}\ldots\gamma_{\beta_{q'}})^{c_2}_{a_2} \\
&\qquad (\gamma^{\rho'_1}\ldots\gamma^{\rho'_q})^{r'_1}_{s'_1}(\gamma^{\sigma'_1}\ldots\gamma^{\sigma'_{q'}})^{r'_2}_{s'_2}\hat{q}\,\hat{q}'\,G^{\alpha_1\ldots\alpha_q,\beta_1\ldots\beta_{q'}}_{\rho'_1\ldots\rho'_q,\sigma'_1\ldots\sigma'_{q'}}.
\end{aligned}
\right.
$$

De même que de (17-4), on déduit de ces relations des relations analogues entre paramétrix et entre noyaux de diffusion. Les relations ainsi obtenues se résolvent en (20-5) sur le modèle de (18-5).

Soit alors des opérateurs L tels que ${}^{(p,\nu)}\sigma^{A}_{R'}$ et ${}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'}$ soient m-décomposables : on sait donc les exprimer en fonction des éléments primitifs ${}^{(p',\nu')}\sigma^{A}_{R'}$ et ${}^{(p',\nu')}M^{A}_{R'}$ d'ordre $p' + \nu' \leqslant m$. Grâce aux relations (20-5), on sait exprimer chacun de ces éléments en fonction de ${}^{(0,\nu'+2p')}\sigma^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}$ et ${}^{(0,\nu'+2p')}M^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}$ (cf. l'expression de ${}^{(1,0)}M^{\alpha}_{\rho'}$ en fonction de ${}^{(0,2)}M^{r'c}_{a\,s'}$); puis, grâce à la décomposition d'ordre m de ces dernières matrices, en fonction des ${}^{(0,\nu'')}\sigma^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}$ et ${}^{(0,\nu'')}M^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}$ d'ordre spinoriel $\nu'' \leqslant m$.

Toutes ces matrices, dont l'ordre ν'' *a même parité* que m, s'expriment, grâce aux relations (20-5), en fonction de ${}^{(0,m)}\sigma^{a_1\ldots a_m}_{r'_1\ldots r'_m}$ ou ${}^{(0,m)}M^{a_1\ldots a_m}_{r'_1\ldots r'_m}$; celles dont l'ordre ν'' est de *parité différente* s'expriment en fonction de ${}^{(0,m-1)}\sigma^{a_1\ldots a_{m-1}}_{r'_1\ldots r'_{m-1}}$ ou ${}^{(0,m-1)}M^{a_1\ldots a_{m-1}}_{r'_1\ldots r'_{m-1}}$ (cf. l'expression de ${}^{(0,0)}M$ en fonction de ${}^{(0,2)}M^{r'c}_{a\,s'}$).

En utilisant toujours des relations (20-5), on écrit une équation entre ${}^{(0,m-1)}\sigma^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}$ et ${}^{(0,m+1)}\sigma^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}$ et entre ${}^{(0,m-1)}M^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}$ et ${}^{(0,m+1)}M^{\textcircled{a}}_{\textcircled{r}'}$. Puis on écrit la décomposition d'ordre m des éléments du cas $(m+1)$-spinoriel et on y substitue l'expression des éléments d'ordre $\nu'' \leqslant m$-2 en fonction des éléments d'ordre m ou $(m$-1$)$: d'où un système linéaire (20-6) entre les éléments du cas $(m$-1$)$-spinoriel et ceux du cas m-spinoriel. Le résultat annoncé est établi, pourvu que (20-6) soit un système de Cramer.

A titre d'exemple, on peut établir de telles relations de « fusion » d'ordre 2, associées à la décomposition sans reste d'ordre 2 (8-4) des noyaux de diffusion relatifs aux opérateurs $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$.

$$\begin{aligned}{}^{(p,\nu)}M^{A}_{R'} = {} & \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \left\{ {}^{(p+\nu-2)}T^{A\,uv}_{R'uv} \right\}_{x'} {}^{(2)}M^{a_u a_v}_{r'_u r'_v} \\ & -(p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu} \left\{ {}^{(p+\nu-1)}T^{A\,u}_{R'u} \right\}_{x'} {}^{(1)}M^{a_u}_{r'_u} \\ & + \frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2} \left\{ {}^{(p,\nu)}T^{A}_{R'} \right\}_{x'} {}^{(0,0)}M.\end{aligned}$$

Les éléments primitifs sont

$${}^{(0,0)}M, \quad {}^{(0,1)}M^{a}_{r'}, \quad {}^{(1,0)}M^{\alpha}_{\rho'}, \quad {}^{(0,2)}M^{a_1a_2}_{r'_1r'_2}, \quad {}^{(1,1)}M^{\alpha\,a}_{\rho' r'}, \quad {}^{(2,0)}M^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}.$$

De (18-5) et (20-5) on déduit d'abord

$$(20\text{-}7)\qquad \begin{cases} {}^{(1,0)}M^{\alpha}_{\rho'} = -\dfrac{1}{4}\gamma_{\rho' r'}{}^{s'}\gamma^{\alpha a}{}_{c}\,{}^{s}M^{r'c}_{a\,s'} \\ {}^{(1,1)}M^{\alpha\,a}_{\rho' r'} = -\dfrac{1}{4}\gamma_{\rho' t'}{}^{s'}\gamma^{\alpha c}{}_{b}\,{}^{(0,1)s}M^{at'b}_{r'cs'} \\ {}^{(2,0)}M^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2} = \dfrac{1}{16}\gamma_{\rho'_1 r'_1}{}^{s'_1}\gamma_{\rho'_2 r'_2}{}^{s'_2}\gamma^{\alpha_1 a_1}{}_{c_1}\gamma^{\alpha_2 a_2}{}_{c_2}\,{}^{ss}M^{r'_1r'_2c_1c_2}_{a_1a_2s'_1s'_2}. \end{cases}$$

Puis on déduit de (8-4) les décompositions de ${}^{(0,1)\mathrm{s}}\mathrm{M}^{at'b}_{r'cs'}$ et ${}^{\mathrm{ss}}\mathrm{M}^{r'_1 r'_2 c_1 c_2}_{a_1 a_2 s'_1 s'_2}$ en fonction des noyaux de diffusion des cas 2-spinoriel, 1-spinoriel, et scalaire. Pour ce dernier, il résulte de (18-5)

$$(20\text{-}8) \qquad {}^{(0,0)}\mathrm{M} = \frac{1}{4}\,\delta^{s'}_{r'}\delta^{a}_{c}\,{}^{\mathrm{s}}\mathrm{M}^{r'c}_{a\,s'} = \frac{1}{4}\,{}^{\mathrm{s}}\mathrm{M}^{r'a}_{a\,r'}.$$

Enfin, de (20-5) et de la décomposition ci-dessus de ${}^{(0,1)\mathrm{s}}\mathrm{M}^{a\,t'b}_{r'c\,s'}$ on déduit le système (20-6) entre ${}^{(0,1)}\mathrm{M}^{a}_{r'}$ et ${}^{(0,2)}\mathrm{M}^{a_1 a_2}_{r'_1 r'_2}$

$$(20\text{-}6)' \quad \left(4\delta^{a}_{b}\delta^{s'}_{r'} + \left\{ \tau^{a}_{r'}\overset{*}{\tau}{}^{s'}_{b} \right\}_{x'}\right){}^{(0,1)}\mathrm{M}^{b}_{s'} = \left\{ \tau^{b}_{s'} \right\}_{x'}{}^{\mathrm{s}}\mathrm{M}^{s'a}_{b\,r'} + \left\{ \tau^{a}_{r'} \right\}_{x}{}^{\mathrm{s}}\mathrm{M}^{s'b}_{b\,s'},$$

qui se résout en

$$(20\text{-}9) \quad {}^{(0,1)}\mathrm{M}^{a}_{r'} = \frac{1}{4}\left\{ \tau^{b}_{s'} \right\}_{x'}{}^{\mathrm{s}}\mathrm{M}^{s'a}_{b\,r'} + \frac{1}{8}\left\{ \tau^{a}_{r'} \right\}_{x'}\left({}^{\mathrm{s}}\mathrm{M}^{s'b}_{b\,s'} + \left\{ \tau^{b_1}_{s'_1}\overset{*}{\tau}{}^{s'_2}_{b_2} \right\}_{x'}{}^{\mathrm{s}}\mathrm{M}^{s'_1 b_2}_{b_1 s'_2}\right).$$

Remarque. — Les opérateurs $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$ sur les p-tenseurs-ν-spineurs satisfont évidemment aux conditions de transparence aux isomorphismes $\mathrm{S}^{(\mathrm{M})}$, pour tous les ordres. Pour les dalembertiens, la formule de récurrence (14-9) est destinée à assurer cette transparence. Par contre, les dalembertiens de Tran-Van-Tan (14-7) et (14-8) ne satisfont pas ces conditions en dehors de cas particuliers.

CHAPITRE IV

APPROXIMATIONS QUASI MINKOWSKIENNES SUR LES PROPAGATEURS

A. La méthode d'approximation.

1) Étude succincte de l'équation des ondes.

L'équation de d'Alembert à coefficients constants s'écrit

$$(1\text{-}1) \qquad \underset{(0)}{\mathrm{L}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\mathrm{U}_{\mathrm{A}} \equiv \eta^{\lambda\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\lambda}\mathrm{U}_{\mathrm{B}} \equiv \partial_{0}\partial_{0}\mathrm{U}_{\mathrm{B}} - \sum_{i=1}^{3}\partial_{i}\partial_{i}\mathrm{U}_{\mathrm{B}} = f_{\mathrm{B}}.$$

L'opérateur $\underset{(0)}{\mathrm{L}}$ est le dalembertien riemannien relatif à l'*espace de Minkowski*, en coordonnées rectilignes orthonormées.

Par simplicité, on choisit, pour la représentation des champs de tenseurs-spineurs, le repère naturel correspondant; c'est-à-dire

$$\underset{(0)}{A}{}^{\lambda}_{\mu}(x) = \delta^{\lambda}_{\mu}, \qquad \underset{(0)}{A}{}^{\mu}_{\lambda}(x) = \delta^{\mu}_{\lambda}.$$

Le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$ se confond avec le cône élémentaire en x', soit $C_{x'}$, d'équations

$$\text{(1-2)} \qquad x^0 = x'^{0'} + \lambda, \qquad x^i = x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta).$$

On en déduit

$$\text{(1-3)} \qquad \underset{(0)}{\Delta} = -\lambda^2 \sin\theta', \qquad \underset{(0)}{D} = -1.$$

Dans tout système de coordonnées rectilignes, les coefficients de la connexion riemannienne sont nuls. Il en résulte que les bi-tenseurs-spineurs de transport parallèle se réduisent à

$$\text{(1-4)} \qquad \underset{(0)}{t}{}^{\alpha}_{\rho'}(x', x) = \delta^{\alpha}_{\rho'}, \qquad \underset{(0)}{\tau}{}^{a}_{r'}(x', x) = \delta^{a}_{r'}, \qquad {}^{(p,\nu)}\underset{(0)}{T}{}^{A}_{R'}(x', x) = \delta^{A}_{R'}.$$

Il résulte alors de (III-5-3) et (III-6-6) que la paramétrix est égale à

$$\text{(1-5)} \qquad {}^{(p,\nu)}\underset{(0)}{\sigma}{}^{A}_{R'}(x', x) = \delta^{A}_{R'}\lambda^{-1}.$$

La définition (I-8-5) du noyau de diffusion donne

$$\text{(1-6)} \qquad {}^{(p,\nu)}\underset{(0)}{K}{}^{A}_{R'}(x', x) = \lambda^2 \underset{(0)}{D}\, {}^{(p,\nu)}\underset{(0)}{M}{}^{A}_{R'}(x', x) = 0.$$

Les équations intégrales de Kirchhoff se réduisent aux formules de Kirchhoff classiques

$$\text{(1-7)} \qquad U^{\pm}_{R'}(x') = \Phi^{\pm}_{R'}(x') = \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \lambda f_R(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$
$$= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{x \in C^{\pm}_{x'}} (x^0 - x'^{0'})^{-1} f_R(x^{\alpha}) d^3x.$$

Elles donnent directement les noyaux élémentaires, qui sont donc égaux aux paramétrix, et portés, pour chaque x', par $C^{\pm}_{x'}$ (principe de Huyghens) : ils sont réduits à leurs termes de front. Le propagateur correspondant est appelé classiquement « propagateur de Jordan-Pauli ».

2) **Définition du cas « quasi minkowskien ».**

Le cas particulier, important du point de vue des applications, désigné ici [1] sous le nom de « quasi minkowskien », concerne un opérateur L dont les coefficients dépendent de K paramètres a_u ($u = 1, 2, \ldots, K$) qui satisfait aux hypothèses suivantes

— pour $a = \{ a_u \} = 0$, l'opérateur L se réduit à l'opérateur $\underset{(0)}{L}$ défini en (1-1) :

$$\text{(2-1)} \qquad \begin{cases} g^{\lambda\nu}(x, 0) = \eta^{\lambda\nu}, \\ h^{A\lambda}_{B}(x, 0) = 0, \qquad k^{A}_{B}(x, 0) = 0 \,; \end{cases}$$

— les hypothèses *a)* et *b)* énoncées au chapitre II (§ 1) : pour $l = 1$ si l'on veut faire une approximation quasi minkowskienne du premier ordre; pour une valeur de l quelconque, si l'on veut faire une approximation d'ordre l quelconque; si l'opérateur L considéré est, soit $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$, soit un dalembertien $\square$ étudié au chapitre III, section D, il suffit de faire les hypothèses *a)* et *b)* du chapitre II sur les coefficients $g^{\lambda\nu}(x)$.

On se propose d'étudier les approximations quasi minkowskiennes des diverses *fonctions* (coefficients de l'opérateur, bi-tenseur-spineur de transport parallèle, « paramétrix » $\sigma^{A}_{R'}$, noyau de diffusion, etc.) ou *distributions* (noyaux élémentaires, propagateur, paramétrix proprement dite) attachées à l'opérateur L, en utilisant la méthode et les résultats du chapitre II : la notion de différentiabilité par rapport aux a_u y a été définie pour les distributions étudiées, ainsi que la notion de développement limité de ces distributions.

Nous prenons dans toute la suite pour *infiniment petit principal*

$$\| a \| = \sum_{u=1}^{K} | a_u |.$$

Notation. — Pour l'une quelconque, soit H, des fonctions ou distributions ci-dessus, attachées à l'opérateur L, et dépendant différentiablement (pour les distributions, au sens du chapitre II) des paramètres a_u, on désigne

— par $\underset{(0)}{H}$ la valeur de H pour $a = 0$ (valeur « minkowskienne », correspondant à l'opérateur $\underset{(0)}{L}$);

[1] Un sens différent est souvent donné à ce terme : il correspond à une approximation « champs faibles, vitesses faibles ».

— par $\underset{(1)}{\mathrm{H}}$ la « partie principale » de $(\mathrm{H} - \underset{(0)}{\mathrm{H}})$, c'est-à-dire

$$\underset{(1)}{\mathrm{H}} = \sum_{u=1}^{\mathrm{K}} a_u \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial a_u}\right)_{a=0};$$

— par $\underset{(2)}{\mathrm{H}}$ la « partie principale » de $(\mathrm{H} - \underset{(0)}{\mathrm{H}} - \underset{(1)}{\mathrm{H}})$

$$\underset{(2)}{\mathrm{H}} = \frac{1}{2\,!} \sum_{u,v=1}^{\mathrm{K}} a_u a_v \left(\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial a_u \partial a_v}\right)_{a=0};$$

— et, d'une façon générale, par $\underset{(l)}{\mathrm{H}}$

$$\underset{(l)}{\mathrm{H}} = \frac{1}{l\,!} \sum_{|k|=l} (a)^k \left[\frac{\partial^{|k|} \mathrm{H}}{(\partial a)^k}\right]_{a=0}.$$

3) Particularités du cas quasi minkowskien.

Les hypothèses du § 2 ont, compte tenu de l'étude de l'opérateur $\underset{(0)}{\mathrm{L}}$, les conséquences suivantes :

— on peut choisir, pour la représentation des champs de tenseurs-spineurs, un repère mobile orthonormé dont l'écart au repère naturel soit infiniment petit avec $\| a \|$

$$(3\text{-}1) \qquad \mathrm{A}^{\lambda}_{\mu}(x, a) - \delta^{\lambda}_{\mu} \sim \underset{(1)}{\mathrm{A}^{\lambda}_{\mu}} = \sum_{u=1}^{\mathrm{K}} a_u \frac{\partial \mathrm{A}^{\lambda}_{\mu}}{\partial a_u}(x, 0)\,; \qquad \mathrm{A}^{\mu}_{\lambda}(x, a) - \delta^{\mu}_{\lambda} \sim \underset{(1)}{\mathrm{A}^{\mu}_{\lambda}};$$

— l'écart du conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$ au cône élémentaire $\mathrm{C}_{x'}$,

$$\{ x^0 \}_{x'} - x'^{0'} - \lambda, \qquad \{ x^i \}_{x'} - x'^{i'} + \lambda q_{i'}(\theta),$$

est un infiniment petit équivalent à

$$(3\text{-}2) \qquad y^{\nu}_{(1)} = \sum_{u=1}^{\mathrm{K}} a_u \frac{\partial y^{\nu}}{\partial a_u}(x', \lambda, q_{j'}(\theta), 0)\,;$$

— les coefficients $\mathrm{C}^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ et $\mathrm{C}^{a}{}_{b\mu}$ de la connexion riemannienne, et ceux de la connexion p-lorentzienne-ν-spinorielle ${}^{(p,\nu)}\overline{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}}{}_{\mathrm{B}\mu}$ associée à l'opérateur L, sont infiniment petits avec $\| a \|$;

— les composantes du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci, ainsi que la courbure scalaire, sont infiniment petites avec $\| a \|$;

— l'écart à l'identité des bi-tenseurs-spineurs de transport parallèle est infiniment petit avec $\| a \|$

(3-3) $$w_{R'}^{A}(x', x, a) - \delta_{R'}^{A} \sim \underset{(1)}{w_{R'}^{A}} = \sum_{u=1}^{K} a_u \frac{\partial w_{R'}^{A}}{\partial a_u}(x', x, 0) ;$$

— il en résulte que les dérivées covariantes

(3-4) $$\left\{ \begin{aligned} \nabla_\mu w_{R'}^{A} &= \partial_\mu w_{R'}^{A} + C^{A}{}_{B\mu} w_{R'}^{B} \sim \partial_\mu \underset{(1)}{w_{R'}^{A}} + \underset{(1)}{C^{A}{}_{R\mu}} \\ \overline{\nabla}_\mu w_{R'}^{A} &= \partial_\mu w_{R'}^{A} + \overline{C}^{A}{}_{B\mu} w_{R'}^{B} \sim \partial_\mu \underset{(1)}{w_{R'}^{A}} + \underset{(1)}{\overline{C}^{A}{}_{R\mu}} \end{aligned} \right.$$

sont infiniment petites avec $\| a \|$.

REMARQUE. — De la relation

$$w_{R'}^{A}(x', x) \quad \overset{*}{w}{}_{A}^{S'}(x', x) = \delta_{R'}^{S'},$$

il résulte, à la première approximation quasi minkowskienne,

(3-5) $$\underset{(1)}{w_{R'}^{S}}(x', x) + \underset{(1)}{\overset{*}{w}{}_{R}^{S'}}(x', x) = 0.$$

Appliquons d'autre part les résultats du chapitre II concernant les équations de Kirchhoff. De même que les équations de Kirchhoff se réduisent à (1-7) pour $a = 0$, il vient pour les dérivées $U_{R'}^{\pm\,(q,0)}(x', 0)$ (cf. (II-4-5) pour $q = 1$) :

(3-6) $$U_{R'}^{\pm\,(q,0)}(x', 0) = \left\langle \frac{\partial^q E^{\pm A}{}_{R'}}{(\partial x')^q}(0), f_A \right\rangle = \frac{\partial^q \Phi_{R'}^{\pm}}{(\partial x')^q}(x', 0)$$
$$= \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \lambda \partial^q f_R(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta)) \frac{d^2\Omega}{4\pi}.$$

Ces équations, de même que (1-7), donnent directement les $U_{R'}^{\pm\,(q,0)}(x', 0)$.

D'autre part, (II-4-6) se réduit à

(3-7) $$U_{R'}^{\pm\,(0,1)}(x', 0) = \left\langle \frac{\partial E^{\pm A}{}_{R'}}{\partial a}, f_A \right\rangle$$
$$= \frac{\partial \Phi_{R'}^{\pm}}{\partial a}(x', 0) + \int_{x'^{0'}}^{\xi} dt \iint_{S^{(2)}} \frac{1}{p^0} \left(\frac{\partial K_{R'}^{A}}{\partial a} \right)_0 U_A^{\pm} \frac{d^2\Omega}{4\pi},$$

qui donne $U_{R'}^{\pm\,(0,1)}(x', 0)$ comme somme de deux termes

(3-8) $$U_{R'}^{\pm\,(0,1)}(x', 0) = \frac{\partial \Phi_{R'}^{\pm}}{\partial a}(x', 0)$$
$$+ \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \frac{\partial K_{R'}^{A}}{\partial a}(x', \lambda, \theta, 0) \Phi_A^{\pm}(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta), 0) \frac{d^2\Omega}{4\pi}.$$

Il en est de même de toutes les dérivées $U_{R'}^{\pm(q,1)}(x', 0)$.

Dans le cas des dérivées $U_{R'}^{\pm(q,2)}(x', 0)$, il vient

(3-9)
$$U_{R'}^{\pm(q,2)}(x', 0) = \frac{\partial^{q+2}\Phi_{R'}^{\pm}}{(\partial x')^q(\partial a)^2}(x', 0) + \int_{x'^0}^{\xi} dt \iint_{S^{(2)}} \frac{2}{p^0}\left(\frac{\partial K_{R'}^{A}}{\partial a}\right)_0 U_A^{\pm(q,1)} \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$
$$+ \int_{x'^0}^{\xi} dt \iint_{S^{(2)}} \frac{1}{p^0}\left[2\left(\frac{\partial K_{R'}^{A}}{\partial a}\right)_0 y^{(0,1)} . U_A^{\pm(q+1,0)} + \left\{\frac{\partial^2 K_{R'}^{A}}{(\partial a)^2}\right\}_0 U_A^{\pm(q,0)}\right] \frac{d^2\Omega}{4\pi};$$

d'où un calcul simple de ces dérivées, en prenant λ au lieu de t comme variable d'intégration, et en substituant :

dans la première intégrale, l'expression (3-8)' de $U_A^{\pm(q,1)}$;

dans la deuxième intégrale, les expressions (3-6) de $U_A^{\pm(q,0)}$ et $U_A^{\pm(q+1,0)}$.

D'une façon générale, on constate que pour $a = 0$ chaque dérivée de la solution avancée ou retardée se présente comme une somme finie, au lieu d'une série convergente d'itérées. Le calcul d'approximation des noyaux élémentaires et du propagateur au moyen de développements limités s'en trouve grandement simplifié.

Au contraire des premières particularités énumérées au début de ce paragraphe, qui n'ont lieu que sous les hypothèses (2-1), cette simplification a lieu dans tous les cas où pour $a = 0$ le noyau de diffusion est nul (1-6) ([2]).

4) Calcul des propagateurs approchés.

Étudions tout d'abord les *termes initiaux* de l'itération

(4-1)
$$\underset{(k)}{\Phi_{R'}^{\pm}} = \frac{1}{k!}\sum (a)^k \frac{\partial^k \Phi_{R'}^{\pm}}{(\partial a)^k}(x', 0) = \langle \overset{(0)}{\underset{(k)}{E}}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle.$$

Ils ne font intervenir que la paramétrix, par l'intermédiaire de

(4-2)
$$P_{R'}^{A}(x', x, a) = -\lambda^2 D\sigma_{R'}^{A}.$$

([2]) La discussion sur l'existence d'opérateurs L autres que $\underset{(0)}{L}$ dont le noyau de diffusion soit nul reste ouverte. Il a été conjecturé (principe de Huyghens) que $\underset{(0)}{L}$ était le seul à posséder cette propriété.

