ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Bernard LE STUM & Fabien TRIHAN

Log-cristaux et surconvergence

Tome 51, n° 5 (2001), p. 1189-1207.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_5_1189_0>

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://aif.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://aif.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
51, 5 (2001), 1189–1207

LOG-CRISTAUX ET SURCONVERGENCE

par B. LE STUM & F. TRIHAN

0. Introduction.

Parmi les différentes théories cohomologiques, on dispose de la cohomologie rigide et de la catégorie de coefficients correspondante, les F-isocristaux surconvergents ([B1]). Cette théorie est censée avoir toutes les propriétés que l'on peut espérer (voir par exemple [B3], [B4]). Elle s'applique aux variétés algébriques définies sur un corps k de caractéristique positive p et est à valeur dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps p-adique.

Soit U une variété algébrique lisse sur k (supposé parfait). Si U possède une compactification lisse X et si le lieu à l'infini est un diviseur à croisements normaux, on peut considérer la cohomologie cristalline de X à pôle logarithmique le long du diviseur (voir par exemple [F], [D2], etc.). C'est une théorie à valeurs dans les $W(k)$-modules. C'est encore une bonne théorie. Modulo torsion, celle-ci doit donc coïncider avec la cohomologie rigide. Ici aussi, on dispose d'une catégorie de coefficients.

Plus généralement, si on munit k de la log-structure triviale, on peut considérer la catégorie des log-schémas X au-dessus de k. On dispose de la notion de F-log-cristal et de la cohomologie log-cristalline ([K]). On obtient ainsi une bonne théorie pour les variétés propres et log-lisses. En fait, si X^* est l'ouvert de X où la log-structure est triviale, on souhaite

Mots-clés : Cristal – Cohomologie – Surconvergent – Log-schéma.
Classification math. : 14F30.

comprendre le lien entre les F-log-cristaux sur X d'une part et les F-isocristaux surconvergents sur X^* d'autre part. On souhaite aussi comparer leur cohomologie respective.

Intuitivement, il s'agit de s'assurer qu'un système différentiel à pôles logarithmiques le long d'un diviseur sur une variété analytique rigide est surconvergent le long du diviseur. Moralement, cela provient du fait que la surconvergence se voit en dehors d'un tube qui contient le diviseur.

Nous allons construire un foncteur de la catégorie des F-log-cristaux sur X faiblement non-dégénérés (i.e non-dégénérés sur X^*) dans celles des F-isocristaux surconvergents sur X^*. Celui-ci commute aux opérations standard comme l'image inverse, le $\mathcal{H}om$ interne, etc. et il est fidèle. Malheureusement, il n'est pas pleinement fidèle, ni essentiellement surjectif. Cela provient du fait qu'un système différentiel peut avoir des singularités essentielles et aussi qu'une solution sur un voisinage strict n'a a priori aucune raison de se prolonger partout (en fait, même le F-isocristal trivial se prolonge de plusieures manières). Pour les mêmes raisons, notre foncteur ne commute pas en général aux images directes, c'est-à-dire à la cohomologie. Cela est dû à la présence de résidus comme nous l'illustrerons dans la dernière partie. Enfin, ces résultats peuvent trouver une application dans le calcul de fonctions L associées à des schémas abéliens à réduction semi-stable ([T]).

Les auteurs rermercient P. Berthelot, B. Chiarellotto, M. Gros, A. Ogus et N. Tsuzuki pour de fructueuses conversations ainsi que le referee pour ses judicieuses remarques. Le deuxième auteur remercie le réseau européen "p-adic methods in algebraic geometry", la J.S.P.S, l'Université de Münster et celle de Tokyo pour leur soutien.

1. Descente étale et surconvergence.

Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet, d'inégales caractéristiques $(0, p)$, de corps résiduel k et de corps des fractions K muni d'un relèvement σ du Frobenius de k; on note π une uniformisante de $\mathcal{V}$, et on suppose que l'indice de ramification de $\mathcal{V}$ satisfait la relation $e \leq p-1$ (on pourrait se débarrasser de cette restriction en utilisant la cohomologie de niveau supérieur). Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini, Y un k-sous-schéma fermé de P et $j : X \hookrightarrow Y$, une immersion ouverte. Nous allons donner un théorème de descente en topologie étale pour les $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[_P}$-modules (voir [B1] pour les notations). On se place sous les hypothèses suivantes :

1.0. Supposons donné un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \overset{j'}{\hookrightarrow} & Y' & \overset{i'}{\hookrightarrow} & P' \\ \downarrow w & & \downarrow v & & \downarrow u \\ X & \overset{j}{\hookrightarrow} & Y & \overset{i}{\hookrightarrow} & P \end{array}$$

tel que les flèches j et j' (respectivement i et i') soient des immersions ouvertes (respectivement fermées) et le carré de gauche soit cartésien. On note $X'' := X' \times_X X'$, $Y'' := Y' \times_Y Y'$ et $P'' := P' \times_P P'$. Enfin on pose $Z' := Y' \setminus X'$, $Z := Y \setminus X$ et $Z'' := Y'' \setminus X''$.