Puisque $\underset{(0)}{P}{}^{A}_{R'} = \lambda \delta^{A}_{R'}$, le noyau-distribution $\overset{(0)}{\underset{(1)}{E}}{}^{\pm A}_{R'}(x', x)$ est défini par les intégrales triples sur $C^{\pm}_{x'}$

$$(4\text{-}3) \quad \langle \overset{(0)}{\underset{(1)}{E}}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle = \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \underset{(1)}{P}{}^{A}_{R'}(x'; x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) \times f_A(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$
$$+ \int_0^{\pm\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \partial_\nu f_R(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) y^{\nu}_{(1)}(x', \lambda, q_{i'}, a) \frac{d^2\Omega}{4\pi}.$$

Il est parfois plus commode de substituer dans la 2e intégrale

$$(4\text{-}4) \quad \partial_\nu f_R(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) y^{\nu}_{(1)}(x', \lambda, q_{i'}, a)$$
$$= f_R(x'^{0'} + \lambda + y^{0}_{(1)}, x'^{i'} - \lambda q_{i'} + y^{i}_{(1)}) - f_R(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}).$$

On a de même

$$(4\text{-}5) \quad \langle \overset{(0)}{\underset{(2)}{E}}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle$$
$$= \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \underset{(2)}{P}{}^{A}_{R'}(x'; x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) f_A(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$
$$+ \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \underset{(1)}{P}{}^{A}_{R'}(x'; x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) y^{\nu}_{(1)}(x', \lambda, q_{i'}) \times \partial_\nu f_A(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$
$$+ \int_0^{\pm\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \left\{ \frac{1}{2} y^{\nu}_{(1)} y^{\pi}_{(1)} \partial_\nu \partial_\pi f_R(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) + y^{\nu}_{(2)} \partial_\nu f_R(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) \right\} \frac{d^2\Omega}{4\pi},$$

etc...

On obtient ensuite, conformément à la méthode d'itération exposée au chapitre Ier (§ 5), la partie principale de la *première itérée* en transformant l'intégrale sextuple

$$(4\text{-}6) \quad \langle \overset{(1)}{\underset{(1)}{E}}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle = \left\langle \sum_{u=1}^{K} a_u \frac{\partial \overset{(1)}{E}{}^{\pm A}_{R'}}{\partial a_u}(0), f_A \right\rangle$$
$$= \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \frac{d^2\Omega}{4\pi} \int_0^{\pm\infty} d\bar{\lambda} \iint_{S^{(2)}} \bar{\lambda} \underset{(1)}{K}{}^{A''}_{R'}(x', \lambda, \theta) \times f_A\{x'^{0'} + \lambda + \bar{\lambda}, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta) - \bar{\lambda} q_{i'}(\bar{\theta})\} \frac{d^2\bar{\Omega}}{4\pi}.$$

De même, (3-9) donne, pour le terme du second ordre de la première itérée, la somme d'intégrales sextuples

$$(4\text{-}7)\quad \langle \overset{(1)}{\underset{(2)}{E}}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle = \Big\langle \sum_{u,v=1}^{K} \frac{1}{2} a_u a_v \frac{\partial^2 \overset{(1)}{E}{}^{\pm A}_{R'}}{\partial a_u \partial a_v}(0), f_A \Big\rangle$$

$$= \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \underset{(2)}{K}{}^{A''}_{R'}(x', \lambda, \theta) \frac{d^2\bar{\Omega}}{4\pi}$$

$$\int_0^{\pm\infty} \bar{\lambda} d\bar{\lambda} \iint_{S^{(2)}} f_A \{ (x'^{0'} + \lambda + \bar{\lambda}, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta) - \bar{\lambda} q_{i'}(\bar{\theta}) \} \frac{d^2\bar{\Omega}}{4\pi}$$

$$+ \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \underset{(1)}{K}{}^{A''}_{R'}(x', \lambda, \theta) \frac{d^2\Omega}{4\pi} \int_0^{\pm\infty} \bar{\lambda} d\bar{\lambda} \iint_{S^{(2)}} \{ y^{\nu''}_{(1)}(x', \lambda, \theta)$$

$$+ y^{\nu}_{(1)}(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta)\,;\bar{\lambda}, \bar{\theta}) \}$$

$$\times\, \partial_\nu f_A \{ x'^{0'} + \lambda + \bar{\lambda}, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta) - \bar{\lambda} q_{i'}(\bar{\theta}) \} \frac{d^2\bar{\Omega}}{4\pi}$$

$$+ \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \underset{(1)}{K}{}^{L''}_{R'}(x', \lambda, \theta) \frac{d^2\Omega}{4\pi} \int_0^{\pm\infty} d\bar{\lambda} \iint_{S^{(2)}} \underset{(1)}{P}{}^{A}_{L''}$$

$$\{ x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta)\,;\bar{\lambda}, \bar{\theta} \}$$

$$\times f_A \{ x'^{0'} + \lambda + \bar{\lambda}, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta) - \bar{\lambda} q_{i'}(\bar{\theta}) \} \frac{d^2\bar{\Omega}}{4\pi}.$$

Les intégrales sextuples donnant les termes successifs $\langle \overset{(1)}{\underset{(k)}{E}}{}^{\pm A}_{R'}, f_A \rangle$ de la première itérée s'obtiennent suivant les mêmes principes.

Le changement de variables d'intégration (I-5-2) par lequel on transforme ces intégrales sextuples se réduit ici à

$$(4\text{-}8)\qquad x^0 = x'^{0'} + \lambda + \bar{\lambda}, \qquad x^i = x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta) - \bar{\lambda} q_{i'}(\bar{\theta}),$$

puisque tels sont les arguments de f_A et de ses dérivées. Le déterminant fonctionnel de cette transformation vaut

$$(4\text{-}9)\qquad \mathfrak{D}(x'\,;\bar{\lambda}, \bar{\theta}\,;\lambda, \theta) = -\bar{\lambda}^2 \sin \bar{\theta}' (1 - \cos w),$$

où w désigne l'angle des vecteurs spatiaux définis par (θ', θ'') et $(\bar{\theta}', \bar{\theta}'')$

$$\cos w = \sum_{i=1}^{3} q_{i'}(\theta) q_{i'}(\bar{\theta}) = \cos \theta' \cos \bar{\theta}' + \sin \theta' \sin \bar{\theta}' \cos (\theta'' - \bar{\theta}'').$$

On remarque que

$$(4\text{-}10)\qquad \bar{\lambda}(1 - \cos w) = x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'}) q_{i'}(\theta),$$

ce qui permet d'exprimer cette quantité en fonction de x^{α}, $x'^{\alpha'}$, θ', θ''. On déduit alors de (4-6) et (4-7)

(4-6)′

$$\underset{(1)}{\overset{(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = -\zeta\{\pm(x^{\nu}-x'^{\nu'})\}\iint_{\mathcal{S}^{(2)}} \frac{\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{A}''}_{\mathrm{R}'}(x', \lambda, \theta)}{x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'})q_{i'}(\theta)} \frac{d^2\Omega}{16\pi^2},$$

$$\text{(4-7)}' \left\{ \begin{aligned} &\underset{(2)(0)}{\overset{(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = -\zeta\{\pm(x^{\nu} - x'^{\nu'})\} \\ &\qquad \times \iint_{\mathcal{S}^{(2)}} [\underset{(2)}{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{A}''}_{\mathrm{R}'}(x', \lambda, \theta) + \bar\lambda^{-1}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{L}''}_{\mathrm{R}'}(x', \lambda, \theta) \\ &\qquad\qquad . \underset{(1)}{\mathrm{P}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{L}''}(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta) ; \bar\lambda, \bar\theta)] \\ &\qquad\qquad \times \frac{1}{x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'})q_{i'}(\theta)} \frac{d^2\Omega}{16\pi^2} \\ &\underset{(2)\,(1)}{\overset{(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\nu\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = -\zeta\{\pm(x^{\nu} - x'^{\nu'})\}\iint_{\mathcal{S}^{(2)}} \underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{A}''}_{\mathrm{R}'}(x', \lambda, \theta) \\ &\qquad \times \frac{y^{\nu''}_{(1)}(x', \lambda, \theta) + y^{\nu}_{(1)}\{x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta) ; \bar\lambda, \bar\theta\}}{x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'})q_{i'}(\theta)} \frac{d^2\Omega}{16\pi^2} \end{aligned} \right.$$

où on a défini

$$\text{(4-11)} \left\{ \begin{aligned} &\zeta(x^{\nu} - x'^{\nu'}) = \mathrm{Y}\{\eta_{\lambda\nu}(x^{\lambda} - x'^{\lambda'})(x^{\nu} - x'^{\nu'})\} \times \mathrm{Y}(x^0 - x'^{0'}) \\ &\qquad \mathrm{Y}(t) = 0 \text{ si } t < 0, \qquad \mathrm{Y}(t) = 1 \text{ si } t > 0. \end{aligned} \right.$$

Dans les intégrales doubles (4-6)′, (4-7)′, λ, $\bar\lambda$, $q_{k'}(\bar\theta)$ sont supposées remplacées par leurs expressions en fonction de x^{α}, $x'^{\alpha'}$, θ', θ'' déduites de

$$\text{(4-12)} \left\{ \begin{aligned} &\lambda = \frac{1}{2} \frac{(x^0 - x'^{0'})^2 - \sum_{i=1}^{3}(x^i - x'^{i'})^2}{x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'})q_{i'}(\theta)} \\ &\bar\lambda = x^0 - x'^{0'} - \lambda = \frac{1}{2} \frac{\sum_{\nu=0}^{3}(x^{\nu} - x'^{\nu'})^2 + 2(x^0 - x'^{0'})(x^i - x'^{i'})q_{i'}(\theta)}{x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'})q_{i'}(\theta)} \\ &q_{k'}(\bar\theta) = \frac{x'^{k'} - x^k - \lambda q_{k'}(\theta)}{\bar\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, les approximations des *itérées successives*, à partir de la *seconde*, s'obtiennent assez facilement à partir des approximations de la première itérée, conformément à (I-5-6) et (I-5-7). On obtient ainsi, pour la partie principale de la seconde itérée, en appliquant (3-8),

$$(4\text{-}13)\quad \overset{(2)}{\underset{(2)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\ \mathrm{R}'}(x', x) = \int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{\mathrm{S}^{(2)}_{(1)}} \mathrm{K}^{\mathrm{L}''}_{\mathrm{R}'}(x', \lambda, \theta) \times \overset{(1)}{\underset{(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\ \mathrm{L}''}\{ x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta) \,;\, x \} \frac{d^2\Omega}{4\pi}.$$

Les expressions de $\overset{(2)}{\underset{(3)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\ \mathrm{R}'}(x', x)$, et des termes d'ordre supérieur, s'obtiennent selon les mêmes principes, mais sont évidemment plus compliquées.

B. Exploitation des résultats du chapitre III.

On utilise cette méthode d'approximation pour obtenir des *décompositions approchées des propagateurs*, à partir des résultats obtenus au chapitre III sur la paramétrix et le noyau de diffusion :

— proportionnalité de la paramétrix au bi-tenseur-spineur de transport parallèle : (III-6-3) étendu en (III-9-11)-(III-10-4);

— décompositions exprimant les noyaux de diffusion d'ordre quelconque en fonction de ceux d'ordre $(p + \nu) = 0, 1, 2$ (§ 8, 10, 15);

— relations de « fusion » (§ 19, 20).

En effet, de ces relations très simples ne résultent par l'itération que des propriétés beaucoup plus complexes des noyaux élémentaires et du propagateur eux-mêmes. Ce n'est qu'en approximation quasi minkowskienne que l'on pourra en déduire des résultats simples, au moyen de la méthode d'approximation ci-dessus.

L'*exemple* traité ici, relativement général, et conduisant cependant à des résultats assez simples, est celui d'un opérateur L quasi minkowskien, donné sous la forme (III-9-1)

$$\mathrm{L}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\mathrm{U}_{\mathrm{A}} \equiv \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\mathrm{U}_{\mathrm{B}} + b^{\mathrm{A}\mu}_{\mathrm{B}}\nabla_{\mu}\mathrm{U}_{\mathrm{A}} + l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}\mathrm{U}_{\mathrm{A}},$$

satisfaisant aux hypothèses (III-10-1) et (III-13-1)-(III-13-3) ($b^{\mathrm{A}\mu}_{\mathrm{B}}$ et $l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ 1-décomposables), ainsi qu'aux diverses hypothèses de transparence nécessaires à l'établissement de relations de « fusion » (chap. III, section E).

Nombre d'autres cas pourront évidemment être traités par analogie.

Au cas particulier des dalembertiens et opérateurs de Klein-Gordon (cf. chap. III, section D), sera consacrée la section C de ce chapitre.

5) Décompositions sans reste des propagateurs approchés.

L'hypothèse (III-10-1)′ entraîne, ainsi qu'on l'a vu,

$$^{(p,\nu)}\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = {}^{(0,0)}\mathrm{P}(x', x)\prod_{u=1}^{p+\nu}\left\{ {}^{(1)}w^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u}(x', x)\right\}_{x'}.$$

Il en résulte, pour les approximations jusqu'à la $l^{\text{ième}}$,

$$(5\text{-}1)\quad \begin{cases} {}^{(p,\nu)}\underset{(0)}{\mathrm{P}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = {}^{(0,0)}\underset{(0)}{\mathrm{P}}(x', x)\delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = \lambda\delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} \\ {}^{(p,\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{P}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = {}^{(0,0)}\underset{(1)}{\mathrm{P}}(x', x)\delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} + \lambda\displaystyle\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{R}'u}\left\{ {}^{(1)}\underset{(1)}{w}{}^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u}(x', x)\right\}_{x'} \\ {}^{(p,\nu)}\underset{(2)}{\mathrm{P}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = {}^{(0,0)}\underset{(2)}{\mathrm{P}}\,\delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} + {}^{(0,0)}\underset{(1)}{\mathrm{P}}\displaystyle\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{R}'u}\left\{ {}^{(1)}\underset{(1)}{w}{}^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u}\right\}_{x'} \\ \qquad + \lambda\left[\displaystyle\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{R}'u}\left\{ {}^{(1)}\underset{(2)}{w}{}^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u}\right\}_{x'} + \displaystyle\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^{uv}}_{\mathrm{R}'uv}\left\{ {}^{(1)}\underset{(1)}{w}{}^{\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u}\,{}^{(1)}\underset{(1)}{w}{}^{\mathrm{a}_v}_{\mathrm{r}'_v}\right\}_{x'}\right] \\ \text{etc...} \end{cases}$$

On voit que ${}^{(p,\nu)}\underset{(k)}{\mathrm{P}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ est k-décomposable $(0 \leqslant k \leqslant l)$. Les relations (4-3), (4-5), etc... définissant les diverses approximations du terme de front ${}^{(p,\nu)}\overset{(0)}{\mathrm{E}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ ou ${}^{(p,\nu)}\overset{(0)}{\mathrm{G}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ montrent que la $k^{\text{ième}}$ approximation est k-décomposable :

$$(5\text{-}2)\quad \begin{cases} {}^{(p,\nu)}\underset{(0)}{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}\,{}^{(0,0)}\underset{(0)}{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm}(x', x) \\ {}^{(p,\nu)}\underset{(1)}{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}(x', x) = \displaystyle\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{R}'u}\,{}^{(1)}\underset{(1)}{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u}(x', x) - (p+\nu-1)\delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm}(x', x) \\ {}^{(p,\nu)}\underset{(2)}{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = \displaystyle\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^{uv}}_{\mathrm{R}'uv}\,{}^{(2)}\underset{(2)}{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{a}_u\mathrm{a}_v}_{\mathrm{r}'_u\mathrm{r}'_v} - (p+\nu-2)\displaystyle\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{R}'u}\,{}^{(1)}\underset{(2)}{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{a}_u}_{\mathrm{r}'_u} \\ \qquad\qquad + \dfrac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2}\,\delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}\,{}^{(0,0)}\underset{(2)}{\overset{(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm}, \\ \text{etc...} \end{cases}$$

L'étude du chapitre III (§ 10) a d'autre part montré que l'on avait la décomposition

$$(5\text{-}3)\quad {}^{(p,\nu)}K^{A}_{R'} = \sum_{u=1}^{p+\nu} \left\{ {}^{(p+\nu-1)}w^{A^u}_{R'u} \right\}_{x'} {}^{(1)}K^{a_u}_{r'_u} - (p+\nu-1)\left\{ {}^{(p,\nu)}w^{A}_{R'} \right\}_{x'} {}^{(0,0)}K$$
$$- 2 \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} {}^{(p+\nu-2)}P^{A^{uv}}_{R'uv}\bar{Q}\left(\left\{ {}^{(1)}w^{a_u}_{r'_u} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1)}w^{a_v}_{r'_v} \right\}_{x'} \right).$$

Or on voit aisément sur (III-10-8) ou (III-10-10) que le reste $\bar{Q}\left(\left\{ {}^{(1)}w^{a_u}_{r'_u} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1)}w^{a_v}_{r'_v} \right\}_{x'} \right)$ de cette décomposition est un infiniment petit du second ordre par rapport à $\| a \|$. Il en résulte que la partie principale du noyau de diffusion est 1-décomposable :

$$(5\text{-}4)\qquad \underset{(1)}{{}^{(p,\nu)}K^{A}_{R'}} = \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{R'u}\, \underset{(1)}{{}^{(1)}K^{a_u}_{r'_u}} - (p+\nu-1)\delta^{A}_{R'}\, \underset{(1)}{{}^{(0,0)}K}.$$

Les termes du second ordre de (5-3) s'écrivent

$$\underset{(2)}{{}^{(p,\nu)}K^{A}_{R'}} = \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{R'u}\, \underset{(2)}{{}^{(1)}K^{a_u}_{r'_u}} + \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \delta^{A^{uv}}_{R'uv}\left(\left\{ \underset{(1)}{{}^{(1)}w^{a_v}_{r'_v}} \right\}_{x'} \underset{(1)}{{}^{(1)}K^{a_u}_{r'_u}} + \left\{ \underset{(1)}{{}^{(1)}w^{a_u}_{r'_u}} \right\}_{x'} \underset{(1)}{{}^{(1)}K^{a_v}_{r'_v}} \right)$$
$$- (p+\nu-1)\left(\delta^{A}_{R'}\, \underset{(2)}{{}^{(0,0)}K} + \underset{(1)}{{}^{(0,0)}K} \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{R'u} \left\{ \underset{(1)}{{}^{(1)}w^{a_u}_{r'_u}} \right\}_{x'} \right)$$
$$- 2\lambda \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \delta^{A^{uv}}_{R'uv}\, \underset{(2)}{\bar{Q}}\left(\left\{ {}^{(1)}w^{a_u}_{r'_u} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1)}w^{a_v}_{r'_v} \right\}_{x'} \right)$$

et sont donc 2-décomposables

$$(5\text{-}5)\quad \underset{(2)}{{}^{(p,\nu)}K^{A}_{R'}} = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu} \delta^{A^{uv}}_{R'uv}\, \underset{(2)}{{}^{(2)}K^{a_u a_v}_{r'_u r'_v}} - (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{R'u}\, \underset{(2)}{{}^{(1)}K^{a_u}_{r'_u}}$$
$$+ \frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2}\, \delta^{A}_{R'}\, \underset{(2)}{{}^{(0,0)}K}.$$

Ce résultat s'étend de la façon suivante à un ordre k quelconque $(0 \leqslant k \leqslant l)$:

— le terme d'ordre k de $\sum_{u=1}^{p+\nu} \left\{ {}^{(p+\nu-1)}w^{A^u}_{R'u} \right\}_{x'} {}^{(1)}K^{a_u}_{r'_u}$ est k-décomposable;

— le terme d'ordre k de ${}^{(0,0)}K \left\{ {}^{(p,\nu)}w^{A}_{R'} \right\}_{x'}$ est $(k$-$1)$-décomposable;

— le terme d'ordre k de

$$\sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p+\nu} {}^{(p+\nu-2)}P^{A^{uv}}_{R'uv}\overline{Q}\left(\left\{ {}^{(1)}w^{\ a_u}_{r'_u} \right\}_{x'}, \left\{ {}^{(1)}w^{\ a_v}_{r'_v} \right\}_{x'}\right)$$

est, en vertu de (5-1), k-décomposable.

Par conséquent, ${}^{(p,\nu)}\underset{(k)}{K}{}^{A}_{R'}$ est k-décomposable.

Il résulte de (4-6)′ et (5-4) que la première itérée ${}^{(p,\nu)}\overset{(1)}{E}{}^{\pm A}_{R'}$, ou ${}^{(p,\nu)}\overset{(1)}{G}{}^{A}_{R'}$, est, en partie principale, 1-décomposable :

$$(5\text{-}6) \qquad {}^{(p,\nu)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm A}_{R'} = \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{R'u}\, {}^{(1)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm a_u}_{r'_u} - (p+\nu-1)\delta^{A}_{R'}\, {}^{(0,0)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm}.$$

(4-7)′ montre que les termes du second ordre de la première itérée sont 2-décomposables :

$$(5\text{-}7) \qquad {}^{(p,\nu)}\underset{(2)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm A}_{R'} = \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p+\nu} \delta^{A^{uv}}_{R'uv}\, {}^{(2)}\underset{(2)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm a_u a_v}_{r'_u r'_v}$$
$$- (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{R'u}\, {}^{(1)}\underset{(2)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm a_u}_{r'_u} + \frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2}\,\delta^{A}_{R'}\, {}^{(0,0)}\underset{(2)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm}.$$

De même, l'approximation à l'ordre $k(1 \leqslant k \leqslant l)$ de la première itérée est k-décomposable.

Dans l'expression (4-13) de la partie principale de la seconde itérée, ${}^{(p,\nu)}\underset{(1)}{K}{}^{L''}_{R'}$ et ${}^{(p,\nu)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm A}_{L''}$ sont l'un et l'autre 1-décomposables.

${}^{(p,\nu)}\underset{(2)}{\overset{(2)}{E}}{}^{\pm A}_{R'}$ et ${}^{(p,\nu)}\underset{(2)}{\overset{(2)}{G}}{}^{A}_{R'}$ sont donc 2-décomposables. De même, les termes d'ordre k de la $h^{\text{ième}}$ itérée ($h \leqslant k \leqslant l$) sont k-décomposables.

Il en résulte que les termes d'ordre k du propagateur et des noyaux élémentaires sont k-décomposables :

$$(5\text{-}8) \quad \left\{ \begin{aligned}
&{}^{(p,\nu)}\underset{(0)}{E}{}^{\pm A}_{R'}(x', x) = \delta^{A}_{R'}\, {}^{(0,0)}\underset{(0)}{E}{}^{\pm}(x', x) \\
&{}^{(p,\nu)}\underset{(1)}{E}{}^{\pm A}_{R'}(x', x) = \sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{R'u}\, {}^{(1)}\underset{(1)}{E}{}^{\pm a_u}_{r'_u}(x', x) - (p+\nu-1)\delta^{A}_{R'}\, {}^{(0,0)}\underset{(1)}{E}{}^{\pm}(x', x) \\
&{}^{(p,\nu)}\underset{(2)}{E}{}^{\pm A}_{R'} = \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p+\nu} \delta^{A^{uv}}_{R'uv}\, {}^{(2)}\underset{(2)}{E}{}^{\pm a_u a_v}_{r'_u r'_v} - (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu} \delta^{A^u}_{R'u}\, {}^{(1)}\underset{(2)}{E}{}^{\pm a_u}_{r'_u} \\
&\qquad + \frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2}\,\delta^{A}_{R'}\, {}^{(0,0)}\underset{(2)}{E}{}^{\pm}. \\
&\text{etc...}
\end{aligned} \right.$$

Les propagateurs approchés à l'ordre 0, 1, 2, ..., k, ..., l, sommes de ces termes, vérifient évidemment les mêmes décompositions.

6) **Décompositions d'ordre I des propagateurs approchés.**

Mais des décompositions d'ordre 1, avec reste, pourraient être plus intéressantes que ces décompositions sans reste d'ordre croissant, car elles permettraient de se ramener aux seuls éléments primitifs ${}^{(0,0)}E^{\pm}$, ${}^{(1,0)}E^{\pm\alpha}_{\rho'}$, ${}^{(0,1)}E^{\pm a}_{r'}$.

Malheureusement, la complexité du reste augmente avec l'ordre infinitésimal, ce qui limite leur avantage sur les décompositions sans reste ci-dessus. On va ici s'intéresser aux seuls termes du second ordre infinitésimal, pour lesquels le reste a une expression déjà fort lourde. A partir du troisième ordre infinitésimal, les formules obtenues seraient d'exploitation très malaisée.

Pour le terme de front, on déduit de (5-1)

$$ {}^{(2)}_{(2)}P^{a_1a_2}_{r'_1r'_2} - \delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(1)}_{(2)}P^{a_1}_{r'_1} - \delta^{a_1}_{r'_1}\,{}^{(1)}_{(2)}P^{a_2}_{r'_2} + \delta^{a_1}_{r'_1}\delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(0,0)}_{(2)}P = \lambda \left\{ {}^{(1)}_{(1)}w^{a_1}_{r'_1}\,{}^{(1)}_{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'}, $$

d'où

$$ (6\text{-}1) \quad \langle {}^{(2)}_{(2)}\overset{(0)}{E}{}^{\pm a_1a_2}_{r'_1r'_2}, f_{a_1a_2} \rangle - \langle {}^{(1)}_{(2)}\overset{(0)}{E}{}^{\pm a_1}_{r'_1}, f_{a_1r_2} \rangle - \langle {}^{(1)}_{(2)}\overset{(0)}{E}{}^{\pm a_2}_{r'_2}, f_{r_1a_2} \rangle + \langle {}^{(0,0)}_{(2)}\overset{(0)}{E}{}^{\pm}, f_{r_1r_2} \rangle $$
$$ = \int_0^{\pm\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \left\{ {}^{(1)}_{(1)}w^{a_1}_{r'_1}\,{}^{(1)}_{(1)}w^{a_2}_{r'_2} \right\}_{x'} (x', \lambda, \theta) $$
$$ \times f_{a_1a_2}(x'^{0'} + \lambda, x'^{i'} - \lambda q_{i'}) \frac{d^2\Omega}{4\pi}. $$

Pour l'écriture de la première et de la seconde itérée, on fait la convention suivante : les indices suffiront à indiquer les arguments de chaque fonction; les indices affectés de $'$ se rapportent au point x' de coordonnées $x'^{\nu'}$; les indices affectés de $''$ se rapportent au point x'' de coordonnées

$$ \begin{cases} x''^{0''} = x'^{0'} + \lambda \qquad = x^0 - \bar{\lambda}, \\ x''^{i''} = x'^{i'} - \lambda q_{i'}(\theta) = x^i + \bar{\lambda} q_{i''}(\bar{\theta}) \,; \end{cases} $$

les indices non affectés se rapportent au point x de coordonnées x^{ν}. On notera en outre

$$ \underset{(1)}{z}{}^{A}_{R'}(x', x\,; x'') = \{ \underset{(1)}{w}{}^{A''}_{R'}(x', x'') \}_{x'} + \{ \underset{(1)}{w}{}^{A}_{R''}(x'', x) \}_{x''}, $$

qui est le terme d'ordre $\| a \|$ du bi-tenseur-spineur de transport parallèle le long de l'arc brisé $x'x''x$

$$z^{A}_{R'}(x', x\,;\, x''\,;\, a) = \{ w^{L''}_{R'}(x', x''\,;\, a) \}_{x'} \, \{ w^{A}_{L''}(x'', x\,;\, a) \}_{x''}.$$

On déduit alors de (4-7)′ pour la première itérée

$$(6\text{-}2)\quad \left\{\begin{aligned}
&{}^{(2)}\underset{(2)(0)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm a_1 a_2}_{r'_1 r'_2} - \delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(1)}\underset{(2)(0)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm a_1}_{r'_1} - \delta^{a_1}_{r'_1}\,{}^{(1)}\underset{(2)(0)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm a_2}_{r'_2} + \delta^{a_1}_{r'_1}\delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(0,0)}\underset{(2)(0)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm} \\
&= -\zeta\{\pm(x^{\nu} - x'^{\nu'})\}\iint_{S^{(2)}} \frac{1}{x^{0} - x'^{0'} + (x^{i} - x'^{i'})q_{i'}(\theta)} \\
&\qquad \times\Bigg[\Big({}^{(1)}\underset{(1)}{K}{}^{a''_1}_{r'_1} - \delta^{a''_1}_{r'_1}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{K}\Big)\,{}^{(1)}\underset{(1)}{z}{}^{a_2}_{r'_2} + \Big({}^{(1)}\underset{(1)}{K}{}^{a''_2}_{r'_2} - \delta^{a''_2}_{r'_2}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{K}\Big)\,{}^{(1)}\underset{(1)}{z}{}^{a_1}_{r'_1} \\
&\qquad\qquad -2\lambda\underset{(2)}{\overline{Q}}\Big(\big\{{}^{(1)}w^{a_1}_{r'_1}\big\}_{x'}, \big\{{}^{(1)}w^{a_2}_{r'_2}\big\}_{x'}\Big)\Bigg]\frac{d^2\Omega}{16\pi^2}, \\
&{}^{(2)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm\nu a_1 a_2}_{(1) r'_1 r'_2} - \delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(1)}\underset{(2)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm\nu a_1}_{(1) r'_1} - \delta^{a_1}_{r'_1}\,{}^{(1)}\underset{(2)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm\nu a_2}_{(1) r'_2} + \delta^{a_1}_{r'_1}\delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(0,0)}\underset{(2)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm\nu}_{(1)} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Pour la seconde itérée, on déduit de (4-13)

$$(6\text{-}3)\quad \begin{aligned}
&{}^{(2)}\underset{(2)}{\overset{(2)}{E}}{}^{\pm a_1 a_2}_{r'_1 r'_2} - \delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(1)}\underset{(2)}{\overset{(2)}{E}}{}^{\pm a_1}_{r'_1} - \delta^{a_1}_{r'_1}\,{}^{(1)}\underset{(2)}{\overset{(2)}{E}}{}^{\pm a_2}_{r'_2} + \delta^{a_1}_{r'_1}\delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(0,0)}\underset{(2)}{\overset{(2)}{E}}{}^{\pm} \\
&= \int_{0}^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}} \Bigg\{ \Big({}^{(1)}\underset{(1)}{K}{}^{a''_1}_{r'_1} - \delta^{a''_1}_{r'_1}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{K}\Big)\Big({}^{(1)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm a_2}_{r''_2} - \delta^{a_2}_{r''_2}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm}\Big) \\
&\qquad + \Big({}^{(1)}\underset{(1)}{K}{}^{a''_2}_{r'_2} - \delta^{a''_2}_{r'_2}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{K}\Big)\Big({}^{(1)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm a_1}_{r''_1} - \delta^{a_1}_{r''_1}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm}\Big)\Bigg\}\frac{d^2\Omega}{4\pi},
\end{aligned}$$

où, en vertu de (4-6)′,

$$(6\text{-}4)\quad \begin{aligned}
&{}^{(1)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm a}_{r''} - \delta^{a}_{r''}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{\overset{(1)}{E}}{}^{\pm} \\
&= -\zeta\{\pm(x^{\nu} - x''^{\nu''})\}\iint_{S^{(2)}} \frac{{}^{(1)}\underset{(1)}{K}{}^{a''}_{r''} - \delta^{a''}_{r''}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{K}}{x^{0} - x''^{0''} + (x^{i} - x''^{i''})q_{i'}(\overline{\theta})}\,\frac{d^2\overline{\Omega}}{16\pi^2}.
\end{aligned}$$

L'intérêt de ces décompositions se trouve ainsi limité par le fait qu'on ne dispose pas d'une formule simple donnant

$${}^{(1)}\underset{(1)}{K}{}^{a}_{r'} - \delta^{a}_{r'}\,{}^{(0,0)}\underset{(1)}{K}.$$

7) Relations de « fusion » à l'approximation linéaire.

Elles sont basées

— d'une part sur la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer;

— d'autre part sur les décompositions d'ordre 1 des propagateurs approchés.

Une première méthode consiste à déduire des relations (III-19-3), (III-19-4), (III-19-6), (III-19-7) entre paramétrix et entre noyaux de diffusion des relations approchées entre noyaux élémentaires et entre propagateurs, suivant le procédé utilisé ci-dessus.

Mais il est plus simple de résoudre par rapport aux ${}^{\widehat{q}}\mathrm{E}^{\pm\alpha_1 \cdots \alpha_q}_{\rho'_1 \cdots \rho'_q}$ les relations (III-17-4) obtenues en théorie de Petiau-Duffin-Kemmer, sous la forme

$$(7\text{-}1) \qquad {}^{(0,0)}\mathrm{E}^{\pm}(x', x\,;\,a) = \frac{1}{4}\Gamma_{a_1a_2}\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a_1a_2}_{r'_1r'_2}(x', x\,;\,a)\Gamma^{r'_1r'_2},$$

$$(7\text{-}2) \qquad {}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm\alpha}_{\rho'}(x', x\,;\,a) = \frac{1}{4}\gamma^{\alpha}_{a_1a_2}\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a_1a_2}_{r'_1r'_2}(x', x\,;\,a)\gamma^{r'_1r'_2}_{\rho'},$$

puis d'en déduire des relations approchées, dans lesquelles on peut substituer la décomposition approchée d'ordre 1 de ${}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a_1a_2}_{r'_1r'_2}$ obtenue en (5-8) :

$$(7\text{-}3) \qquad {}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a_1a_2}_{r'_1r'_2} = \delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(0,1)}\mathrm{E}^{\pm a_1}_{r'_1} + \delta^{a_1}_{r'_1}\,{}^{(0,1)}\mathrm{E}^{\pm a_2}_{r'_2} - \delta^{a_1}_{r'_1}\delta^{a_2}_{r'_2}\,{}^{(0,0)}\mathrm{E}^{\pm}.$$

Il résulte de (7-1) et (7-3) la relation approchée

$$(7\text{-}4) \qquad {}^{(0,0)}\mathrm{E}^{\pm}(x', x) = \frac{1}{4}\,{}^{(0,1)}\mathrm{E}^{\pm l}_{l'}(x', x).$$

On déduit de même de (7-2) et (7-3), compte tenu de (7-4), la relation approchée (³)

$$(7\text{-}5) \qquad {}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm\alpha}_{\rho'}(x', x) = -\frac{1}{4}\left\{2(\gamma_{\rho'}\gamma^{\alpha})^{r'}_{a} + \delta^{\alpha}_{\rho'}\,\delta^{r'}_{a}\right\}{}^{(0,1)}\mathrm{E}^{\pm a}_{r'}(x', x).$$

Il résulte de (7-4) et (7-5), ainsi que des propriétés de commutation des matrices de Dirac, que, à cette approximation,

$$(7\text{-}6) \qquad \begin{cases} {}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm 0}_{0'} = {}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm 1}_{1'} = {}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm 2}_{2'} = {}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm 3}_{3'} = {}^{(0,0)}\mathrm{E}^{\pm} \\ {}^{(0,1)}\mathrm{E}^{\pm 0}_{i'} = {}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm i}_{0'}, \qquad {}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm i}_{j'} = -\,{}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm j}_{i'} \qquad (i \neq j). \end{cases}$$

(³) Cf. chapitre III, § 19, remarque (¹⁰) sur les « spineurs à 2 composantes ».

De même, les fonctions ${}^{(1,0)}w^{\alpha}_{\rho'}$, ${}^{(1,0)}P^{\alpha}_{\rho'}$, ${}^{(1,0)}K^{\alpha}_{\rho'}$ (soit ${}^{(1,0)}S^{\alpha}_{\rho'}$ l'une quelconque d'entre elles), de x' et x, sont telles que

$$(7\text{-}7)\quad \begin{cases} {}^{(1,0)}S^{0}_{0'} = {}^{(1,0)}S^{1}_{1'} = {}^{(1,0)}S^{2}_{2'} = {}^{(1,0)}S^{3}_{3'} = {}^{(0,0)}S \\ {}^{(1,0)}S^{0}_{i'} = {}^{(1,0)}S^{i}_{0'}, \qquad {}^{(1,0)}S^{i}_{j'} = -\,{}^{(1,0)}S^{j}_{i'} \qquad (i \neq j). \end{cases}$$

Un raisonnement direct permet d'ailleurs d'établir cette propriété, sous les seules hypothèses (impliquées par celles faites au début de cette section), que la connexion lorentzienne $\overline{C}^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ est *compatible avec la métrique*, et que

$$(7\text{-}8)\qquad \eta_{\alpha\lambda}\,{}^{(1,0)}\underset{(1)}{l}{}^{\lambda}_{\beta} = -\,\eta_{\beta\lambda}\,{}^{(1,0)}\underset{(1)}{l}{}^{\lambda}_{\alpha}.$$

On déduit en effet des relations de transport parallèle de $\gamma_{j\alpha\beta}$, et de (3-5)

$${}^{(1,0)}\underset{(1)}{w}{}^{\lambda}_{\mu'}(x', x) + {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\overset{*}{w}}{}^{\lambda'}_{\mu}(x', x) = 0$$

que ${}^{(1,0)}\underset{(1)}{w}{}^{\alpha}_{\rho'}$ a la forme (7-7), avec ${}^{(0,0)}\underset{(1)}{w} = 0$. Puisque ${}^{(1,0)}\underset{(0)}{w}{}^{\alpha}_{\rho'} = \delta^{\alpha}_{\rho'}$, le bi-1-tenseur de transport parallèle approché a la forme (7-7), ainsi que ${}^{(1,0)}P^{\alpha}_{\rho'}$. On en déduit la même propriété pour ${}^{(1,0)}K^{\alpha}_{\rho'}$, en utilisant l'antisymétrie des coefficients de L

$$\eta_{\alpha\mu}\,{}^{(1,0)}h^{\mu\lambda}_{\beta} = -\,\eta_{\beta\mu}\,{}^{(1,0)}h^{\mu\lambda}_{\alpha}, \qquad \eta_{\alpha\mu}\,{}^{(1,0)}k^{\mu}_{\beta} = -\,\eta_{\beta\mu}\,{}^{(1,0)}k^{\mu}_{\alpha},$$

liée à la compatibilité avec la métrique de la connexion $\overline{C}^{\alpha}{}_{\beta\mu}$, et à (7-8).

8) Relations de « fusion » approchées aux ordres supérieurs.

Deux points de vue peuvent être envisagés.

a) Les formules de la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer employées ci-dessus doivent être associées à des décompositions d'ordre 1. Il faut en effet :

— d'une part exprimer les propagateurs approchés en fonction de ceux des spins 0, 1/2, 1;

— d'autre part décomposer le propagateur 2-spinoriel approché.

Il faut donc utiliser les décompositions d'ordre 1 avec reste étudiées au § 6.

La relation (7-4) peut ainsi être complétée par les relations suivantes

$$(8\text{-}1)\quad \langle {}^{(0,0)}\underset{(2)}{\overset{(0)}{E}}{}^{\pm} - \frac{1}{4}\,{}^{(0,1)}\underset{(2)}{\overset{(0)}{E}}{}^{\pm a}_{a'}, f\rangle(x') = \frac{1}{8}\int_0^{\pm\infty}\lambda d\lambda\iint_{S^{(2)}}\{{}^{(0,1)}\underset{(1)}{w}{}^{a}_{r'}\,{}^{(0,1)}\underset{(1)}{\overset{*}{w}}{}^{r'}_{a}\}_{x'} f(x)\,\frac{d^2\Omega}{4\pi},$$

déduite de (6-1);

$$
(8\text{-}2)\left\{\begin{aligned}
&{}^{(0,0)}\underset{(2)(0)}{\overset{(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm}(x', x) - \frac{1}{4}\,{}^{(0,1)}\underset{(2)(0)}{\overset{(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm l}{}_{l'}(x', x)\\
&\quad = -\frac{1}{16\pi}\zeta\{\pm(x^{\nu}-x'^{\nu'})\}\iint_{S^{(2)}}[({}^{(0,1)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{a''}_{r'} - \frac{1}{4}\,{}^{(0,1)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{b''}_{b'}\delta^{a''}_{r'})\,{}^{(0,1)}\underset{(1)}{z}{}^{r'}_{a}\\
&\qquad\qquad - \lambda\underset{(2)}{\overline{\mathrm{Q}}}(\{{}^{(0,1)}w^{a''}_{r'}\}_{x'}, \{{}^{(0,1)}\overset{*}{w}{}^{r'}_{a''}\}_{x'})]\\
&\qquad\qquad \times \frac{1}{x^{0}-x'^{0'}+(x^{i}-x'^{i'})q_{i'}(\theta)}\,\frac{d^2\Omega}{4\pi},\\
&{}^{(0,0)}\underset{(2)\,(1)}{\overset{(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\nu}(x', x) - \frac{1}{4}\,{}^{(0,1)}\underset{(2)\,(1)}{\overset{(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\nu\, a}{}_{a'}(x', x) = 0,
\end{aligned}\right.
$$

déduites de (6-2);

$$
(8\text{-}3)\quad {}^{(0,0)}\underset{(2)}{\overset{(2)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm} - \frac{1}{4}\,{}^{(0,1)}\underset{(2)}{\overset{(2)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm l}{}_{l'} = \frac{1}{4}\int_0^{\pm\infty} d\lambda \iint_{S^{(2)}}\left({}^{(0,1)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{a''}_{r'} - \frac{1}{4}\,{}^{(0,1)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{b''}_{b'}\delta^{a''}_{r'}\right)
\times\left({}^{(0,1)}\underset{(1)}{\overset{*(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm r''}_{a} - \frac{1}{4}\,{}^{(0,1)}\underset{(1)}{\overset{*(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm c''}_{c}\delta^{r''}_{a}\right)\frac{d^2\Omega}{4\pi},
$$

déduite de (6-3).

On déduirait de même de (6-1), (6-2) et (6-3) les relations complétant (7-5), au second ordre infinitésimal.

b) Si l'on veut utiliser les décompositions sans reste d'ordre croissant mises en évidence au § 5, il faut leur associer les extensions aux ordres supérieurs de la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer (chap. III, § 20).

Sur le modèle de l'exemple qui y est exposé, traitons le cas des relations *approchées au second ordre quasi minkowskien*. Il résulte en effet de (5-2), (5-6) et (5-7) la décomposition approchée

$$
(8\text{-}4)\quad {}^{(p,\nu)}\mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p+\nu}\delta^{\mathrm{A}\,uv}_{\mathrm{R}'uv}\,{}^{(2)}\mathrm{E}^{\pm a_u a_v}_{r'_u r'_v} - (p+\nu-2)\sum_{u=1}^{p+\nu}\delta^{\mathrm{A}\,u}_{\mathrm{R}'u}\,{}^{(1)}\mathrm{E}^{\pm a_u}_{r'_u}
+\frac{(p+\nu-2)(p+\nu-1)}{2}\,\delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}\,{}^{(0,0)}\mathrm{E}^{\pm},
$$

qui exprime ${}^{(p,\nu)}\mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$, pour tout p et tout ν, en fonction de

$$
{}^{(0,0)}\mathrm{E}^{\pm},\quad {}^{(0,1)}\mathrm{E}^{\pm a}_{r'},\quad {}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm\alpha}_{\rho'},\quad {}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a_1 a_2}_{r'_1 r'_2},\quad {}^{(1,1)}\mathrm{E}^{\pm\alpha\, a}_{\rho' r'},\quad {}^{(2,0)}\mathrm{E}^{\pm\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}.
$$

Les relations cherchées doivent exprimer ces six éléments primitifs en fonction de ${}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a_1 a_2}_{\ \ r'_1 r'_2}$ seul. De même qu'au chapitre III, § 20, il vient, *en seconde approximation quasi minkowskienne,*

$$
\tag{8-5}
\left\{
\begin{aligned}
{}^{(0,0)}\mathrm{E}^{\pm} &= \frac{1}{4}\,{}^{(0,2)}\overset{*}{\mathrm{E}}{}^{\pm a\, r'}_{\ \ r' a} \\
{}^{(1,0)}\mathrm{E}^{\pm \alpha}_{\ \ \rho'} &= -\frac{1}{4}\,\gamma^{\alpha}{}_{a_1 a_2}\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a_1 a_2}_{\ \ r'_1 r'_2}\,\gamma_{\rho'}{}^{r'_1 r'_2} \\
{}^{(0,1)}\mathrm{E}^{\pm a}_{\ \ r'} &= \frac{1}{4}\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a\, l}_{\ \ r' l'} + \frac{1}{8}\,\delta^{a}_{r'}\left({}^{(0,2)}\overset{*}{\mathrm{E}}{}^{\pm b\, s'}_{\ \ s' b} + {}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm l\, m}_{\ \ l' m'}\right) \\
{}^{(1,1)}\mathrm{E}^{\pm \alpha\, a}_{\ \ \rho' r'} &= -\frac{1}{2}\left(\gamma_{\rho'}\gamma^{\alpha}\right)^{s'}_{b}\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a\, b}_{\ \ r' s'} \\
&\quad + \frac{1}{4}\,\delta^{a}_{r'}\gamma^{\alpha}{}_{b_1 b_2}\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm b_1 b_2}_{\ \ s'_1 s'_2}\,\gamma_{\rho'}{}^{s'_1 s'_2} - \frac{1}{4}\,\delta^{\alpha}_{\rho'}\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a\, l}_{\ \ r' l'} \\
&\quad + \frac{1}{8}\,\delta^{a}_{r'}\left(\gamma_{\rho'}\gamma^{\alpha}\right)^{s'}_{b}\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm b\, l}_{\ \ s' l'} \\
&\quad - \frac{1}{8}\,\delta^{\alpha}_{\rho'}\delta^{a}_{r'}\left({}^{(0,2)}\overset{*}{\mathrm{E}}{}^{\pm b\, s'}_{\ \ s' b} + 3\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm l\, m}_{\ \ l' m'}\right) \\
{}^{(2,0)}\mathrm{E}^{\pm \alpha_1 \alpha_2}_{\ \ \rho'_1 \rho'_2} &= \frac{1}{4}\left(\delta^{\alpha_2}_{\rho'_2}\gamma^{\alpha_1}{}_{ab}\gamma_{\rho'_1}{}^{r' s'} + \delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\gamma^{\alpha_2}{}_{ab}\gamma_{\rho'_2}{}^{r' s'}\right){}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a\, b}_{\ \ r' s'} \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\gamma_{\rho'_1}\gamma^{\alpha_1}\right)^{r'_1}_{a_1}\left(\gamma_{\rho'_2}\gamma^{\alpha_2}\right)^{r'_2}_{a_2}\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a_1 a_2}_{\ \ r'_1 r'_2} \\
&\quad + \frac{1}{4}\left\{\delta^{\alpha_2}_{\rho'_2}\left(\gamma_{\rho'_1}\gamma^{\alpha_1}\right)^{r'}_{a} + \delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\left(\gamma_{\rho'_2}\gamma^{\alpha_2}\right)^{r'}_{a}\right\}{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm a\, l}_{\ \ r' l'} \\
&\quad - \frac{1}{4}\,\delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\delta^{\alpha_2}_{\rho'_2}\left({}^{(0,2)}\overset{*}{\mathrm{E}}{}^{\pm a\, r'}_{\ \ r' a} + 4\,{}^{(0,2)}\mathrm{E}^{\pm l\, m}_{\ \ l' m'}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Aux ordres d'approximation supérieurs, on obtient des relations analogues, toujours *sans reste* : tout noyau élémentaire ou propagateur approché au $k^{\text{ième}}$ ordre ($0 \leqslant k \leqslant l$) quasi minkowskien s'exprime linéairement au moyen de l'élément k-spinoriel correspondant.

C. Dalembertiens et opérateurs de Klein-Gordon.

Comme on l'a vu au chapitre III, section D, on trouve pour la paramétrix relative à ces opérateurs les mêmes résultats que dans le cas de $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$. Les résultats indiqués ci-dessus à la section B sur les approximations quasi minkowskiennes à divers ordres de ${}^{(p,\nu)}\mathrm{P}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$, ${}^{(p,\nu)}\overset{(0)}{\mathrm{E}}{}^{\pm \mathrm{A}}_{\ \ \mathrm{R}'}$, ${}^{(p,\nu)}\overset{(0)}{\mathrm{G}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ sont donc intégralement valables dans ce cas.

La différence intervient sur les itérées, à partir de la première : les décompositions du noyau de diffusion comportent en effet un reste supplémentaire, fonction des éléments de *courbure*. Cette section a pour but d'indiquer l'effet de ces termes sur les noyaux élémentaires approchés.

9) Décompositions approchées au premier ordre quasi minkowskien.

Les coefficients ${}^{(p,\nu)}l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ des dalembertiens ne sont pas décomposables, même à la première approximation quasi minkowskienne. Aussi, au lieu de s'intéresser aux mêmes décompositions qu'à la section B, on va procéder comme au chapitre III, § 15.