PROPOSITION 1.1. — *On suppose dans le diagramme ci-dessus que les flèches verticales sont étales et v surjective. Alors u est un morphisme de descente effective pour les $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[_P}$-modules cohérents, i.e. il existe une équivalence de catégories induites par u_K^* entre les $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[_P}$-modules cohérents $E_Y^\dagger$ et les $j'^\dagger\mathcal{O}_{]Y'[_{P'}}$-modules cohérents $E_{Y'}^\dagger$ munis de la donnée de descente suivante :*

Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \hookrightarrow & Y'' & \hookrightarrow & P'' \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow p_i \\ X' & \hookrightarrow & Y' & \hookrightarrow & P' \end{array}$$

induit un isomorphisme de $j''^\dagger\mathcal{O}_{]Y''[_{P''}}$-modules cohérents

$$p_2^* E_{Y'}^\dagger \simeq p_1^* E_{Y'}^\dagger$$

vérifiant une condition cocycle sur les produits fibrés triples.

Nous allons donner quelques petits lemmes géométriques qui nous permettront de donner la démonstration du théorème.

LEMME 1.2. — *On suppose v surjectif et u plat. Si V' est un voisinage strict de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$, $V := u_K(V')$ est un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$.*

Démonstration. — Comme u est plat, u_K est une application ouverte pour la topologie rigide ([BL, 5–11]) et ainsi $u_K(V')$ est un ouvert admissible de $]Y[_P$. D'autre part l'image d'un recouvrement admissible par un application ouverte étant un recouvrement admissible, on en déduit un recouvrement admissible $\{V, u_K(]Z'[_{P'})\}$ de $u_K(]Y'[_{P'})$. Le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' & \hookrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

induit une flèche surjective $Z' \to Z$. On déduit alors de [B1, 1.1.12] que $u_K(]Z'[_{P'}) =]Z[_P$ et de même que $u_K(]Y'[_{P'}) =]Y[_P$.

LEMME 1.3. — *Si V' est un voisinage strict de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$ et V un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ tel que u induise une flèche $V' \to V$, alors $V'' := V' \times_V V'$ est un voisinage strict de $]X''[_{P''}$ dans $]Y''[_{P''}$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord qu'on a : $P''_K \simeq P'_K \times_{P_K} P'_K$ et $]Y''[_{P''} \simeq]Y'[_{P'} \times_{]Y[_P}]Y'[_{P'}$ (et de même pour $]X''[_{P'}$). Ainsi V'' contient $]X''[_{P''}$ et est ouvert dans $]Y''[_{P''}$. Notons $U''_\lambda =]Y''[_{P''} \setminus]Z''[_{P'',\lambda}$, $U'_\lambda =]Y'[_{P'} \setminus]Z'[_{P',\lambda}$ et $U_\lambda =]Y[_P \setminus]Z[_{P,\lambda}$ pour tout $\lambda < 1$. Alors $U''_\lambda = U'_\lambda \times_{U_\lambda} U'_\lambda$. Soit W'' un ouvert affinoïde de $]Y''[_{P''}$. On veut montrer qu'il existe un réel λ'' tel que pour tout λ avec $\lambda'' \leq \lambda < 1$, on ait $W'' \cap U''_\lambda \subset V''$. On peut donc supposer W'' de la forme $W'_1 \times_W W'_2$ où W'_1 et W'_2 sont des ouverts affinoïdes de $]Y'[_{P'}$ et W un ouvert affinoïde de $]Y[_P$. Alors d'après [B1, 1.2.2], il existe un $\lambda'_1 < 1$ (respectivement $\lambda'_2 < 1$, $\lambda_0 < 1$) tel que pour tout λ avec $\lambda'_1 \leq \lambda < 1$ (respectivement $\lambda'_2 \leq \lambda < 1$, $\lambda_0 \leq \lambda < 1$) on ait $W'_1 \cap U'_\lambda \subset V'$ (respectivement $W'_2 \cap U'_\lambda \subset V'$, $W \cap U_\lambda \subset V$). Il suffit alors de prendre $\lambda''=\max(\lambda'_2, \lambda'_1, \lambda_0)$.

LEMME 1.4. — *Si $\{V'_i\}$ est un système fondamental de voisinages stricts de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$ alors les $\{V''_i\}$ construits par le lemme 1.3 forment un système fondamental de voisinages stricts de $]X''[_{P''}$ dans $]Y''[_{P''}$.*

Démonstration. — On montre de manière analogue à 1.3 que les $V'_i \times_{]Y[_P}]Y'[_{P'}$ sont des voisinages stricts de $]X' \times_Y Y'[_{P''}$ dans $]Y''[_{P''}$. Ils forment de plus un système fondamental. Pour montrer ceci, il suffit de voir que les voisinages stricts standard (au sens [B1, 1.2.4 (i)]) de $]X' \times_Y Y'[_{P''}$ dans $]Y''[_{P''}$ sont de la forme $V'_{\underline{\eta},\underline{\lambda}} \times_{]Y[_P}]Y'[_{P'}$ où $\underline{\eta}$ et $\underline{\lambda}$ sont des suites croissantes de réels tendant vers 1 et $V'_{\underline{\eta},\underline{\lambda}}$ est un voisinage strict standard de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$. Or par définition ceux-ci sont de la forme :

$$V''_{\underline{\eta},\underline{\lambda}} := \bigcup_n ([Y'']_{\eta_n} \cap U''_{\lambda_n})$$

où U''_{λ_n} est dans ce cas égal à $U'_{\lambda_n} \times_{]Y[_P}]Y'[_{P'}$ (cf. preuve du lemme 1.3). L'assertion est alors claire. Comme $X'' = X' \times_Y Y' \cap Y' \times_Y X'$ on s'est ramené à la situation suivante :