Ainsi, il résulte de (III-15-3), au premier ordre infinitésimal,

$$(9\text{-}1)\quad {}^{(p,\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathfrak{R}'uv}\, {}^{(2,\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_u\alpha_v @}_{\rho'_u\rho'_v ⓡ'} - (p-2)\sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathfrak{R}'u}\, {}^{(1,\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_u @}_{\rho'_u ⓡ'} + \frac{(p-2)(p-1)}{2}\, \delta^{\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'}\, {}^{(0,\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{@}_{ⓡ'}.$$

Il en résulte en vertu de (4-6)′ une décomposition analogue de ${}^{(p,\nu)}\overset{(1)}{\underset{(1)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ et de ${}^{(p,\nu)}\overset{(1)}{\underset{(1)}{\mathrm{G}}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$. Compte tenu des décompositions vérifiées par les termes de front approchés, on obtient, pour les noyaux élémentaires et le propagateur *approchés au premier ordre infinitésimal*, la décomposition

$$(9\text{-}2)\quad {}^{(p,\nu)}\mathrm{E}^{\pm\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathfrak{R}'uv}\, {}^{(2,\nu)}\mathrm{E}^{\pm\alpha_u\alpha_v @}_{\rho'_u\rho'_v ⓡ'} - (p-2)\sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathfrak{R}'u}\, {}^{(1,\nu)}\mathrm{E}^{\pm\alpha_u @}_{\rho'_u ⓡ'} + \frac{(p-2)(p-1)}{2}\, \delta^{\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'}\, {}^{(0,\nu)}\mathrm{E}^{\pm @}_{ⓡ'}.$$

La décomposition (III-15-3) est complétée par (III-15-6) qui, en partie principale, s'écrit

$$(9\text{-}3)\quad {}^{(2,\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_1\alpha_2 @}_{\rho'_1\rho'_2 ⓡ'} = \delta^{\alpha_2}_{\rho'_2}\, {}^{(1,\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_1 @}_{\rho'_1 ⓡ'} + \delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\, {}^{(1,\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_2 @}_{\rho'_2 ⓡ'} - \delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\delta^{\alpha_2}_{\rho'_2}\, {}^{(0,\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{@}_{ⓡ'} - \lambda^{(\nu)}\underset{(1)}{\mathrm{J}}{}^{\alpha_1\alpha_2 @}_{\rho_1\rho_2 ⓡ}.$$

Dans les cas particuliers intéressant la Physique mathématique : $\nu = 0$ (a-spin entier) et $\nu = 1$ (b-spin demi-entier), (9-3) s'écrit

$$(9\text{-}3')\quad {}^{(2)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2} = \delta^{\alpha_2}_{\rho'_2}\, {}^{(1)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_1}_{\rho'_1} + \delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\, {}^{(1)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_2}_{\rho'_2} - \delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\delta^{\alpha_2}_{\rho'_2}\, {}^{(0)}\underset{(1)}{\mathrm{K}} - 2\lambda \underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\alpha_1}{}_{\rho_1}{}^{\alpha_2}{}_{\rho_2}$$

$$(9\text{-}3)'' \qquad {}^{(5/2)}\underset{(1)}{K}{}^{\alpha_1\alpha_2 r'}_{\rho'_1\rho'_2 a} = \delta^{\alpha_2}_{\rho'_2}\,{}^{(3/2)}\underset{(1)}{K}{}^{\alpha_1 r'}_{\rho'_1 a} + \delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\,{}^{(3/2)}\underset{(1)}{K}{}^{\alpha_2 r'}_{\rho'_2 a} - \delta^{\alpha_1}_{\rho'_1}\delta^{\alpha_2}_{\rho'_2}\,{}^{(1/2)}\underset{(1)}{K}{}^{r'}_{a}.$$

Il résulte de (9-1) et (9-3)″ que pour les spins demi-entiers ($\nu = 1$), les noyaux de diffusion sont, en partie principale, 1-décomposables suivant l'ordre tensoriel. D'où la décomposition des noyaux élémentaires *approchés au premier ordre quasi minkowskien*

$$(9\text{-}4) \qquad {}^{(p+1/2)}E^{\pm\mathcal{A}\,r'}_{\mathcal{R}'a} = \sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{R}'^u}\,{}^{(3/2)}E^{\pm\alpha_u r'}_{\rho'_u a} - (p-1)\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}\,{}^{(1/2)}E^{\pm r'}_{a}.$$

Il résulte au contraire de (9-3)′ que, pour les spins entiers ($\nu = 0$), la décomposition d'ordre 1 des noyaux élémentaires approchés au premier ordre quasi-minkowskien a pour reste

(9-5)

$$\underset{(1)}{H}{}^{\pm\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}(x', x) = \zeta\{\pm(x^{\nu} - x'^{\nu'})\}\iint_{S^{(2)}} \frac{2\lambda \underset{(1)}{R}{}^{\alpha''_1\ \ \alpha''_2}_{\ \ \rho''_1\ \ \rho''_2}(x'^{0'}+\lambda, x'^{i'}-\lambda q_{i'})}{x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'})q_{i'}(\theta)}\,\frac{d^2\Omega}{16\pi^2},$$

où

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{(x^0 - x'^{0'})^2 - \sum_{i=1}^{3}(x^i - x'^{i'})^2}{x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'})q_{i'}(\theta)},$$

conformément au calcul (4-6)′ des termes du premier ordre de la première itérée. D'où, pour les spins entiers, la relation *approchée au premier ordre*

$$(9\text{-}6) \qquad {}^{(p)}E^{\pm\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'} = \sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{R}'^u}\,{}^{(1)}E^{\pm\alpha_u}_{\rho'_u} - (p-1)\,\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}\,{}^{(0)}E^{\pm} + \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{R}'^{uv}}\underset{(1)}{H}{}^{\pm\alpha_u\alpha_v}_{\rho'_u\rho'_v}.$$

Quant aux décompositions (III-15-8) et (III-15-9), leurs termes complémentaires dépendent du choix du dalembertien. En se limitant à l'étude des cas particuliers *b)* et *c)* intéressant la Physique mathématique, on obtient les relations approchées entre noyaux de diffusion

$$(9\text{-}7)\ \left\{\begin{aligned}
{}^{(3/2)}\underset{(1)}{K}{}^{\alpha\,r'}_{\rho' a} &= \delta^{r'}_{a}\,{}^{(1)}\underset{(1)}{K}{}^{\alpha}_{\rho'} + \delta^{\alpha}_{\rho'}\,{}^{(1/2)}\underset{(1)}{K}{}^{r'}_{a} - \delta^{\alpha}_{\rho'}\delta^{r'}_{a}\,{}^{(0)}\underset{(1)}{K} \\
&\qquad + \lambda\left\{\underset{(1)}{R}{}^{\alpha\ \mu}_{\ \mu\ \rho}\delta^{r'}_{a} + \frac{1}{2}\underset{(1)}{R}{}^{\alpha\ \beta}_{\ \rho\ \sigma}(\gamma^{\sigma'}\gamma_{\beta})^{r'}_{a}\right\} \\
{}^{S}\underset{(1)}{K}{}^{r'c}_{a\,s'} &= \delta^{c}_{s'}\,{}^{(1/2)}\underset{(1)}{K}{}^{r'}_{a} + \delta^{r'}_{a}\,{}^{(1/2)}\underset{(1)}{\overset{*}{K}}{}^{c}_{s'} - \delta^{r'}_{a}\delta^{c}_{s'}\,{}^{(0)}\underset{(1)}{K} \\
&\qquad + \lambda\left\{\frac{1}{4}\underset{(1)}{R}{}^{\xi\ \mu}_{\ \mu\ \xi}\delta^{r'}_{a}\delta^{c}_{s'} - \frac{1}{8}\underset{(1)}{R}{}^{\beta_1\ \ \beta_2}_{\ \ \sigma_1\ \ \sigma_2}(\gamma^{\sigma'_1}\gamma_{\beta_1})^{r'}_{a}(\gamma_{\beta_2}\gamma^{\sigma'_2})^{c}_{s'}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

D'où, pour les noyaux élémentaires *approchés au premier ordre*,

$$(9\text{-}8)\quad {}^{(3/2)}\mathrm{E}^{\pm\alpha r'}_{\rho' a} = \delta^{r'}_{a}\,{}^{(1)}\mathrm{E}^{\pm\alpha}_{\rho'} + \delta^{\alpha}_{\rho'}\,{}^{(1/2)}\mathrm{E}^{\pm r'}_{a} - \delta^{\alpha}_{\rho'}\delta^{r'}_{a}\,{}^{(0)}\mathrm{E}^{\pm} - \frac{1}{2}\delta^{r'}_{a}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\alpha\,\mu}_{\mu'\rho'} - \frac{1}{4}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\alpha\,\beta}_{\rho'\sigma'}(\gamma^{\sigma'}\gamma_{\beta})^{r'}_{a}$$

$$(9\text{-}9)\quad {}^{s}\mathrm{E}^{\pm r'c}_{a\,s'} = \delta^{c}_{s'}\,{}^{(1/2)}\mathrm{E}^{\pm r'}_{a} + \delta^{r'}_{a}\,{}^{(1/2)}\overset{*}{\mathrm{E}}{}^{\pm c}_{s'} - \delta^{r'}_{a}\delta^{c}_{s'}\,{}^{(0)}\mathrm{E}^{\pm} - \frac{1}{8}\delta^{r'}_{a}\delta^{c}_{s'}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\xi\,\mu}_{\mu'\xi'} + \frac{1}{16}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\beta_1\beta_2}_{\sigma'_1\sigma'_2}\left(\gamma^{\sigma'_1}\gamma_{\beta_1}\right)^{r'}_{a}\left(\gamma_{\beta_2}\gamma^{\sigma'_2}\right)^{c}_{s'}.$$

De (9-4) et (9-8) résulte la décomposition d'ordre 1 avec reste exprimant, *à l'approximation du premier ordre quasi minkowskien*, les noyaux élémentaires de tous les spins demi-entiers à l'aide de ceux des spins 0, 1, 1/2

$$(9\text{-}10)\quad {}^{(p+1/2)}\mathrm{E}^{\pm\mathcal{A}\,r'}_{\mathfrak{R}'a} = \delta^{r'}_{a}\sum_{u=1}^{p}\delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathfrak{R}'u}\,{}^{(1)}\mathrm{E}^{\pm\alpha_u}_{\rho'_u} + \delta^{\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'}\,{}^{(1/2)}\mathrm{E}^{\pm r'}_{a} - p\,\delta^{\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'}\delta^{r'}_{a}\,{}^{(0)}\mathrm{E}^{\pm} - \frac{1}{2}\delta^{r'}_{a}\sum_{u=1}^{p}\delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathfrak{R}'u}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\alpha_u\mu}_{\mu'\rho'_u} - \frac{1}{4}\sum_{u=1}^{p}\delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathfrak{R}'u}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\alpha_u\beta}_{\rho'_u\sigma'}(\gamma^{\sigma'}\gamma_{\beta})^{r'}_{a}.$$

10) Décompositions approchées aux ordres supérieurs.

Aux ordres supérieurs d'approximation on peut déduire de (III-15-3) des décompositions sans reste suivant l'ordre tensoriel : le terme d'ordre k $(1 \leqslant k \leqslant l)$ du noyau de diffusion est $(k+1)$-décomposable

$$(10\text{-}1)\quad \left\{\begin{aligned} {}^{(p,\nu)}\underset{(2)}{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} = {} & \sum_{1\leqslant u<v<w\leqslant p}\delta^{\mathcal{A}^{uvw}}_{\mathfrak{R}'uvw}\,{}^{(3,\nu)}\underset{(2)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_u\alpha_v\alpha_w @}_{\rho'_u\rho'_v\rho'_w ⓡ'} \\ & -(p-3)\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p}\delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathfrak{R}'uv}\,{}^{(2,\nu)}\underset{(2)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_u\alpha_v @}_{\rho'_u\rho'_v ⓡ'} \\ & +\frac{(p-3)(p-2)}{2\,!}\sum_{u=1}^{p}\delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathfrak{R}'u}\,{}^{(1,\nu)}\underset{(2)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha_u @}_{\rho'_u ⓡ'} \\ & -\frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{3\,!}\delta^{\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'}\,{}^{(0,\nu)}\underset{(2)}{\mathrm{K}}{}^{@}_{ⓡ'}, \\ \text{etc...} \end{aligned}\right.$$

De même que la partie principale de la première itérée est 2-décomposable, ses termes suivants vérifient des décompositions sans reste d'ordres 3, 4, 5, 6, ...

(4-13) montre ensuite que la seconde itérée est, en partie principale, 4-décomposable, et que ses termes suivants vérifient des décompositions sans reste d'ordres 5, 6, 7, ... D'une façon générale, la $k^{\text{ième}}$ itérée a une partie principale (d'ordre infinitésimal k) $2k$-décomposable suivant l'ordre tensoriel; son terme d'ordre infinitésimal $(k+h)$ $(k+h \leqslant l)$ est $(2k+h)$-décomposable.

Il résulte ainsi de (III-15-3) que les propagateurs approchés au $k^{\text{ième}}$ ordre infinitésimal sont, à chaque ordre spinoriel ν fixé, $2k$-décomposables suivant l'ordre tensoriel.

On complète (III-15-3) par (III-15-6) pour obtenir des décompositions d'ordre k avec reste, suivant l'ordre tensoriel, des propagateurs approchés à l'ordre k. Dans les restes de ces décompositions, n'intervient que la partie principale $\underset{(1)}{R}{}^{\alpha_1}{}_{\beta_1}{}^{\alpha_2}{}_{\beta_2}$ de la courbure, par l'intermédiaire de ${}^{(\nu)}\underset{(1)}{J}{}^{\alpha_1\alpha_2 ⓐ}_{\beta_1\beta_2 ⓑ}$. En effet, les termes d'ordre infinitésimal $k \geqslant 2$ de la courbure peuvent être traités comme ceux de $Q\left(\left\{ t^{\alpha_1}_{\rho'_1} \right\}_{x'}, \left\{ t^{\alpha_2}_{\rho'_2} \right\}_{x'}\right)$, et sont donc éliminés dans les décompositions d'ordre k.

Remarquons que ces décompositions *n'ont pas de reste* pour $\nu = 1$ (b-spin demi-entier), puisque

$${}^{(1)}J^{\alpha_1\alpha_2 a}_{\beta_1\beta_2 b} \equiv 0.$$

Il en est de même pour tout ordre spinoriel $\nu > 0$ dans le cas des dalembertiens (III-14-7) et (III-14-8) (Tran-Van-Tan), ainsi que pour les ordres spinoriels impairs dans le cas des dalembertiens définis par (III-14-9).

Pour $\nu = 0$ (a-spin entier)

$${}^{(0)}J^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} \equiv 2R^{\alpha_1}{}_{\beta_1}{}^{\alpha_2}{}_{\beta_2},$$

de sorte que la partie principale de la courbure intervient effectivement. La complexité des restes croît très vite avec l'ordre infinitésimal, du fait que l'ordre minimal de décomposition (sans reste) est $2k$: on trouvera, à chaque ordre infinitésimal, un terme complémentaire pour la première itérée, deux pour la seconde, ..., k termes complémentaires pour la $k^{\text{ième}}$ itérée, etc...

Ainsi, au second ordre infinitésimal, à côté de ${}^{(p)}\overset{(0)}{\underset{(2)}{E}}{}^{\pm\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}$ et de ${}^{(p)}\overset{(1)}{\underset{(2)}{E}}{}^{\pm\nu\,\mathcal{A}}_{(1)\mathcal{R}'}$, qui sont 2-décomposables, on trouve les décompositions avec reste

$$(10\text{-}2)\quad \begin{cases} {}^{(p)}\overset{(1)}{\underset{(2)(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'} - \sum\limits_{1\leqslant u<v\leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathfrak{R}'^{uv}}\, {}^{(2)}\overset{(1)}{\underset{(2)(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\alpha_u\alpha_v}_{\rho'_u\rho'_v} \\ \quad + (p-2)\sum\limits_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^{u}}_{\mathfrak{R}'^{u}}\, {}^{(1)}\overset{(1)}{\underset{(2)(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\alpha_u}_{\rho'_u} - \dfrac{(p-2)(p-1)}{2}\, \delta^{\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'}\, {}^{(0)}\overset{(1)}{\underset{(2)(0)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm} \\ \quad = \sum\limits_{1\leqslant u<v<w\leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uvw}}_{\mathfrak{R}'^{uvw}}\, \overset{(1)}{\underset{(2)}{\mathrm{H}}}{}^{\pm\alpha_u\alpha_v\alpha_w}_{\rho'_u\rho'_v\rho'_w} \\ {}^{(p)}\overset{(2)}{\underset{(2)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'} - \sum\limits_{1\leqslant u<v\leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathfrak{R}'^{uv}}\, {}^{(2)}\overset{(2)}{\underset{(2)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\alpha_u\alpha_v}_{\rho'_u\rho'_v} + (p-2)\sum\limits_{u=1}^{p} \delta^{\mathcal{A}^{u}}_{\mathfrak{R}'^{u}}\, {}^{(1)}\overset{(2)}{\underset{(2)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm\alpha_u}_{\rho'_u} \\ \quad - \dfrac{(p-2)(p-1)}{2}\, \delta^{\mathcal{A}}_{\mathfrak{R}'}\, {}^{(0)}\overset{(2)}{\underset{(2)}{\mathrm{E}}}{}^{\pm} \\ \quad = \sum\limits_{1\leqslant u<v<w\leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uvw}}_{\mathfrak{R}'^{uvw}}\, {}^{(3)}\overset{(2)}{\underset{(2)}{\mathrm{H}}}{}^{\pm\alpha_u\alpha_v\alpha_w}_{\rho'_u\rho'_v\rho'_w} \\ \quad + \sum\limits_{1\leqslant u<v<w<x\leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uvwx}}_{\mathfrak{R}'^{uvwx}}\, {}^{(4)}\overset{(2)}{\underset{(2)}{\mathrm{H}}}{}^{\pm\alpha_u\alpha_v\alpha_w\alpha_x}_{\rho'_u\rho'_v\rho'_w\rho'_x}. \end{cases}$$

Quant aux spins demi-entiers, on peut à chaque ordre infinitésimal k former une décomposition complète d'ordre k généralisant (9-10). En fait, ces formules sont peu utilisables, et semblent même un peu artificielles, par suite de la dissemblance des définitions (III-14-1)′ et (III-14-4)′ du coefficient $l^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ pour $\nu = 0$ et $\nu = 1$.

On peut aussi, de même qu'au § 6, s'intéresser à des décompositions d'ordre 1. On trouvera évidemment, outre les termes complémentaires écrits au § 5, des termes provenant de la courbure.

D'une façon générale, les décompositions approchées aux ordres supérieurs à 1 sont compliquées, et aucune ne présente un intérêt particulier. Mais la méthode générale utilisée ici permet, pour chaque application, de former la décomposition approchée utile.

11) Relations approchées de « fusion ».

On utilise les mêmes méthodes qu'aux § 7 et 8. Les relations (7-1) et (7-2) déduites de (III-17-4) se transcrivent en

$$(11\text{-}1)\qquad {}^{(0)}\mathrm{E}^{\pm}(x', x\,;\,a) = \frac{1}{4}\,{}^{s}\mathrm{E}^{\pm r'a}_{\;a\,r'}(x', x\,;\,a)$$

$$(11\text{-}2)\qquad {}^{(1)}E^{\pm\alpha}_{\ \ \rho'}(x', x\,;\,a) = -\frac{1}{4}\gamma^{\alpha a}{}_{c}\,\gamma_{\rho'}{}^{s'}{}_{r'}\,{}^{s}E^{\pm r'c}_{\ \ a s'}(x', x\,;\,a).$$

A toute approximation, (11-1) et (11-2) s'écrivent de la même façon. On y substitue la décomposition approchée d'ordre 1 de ${}^{s}E^{\pm r'c}_{\ \ a s'}$ obtenue en (9-9).

De (11-1) et (9-9) résulte la relation approchée

$$\begin{aligned}{}^{(0)}E^{\pm}(x', x) = \frac{1}{4}\,{}^{(1/2)}E^{\pm l'}_{\ \ l} + \frac{1}{4}\,{}^{(1/2)}\overset{*}{E}{}^{\pm l}_{\ \ l'} - {}^{(0)}E^{\pm} - \frac{1}{8}\underset{(1)}{H}{}^{\pm\xi\ \mu}_{\ \ \mu'\ \xi'}\\ + \frac{1}{64}\underset{(1)}{H}{}^{\pm\beta_1\beta_2}_{\ \ \sigma'_1\sigma'_2}\left(\gamma^{\sigma'_1}\gamma_{\beta_1}\gamma_{\beta_2}\gamma^{\sigma'_2}\right)^{r'}_{\ r'}.\end{aligned}$$

Or, des identités vérifiées par le tenseur de courbure (A. Lichnerowicz [*2*], § 15), résulte pour $\underset{(1)}{H}{}^{\pm\beta_1\beta_2}_{\ \ \sigma'_1\sigma'_2}(x', x)$

$$\underset{(1)}{H}{}^{\pm\beta_1\beta_2}_{\ \ \sigma'_1\sigma'_2}(x', x)\,.\left(\gamma^{\sigma'_1}\gamma_{\beta_1}\gamma_{\beta_2}\gamma^{\sigma'_2}\right)^{r'}_{\ r'} = -\,8\underset{(1)}{H}{}^{\pm\xi\ \mu}_{\ \ \mu'\ \xi'}(x', x).$$

D'où

$$(11\text{-}3)\qquad {}^{(0)}E^{\pm}(x', x) = \frac{1}{4}\,{}^{(1/2)}E^{\pm l'}_{\ \ l}(x', x) - \frac{1}{8}\underset{(1)}{H}{}^{\pm\xi\ \mu}_{\ \ \mu'\ \xi'}(x', x).$$

On déduit d'autre part de (11-2) et (9-9), compte tenu de (11-3) et des identités vérifiées par $\underset{(1)}{H}{}^{\pm\beta_1\beta_2}_{\ \ \sigma'_1\sigma'_2}(x', x)$

$$\begin{aligned}(11\text{-}4)\qquad {}^{(1)}E^{\pm\alpha}_{\ \ \rho'} = -\frac{1}{2}(\gamma^{\alpha}\gamma_{\rho'})^{a}_{\ r'}\,{}^{(1/2)}E^{\pm r'}_{\ \ a} - \frac{1}{4}\,\delta^{\alpha}_{\rho'}\,{}^{(1/2)}E^{\pm l'}_{\ \ l}\\ + \frac{1}{2}\left(\underset{(1)}{H}{}^{\pm\alpha\ \mu}_{\ \ \mu'\ \rho'} - \frac{1}{4}\,\delta^{\alpha}_{\rho'}\underset{(1)}{H}{}^{\pm\xi\ \mu}_{\ \ \mu'\ \xi'}\right).\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu en (11-3) et (11-4) les *relations de « fusion » approchées au premier ordre quasi minkowskien* (4). Elles complètent (9-6) et (9-10) pour exprimer les noyaux élémentaires approchés relatifs à un spin quelconque, entier ou demi-entier, en fonction des noyaux élémentaires approchés relatifs au spin 1/2, et du terme complémentaire $\underset{(1)}{H}{}^{\pm\alpha_1\alpha_2}_{\ \ \rho'_1\rho'_2}(x', x)$ défini en (9-5).

REMARQUE. — On peut déduire de (11-3) et (11-4), ou établir directement à partir de (3-5) des propriétés telles que (7-6) et (7-7), pour les opérateurs de Klein-Gordon; cependant, ce sont

— au lieu de

$${}^{(1,0)}E^{\pm\alpha}_{\ \ \rho'},\qquad \left({}^{(1,0)}E^{\pm\alpha}_{\ \ \rho'} - \frac{1}{4}\underset{(1)}{H}{}^{\pm\alpha\ \mu}_{\ \ \mu'\ \rho'}\right),$$

(4) Cf. chapitre III, § 19, remarque (10) sur les « spineurs à 2 composantes ».

— au lieu de

$$ {}^{(1,0)}\mathrm{K}^{\alpha}_{\rho'}, \qquad \left({}^{(1,0)}\mathrm{K}^{\alpha}_{\rho'} + \frac{1}{2}\lambda \underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\alpha}_{\rho}\right), $$

qui, dans ce cas, sont de cette forme.

Aux approximations d'ordre supérieur, on peut, de même qu'au § 8, compléter ces relations par de nouveaux termes complémentaires, plus compliqués. Elles résultent de la substitution dans (11-1) et (11-2) des décompositions approchées au $k^{\text{ième}}$ ordre quasi minkowskien ($k \leqslant l$) de ${}^{s}\mathrm{E}^{\pm r'c}_{\ a\ s'}(x', x)$, déduites de $(\text{III-15-9})_c$. Les relations de « fusion » ainsi obtenues doivent être associées aux décompositions avec reste d'ordre 1, satisfaites par les noyaux élémentaires approchés à l'ordre k, mentionnées au § 10. Ainsi, à la $k^{\text{ième}}$ approximation quasi minkowskienne, on peut exprimer les noyaux élémentaires relatifs à un spin quelconque, en fonction de ceux du spin 1/2, et de termes complémentaires. On n'explicitera pas ici ces termes complémentaires, dont la complication augmente très vite avec k (cf. § 10).

L'autre point de vue mentionné au § 8, pour les relations de « fusion » approchées aux ordres supérieurs, n'est valable, dans le cas des opérateurs de Klein-Gordon, que pour l'opérateur défini par (III-14-9) (cf. chap. III, § 20) : il n'est donc pas question d'écrire des formules explicites, mais seulement d'indiquer une méthode. Tout noyau élémentaire approché au $k^{\text{ième}}$ ordre quasi minkowskien peut ainsi s'exprimer en fonction du noyau élémentaire k-spinoriel et de termes complémentaires (peu utilisables dès $k = 2$), fonctions de la courbure.

APPENDICE

12) Approximation linéaire du propagateur du spin 1/2.

Du point de vue du principe de « fusion », il est intéressant de savoir exprimer un propagateur quelconque, approché au premier ordre quasi minkowskien, en fonction du propagateur approché du spin 1/2.

Au contraire, dans la pratique, il est naturel de calculer d'abord le propagateur relatif au spin 1 ; il est donc utile de disposer d'une formule permettant d'en déduire le propagateur du spin 1/2. La formule établie ici ne concerne que la *première approximation quasi minkowskienne.*

Précisons les *hypothèses* faites. On considère les deux opérateurs $\mathrm{L}^{\alpha}_{\beta}$ et L^{a}_{b}, écrits sous la forme

$$ \mathrm{L}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}}\cdot \equiv \delta^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}} \nabla^{\mu} \nabla_{\mu}\cdot + \left\{ \delta^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}} b^{\mu}(x) + \mathrm{B}^{\mathrm{a}\mu}_{\mathrm{b}}(x) \right\} \nabla_{\mu}\cdot + l^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}}(x). \tag{12-1} $$

Les connexions lorentzienne et spinorielle qui leur sont respectivement associées

$$\overline{C}^{a}{}_{b\mu}(x) = C^{a}{}_{b\mu}(x) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\xi}B^{a\xi}_{b}(x)$$

doivent vérifier

$$\overline{C}^{a}{}_{b\mu}(x) = -\frac{1}{4}\overline{C}^{\alpha}{}_{\beta\mu}(x)(\gamma_\alpha\gamma^\beta)^a_b, \tag{12-2}$$

au moins en première approximation quasi minkowskienne; de même $l^a_b(x)$ doit vérifier

$$\underset{(1)}{{}^{(0,1)}l}{}^a_b(x) = -\frac{1}{4}\underset{(1)}{{}^{(1,0)}l}{}^\alpha_\beta(x)(\gamma_\alpha\gamma^\beta)^a_b. \tag{12-3}$$

Notons que la condition (12-2) est en particulier vérifiée par des opérateurs tels que $B^{a\mu}_b(x) = 0$, puisque la connexion riemannienne $C^\alpha{}_{\beta\mu}$ et la connexion spinorielle canonique $C^a{}_{b\mu}$ vérifient (12-2) : $\nabla^\mu\nabla_\mu$, ou un opérateur de Klein-Gordon, sont dans ce cas.

Les opérateurs de Klein-Gordon vérifient aussi (12-3) en valeurs exactes; l'étude ci-dessous leur est donc applicable :

$$-\frac{1}{4}(\gamma_\alpha\gamma^\beta)^a_b{}^{(1,0)}l^\alpha_\beta = -\frac{1}{4}(\gamma_\alpha\gamma^\beta)^a_b(-R^\alpha_\beta + m^2\delta^\alpha_\beta) = \left(-\frac{R}{4} + m^2\right)\delta^a_b = {}^{(0,1)}l^a_b.$$

Une condition un peu plus générale permettant de satisfaire (12-2) est la suivante :

— la connexion lorentzienne $\overline{C}^\alpha{}_{\beta\mu}$ est *compatible avec la métrique* $\eta_{\alpha\beta}$;

— la connexion spinorielle $\overline{C}^a{}_{b\mu}$ est canoniquement associée à la connexion lorentzienne $\overline{C}^\alpha{}_{\beta\mu}$.

Quoi qu'il en soit, tout ce qui suit s'appuie uniquement sur (12-2) et (12-3), et s'applique donc largement.

On considère le bi-1-spineur

$$\varphi^a_{r'}(x', x) = -\frac{1}{4}(\gamma_\alpha\gamma^{\rho'})^a_{r'}{}^{(1,0)}w^\alpha_{\rho'}(x', x). \tag{12-4}$$

Il est égal, pour $x = x'$, à

$$\varphi^{a'}_{r'}(x', x') = -\frac{1}{4}(\gamma_{\alpha'}\gamma^{\alpha'})^{a'}_{r'} = \frac{1}{4}\delta^{\alpha'}_{\alpha'}\delta^{a'}_{r'} = \delta^{a'}_{r'} = {}^{(0,1)}w^{a'}_{r'}(x', x'). \tag{12-5}$$

Sa dérivée absolue le long d'une courbe $C(x')$ vaut

$$\begin{aligned} v^\mu\overline{\nabla}_\mu\varphi^a_{r'} &= -\frac{1}{4}(\gamma_\alpha\gamma^{\rho'})^a_{r'}v^\mu\overline{\nabla}_\mu{}^{(1,0)}w^\alpha_{\rho'} - \frac{1}{4}\gamma^{\rho' l'}{}_{r'}{}^{(1,0)}w^\alpha_{\rho'}v^\mu\overline{\nabla}_\mu\gamma_{\alpha l'}{}^a \\ &= -\frac{1}{4}{}^{(1,0)}w^\alpha_{\rho'}\gamma^{\rho' l'}{}_{r'}v^\mu\left(\overline{C}^a{}_{b\mu}\gamma_{\alpha l'}{}^b - \overline{C}^\beta{}_{\alpha\mu}\gamma_{\beta l'}{}^a\right). \end{aligned}$$

En effet, ${}^{(1,0)}w^\alpha_{\rho'}$ est le bi-1-tenseur de transport parallèle, $\gamma^{\rho' l'}{}_{r'}$ ne dépend que du repère en x', et $\gamma_{\alpha l'}{}^a$ doit être considérée comme 1-tenseur-1-spineur en x, 1-spineur en x'. Il résulte alors de (12-2)

$$v^\mu\overline{\nabla}_\mu\varphi^a_{r'} = \frac{1}{4}v^\mu\left\{\overline{C}^\beta{}_{\alpha\mu}(\gamma_\beta\gamma^{\rho'})^a_{r'} + \frac{1}{4}\overline{C}^\lambda{}_{\nu\mu}(\gamma_\lambda\gamma^\nu\gamma_\alpha\gamma^{\rho'})^a_{r'}\right\}{}^{(1,0)}w^\alpha_{\rho'}. \tag{12-6}$$

En première approximation quasi minkowskienne, cette équation se réduit à

$$(12\text{-}7) \qquad \frac{d\underset{(1)}{\varphi}{}^{a}_{r'}}{d\lambda} + v^{\mu}\underset{(1)}{\bar{C}}{}^{a}{}_{r\mu} = \frac{1}{4} v^{\mu} \left\{ \underset{(1)}{\bar{C}}{}^{\beta}{}_{\alpha\mu}(\gamma_{\beta}\gamma^{\alpha'})^{a}_{r'} + \frac{1}{4} \underset{(1)}{\bar{C}}{}^{\lambda}{}_{\nu\mu}(\gamma_{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma_{\alpha}\gamma^{\alpha'})^{a}_{r'} \right\} = 0.$$

Ainsi $\underset{(1)}{\varphi}{}^{a}_{r'}$ est caractérisé par (12-7) et (12-5), de la même façon que ${}^{(0,1)}\underset{(1)}{w}{}^{a}_{r'}$: ces deux bi-1-spineurs sont donc égaux. D'où la relation *approchée au premier ordre quasi minkowskien*

$$(12\text{-}8) \qquad {}^{(0,1)}w^{a}_{r'}(x', x) = -\frac{1}{4}(\gamma_{\alpha}\gamma^{\rho'})^{a}_{r'}\, {}^{(1,0)}w^{\alpha}_{\rho'}(x', x).$$

Il en résulte, pour la paramétrix, la relation approchée

$$(12\text{-}8)' \qquad {}^{(0,1)}\mathrm{P}^{a}_{r'}(x', x) = -\frac{1}{4}(\gamma_{\alpha}\gamma^{\rho'})^{a}_{r'}\, {}^{(1,0)}\mathrm{P}^{\alpha}_{\rho'}(x', x).$$

On déduit d'autre part de (III-10-3) que

$${}^{(1)}h^{\mathrm{a}\lambda}_{\mathrm{b}} = \delta^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}}\, {}^{(0)}h^{\lambda} - 2\mathrm{A}^{\lambda}_{\mu}\eta^{\mu\xi}\bar{\mathrm{C}}^{\mathrm{a}}{}_{\mathrm{b}\xi}\,;$$

il en résulte, d'après (12-2), que

$$(12\text{-}9) \qquad {}^{(0,1)}h^{a\lambda}_{b} = -\frac{1}{4}(\gamma_{\alpha}\gamma^{\beta})^{a}_{b}\, {}^{(1,0)}h^{\alpha\lambda}_{\beta}.$$

Quant aux coefficients

$${}^{(1)}k'^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}} + {}^{(1)}k''^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}} \equiv \eta^{\mu\xi}(-\partial_{\mu}\mathrm{C}^{\mathrm{a}}{}_{\mathrm{b}\xi} + \mathrm{C}^{\lambda}{}_{\xi\mu}\mathrm{C}^{\mathrm{a}}{}_{\mathrm{b}\lambda}) - {}^{(0,0)}b^{\mu}\mathrm{C}^{\mathrm{a}}{}_{\mathrm{b}\mu} + \mathrm{C}^{\mathrm{a}}{}_{\mathrm{n}\mu}(\eta^{\mu\xi}\mathrm{C}^{\mathrm{n}}{}_{\mathrm{b}\xi} - \mathrm{B}^{\mathrm{n}\mu}_{\mathrm{b}}),$$

ils vérifient

$$\begin{aligned}{}^{(0,1)}k'^{a}_{b} + {}^{(0,1)}k''^{a}_{b} + \frac{1}{4}(\gamma_{\alpha}\gamma^{\beta})^{a}_{b}({}^{(1,0)}k'^{\alpha}_{\beta} + {}^{(1,0)}k''^{\alpha}_{\beta})\\ = \mathrm{C}^{a}{}_{n\mu}(\eta^{\mu\xi}\mathrm{C}^{n}_{b\xi} - \mathrm{B}^{n\mu}_{b}) + \frac{1}{4}(\gamma_{\alpha}\gamma^{\beta})^{a}_{b}\mathrm{C}^{\alpha}{}_{\nu\mu}(\eta^{\mu\xi}\mathrm{C}^{\nu}{}_{\beta\xi} - \mathrm{B}^{\nu\mu}_{\beta}).\end{aligned}$$

D'où, en première approximation quasi minkowskienne,

$$(12\text{-}10) \qquad {}^{(0,1)}\underset{(1)}{k'}{}^{a}_{b} + {}^{(0,1)}\underset{(1)}{k''}{}^{a}_{b} = -\frac{1}{4}(\gamma_{\alpha}\gamma^{\beta})^{a}_{b}\left({}^{(1,0)}\underset{(1)}{k'}{}^{\alpha}_{\beta} + {}^{(1,0)}\underset{(1)}{k''}{}^{\alpha}_{\beta}\right).$$

Puisque

$$\lambda^{(0,1)}\underset{(0)}{\sigma}{}^{a}_{r'}(x', x) = \delta^{a}_{r'}, \qquad \lambda^{(1,0)}\underset{(0)}{\sigma}{}^{\alpha}_{\rho'}(x', x) = \delta^{\alpha}_{\rho'},$$

les relations (12-9), (12-10), (12-3), et (12-8) permettent d'écrire

$$(12\text{-}11) \qquad {}^{(0,1)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{a}_{r'}(x', x) = -\frac{1}{4}(\gamma_{\alpha}\gamma^{\rho'})^{a}_{r'}\, {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\mathrm{K}}{}^{\alpha}_{\rho'}(x', x).$$

De (12-8)′ et (12-11) résulte la relation entre noyaux élémentaires et propagateurs *approchés au premier ordre quasi minkowskien* ([5])

$$(12\text{-}12)\qquad {}^{(0,1)}E^{\pm a}_{\ r'}(x', x) = -\frac{1}{4}\left(\gamma_\alpha\gamma^{\rho'}\right)^a_{r'}\,{}^{(1,0)}E^{\pm\alpha}_{\ \rho'}(x', x)\ ;$$

ou, avec changement de variance spinorielle,

$$(12\text{-}12)'\qquad {}^{(1/2)}E^{\pm r'}_{\ a}(x', x) = -\frac{1}{4}\left(\gamma^{\rho'}\gamma_\alpha\right)^{r'}_a\,{}^{(1)}E^{\pm\alpha}_{\ \rho'}(x', x).$$

La formule (12-12) se développe sous la forme

$$(12\text{-}13)\qquad {}^{(0,1)}E^{\pm a}_{\ r'} = \frac{1}{4}\,\delta^a_{r'}\,{}^{(1,0)}E^{\pm\mu}_{\ \mu'} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}(\gamma_0\gamma_{i'})^a_{r'}\left({}^{(1,0)}E^{\pm 0}_{\ i'} + {}^{(1,0)}E^{\pm i}_{\ 0'}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(\gamma\,\gamma_{j'})^a_{r'}\left({}^{(1,0)}E^{\pm i}_{\ j'} - {}^{(1,0)}E^{\pm j}_{\ i'}\right)\ ;$$

Cette formule ne fait intervenir que la partie de ${}^{(1,0)}E^{\pm\alpha}_{\ \rho'}$ qui est de la forme (7-6), et élimine le reste (nul sous les hypothèses de la section B).

Avec des hypothèses sur L assurant simultanément (12-12) et les relations approchées de « fusion » (7-5) ou (11-2), se pose la question de la *compatibilité* entre ces deux types de relations. Les conditions de compatibilité, obtenues par élimination, s'écrivent

$$(12\text{-}14)\qquad \left\{\delta^a_b\delta^{s'}_{r'} - \frac{1}{8}\left(\gamma_\alpha\gamma^{\rho'}\right)^a_{r'}\left(\gamma_{\rho'}\gamma^\alpha\right)^{s'}_b + \frac{1}{4}\,\delta^a_{r'}\delta^{s'}_b\right\}{}^{(0,1)}E^{\pm b}_{\ s'} = 0,$$

$$(12\text{-}15)\qquad \left(\delta^\alpha_\beta\delta^{\sigma'}_{\rho'} + \eta^{\alpha\sigma'}\eta_{\beta\rho'} - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_{\rho'}\delta^{\sigma'}_\beta\right){}^{(1,0)}E^{\pm\beta}_{\ \sigma'} = 0,$$

ou, dans le cas des opérateurs de Klein-Gordon,

$$(12\text{-}14)'\qquad \left\{\delta^b_a\delta^{r'}_{s'} - \frac{1}{8}\left(\gamma^{\rho'}\gamma_\alpha\right)^{r'}_a\left(\gamma^\alpha\gamma_{\rho'}\right)^b_{s'} + \frac{1}{4}\,\delta^{r'}_a\delta^b_{s'}\right\}{}^{(1/2)}E^{\pm s'}_{\ b} = 0,$$

$$(12\text{-}15)'\qquad \left(\delta^\alpha_\beta\delta^{\sigma'}_{\rho'} + \eta^{\alpha\sigma'}\eta_{\beta\rho'} - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_{\rho'}\delta^{\sigma'}_\beta\right)\left({}^{(1)}E^{\pm\beta}_{\ \sigma'} - \frac{1}{4}\underset{(1)}{H}{}^{\pm\beta\ \mu}_{\ \ \mu'\sigma'}\right) = 0.$$

On vérifie aisément que (12-12) ou (12-12)′, impliquent, respectivement, (12-14) ou (12-14)′, et que (7-5) ou (11-2) impliquent, respectivement, (12-15) ou (12-15)′. D'où la compatibilité.

([5]) On peut sur ces formules séparer les types positif et négatif de spineurs, en x' et en x. Par un choix adapté de matrices de Dirac (cf. chap. III, § 19, remarque ([10])), on vérifie aisément que les éléments approchés relatifs à des types différents en x' et en x sont nuls, conformément au résultat établi sur les noyaux élémentaires par A. Lichnerowicz [*4*].

CHAPITRE V

APPROXIMATION ASYMPTOTIQUE DES PROPAGATEURS RELATIFS A L'ESPACE-TEMPS DE SCHWARZSCHILD

1) Introduction.

Ce chapitre est consacré à l'application des résultats des chapitres précédents au cas particulièrement intéressant de l'espace-temps de Schwarzschild (solution statique à symétrie sphérique des équations extérieures d'Einstein).

Dans les coordonnées de H. Weyl, la métrique des sections d'espace est conforme à la métrique euclidienne, ce qui permet d'utiliser aisément, au lieu de r, φ, ψ, les coordonnées spatiales

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi \cos \psi, \quad x^3 = r \sin \varphi \sin \psi.$$

L'élément linéaire de l'espace-temps s'écrit

$$(1\text{-}1) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{2r+a}\right)^2 dt^2 - \left(1 - \frac{a}{2r+a}\right)^{-4} (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi \, d\psi^2)$$
$$= \left(1 - \frac{2a}{2r+a}\right)^2 (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{a}{2r+a}\right)^{-4} \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2.$$

Une étude en valeurs exactes est possible, en « coordonnées polaires » (t, r, φ, ψ). Le conoïde caractéristique et la paramétrix sont obtenus au moyen d'intégrales définies. Mais ces expressions, en particulier celle de Δ, sont très peu maniables, et ne semblent pas susceptibles de pouvoir conduire à l'achèvement de l'étude. Même dans le cas minkowskien ($a = 0$), le résultat classique n'est pas obtenu aisément en coordonnées polaires.

L'emploi des coordonnées x^α ne permet d'autre part pas une résolution explicite en valeurs exactes, du fait de l'enchevêtrement du système bicaractéristique.

L'étude faite ici est une étude par *approximations* : on considère le paramètre a, lié à la masse centrale, comme infiniment petit (hypothèse des champs faibles), et on cherche à former des développements limités des propagateurs suivant les puissances de a.

Pour cette étude, il faut se limiter à un domaine de l'espace-temps où les hypothèses de régularité de la métrique et d'hyperbolicité normale (chap. Ier, § 6, et chap. II, § 1) sont satisfaites pour toutes valeurs de $a \in]-\mathrm{A}, +\mathrm{A}[$ (A donné).

Puisque la forme quadratique $\mathrm{P}(x, p_\nu)$ s'explicite en

$$\mathrm{P}(x, p_\nu) \equiv \left(\frac{2r+a}{2r-a}\right)^2 (p_0)^2 - \left(\frac{2r}{2r+a}\right)^4 \sum_{i=1}^{3} (p_i)^2, \tag{1-2}$$

on voit qu'il en est ainsi en se limitant à un domaine où r est suffisamment grand. On peut, par exemple, choisir le domaine

$$\Omega_s : r > s, \quad \text{où on a choisi} \quad s > \frac{\mathrm{A}}{2}.$$

C'est en ce sens que les approximations faites sont des *approximations asymptotiques*. On pouvait d'ailleurs penser qu'il en serait ainsi, car le paramètre a a la dimension d'une *longueur*, et n'intervient dans la métrique (1-1) que par le rapport (a/r).

Mais cette restriction est encore insuffisante, car les propagateurs $\mathrm{G}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{A}}(x', x)$ ne sont nuls que si

$$x \notin \overline{\mathcal{E}}_{x'}, \quad \text{ce qui équivaut à} \quad x' \notin \overline{\mathcal{E}}_{x}.$$

Or, si loin de la masse centrale que soient x' et x, leurs émissions $\overline{\mathcal{E}}_{x'}$ et $\overline{\mathcal{E}}_{x}$ rencontrent l'hypersurface d'équation $r = s$. La condition pour que le calcul approché du propagateur $\mathrm{G}_{\mathrm{R}'}^{\mathrm{A}}(x', x)$ puisse être mené de façon rigoureuse, c'est-à-dire en ne s'intéressant qu'à Ω_s, est donc

$$\overline{\mathcal{E}}_{x'}^{\pm} \cap \overline{\mathcal{E}}_{x}^{\mp} \subset \Omega_s. \tag{1-3}$$

Cette restriction implique la condition suivante entre le point d'étude x' et le support de f (second membre du système aux dérivées partielles, ou source)

$$\overline{\mathcal{E}}_{x'}^{\pm} \cap \overline{\mathcal{E}}_{s(f)}^{\mp} \subset \Omega_s. \tag{1-4}$$

Remarquons qu'il serait également possible de remplacer, pour $r \leqslant s$, la métrique (1-1) par une métrique solution d'équations *intérieures* d'Einstein, se raccordant C^1-différentiablement avec la métrique (1-1) pour $r = s$, et telle que les conditions de régularité et d'hyperbolicité soient satisfaites aussi pour $r < s$. Cette méthode, d'ailleurs conforme à la réalité physique, ne sera cependant pas développée ici, car elle pose plusieurs problèmes délicats :

— le choix d'un tenseur d'impulsion-énergie intérieur;
— les difficultés apportées à la méthode de construction des propagateurs par les discontinuités des dérivées secondes et suivantes du coefficient $g^{\lambda\nu}(x)$ de L pour $r = s$;
— les difficultés pratiques de calcul aux traversées de l'hypersurface de séparation $r = s$.

C'est pourquoi on ne construira les propagateurs que pour les couples de points (x', x) satisfaisant la condition (1-3) (1), ce qui revient à restreindre l'étude à la propagation des ondes dans le vide, en réservant le problème de leur propagation dans la matière.

On ne fera ici que des approximations quasi minkowskiennes *du premier ordre*. Pour obtenir des approximations d'ordre supérieur, la méthode, et la technique de calcul seraient analogues, mais les calculs sont beaucoup plus compliqués. L'approximation du premier ordre donne une première idée des modifications apportées aux résultats minkowskiens (propagateur de Jordan-Pauli) par le champ de gravitation.

Si l'on considère cette étude approchée du point de vue de la Physique, on constate qu'elle est tout à fait acceptable : dans l'exemple du *système solaire*, $2a/r < 0{,}001$ à l'extérieur du tube d'univers du soleil (i. e. pour $r > s$). Les vérifications physiques des effets relativistes se limitent d'ailleurs le plus souvent aux termes du premier ordre. Cependant, dans le cas d'astres beaucoup plus denses que le soleil, une telle étude limitée à l'approximation asymptotique du premier ordre quasi minkowskien ne donnerait que des résultats trop sommaires.

Les résultats obtenus ci-dessous sur les propagateurs (ou noyaux élémentaires) approchés au premier ordre quasi minkowskien, relatifs aux *dalembertiens*, sont les suivants :

1° Pour les spins 0, 1/2 et 1, les propagateurs n'ont, à cette approximation, et sous la condition (1-3), *aucun terme de diffusion*. Leur forme est très comparable à celle des propagateurs de Jordan-Pauli (IV-1-7) : il suffit de remplacer l'identité $\delta^{A}_{R'}$ par le bi-tenseur-spineur de transport parallèle, et

(1) C. Morette-DeWitt [*1*] a cependant obtenu, par une méthode de construction différente, des résultats intéressants sans s'imposer cette restriction; mais ses approximations semblent sous-entendre l'équivalence entre la singularité de Schwarzschild et la singularité newtonnienne usuelle (pour la singularité de Schwarzschild, cf. J. Colleau [*2*]).

de prendre pour support le conoïde caractéristique au lieu du cône élémentaire. La différence $\underset{(1)}{G_{R'}^{A}}(x', x)$ peut s'écrire comme somme d'une couche simple et d'une couche double *portées par le cône élémentaire* $C_{x'}$.

2° Pour les spins entiers supérieurs à 1, ou demi-entiers supérieurs à 1/2, les propagateurs approchés ont en outre un *terme de diffusion, lié à la courbure riemannienne.* Tous ces termes de diffusion s'expriment simplement à l'aide du noyau $\underset{(1)}{H}{}^{\pm\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}(x', x)$ défini en (IV-9-5).

Des résultats concernant les dalembertiens se déduisent aisément ceux concernant les opérateurs de Klein-Gordon avec terme de masse.

2) Étude de la métrique approchée.

A l'approximation quasi minkowskienne du premier ordre, la métrique (1-1) s'écrit

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right)(dx^0)^2 - \left(1 + \frac{2a}{r}\right)\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2, \tag{2-1}$$

et la forme quadratique $P(x, p_\nu)$ s'écrit

$$P(x, p_\nu) \equiv \left(1 + \frac{2a}{r}\right)(p_0)^2 - \left(1 - \frac{2a}{r}\right)\sum_{i=1}^{3}(p_i)^2. \tag{2-2}$$

Pour la représentation des champs tensoriels et spinoriels on choisit le repère mobile orthonormé le plus simple, défini par

$$\theta^0 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)dx^0, \qquad \theta^i = \left(1 + \frac{a}{r}\right)dx^i. \tag{2-3}$$

Les matrices correspondantes ont donc pour coefficients, à cette approximation,

$$\left\{\begin{array}{llll} A_0^0 = 1 - \frac{a}{r}, & A_i^0 = 0, & A_0^j = 0, & A_i^j = \delta_i^j\left(1 + \frac{a}{r}\right) \\ A_0^0 = 1 + \frac{a}{r}, & A_0^i = 0, & A_j^0 = 0, & A_j^i = \delta_j^i\left(1 - \frac{a}{r}\right). \end{array}\right. \tag{2-4}$$

C'est évidemment grâce au même repère, en x', que l'on peut définir les paramètres angulaires θ' et θ'', à partir des valeurs de $p_{\nu'}^{(0)}$.

En posant

$$\rho = r(x'),$$

il vient

(2-5) $$p_{0'}^{(0)} = A_{0'}^{0'} = 1 - \frac{a}{\rho}, \quad p_{i'}^{(0)} = A_{i'}^{j'} q_{j'}(\theta) + A_{i'}^{0'} = \left(1 + \frac{a}{\rho}\right) q_{i'}(\theta).$$

Le calcul des coefficients de la connexion riemannienne dans le repère naturel (symboles de Christoffel) donne

(2-6) $$\begin{cases} C^0{}_{00} = C^0{}_{ik} = C^i{}_{0k} = C^i{}_{k0} = 0 \text{ (relations exactes provenant du caractère statique)} \\ \underset{(1)}{C^0{}_{0i}} = \underset{(1)}{C^0{}_{i0}} = \underset{(1)}{C^i{}_{00}} = \frac{a}{r^3} x^i \\ \underset{(1)}{C^i{}_{hk}} = \frac{a}{r^3} \left(x^i \delta_{hk} - x^h \delta^i{}_k - x^k \delta^i_h\right). \end{cases}$$

Les coefficients dans le repère mobile orthonormé s'en déduisent par la formule de transformation

$$C^\mu{}_{\xi\chi} = A^\mu_\lambda A^\nu_\xi A^\pi_\chi C^\lambda{}_{\nu\pi} + A^\mu_\lambda A^\pi_\chi \partial_\pi A^\lambda_\xi,$$

qui s'écrit, en approximation,

$$\underset{(1)}{C^\lambda{}_{\nu\pi}} = \underset{(1)}{C^\lambda{}_{\nu\pi}} + \partial_\pi \underset{(1)}{A^\lambda_\nu}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \underset{(1)}{C^\lambda{}_{\nu 0}} = \underset{(1)}{C^\lambda{}_{\nu 0}} \\ \underset{(1)}{C^\lambda{}_{\nu k}} = \underset{(1)}{C^\lambda{}_{\nu k}} - \delta^\lambda_\nu \frac{a}{r^3} x^k. \end{cases}$$

D'où la valeur des coefficients de rotation de Ricci

(2-7) $$\begin{cases} C^0{}_{00} = C^0{}_{ik} = C^i{}_{0k} = C^i{}_{k0} = C^0{}_{0i} = 0 \text{ (relations exactes)} \\ \underset{(1)}{C^0{}_{i0}} = \underset{(1)}{C^i{}_{00}} = \frac{a}{r^3} x^i, \quad \underset{(1)}{C^i{}_{hk}} = \frac{a}{r^3} \left(x^i \delta_{hk} - x^h \delta^i_k\right). \end{cases}$$

On explicite la valeur des coefficients non nuls en

(2-7)′ $$\begin{cases} \underset{(1)}{C^1{}_{00}} = \underset{(1)}{C^0{}_{10}} = \underset{(1)}{C^1{}_{22}} = \underset{(1)}{C^1{}_{33}} = -\underset{(1)}{C^2{}_{12}} = -\underset{(1)}{C^3{}_{13}} = \frac{a}{r^3} x^1 \\ \underset{(1)}{C^2{}_{00}} = \underset{(1)}{C^0{}_{20}} = \underset{(1)}{C^2{}_{33}} = \underset{(1)}{C^2{}_{11}} = -\underset{(1)}{C^3{}_{23}} = -\underset{(1)}{C^1{}_{21}} = \frac{a}{r^3} x^2 \\ \underset{(1)}{C^3{}_{00}} = \underset{(1)}{C^0{}_{30}} = \underset{(1)}{C^3{}_{11}} = \underset{(1)}{C^3{}_{22}} = -\underset{(1)}{C^1{}_{31}} = -\underset{(1)}{C^2{}_{32}} = \frac{a}{r^3} x^3. \end{cases}$$

On se limite ici à l'étude des dalembertiens définis au chapitre III, section D (l'étude des opérateurs de Klein-Gordon avec terme de masse s'en déduirait aisément). Il résulte de (2-6) que les coordonnées de H. Weyl sont harmoniques, à l'approximation linéaire

$$\text{(2-8)} \qquad {}^{(0,0)}\underset{(1)}{h}{}^{\lambda}(x) = -\eta^{\nu\pi}\underset{(1)}{C}{}^{\lambda}{}_{\nu\pi}(x) = 0.$$

Le dalembertien scalaire (III-14-2) se réduit donc, à cette approximation, à

$$\text{(2-9)} \qquad \square U \equiv \left(1+\frac{2a}{r}\right)\partial_0\partial_0 U - \left(1-\frac{2a}{r}\right)\sum_{i=1}^{3}\partial_i\partial_i U.$$

En ce qui concerne le dalembertien vectoriel, on remarque tout d'abord que, par définition de la métrique de Schwarzschild,

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

en tout point $x \in \Omega_s$, puisque la métrique y est de classe C^2 (et même C^ω). Les coefficients approchés se calculent donc à partir de (2-7) grâce aux formules

$$\text{(2-10)} \qquad \left\{\begin{aligned} {}^{(1,0)}\underset{(1)}{h}{}^{\alpha\lambda}_{\beta}(x) &\equiv -2\eta^{\lambda\nu}\underset{(1)}{C}{}^{\alpha}{}_{\beta\nu}(x) \\ {}^{(1,0)}\underset{(1)}{k}{}^{\alpha}_{\beta}(x) &\equiv -\eta^{\mu\xi}\partial_\mu \underset{(1)}{C}{}^{\alpha}{}_{\beta\xi}(x) = \sum_{i=1}^{3}\partial_i C^{\alpha}{}_{\beta i}(x) \end{aligned}\right.$$

déduites de (III-5-3) et (III-5-1). Il résulte de (2-7) que

$${}^{(1,0)}\underset{(1)}{k}{}^{\alpha}_{\beta} \equiv 0,$$

et que le dalembertien vectoriel approché s'explicite en

$$\text{(2-11)} \qquad \left\{\begin{aligned} (\square U)_0 &\equiv g^{\lambda\nu}\partial_\lambda\partial_\nu U_0 - 2ar^{-3}x^i\partial_0 U_i \\ (\square U)_k &\equiv g^{\lambda\nu}\partial_\lambda\partial_\nu U_k - 2ar^{-3}x^k\partial_0 U_0 \\ &\quad + 2ar^{-3}(\delta^i_k x^h - \delta^i_h x^k)\partial_i U_h. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients approchés du dalembertien p-tensoriel (III-14-1) sont

$$\text{(2-12)} \qquad \left\{\begin{aligned} {}^{(p,0)}\underset{(1)}{h}{}^{\mathcal{A}\lambda}_{\mathcal{B}}(x) &= \sum_{u=1}^{p}\delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{B}^u}\,{}^{(1,0)}\underset{(1)}{h}{}^{\alpha_u\lambda}_{\beta_u}(x) = -2\eta^{\lambda\nu}\sum_{u=1}^{p}\delta^{\mathcal{A}^u}_{\mathcal{B}^u}\underset{(1)}{C}{}^{\alpha_u}{}_{\beta_u\nu}(x) \\ {}^{(p,0)}\underset{(1)}{k}{}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(x) &= 2\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p}\delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{B}^{uv}}\underset{(1)}{R}{}^{\alpha_u}{}_{\beta_u}{}^{\alpha_v}{}_{\beta_v}(x). \end{aligned}\right.$$

Les composantes du tenseur de courbure se calculent, à cette approximation, à partir de (2-6), car elles ont même partie principale dans le repère naturel et le repère mobile (2-3). Les seules non nulles ont pour valeur

$$(2\text{-}13)\quad \left\{\begin{array}{l} \underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{io}}_{\mathrm{ok}} = \underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{oi}}_{\mathrm{ko}} = \underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{oo}}_{\mathrm{ik}} = \underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{ik}}_{\mathrm{oo}} = a(3x^i x^k - r^2\delta^{\mathrm{i}}_{\mathrm{k}})r^{-5} \\ \underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{ih}}_{\mathrm{jk}} = \delta_{\mathrm{jk}}\underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{ih}}_{\mathrm{oo}} + \delta^{\mathrm{ih}}\underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{oo}}_{\mathrm{jk}} - \delta^{\mathrm{h}}_{\mathrm{j}}\underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{io}}_{\mathrm{ok}} - \delta^{\mathrm{i}}_{\mathrm{k}}\underset{(1)}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{oh}}_{\mathrm{jo}}. \end{array}\right.$$

Le dalembertien 1-spinoriel a pour coefficients approchés

$$(2\text{-}14)\quad \left\{\begin{array}{l} {}^{(0,1)}\underset{(1)}{h}{}^{a\lambda}_{b} = -\dfrac{1}{4}\,{}^{(1,0)}\underset{(1)}{h}{}^{\mu\lambda}_{\xi}(\gamma_\mu\gamma^\xi)^a_b = \dfrac{1}{2}\eta^{\lambda\nu}\underset{(1)}{\mathrm{C}}{}^{\mu}_{\xi\nu}(\gamma_\mu\gamma^\xi)^a_b, \\ {}^{(0,1)}\underset{(1)}{k}{}^{a}_{b} = 0 \end{array}\right.$$

puisque $\mathrm{R} = 0$ dans Ω_s pour la métrique de Schwarzschild. On en déduit enfin les coefficients approchés des dalembertiens (III-14-3) relatifs aux spins demi-entiers, ainsi que ceux du dalembertien (III-14-5) sur les (1,1)-spineurs, utilisé en théorie de Petiau-Duffin-Kemmer.

3) Étude approchée du conoïde caractéristique.

Il s'agit d'obtenir les équations approchées des bicaractéristiques issues du point x' de Ω_s, de coordonnées

$$(3\text{-}1)\quad \left\{\begin{array}{l} x'^{0'} = \tau, \qquad x'^{i'} = \rho\xi^{i'} \\ \xi^{1'} = \cos\alpha', \qquad \xi^{2'} = \sin\alpha'\cos\alpha'', \qquad \xi^{3'} = \sin\alpha'\sin\alpha'' \end{array}\right.$$

sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x^\alpha - x'^{\alpha'} = y^\alpha(\lambda\,;\theta',\theta''\,;\tau,\rho,\alpha',\alpha'') = y^\alpha_{(0)} + y^\alpha_{(1)} \\ p_\nu = p_\nu(\lambda\,;\theta',\theta''\,;\tau,\rho,\alpha',\alpha'') = p_{(0)\nu} + p_{(1)\nu}. \end{array}\right.$$

Le système bicaractéristique approché s'écrit

$$(3\text{-}2)\quad d\lambda = \frac{dy_0}{\left(1+\dfrac{2a}{r}\right)p_0} = \frac{dy^i}{-\left(1-\dfrac{2a}{r}\right)p_i} = \frac{dp_0}{0} = \frac{dp_k}{\dfrac{a}{r^3}x^k\displaystyle\sum_{\nu=1}^{4}(p_\nu)^2}.$$

On en connaît déjà (cf. chap. IV, § 1) la solution à l'approximation minkowskienne ($a = 0$) :

$$(3\text{-}3)\quad y^0_{(0)} = \lambda, \qquad y^i_{(0)} = -\lambda q_{i'}(\theta), \qquad p_{(0)0} = 1, \qquad p_{(0)k} = \overset{(0)}{p_{(0)k'}} = q_{k'}(\theta)$$

d'où

$$(3\text{-}4) \qquad \underset{(0)}{r^2} = \sum_{i=1}^{3} (x'^{i'} + y^{i}_{(0)})^2 = \rho^2 - 2\rho\lambda\xi^{i'} q_{i'}(\theta) + \lambda^2.$$

On posera

$$(3\text{-}5) \qquad \begin{aligned} \xi^{i'} q_{i'}(\theta) &= \cos\alpha' \cos\theta' + \sin\alpha' \sin\theta' \cos(\alpha'' - \theta'') \\ &= m(\theta) = \cos\mu(\theta). \end{aligned}$$

Du fait du caractère *stationnaire* de la métrique de Schwarzschild, la solution du système bicaractéristique vérifie, en valeurs exactes,

$$p_0 = \text{Cte} = p^{(0)}_{0'} = A^{0'}_{0'}(x'),$$

c'est-à-dire, à l'approximation utilisée ici,

$$p_0 = 1 - \frac{a}{\rho}.$$

On en déduit

$$(3\text{-}6)' \qquad \begin{aligned} y^{0}_{(1)} &= a\int_0^{\lambda} \left(\frac{2}{\sqrt{(u - \rho\cos\mu)^2 + \rho^2 \sin^2\mu}} - \frac{1}{\rho} \right) du \\ &= 2a \,\mathrm{Log}\, \frac{\lambda - m\rho + \underset{(0)}{r}}{\rho(1-m)} - a\frac{\lambda}{\rho}. \end{aligned}$$

L'intégration du système (3-2) s'achève, compte tenu de (2-5), par

$$(3\text{-}7)' \qquad \begin{aligned} p_{(1)i} &= \frac{a}{\rho} q_{i'}(\theta) + 2a \int_0^{\lambda} \frac{\rho\xi^{i'} - u q_{i'}(\theta)}{\{(u - \rho\cos\mu)^2 + \rho^2\sin^2\mu\}^{3/2}} du \\ &= \frac{a}{\rho} q_{i'}(\theta) + \frac{2a}{1 - m^2} \left[(\xi^{i'} - m q_{i'}) \frac{\lambda}{\rho \underset{(0)}{r}} + (q_{i'} - m\xi^{i'}) \left(\frac{1}{\underset{(0)}{r}} - \frac{1}{\rho} \right) \right] \end{aligned}$$

$$(3\text{-}8)' \qquad \begin{aligned} y^{i}_{(1)} &= \int_0^{\lambda} \left[\frac{2a q_{i'}(\theta)}{\sqrt{(u - \rho\cos\mu)^2 + \rho^2\sin^2\mu}} - p_{(1)i}(u\,;\theta\,;\rho,\alpha) \right] du \\ &= \frac{a}{\rho} \lambda q_{i'} - \frac{2a}{\rho(1 - m^2)} (\xi^{i'} - m q_{i'})(m\lambda + \underset{(0)}{r} - \rho). \end{aligned}$$

Ces intégrations ne sont valables que pour $m = \cos\mu \neq \varepsilon = \pm 1$. Il faut faire une étude particulière des deux bicaractéristiques opposées issues de x', caractérisées par

$\theta' = \alpha' + 2k'\pi, \qquad \theta'' = \alpha'' + 2k''\pi, \qquad$ soit $\; q_{i'} = \xi^{i'} \quad (\cos\mu = +1)$

$\theta' = \pi - \alpha' + 2k'\pi, \theta'' = \alpha'' + (2k'' + 1)\pi, \quad$ soit $\; q_{i'} = -\xi^{i'} \; (\cos\mu = -1).$

Cette étude directe nécessite une discussion du signe de $(\rho - \varepsilon u)$:

$$\begin{cases} \text{pour } \varepsilon = -1,\ \rho - \varepsilon u = \rho + u > 0 & \text{pour tout} \quad u \geqslant -\rho, \\ \text{pour } \varepsilon = +1,\ \rho - \varepsilon u = \rho - u > 0 & \text{pour tout} \quad u \leqslant \rho, \end{cases}$$

conditions réalisées dans Ω_s.

D'où, au lieu de (3-6)', (3-7)', (3-8)',

$$(3\text{-}6)'' \qquad \overset{0}{y}_{(1)} = a\int_0^\lambda \left(\frac{2}{|\rho - \varepsilon u|} - \frac{1}{\rho}\right) du = -2\varepsilon a \operatorname{Log} \frac{\rho - \varepsilon\lambda}{\rho} - \frac{a\lambda}{\rho}$$

$$(3\text{-}7)'' \qquad p_{(1)i} = \varepsilon\frac{a}{\rho}\xi^{i'} + 2a\xi^{i'}\int_0^\lambda \frac{\rho - \varepsilon u}{|\rho - \varepsilon u|^3} du = \varepsilon\frac{a}{\rho}\xi^{i'}\frac{\rho + \varepsilon\lambda}{\rho - \varepsilon\lambda}$$

$$(3\text{-}8)'' \qquad \overset{i}{y}_{(1)} = \int_0^\lambda \varepsilon\frac{a}{\rho}\xi^{i'} du = \varepsilon\frac{a}{\rho}\lambda\xi^{i'}.$$

On peut regrouper les expressions (3-6)' et (3-6)'' de $\overset{0}{y}_{(1)}$, (3-7)' et (3-7)'' de $p_{(1)i}$, (3-8)' et (3-8)'' de $\overset{i}{y}_{(1)}$ en

$$(3\text{-}6) \qquad \overset{0}{y}_{(1)} = -\frac{a\lambda}{\rho} + 2a \operatorname{Log} \frac{\underset{(0)}{r} + \lambda + \rho}{\underset{(0)}{r} - \lambda + \rho}$$

$$(3\text{-}7) \qquad p_{(1)i} = \frac{a}{\rho} q_{i'} + 2a \left\{ (\xi^{i'} - m q_{i'}) \frac{\lambda(\underset{(0)}{r} + \rho)}{\rho \underset{(0)}{r}(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)} + q_{i'}\left(\frac{1}{\underset{(0)}{r}} - \frac{1}{\rho}\right) \right\}$$

$$(3\text{-}8) \qquad \overset{i}{y}_{(1)} = \frac{a}{\rho}\lambda q_{i'} - \frac{2a\lambda^2}{\rho(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)}(\xi^{i'} - m q_{i'}).$$

Ces expressions sont valables pour toutes valeurs de $m = \cos\mu$. Elles montrent que, dans Ω_s, $\overset{0}{y}_{(1)}$, $p_{(1)i}$, $\overset{i}{y}_{(1)}$ sont des fonctions indéfiniment différentiables de λ, θ', θ''.

Grâce à (3-6) et (3-8), on obtient la représentation paramétrique approchée du conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$, en fonction de λ, θ', θ''

$$(3\text{-}9) \qquad \begin{cases} x^0 = \tau + \lambda - a\dfrac{\lambda}{\rho} + 2a \operatorname{Log} \dfrac{\underset{(0)}{r} + \lambda + \rho}{\underset{(0)}{r} - \lambda + \rho} \\[2ex] x^i = \rho\xi^{i'} - \lambda q_{i'} - 2a \dfrac{\lambda^2}{\rho(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)}(\xi^{i'} - m q_{i'}). \end{cases}$$

Calculons maintenant le déterminant fonctionnel Δ de la transformation $(x^1, x^2, x^3)/(\lambda, \theta', \theta'')$ sur $\Gamma_{x'}$. Son approximation minkowskienne a été indiquée en (IV-1-3)

$$\underset{(0)}{\Delta} = -\lambda^2 \sin\theta'.$$

Le terme du premier ordre se calcule par la formule

$$\underset{(1)}{\Delta} = \underset{(0)}{l_i} \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial\lambda} + \underset{(0)}{l'_i} \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial\theta'} + \underset{(0)}{l''_i} \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial\theta''},$$

l_i, l'_i et l''_i désignant les co-facteurs respectifs, dans Δ, de

$$\frac{\partial\{x^i\}_{x'}}{\partial\lambda}, \quad \frac{\partial\{x^i\}_{x'}}{\partial\theta'}, \quad \frac{\partial\{x^i\}_{x'}}{\partial\theta''}.$$

Leurs approximations minkowskiennes valent

$$\underset{(0)}{l_i} = \lambda^2 \sin\theta' q_{i'}(\theta), \qquad \underset{(0)}{l'_i} = \lambda \sin\theta' \frac{\partial q_{i'}}{\partial\theta'}, \qquad \underset{(0)}{l''_i} = \frac{\lambda}{\sin\theta'} \frac{\partial q_{i'}}{\partial\theta''}.$$

A partir de l'expression de $\dfrac{\partial y^i_{(1)}}{\partial\lambda}$ déduite du système bicaractéristique (3-2), et de (3-7), on obtient, d'une part

$$\underset{(0)}{l_i} \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial\lambda} = \frac{a}{\rho} \lambda^2 \sin\theta'. \tag{3-10}$$

D'autre part, si on considère que l'expression (3-8) de $y^i_{(1)}$ fait intervenir θ' et θ'', soit par l'intermédiaire de $m = \cos\mu$, soit par l'intermédiaire de $q_{i'}$, il vient

$$\underset{(0)}{l'_i} \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial\theta'} + \underset{(0)}{l''_i} \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial\theta''} = \lambda \sin\theta' \left\{ \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial q_{j'}} \left(\frac{\partial q_{i'}}{\partial\theta'} \frac{\partial q_{j'}}{\partial\theta'} + \frac{1}{\sin^2\theta'} \frac{\partial q_{i'}}{\partial\theta''} \frac{\partial q_{j'}}{\partial\theta''} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial m} \left(\frac{\partial q_{i'}}{\partial\theta'} \frac{\partial m}{\partial\theta'} + \frac{1}{\sin^2\theta'} \frac{\partial q_{i'}}{\partial\theta''} \frac{\partial m}{\partial\theta''} \right) \right\}$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial q_{j'}} &= a\delta^{ij} \left\{ \frac{\lambda}{\rho} + \frac{2m\lambda^2}{\rho(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)} \right\} \\ \frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial m} \frac{\partial q_{i'}}{\partial\theta} &= -2a \frac{\lambda^3}{\rho(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)^2} \frac{\rho + \underset{(0)}{r}}{\underset{(0)}{r}} \frac{\partial m}{\partial\theta}. \end{aligned} \right.$$

Les relations

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial q_{j'}}{\partial \theta'}\right)^2 = 1, \qquad \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial q_{j'}}{\partial \theta''}\right)^2 = \sin^2\theta',$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \theta'}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta'}\left(\frac{\partial m}{\partial \theta''}\right)^2 = \sin^2\mu = 1 - m^2$$

entraînent enfin

$$\text{(3-11)} \qquad \underset{(0)}{l'_i}\frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial \theta'} + \underset{(0)}{l''_i}\frac{\partial y^i_{(1)}}{\partial \theta''} = \frac{2a}{\underset{(0)}{r}}\lambda^2 \sin\theta'.$$

Le résultat final résultant de (3-10) et (3-11) est valable pour toute valeur de $m = \cos\mu$:

$$\text{(3-12)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\underset{(0)}{\Delta} + \underset{(1)}{\Delta} = -\lambda^2\sin\theta'\left\{1 - a\left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{\underset{(0)}{r}}\right)\right\} \\ &\underset{(0)}{\mathrm{D}} + \underset{(1)}{\mathrm{D}} = -\left\{1 - a\left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{\underset{(0)}{r}}\right)\right\} \end{aligned}\right.$$

4) Approximation des bi-tenseurs-spineurs de transport parallèle.

Puisque (IV-1-4) $\underset{(0)}{t^{\alpha}_{\rho'}} = \delta^{\alpha}_{\rho'}$, on déduit de (III-3-4) la valeur de la dérivée de $\underset{(1)}{t^{\alpha}_{\rho'}}$:

$$\frac{d\underset{(1)}{t^{\alpha}_{\rho'}}}{d\lambda} = -\underset{(1)}{\mathrm{C}^{\alpha}}_{\rho 0} + \sum_{j=1}^{3}\underset{(1)}{\mathrm{C}^{\alpha}}_{\rho j}q_{j'}(\theta)$$

c'est-à-dire, d'après (2-7),

$$\text{(4-1)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\underset{(1)}{t^{0}_{0'}}}{d\lambda} = 0 \\ &\frac{d\underset{(1)}{t^{0}_{i'}}}{d\lambda} = \frac{d\underset{(1)}{t^{i}_{0'}}}{d\lambda} = -\frac{a}{\underset{(0)}{r^3}}(\rho\xi^{i'} - \lambda q_{i'}) \\ &\frac{d\underset{(1)}{t^{a}_{r'}}}{d\lambda} = a\,\frac{\rho}{\underset{(0)}{r^3}}(\xi^{a'}q_{r'} - \xi^{r'}q_{a'}) \qquad (= 0 \text{ si } a = r)\ [2]. \end{aligned}\right.$$

---

[2] Conformément aux conventions générales, tous les indices romains (a, ..., h, i, j, k, ..., r, ...) désignent dans ce chapitre un indice, égal à 1, 2, 3, relatif à un repère affine.

Compte tenu de la valeur pour $\lambda = 0$: $\underset{(1)}{t}{}^{\alpha'}_{\rho'}(x', x') = 0$, l'intégration de (4-1) conduit, pour $m = \cos \mu \neq \pm 1$, aux valeurs approchées

$$(4\text{-}2)' \quad \begin{cases} \underset{(1)}{t}{}^{0}_{0'} = 0 \\ \underset{(1)}{t}{}^{0}_{i'} = \underset{(1)}{t}{}^{i}_{0'} = -\dfrac{a}{1-m^2}\left\{ (\xi^{i'} - mq_{i'})\dfrac{\lambda}{\rho \underset{(0)}{r}} + (q_{i'} - m\xi^{i'})\left(\dfrac{1}{\underset{(0)}{r}} - \dfrac{1}{\rho}\right) \right\} \\ \underset{(1)}{t}{}^{a}_{r'} = \dfrac{a}{1-m^2}\,\dfrac{\lambda + m(\underset{(0)}{r} - \rho)}{\rho \underset{(0)}{r}}(\xi^{a'}q_{r'} - \xi^{r'}q_{a'}). \end{cases}$$

Pour $m = \cos \mu = \varepsilon = \pm 1$, une étude séparée donne

$$(4\text{-}2)'' \qquad \underset{(1)}{t}{}^{0}_{i'} = \underset{(1)}{t}{}^{i}_{0'} = -a\frac{\lambda}{\rho(\rho - \varepsilon\lambda)}\xi^{i'}, \qquad \underset{(1)}{t}{}^{a}_{r'} = 0.$$

Les formules (4-2)' et (4-2)'' peuvent être regroupées, de façon à obtenir des formules approchées valables pour toutes valeurs de $m = \cos \mu$

$$(4\text{-}3) \quad \begin{cases} \underset{(0)}{t}{}^{0}_{0'} + \underset{(1)}{t}{}^{0}_{0'} = 1 \\ t^{0}_{i'} = t^{i}_{0'} = -a\left\{ (\xi^{i'} - mq_{i'})\dfrac{\lambda(\underset{(0)}{r} + \rho)}{\rho \underset{(0)}{r}(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)} + q_{i'}\left(\dfrac{1}{\underset{(0)}{r}} - \dfrac{1}{\rho}\right) \right\} \\ \underset{(0)}{t}{}^{a}_{r'} + \underset{(1)}{t}{}^{a}_{r'} = \delta^{a}_{r'} + a(\xi^{a'}q_{r'} - \xi^{r'}q_{a'})\dfrac{\lambda(\underset{(0)}{r} + \rho)}{\rho \underset{(0)}{r}(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)}. \end{cases}$$

Ces fonctions sont, dans Ω_s, des fonctions indéfiniment différentiables de λ, θ', θ''.

Le bi-1-spineur de transport approché s'en déduit grâce à (IV-12-8)

$$(4\text{-}4) \quad \underset{(0)}{\tau}{}^{a}_{r'} + \underset{(1)}{\tau}{}^{a}_{r'} = -\frac{1}{4}\left(\underset{(0)}{t}{}^{\alpha}_{\rho'} + \underset{(1)}{t}{}^{\alpha}_{\rho'}\right)(\gamma_\alpha\gamma^{\rho'})^{a}_{r'} = \delta^{a}_{r'} - \frac{1}{4}\underset{(1)}{t}{}^{\alpha}_{\rho'}(\gamma_\alpha\gamma^{\rho'})^{a}_{r'}$$

$$= \delta^{a} - \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\{ (\xi^{i'} - mq_{i'})\frac{\lambda(\underset{(0)}{r} + \rho)}{\rho \underset{(0)}{r}(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)} + q_{i'}\left(\frac{1}{\underset{(0)}{r}} - \frac{1}{\rho}\right) \right\}(\gamma_0\gamma_{i'})^{a}_{r'}$$

$$+ \frac{a}{2}\,\frac{\lambda(\underset{(0)}{r} + \rho)}{\rho \underset{(0)}{r}(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)}\sum_{1 \leqslant i < k \leqslant 3}(\xi^{i'}q_{k'} - \xi^{k'}q_{i'})(\gamma_i\gamma_{k'})^{a}_{r'}.$$

Le bi-p-tenseur-ν-spineur de transport parallèle se déduit par produit tensoriel de $t^{\alpha}_{\rho'}$ et $\tau^{\alpha}_{r'}$. A la première approximation quasi minkowskienne, il en résulte que

$$(4\text{-}5)\qquad \underset{(0)}{{}^{(p,\nu)}\mathrm{T}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}} + \underset{(1)}{{}^{(p,\nu)}\mathrm{T}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}} = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'} + \sum_{u=1}^{p} \delta^{\mathrm{A}^u}_{\mathrm{R}'u}\, \underset{(1)}{t}{}^{\alpha_u}_{\rho'_u} + \sum_{w=1}^{\nu} \delta^{\mathrm{A}^w}_{\mathrm{R}'w}\, \underset{(1)}{\tau}{}^{a_w}_{r'_w}.$$

On peut ainsi obtenir ${}^{(p,\nu)}\mathrm{T}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{R}'}$ à partir de (4-3) et (4-4).

5) Paramétrix approchée dans les cas scalaire et vectoriel.

On calcule la paramétrix du cas scalaire grâce à (III-7-6)

$${}^{(0,0)}\sigma = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\sqrt[4]{-\{g(x)\}_{x'}}}{\sqrt{-\mathrm{D}p_0}}$$

A l'approximation du premier ordre quasi minkowskien, il vient, d'après (2-1),

$$\sqrt[4]{-\{g(x)\}_{x'}} = \sqrt[4]{\left(1-\frac{2a}{\underset{(0)}{r}}\right)\left(1+\frac{2a}{\underset{(0)}{r}}\right)^3} = 1 + \frac{a}{\underset{(0)}{r}}$$

et d'après (2-5) et (3-12),

$$\sqrt{-\mathrm{D}p_0} = \sqrt{\left(1-\frac{a}{\rho}\right)\left\{1 - a\left(\frac{1}{\rho}+\frac{2}{\underset{(0)}{r}}\right)\right\}} = 1 - \frac{a}{\underset{(0)}{r}} - \frac{a}{\rho}.$$

Il en résulte que, sur $\mathrm{V}^{\pm}_{\eta,\mathrm{N}}(x')$ (portion de $\Gamma^{\pm}_{x'}$ où $\eta < |\, x^0 - x'^{0'} \,| < \mathrm{N}$),

$$(5\text{-}1)\qquad \underset{(0)}{{}^{(0,0)}\sigma} + \underset{(1)}{{}^{(0,0)}\sigma} = \frac{1}{\lambda}\left\{1 + a\left(\frac{1}{\rho}+\frac{2}{\underset{(0)}{r}}\right)\right\} = -\frac{1}{\lambda(\underset{(0)}{\mathrm{D}} + \underset{(1)}{\mathrm{D}})}.$$

La relation (III-6-3) permet, sur $\mathrm{V}^{\pm}_{\eta,\mathrm{N}}(x')$, d'en déduire la paramétrix approchée du cas vectoriel, compte tenu de (4-3)

$$(5\text{-}2)\quad \left\{\begin{aligned}
&{}^{(1,0)}\sigma^{0}_{0'} = {}^{(0,0)}\sigma = \frac{1}{\lambda}\left\{1 + a\left(\frac{1}{\rho}+\frac{2}{\underset{(0)}{r}}\right)\right\}\\
&{}^{(1,0)}\sigma^{0}_{\mathrm{i}'} = {}^{(1,0)}\sigma^{\mathrm{i}}_{0'} = -a\left\{(\xi^{i'} - mq_{\mathrm{i}'})\,\frac{\underset{(0)}{r}+\rho}{\rho\,\underset{(0)}{r}\,(\underset{(0)}{r}+\rho-m\lambda)} + \frac{1}{\lambda}\,q_{\mathrm{i}'}\left(\frac{1}{\underset{(0)}{r}}-\frac{1}{\rho}\right)\right\}\\
&{}^{(1,0)}\sigma^{\mathrm{a}}_{\mathrm{r}'} = \delta^{\mathrm{a}}_{\mathrm{r}'}\,{}^{(0,0)}\sigma + a(\xi^{a'}q_{\mathrm{r}'} - \xi^{r'}q_{\mathrm{a}'})\,\frac{\underset{(0)}{r}+\rho}{\rho\,\underset{(0)}{r}\,(\underset{(0)}{r}+\rho-m\lambda)}
\end{aligned}\right.$$

6) Noyau de diffusion approché dans les cas scalaire et vectoriel.

On rappelle la formule (I-8-5) de définition

$$M^{A}_{R'} = \partial_i \partial_k (\{ g^{ik} \}_{x'} \sigma^{A}_{R'}) - \partial_i (\{ h^{Ai}_{B} \}_{x'} \sigma^{B}_{R'}) + \{ k^{A}_{B} \}_{x'} \sigma^{B}_{R'}.$$

Comme on l'a remarqué au § 2, le troisième terme disparaît dans le calcul du noyau de diffusion approché des cas scalaire et vectoriel, relatif à l'espace-temps de Schwarzschild. En vertu de (2-8), le deuxième terme disparaît aussi dans le cas scalaire; dans le cas vectoriel, il se réduit à

$$\partial_i(\{ {}^{(1,0)}h^{\alpha i}_{\beta} \}_{x'} {}^{(1,0)}\sigma^{\beta}_{\rho'}) \sim \partial_i(\{ {}^{(1,0)}\underset{(1)}{h}{}^{\alpha i}_{\beta} \}_{x'} {}^{(1,0)}\underset{(0)}{\sigma}{}^{\beta}_{\rho'}) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i \left(\frac{2}{\lambda} \{ \underset{(1)}{C}{}^{\alpha}_{\rho i} \}_{x'} \right).$$

Le seul cas où ce terme n'est pas nul est, d'après (2-7), celui où $0 \neq \alpha \neq \rho \neq 0$

$$(6\text{-}1) \qquad \sum_{i=1}^{3} \partial_i \left(\frac{2}{\lambda} \{ \underset{(1)}{C}{}^{a}_{ri} \}_{x'} \right) = -a \left[\partial_r \left(\frac{2}{\lambda} \left\{ \frac{\underset{(0)}{x^a}}{\underset{(0)}{r^3}} \right\}_{x'} \right) - \partial_a \left(\frac{2}{\lambda} \left\{ \frac{\underset{(0)}{x^r}}{\underset{(0)}{r^3}} \right\}_{x'} \right) \right].$$

Il vient, pour le cas scalaire, et pour les termes diagonaux ($\alpha = \rho$) du cas vectoriel

$$\begin{aligned} {}^{(0,0)}\underset{(1)}{M} &= {}^{(1,0)}\underset{(1)}{M}{}^{0}_{0'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{M}{}^{1}_{1'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{M}{}^{2}_{2'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{M}{}^{3}_{3'} \\ &= \partial_i \partial_k \left[-\delta^{ik} \left(1 - \frac{2a}{\underset{(0)}{r}} \right) \frac{1}{\lambda} \left\{ 1 + a\left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{\underset{(0)}{r}} \right) \right\} \right] = \sum_{i=1}^{3} \partial_i \partial_i \left\{ \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{a}{\rho} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Or, ainsi qu'on le remarque aisément, on a, à l'approximation du premier ordre quasi minkowskien,

$$l^2 = \sum_{i=1}^{3} \{ \underset{(0)}{y^i} + \underset{(1)}{y^i} \}^2_{x'} = \sum_{i=1}^{3} (\{ \underset{(0)}{x^i} + \underset{(1)}{x^i} \}_{x'} - x'^{i'})^2 = \left(\frac{\lambda}{1 + \frac{a}{\rho}} \right)^2.$$

Il en résulte que

$$(6\text{-}2) \qquad {}^{(0,0)}\underset{(1)}{M} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{M}{}^{0}_{0'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{M}{}^{1}_{1'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{M}{}^{2}_{2'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{M}{}^{3}_{3'} = 0.$$

Les expressions (I-8-5) de ${}^{(1,0)}\mathrm{M}^{0}_{i'} = {}^{(1,0)}\mathrm{M}^{i}_{0'}$ et de ${}^{(1,0)}\mathrm{M}^{a}_{r'}$ (a $\neq$ r) contenant en facteur le paramètre a, les calculs de dérivation peuvent être menés à l'approximation minkowskienne ($a = 0$). On supposera donc qu'on a substitué les expressions minkowskiennes de $q_{i'}$, m, $\underset{(0)}{r}$, λ en fonction de x^1, x^2, x^3, ρ, $\xi^{i'}$

$$(6\text{-}3)\qquad \begin{cases} q_{i'} = \dfrac{\rho\xi^{i'} - x^i}{\lambda}, & m = \dfrac{\rho - \sum\limits_{i=1}^{3}\xi^{i'}x^i}{\lambda} \\ \lambda = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{3}(x^i - \rho\xi^{i'})^2 \right\}^{1/2}, & \underset{(0)}{r} = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{3}(x^i)^2 \right\}^{1/2}. \end{cases}$$

Il est commode, pour effectuer les calculs, d'écrire les expressions (5-2) de ${}^{(1,0)}\underset{(1)}{\sigma}{}^{0}_{i'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\sigma}{}_{0'}{}^{i}$ et de ${}^{(1,0)}\underset{(1)}{\sigma}{}^{a}_{r'}$ (a $\neq$ r) sous la forme

$$(6\text{-}4)\qquad \begin{cases} {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\sigma}{}^{0}_{i'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\sigma}{}^{i}_{0'} = a\,\{\, \mathrm{HJ}_{i'} + \mathrm{I}_i \,\} \\ {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\sigma}{}^{a}_{r'} = a\mathrm{HJ}^{a'}_{r'} \end{cases}$$

où

$$(6\text{-}5)\qquad \begin{cases} \mathrm{H} = \dfrac{\underset{(0)}{r} + \rho}{\rho\underset{(0)}{r}(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)} = \dfrac{1}{\rho\underset{(0)}{r}}\left(1 + \dfrac{m\lambda}{\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda}\right) \\ \mathrm{J}^{a'}_{r'} = \xi^{a'}q_{r'} - \xi^{r'}q_{a'}. \\ \mathrm{J}_{i'} = mq_{i'} - \xi^{i'} \\ \mathrm{I}_i = -\dfrac{q_{i'}}{\lambda}\left(\dfrac{1}{\underset{(0)}{r}} - \dfrac{1}{\rho}\right). \end{cases}$$

Pour calculer

$$(6\text{-}6)\qquad \begin{cases} {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\mathrm{M}}{}^{0}_{i'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\mathrm{M}}{}^{i}_{0'} = -\,a\sum\limits_{k=1}^{3}\partial_k\partial_k(\mathrm{HJ}_{i'} + \mathrm{I}_i) \\ {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\mathrm{M}}{}^{a}_{r'} = -\,a\left\{ \sum\limits_{k=1}^{3}\partial_k\partial_k(\mathrm{HJ}^{a'}_{r'}) + \partial_r\left(\dfrac{2}{\lambda}\,\dfrac{x^a}{\underset{(0)}{r}{}^3}\right) - \partial_a\left(\dfrac{2}{\lambda}\,\dfrac{x^r}{\underset{(0)}{r}{}^3}\right) \right\}. \end{cases}$$

on effectue, en appliquant (6-3), les calculs préliminaires

$$
(6\text{-}7)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\partial_k \mathrm{H} = -\frac{x^k}{\rho\,\underset{(0)}{r}^3} - \frac{x^k}{\rho\,\underset{(0)}{r}^3}\,\frac{m\lambda(2\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)}{(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)^2} - \xi^{k'}\frac{\underset{(0)}{r} + \rho}{\rho\underset{(0)}{r}(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)^2}\\
&\sum_{k=1}^{3}\partial_k\partial_k \mathrm{H} = \frac{4}{\underset{(0)}{r}^3(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)} + \frac{2\lambda(\lambda - m\rho)}{\rho\,\underset{(0)}{r}^3(\underset{(0)}{r} + \rho - m\lambda)^2}\\
&\partial_k \mathrm{J}_{i'} = \frac{1}{\lambda}\{\, \mathrm{J}_{k'}q_{i'} + m(q_{i'}q_{k'} - \delta_{ik})\,\}\\
&\partial_k \mathrm{J}^{a'}_{r'} = \frac{1}{\lambda}(-\,\xi^{a'}\delta_{kr} + \xi^{r'}\delta_{ka} + q_{k'}\mathrm{J}^{a'}_{r'})\\
&\sum_{k=1}^{3}\partial_k\partial_k \mathrm{J}_{i'} = -\frac{2}{\lambda^2}(\mathrm{J}_{i'} + 2mq_{i'})\\
&\sum_{k=1}^{3}\partial_k\partial_k \mathrm{J}^{a'}_{r'} = -\frac{2}{\lambda^2}\mathrm{J}^{a'}_{r'}\\
&\sum_{k=1}^{3}\partial_k\partial_k \mathrm{I}_i = \frac{2}{\lambda^2\underset{(0)}{r}^3}\{\,\rho\mathrm{J}_{i'} - (\lambda - m\rho)q_{i'}\,\} + \frac{2}{\lambda^3}q_{i'}\left(\frac{1}{\underset{(0)}{r}} - \frac{1}{\rho}\right)\\
&\partial_r\left(\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{x^a}{\underset{(0)}{r}^3}\right) - \partial_a\left(\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{x^r}{\underset{(0)}{r}^3}\right) = \frac{2\rho}{\lambda^2\underset{(0)}{r}^3}\mathrm{J}^{a'}_{r'}
\end{aligned}
\right.
$$

La substitution dans (6-6) de ces résultats partiels donne

$$
(6\text{-}8)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&{}^{(1,0)}\underset{(1)}{\mathrm{M}}{}^{0}_{i'} = {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\mathrm{M}}{}^{i}_{0'} = 0\\
&{}^{(1,0)}\underset{(1)}{\mathrm{M}}{}^{a}_{r'} = 0 \qquad \text{pour} \qquad a \neq r.
\end{aligned}
\right.
$$

Il résulte de (6-2) et (6-8) que, à l'approximation du premier ordre quasi minkowskien,

$$
(6\text{-}9)\qquad {}^{(0,0)}\mathrm{M}(x', x) = 0, \qquad {}^{(1,0)}\mathrm{M}^{\alpha}_{\rho'}(x', x) = 0.
$$

Rappelons que tous les calculs aboutissant à (6-9) ont été effectués sous la condition (1-3)

$$
\bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'} \cap \bar{\mathcal{E}}^{\mp}_{x} \subset \Omega_s.
$$

7) Propagateurs scalaire et vectoriel.

Il résulte de (6-9) que, pour deux points x' et x satisfaisant à la condition (1-3), le propagateur scalaire et le propagateur vectoriel approchés n'ont *aucun terme de diffusion* [3].

En effet, les formules de Kirchhoff donnent alors directement les propagateurs approchés

$$
(7\text{-}1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\langle {}^{(0,0)}\mathrm{G}, f \rangle (x') &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \{ f(x) \}_{x'} \frac{d^2\Omega}{4\pi} \\
\langle {}^{(1,0)}\mathrm{G}^{\alpha}_{\rho'}, f_\alpha \rangle (x') &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \{ t^{\alpha}_{\rho'}(x', x) f_\alpha(x) \}_{x'} \frac{d^2\Omega}{4\pi}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules sont valables pourvu que le support du champ d'épreuve vérifie la condition (1-4)

$$
\bar{\mathcal{E}}^{\pm}_{x'} \cap \bar{\mathcal{E}}^{\mp}_{s(f)} \subset \Omega_s.
$$

Il est intéressant de comparer ces propagateurs aux propagateurs de Jordan-Pauli (IV-1-7). Les formules (7-1) sont la généralisation la plus simple possible à un espace-temps courbe des formules valables sur un espace-temps de Minkowski. Il n'y apparaît que deux termes correctifs linéaires en a : l'un correspond à la distorsion du conoïde caractéristique; l'autre, qui n'apparaît que pour le propagateur vectoriel, correspond à l'écart à l'identité du bi-1-tenseur de transport parallèle.

Pour faire apparaître clairement ces termes correctifs, il suffit d'écrire les relations (7-1) comme sommes d'intégrales sur $C_{x'}$, suivant la méthode générale des chapitres II et IV. Il vient, comme en (IV-4-2)

$$
(7\text{-}2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\langle {}^{(0,0)}\underset{(1)}{\mathrm{G}}, f \rangle (x') \\
&\qquad = - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} y^{\nu}_{(1)}(\lambda, \theta) \partial_\nu f(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho\xi^{i'}) \frac{d^2\Omega}{4\pi} \\
&\langle {}^{(1,0)}\underset{(1)}{\mathrm{G}}{}^{\alpha}_{\rho'}, f_\alpha \rangle (x') \\
&\qquad = - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \{ y^{\nu}_{(1)}(\lambda, \theta) . \partial_\nu f_\rho(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho\xi^{i'}) \\
&\qquad\qquad + \underset{(1)}{t}{}^{\alpha}_{\rho'}(\lambda, \theta) f_\alpha(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho\xi^{i'}) \} \frac{d^2\Omega}{4\pi}.
\end{aligned}
\right.
$$

---

[3] C. Morette-DeWitt [*1*] a obtenu ce résultat simultanément par une méthode différente; elle donne aussi un autre résultat dans le cas où la condition (1-3) n'est pas satisfaite (cf. remarque [1] ci-dessus, § 1).

A l'écart à l'identité du bi-1-tenseur de transport parallèle correspond une couche simple portée par $C_{x'}$. A l'écart à $C_{x'}$ de $\Gamma_{x'}$ correspondent une couche double et la dérivée d'une couche simple portées par $C_{x'}$; la dérivée de couche simple apparaît en utilisant la relation (I-8-2)

$$\{ \partial_i f \}_{x'} = \partial_i \{ f \}_{x'} + \frac{p_i}{p_0} \{ \partial_0 f \}_{x'}$$

qui permet de séparer les dérivées transversales et tangentielles au conoïde. L'intégration par parties sur $C_{x'}$ montre, comme en (II-5-5), que la dérivée de couche simple est égale à une couche simple portée par $C_{x'}$

$$(7\text{-}3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\langle {}^{(0,0)}\underset{(1)}{G}, f \rangle (x') \\ &\quad = -2a \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \left\{ \operatorname{Log} \frac{\underset{(0)}{r} + \rho + \lambda}{\underset{(0)}{r} + \rho - \lambda} \,.\, \partial_0 f(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'}) \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{f(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'})}{\underset{(0)}{r}} \right\} \frac{d^2\Omega}{4\pi} \\ &\langle {}^{(1,0)}\underset{(1)}{G}{}^{\alpha}_{\rho'}, f_\alpha \rangle (x') \\ &\quad = - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \left\{ 2a \operatorname{Log} \frac{\underset{(0)}{r} + \rho + \lambda}{\underset{(0)}{r} + \rho - \lambda} \,.\, \partial_0 f_\rho(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'}) \right. \\ &\qquad\qquad + \frac{2a}{\underset{(0)}{r}} f_\rho(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'}) \\ &\qquad\qquad \left. + \underset{(1)}{t}{}^{\alpha}_{\rho'}(x'\,;\,\lambda, q_{i'}) f_\alpha(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'}) \right\} \frac{d^2\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \right.$$

8) Conséquences pour les spins entiers supérieurs.

Grâce à l'étude faite au chapitre IV, § 9, on sait déduire de (7-1) les propagateurs approchés relatifs à un spin entier quelconque p, sous la condition (1-3).

Le fait essentiel est l'apparition, pour les spins $p \geqslant 2$, de *termes de diffusion* liés à la courbure riemannienne $R^{\alpha_1}{}_{\beta_1}{}^{\alpha_2}{}_{\beta_2}$. (9-3)′ et (9-1) donnent en effet pour le noyau de diffusion, compte tenu de (6-9),

$$(8\text{-}1)\quad \left\{ \begin{aligned} &{}^{(2)}\underset{(1)}{K}{}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho_1'\rho_2'}(x', x) = -2\lambda \underset{(1)}{R}{}^{\alpha_1}{}_{\rho_1}{}^{\alpha_2}{}_{\rho_2}(x) \\ &{}^{(p)}\underset{(1)}{K}{}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}(x', x) = -2\lambda \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{R}'^{uv}} \underset{(1)}{R}{}^{\alpha_u}{}_{\rho_u}{}^{\alpha_v}{}_{\rho_v}(x). \end{aligned} \right.$$

Le terme de diffusion correspondant, dans le propagateur approché ${}^{(2)}\mathrm{G}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}$ ou ${}^{(p)}\mathrm{G}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}$, est, respectivement,

$$
(8\text{-}2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}(x', x) = \underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{-\alpha_1\alpha_2}_{\ \rho'_1\rho'_2}(x', x) - \underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{+\alpha_1\alpha_2}_{\ \rho'_1\rho'_2}(x', x),\\
&\sum_{1\leqslant u<v\leqslant p} \delta^{\mathcal{A}^{uv}}_{\mathcal{R}'uv}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\alpha_u\alpha_v}_{\rho'_u\rho'_v}(x', x).
\end{aligned}\right.
$$

Le calcul se fait d'après (IV-9-5), en substituant les composantes du tenseur de courbure évaluées en (2-13). Il suffit donc d'effectuer le calcul de

$$
\begin{aligned}
(8\text{-}3)'\quad &\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\,\mathrm{i}\,0}_{\ \ 0'\mathrm{k}'} = \underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\,0\,\mathrm{i}}_{\ \ \mathrm{k}'0'} = \underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\,0\,0}_{\ \ \mathrm{i}'\mathrm{k}'} = \underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\pm\,\mathrm{i}\,\mathrm{k}}_{\ \ 0'0'}\\
&= 2\zeta\,\{\pm(x^{\nu} - x'^{\nu'})\}\iint_{\mathcal{S}^{(2)}}[\lambda^3(3q_{\mathrm{i}'}q_{\mathrm{k}'} - \delta_{\mathrm{ik}})\\
&\qquad - \rho\lambda^2(3\xi^{i'}q_{\mathrm{k}'} + 3\xi^{k'}q_{\mathrm{i}'} - 2m\delta^{\mathrm{i}}_{\mathrm{k}}) + \rho^2\lambda(3\xi^{i'}\xi'^{k} - \delta^{\mathrm{i}}_{\mathrm{k}})]\\
&\qquad \times \frac{1}{x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'})q_{\mathrm{i}'}(\theta)} \times \frac{d^2\Omega}{16\pi^2}
\end{aligned}
$$

en substituant

$$
\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{(x^0 - x'^{0'})^2 - \sum\limits_{i=1}^{3}(x^i - x'^{i'})^2}{x^0 - x'^{0'} + (x^i - x'^{i'})q_{\mathrm{i}'}(\theta)}.
$$

On a alors

$$
(8\text{-}3)''\qquad \underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2}_{\mathrm{r}'_1\mathrm{r}'_2} = \delta_{\mathrm{r}'_1\mathrm{r}'_2}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2}_{0'0'} + \delta^{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{0\,0}_{\mathrm{r}'_1\mathrm{r}'_2} - \delta^{\mathrm{a}_2}_{\mathrm{r}'_1}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\mathrm{a}_1 0}_{0'\mathrm{r}'_2} - \delta^{\mathrm{a}_1}_{\mathrm{r}'_2}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{0\,\mathrm{a}_2}_{\mathrm{r}'_1 0'},
$$

toutes les autres composantes du noyau $\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}(x', x)$ étant nulles.

Le propagateur approché relatif au spin entier p est donc défini par

$$
\begin{aligned}
(8\text{-}4)\quad \langle {}^{(p)}\mathrm{G}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}, f_{\mathcal{A}}\rangle(x') = &-\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\lambda\iint_{\mathcal{S}^{(2)}}\{{}^{(p,0)}\mathrm{T}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}(x', x)f_{\mathcal{A}}(x)\}_{x'}\frac{d^2\Omega}{4\pi}\\
&+ \sum_{1\leqslant u<v\leqslant p}\iiiint_{\bar{\mathcal{E}}_{x'}}\underset{(1)}{\mathrm{H}}{}^{\alpha_u\alpha_v}_{\rho'_u\rho'_v}(x', x)f_{\rho_1\ldots\alpha_u\ldots\alpha_v\ldots\rho_p}(x)d^4x.
\end{aligned}
$$

Comme ci-dessus, mettons en évidence sa différence avec le propagateur de Jordan-Pauli ${}^{(p)}\underset{(0)}{G}{}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}$, défini en (IV-1-7). Elle est la somme de trois termes correctifs, dont deux seulement sont portés par $C_{x'}$.

(8-5)

$$\langle {}^{(p)}\underset{(1)}{G}{}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}, f_{\mathcal{A}} \rangle (x') = - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \Big\{ \underset{(1)}{y}{}^{\nu}_{\mathcal{R}'}(\lambda, \theta) . \partial_{\nu} f_{\mathcal{R}}(\lambda + \tau, - \lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'})$$

$$+ \sum_{u=1}^{p} \underset{(1)}{t}{}^{\alpha_u}_{\rho'_u} f_{\rho_1 \ldots \alpha_u \ldots \rho_p}(\lambda + \tau, - \lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'}) \Big\} \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$

$$+ \sum_{1 \leqslant u < v \leqslant p} \iiiint_{\bar{\mathcal{E}}_{x'}} \underset{(1)}{H}{}^{\alpha_u \alpha_v}_{\rho'_u \rho'_v}(x', x) f_{\rho_1 \ldots \alpha_u \ldots \alpha_v \ldots \rho_p}(x) d^4x.$$

Le premier terme peut être transformé de façon à faire apparaître, comme en (7-3) pour les spins 0 et 1, une couche simple et une couche double portées par $C_{x'}$.

Pour obtenir les propagateurs approchés correspondant à une classe de p-tenseurs présentant des symétries partielles ou complètes, il suffit de faire dans (8-4) les regroupements nécessaires pour que n'apparaissent que des composantes *indépendantes* du champ f. Il vient par exemple pour les 2-tenseurs symétriques (potentiel de gravitation), et pour les 2-formes (champ électromagnétique)

$$\text{(8-6)} \quad \langle {}^{''}G^{(\alpha_1\alpha_2)}_{(\rho'_1\rho'_2)}, f_{(\alpha_1\alpha_2)} \rangle (x') = - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \Big\{ \Big(\underset{\rho'_1}{t}{}^{\alpha_1} \underset{\rho'_2}{t}{}^{\alpha_2} + \underset{\rho'_1}{t}{}^{\alpha_2} \underset{\rho'_2}{t}{}^{\alpha_1} \Big) f_{(\alpha_1\alpha_2)} \Big\}_{x'} \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$

$$+ \iiiint_{\bar{\mathcal{E}}_{x'}} \Big\{ \underset{(1)}{H}{}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}(x', x) + \underset{(1)}{H}{}^{\alpha_2\alpha_1}_{\rho'_1\rho'_2}(x', x) \Big\} f_{(\alpha_1\alpha_2)}(x) d^4x.$$

$$\text{(8-7)} \quad \langle {}^{\wedge}G^{[\alpha_1\alpha_2]}_{[\rho'_1\rho'_2]}, f_{[\alpha_1\alpha_2]} \rangle (x') = - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \Big\{ \Big(\underset{\rho'_1}{t}{}^{\alpha_1} \underset{\rho'_2}{t}{}^{\alpha_2} - \underset{\rho'_1}{t}{}^{\alpha_2} \underset{\rho'_2}{t}{}^{\alpha_1} \Big) f_{[\alpha_1\alpha_2]} \Big\}_{x'} \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$

$$+ \iiiint_{\bar{\mathcal{E}}_{x'}} \Big\{ \underset{(1)}{H}{}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho'_1\rho'_2}(x', x) - \underset{(1)}{H}{}^{\alpha_2\alpha_1}_{\rho'_1\rho'_2}(x', x) \Big\} f_{[\alpha_1\alpha_2]}(x) d^4x.$$

9) **Spins demi-entiers.**

En application des résultats du chapitre IV, § 12, on voit que le propagateur approché du spin 1/2, comme ceux des spins 0 et 1, et de même sous la condition (1-3) n'ont *aucun terme de diffusion.*

On déduit en effet de (IV-12-11)

$$(9\text{-}1)\quad {}^{(1/2)}\underset{(1)}{K}{}^{r'}_{a}(x',x) = \delta^{r'(0)}_{a}\underset{(1)}{K}(x',x) - \frac{1}{2}(\gamma^{j'}\gamma_0)^{r'}_{a}{}^{(1)}\underset{(1)}{K}{}^{0}_{j'}(x',x) - \frac{1}{4}\sum_{a\neq r}(\gamma^{r'}\gamma_a)^{r'}_{a}{}^{(1)}\underset{(1)}{K}{}^{a}_{r'}(x',x) = 0.$$

Il résulte de même de (IV-12-12)′ et (7-1) que

$$(9\text{-}2)\quad \langle {}^{(1/2)}G^{r'}_{a}, f^{a}\rangle(x') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\lambda\iint_{S^{(2)}}\{\overset{*}{\tau}{}^{r'}_{a}(x',x)f^{a}(x)\}_{x'}\frac{d^2\Omega}{4\pi}.$$

On peut mettre en évidence sa différence avec le propagateur de Jordan-Pauli, sous la forme

$$(9\text{-}3)$$
$$\langle {}^{(1/2)}\underset{(1)}{G}{}^{r'}_{a}, f^{a}\rangle(x') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\lambda\iint_{S^{(2)}}\Big\{y^{\nu}_{(1)}(\lambda,\theta).\partial_{\nu}f^{r'}(\lambda+\tau, -\lambda q_{i'}+\rho\xi^{i'}) + \underset{(1)}{\overset{*}{\tau}}{}^{r'}_{a}(\lambda,\theta)f^{a}(\lambda+\tau, -\lambda q_{i'}+\rho\xi^{i'})\Big\}\frac{d^2\Omega}{4\pi};$$

ou, de même qu'en (7-3), comme somme d'une couche simple et d'une couche double portées par $C_{x'}$.

D'après (IV-9-8), le propagateur approché du spin 3/2 *a un terme de diffusion*

$$(9\text{-}4)\quad \langle {}^{(3/2)}G^{\alpha r'}_{\rho' a}, f^{a}_{\alpha}\rangle(x') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\lambda\iint_{S^{(2)}}\{t^{\alpha}_{\rho'}(x',x)\overset{*}{\tau}{}^{r'}_{a}(x',x)f^{a}_{\alpha}(x)\}_{x'}\frac{d^2\Omega}{4\pi} - \frac{1}{4}\iiiint_{\bar{\mathcal{E}}_{x'}}\underset{(1)}{H}{}^{\alpha\beta}_{\rho'\sigma'}(x',x)(\gamma^{\sigma'}\gamma_{\beta})^{r'}_{a}f^{a}_{\alpha}(x)d^4x.$$

En vertu de (IV-9-4), on retrouve, pour tous les spins demi-entiers supérieurs à 3/2, le *même terme de diffusion*, et lui seul

$$(9\text{-}5)\quad \langle {}^{(p+1/2)}G^{\mathcal{A}\,r'}_{\mathcal{R}'a}, f^{a}_{\mathcal{A}}\rangle(x') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\lambda\iint_{S^{(2)}}\{{}^{(p,0)}T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}'}(x',x)\overset{*}{\tau}{}^{r'}_{a}(x',x)f^{a}_{\mathcal{A}}(x)\}_{x'}\frac{d^2\Omega}{4\pi} - \frac{1}{4}\sum_{u=1}^{p}\iiiint_{\bar{\mathcal{E}}_{x'}}\underset{(1)}{H}{}^{\alpha_u\beta}_{\rho'_u\sigma'}(x',x)(\gamma^{\sigma'}\gamma_{\beta})^{r'}_{a}f^{a}_{\rho_1\ldots\alpha_u\ldots\rho_p}(x)d^4x.$$

On peut, comme en (8-5), mettre en évidence la différence avec le propagateur de Jordan-Pauli

$$(9\text{-}6)\quad \langle {}^{(p+1/2)}\underset{(1)}{G}{}^{\mathcal{A}\,r'}_{\mathfrak{R}'a}, f^a_{\mathcal{A}} \rangle (x')$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} y^{\nu}_{(1)}(\lambda, \theta) \partial_{\nu} f^r_{\mathfrak{R}}(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'}) \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\lambda \iint_{S^{(2)}} \{ \underset{(1)}{\overset{*}{\tau}}{}^{r'}_{a}(\lambda, \theta) f^a_{\mathfrak{R}}(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'})$$

$$+ \sum_{u=1}^{p} t^{\alpha_u}_{(1)\rho'_u}(\lambda, \theta) f^r_{\rho_1 \ldots \alpha_u \ldots \rho_p}(\lambda + \tau, -\lambda q_{i'} + \rho \xi^{i'}) \} \frac{d^2\Omega}{4\pi}$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{u=1}^{p} \iiiint_{\mathcal{E}_{x'}} \underset{(1)}{H}{}^{\alpha_u \beta}_{\rho'_u \sigma'}(x', x) (\gamma^{\sigma'} \gamma_{\beta})^{r'}_{a} f^a_{\rho_1 \ldots \alpha_u \ldots \rho_p}(x) d^4x.$$

La première intégrale peut être transformée pour faire apparaître, comme en (7-3), une couche simple et une couche double portées par $C_{x'}$.

10) Remarque sur le propagateur 2-spinoriel.

En vertu de (IV-9-9), le propagateur 2-spinoriel approché *a un terme de diffusion*, égal à

$$(10\text{-}1)\qquad \frac{1}{16} \underset{(1)}{H}{}^{\beta_1 \beta_2}_{\sigma'_1 \sigma'_2}(x', x) (\gamma^{\sigma'_1} \gamma_{\beta_1})^{r'}_{a} (\gamma_{\beta_2} \gamma^{\sigma'_2})^{b}_{s'}.$$

On peut se demander si la présence de ce terme de diffusion n'est pas contradictoire avec les résultats obtenus pour les spins 0 et 1. Il faut déduire de ${}^{s}G^{r'c}_{as'}$, par résolution des relations (III-17-4), les propagateurs approchés relatifs aux formes des divers degrés $q = 0, 1, 2, 3, 4$, afin d'examiner quels sont ceux d'entre eux que concerne ce terme de diffusion.

Des relations sur la courbure

$$(10\text{-}2)\qquad \begin{cases} R^{\beta_1}{}_{\sigma_1}{}^{\beta_2}{}_{\sigma_2} (\gamma^{\sigma'_1} \gamma_{\beta_1} \gamma_{\beta_2} \gamma^{\sigma'_2})^{l'}_{l'} = 8R, \\ R^{\beta_1}{}_{\sigma_1}{}^{\beta_2}{}_{\sigma_2} (\gamma^{\sigma'_1} \gamma_{\beta_1} \gamma^{\alpha} \gamma_{\beta_2} \gamma^{\sigma'_2} \gamma_{\rho'})^{l'}_{l'} = 32 \left(R^{\alpha}_{\rho} - \frac{1}{4} R \delta^{\alpha}_{\rho} \right), \\ R^{\beta_1}{}_{\sigma_1}{}^{\beta_2}{}_{\sigma_2} (\gamma^{\sigma'_1} \gamma_{\beta_1} \gamma^{0} \gamma^{1} \gamma^{2} \gamma^{3} \gamma_{\beta_2} \gamma^{\sigma'_2} \gamma_{0'} \gamma_{1'} \gamma_{2'} \gamma_{3'})^{l'}_{l'} = 8R, \end{cases}$$

il résulte que le terme de diffusion (10-1) ne concerne pas les propagateurs antisymétriques d'ordre 0, 1 et 4, mais uniquement ceux d'ordre 2 et 3. On retrouve pour ces derniers les termes de diffusion

$$(10\text{-}3) \qquad \underset{(1)}{H}{}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho_1'\rho_2'}(x', x) - \underset{(1)}{H}{}^{\alpha_2\alpha_1}_{\rho_1'\rho_2'}(x', x)$$

$$(10\text{-}4) \qquad \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\beta_1\beta_2\beta_3}\left(\delta^{\beta_1}_{\rho_1'}\underset{(1)}{H}{}^{\beta_2\beta_3}_{\rho_2'\rho_3'} + \delta^{\beta_2}_{\rho_2'}\underset{(1)}{H}{}^{\beta_3\beta_1}_{\rho_3'\rho_1'} + \delta^{\beta_3}_{\rho_3'}\underset{(1)}{H}{}^{\beta_1\beta_2}_{\rho_1'\rho_2'}\right)$$

conformes aux résultats du § 8.

Il subsiste une contradiction apparente entre les résultats obtenus pour les potentiels électromagnétique et mésonique (§ 7), et pour les champs électromagnétique et mésonique (§ 8 ou 10). Elle peut être levée grâce aux identités (A. Lichnerowicz [*1*])

$$(10\text{-}5) \qquad \nabla_\beta {}^\frown G^{\beta\,\alpha}_{[\rho_1'\rho_2']}(x', x) + \nabla_{\rho_1'}{}^{(1)}G^{\alpha}_{\rho_2'}(x', x) - \nabla_{\rho_2'}{}^{(1)}G^{\alpha}_{\rho_1'}(x', x) \equiv 0,$$

d'où il résulte, pour les termes de diffusion,

$$(10\text{-}5)' \qquad \nabla_\beta \underset{(1)}{H}{}^{\beta\,\alpha}_{\rho_1'\rho_2'}(x', x) - \nabla_\beta \underset{(1)}{H}{}^{\alpha\,\beta}_{\rho_1'\rho_2'}(x', x) \equiv 0,$$

et

$$(10\text{-}6) \qquad d_{x'}\widehat{{}^{(3)}G}(x', x) + \nabla_\beta {}^\frown G^{\beta[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]}_{[0'1'2'3']}(x', x) \equiv 0.$$

En effet, dans le cas du champ électromagnétique, la source $f_{[\alpha_1\alpha_2]}$ dérive nécessairement d'une 1-forme-potentiel

$$f_{[\alpha_1\alpha_2]}(x) = \frac{1}{2}\{\nabla_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2}(x) - \nabla_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}(x)\},$$

de sorte que la contribution apportée par le terme de diffusion (10-3),

$$\iiiint_{\overline{\mathcal{E}}_{x'}}\left(\underset{(1)}{H}{}^{\alpha_1\alpha_2}_{\rho_1'\rho_2'} - \underset{(1)}{H}{}^{\alpha_2\alpha_1}_{\rho_1'\rho_2'}\right)\frac{1}{2}(\nabla_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2} - \nabla_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1})d^4x$$
$$= \left\langle \nabla_\beta\left(\underset{(1)}{H}{}^{\alpha\,\beta}_{\rho_1'\rho_2'} - \underset{(1)}{H}{}^{\beta\,\alpha}_{\rho_1'\rho_2'}\right), \varphi_\alpha\right\rangle(x'),$$

se réduit en fait, en vertu de (10-5)', à une *intégrale triple sur* $C_{x'}$.

Dans le cas du champ mésonique, où la source $f_{[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]}$ dérive d'une 4-forme-potentiel ($f = \delta\varphi$), il en est de même, en vertu de (10-6), pour le terme de diffusion (10-4).

BIBLIOGRAPHIE

Y. BRUHAT [*1*], Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires (chap. Ier et III). *Acta Math.*, t. 88, 1952, p. 141 (*Thèse Paris*).

Y. BRUHAT [*2*], Résolution du problème de Cauchy pour des équations hyperboliques du second ordre non linéaires (chap. Ier et III). *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 81, 1953, p. 225.

Y. BRUHAT [*3*], Solutions élémentaires d'équations du second ordre de type quelconque. Coll. internat. C. N. R. S., 71, Paris, 1956. *Les équations aux dérivées partielles*, p. 63.

Y. BRUHAT [*4*], Propagateurs et solutions d'équations homogènes hyperboliques. *Comptes rendus*, t. 251, 1960, p. 29.

Y. BRUHAT [*5*], Sur la théorie des propagateurs. *Annali di Math. pura ed appl.*, t. 64, 1964, p. 191.

J. CHAILLOU [*1*], Ensembles d'opérateurs différentiels hyperboliques d'ordre borné. *Thèse Paris* (à paraître).

J. COLLEAU [*1*], Notes sur les propagateurs annonçant les principaux résultats de ce travail. *Comptes rendus*, t. 256, 1963, p. 4596; t. 257, 1963, p. 839 et p. 3565.

J. COLLEAU [*2*], Distribution matérielle correspondant à la solution extérieure de Schwarzschild. *Sem. de Phys. Math. du Collège de France*, 13 juin 1964 (*miméographié*).

E. COMBET [*1*], Solutions élémentaires des dalembertiens généralisés. *Thèse Paris*, 1963 (*miméographié*). *Mém. Sc. Math.*, t. 160.

B. S. DEWITT et R. W. BREHME [*1*], Radiation Damping in a Gravitationnal Field. *Annals of Physics*, t. 9, 1960, p. 220.

A. DOUGLISS [*1*], A criterion for the validity of Huygens Principle. *Comm. on pure and appl. Math.*, t. 9, n° 3, 1956, p. 391.

I. M. GELFAND et G. E. CHILOV [*1*], *Les distributions*. Collection Universitaire de Mathématiques. Dunod, Paris, t. 8, 1962.

J. HADAMARD [*1*], *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Hermann, Paris, 1932.

A. LICHNEROWICZ [*1*], Propagateurs et commutateurs en relativité générale (chap. Ier). *Publ. Math. I. H. E. S.*, n° 10, 1961, p. 293.

A. LICHNEROWICZ [*2*], Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale. *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 92, 1964, p. 11.

A. LICHNEROWICZ [*3*], Propagateurs et quantification en relativité générale. Conf. internat. G. R. G., Varsovie, 1962. *Proceedings*. Gauthier-Villars, Paris, 1964.

A. LICHNEROWICZ [*4*], Champ de Dirac, champ du neutrino, et transformations C, P, T, sur un espace-temps courbe. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, A, t. 1, n° 3, 1964, p. 233.

C. MORETTE-DEWITT [*1*], Fonctions de Green dans un espace de Riemann : méthode de calcul pour les champs faibles; expression explicite, à l'ordre G, pour un champ statique à symétrie sphérique. *Comptes rendus*, t. 256, 1963, p. 3827.

S. L. Sobolev [*1*], Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. *Rec. Math. Moscou*, Ns 1, 1936, p. 39.

Tran Van Tan [*1*], Sur le laplacien d'un tenseur-spineur en relativité générale. *Comptes rendus*, t. 255, 1962, p. 647.

Tran Van Tan [*2*], Géométrie spinorielle sur une variété à connexion métrique *Thèse Paris*, 1963 (*miméographié*).

F. Treves [*1*], Équations aux dérivées partielles inhomogènes à coefficients constants dépendant de paramètres. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 13, 1963, 1, p. 123.

(Manuscrit reçu le 17 juin 1965).

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 195

CONVENTIONS ET NOTATIONS 198

CHAPITRE PREMIER. — *Préliminaires* 200
A. — Noyaux élémentaires. Propagateurs. Paramétrix 200
B. — Construction explicite des propagateurs pour $n + 1 = 4$ . . 211

CHAPITRE II. — *Opérateur dépendant de paramètres* 224

CHAPITRE III. — *Étude de la paramétrix et du noyau de diffusion dans le cas des champs de tenseurs-spineurs* 235
Introduction 235
A. — Généralités 237
B. — L'opérateur $\nabla^\mu \nabla_\mu$ 242
C. — Extension à certains opérateurs plus généraux 252
D. — Dalembertiens et opérateurs de Klein-Gordon 262
E. — Méthode de « fusion » 272

CHAPITRE IV. — *Approximations quasi minkowskiennes sur les propagateurs.* 283
A. — La méthode d'approximation 283
B. — Exploitation des résultats du chapitre III 292
C. — Dalembertiens et opérateurs de Klein-Gordon 301
APPENDICE. — Approximation linéaire du propagateur du spin 1/2 . 308

CHAPITRE V. — *Approximation asymptotique des propagateurs relatifs à l'espace-temps de Schwarzschild* 312

BIBLIOGRAPHIE 335

TABLE DES MATIÈRES 337