Soient P un $\mathcal{V}$-schéma formel, Y un k-sous-schéma fermé de P et X_1 et X_2 deux ouverts de Y. On note $X := X_1 \cap X_2$. Soient $\{V_{1,j}\}$ (respectivement $\{V_{2,j}\}$) un système fondamental de voisinages stricts de $]X_1[_P$ (respectivement $]X_2[_P$) dans $]Y[_P$. D'après [B1, 1.2.10 (i)], on sait que les $V_{1,j} \cap V_{2,j}$ sont des voisinages stricts de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ et il nous reste à montrer qu'ils en forment un système fondamental. Soient V un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ et $\underline{\eta}$ une suite croissante de réels tendant vers 1. Alors d'après [B1, 1.2.4, (i)], il existe une suite croissante de réels $\underline{\lambda}$ tendant vers 1 tel que V contienne le voisinage strict :

$$V_{\underline{\eta},\underline{\lambda}} := \bigcup_n ([Y]_{\eta_n} \cap U_{1,\lambda_n} \cap U_{2,\lambda_n})$$

où $U_{i,\lambda_n} :=]Y[_P \backslash]Z_i[_{P,\lambda_n}$ et $Z_i := Y \setminus X_i$ pour $i = 1$ ou 2. Comme $V_{i,\underline{\eta},\underline{\lambda}} := \cup_n([Y]_{\eta_n} \cap U_{i,\lambda_n})$ est un voisinage strict (standard) de $]X_i[_P$ dans $]Y[_P$, il existe un voisinage V_{i,j_i} contenant ce dernier et on a donc trouvé un voisinage $V_{1,j_1} \cap V_{2,j_2}$ inclus dans V.

LEMME 1.5. — *On se place sous les hypothèses de la proposition 1.1 (i.e. flèches verticales étales et v surjective). Soient V' un voisinage strict standard de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$ et $V := u_K(V')$. Alors la flèche $u_K : V' \to V$ est fidèlement plate quasi-compacte.*

Démonstration. — Tout d'abord, la fidèle platitude de la flèche est claire. On montre d'autre part que la flèche $u_K :]Y'[_{P'} \to]Y[_P$ est quasi-compacte :

En effet en factorisant le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \hookrightarrow & P \end{array}$$

en le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \hookrightarrow & Y \times_P P' & \hookrightarrow & P' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \hookrightarrow & P \end{array}$$

on se ramène à montrer l'assertion , soit dans le cas où le carré est cartésien, et celle-ci est alors claire, soit dans le cas où on a $Y' \hookrightarrow Y \hookrightarrow P$. Là encore, comme l'immersion fermée $Y' \hookrightarrow Y$ est étale, Y' s'identifie à une union de composantes connexes de Y et on en déduit clairement que le morphisme $]Y'[_P \to]Y[_P$ est quasi-compact.

Comme V est ouvert dans $]Y[_P$, il suffit de montrer que le morphisme composé $V' \to V \hookrightarrow]Y[_P$, qui n'est autre que le morphisme $V' \hookrightarrow]Y'[_{P'} \to]Y[_P$, est quasi-compact. Or, par définition, cela signifie que V' est pseudo-compact ([B1, 1.2.9]), ce qui est le cas puisque V' est un voisinage standard.

Remarque 1.6. — Dans le lemme précédent, si $u : P' \to P$ n'est pas étale la flèche $]Y'[_{P'} \to]Y[_P$ n'est pas nécessairement quasi-compacte. En effet, si l'on prend $X = X' = Y = Y' = \operatorname{Spec} k$, $P' = \hat{\mathbf{A}}^1_{\mathcal{V}}$ et $P = \operatorname{Spf} \mathcal{V}$, la flèche en question n'est autre que $D(0, 1^-) \to \operatorname{Sp} K$ qui n'est pas quasi-compacte.

1.7. Démonstration de la proposition 1.1. — Nous revenons aux hypothèses et notations de 1.0 : soit donc $E^\dagger_{Y'}$ un $j'^\dagger \mathcal{O}_{]Y'[_{P'}}$-module cohérent muni d'un isomorphisme de $j''^\dagger \mathcal{O}_{]Y''[_{P''}}$-modules cohérents

$$p_2^* E^\dagger_{Y'} \simeq p_1^* E^\dagger_{Y'}$$

vérifiant une condition cocycle sur les produits fibrés triples. On déduit de l'isomorphisme précédent qu'il existe :

– Un voisinage strict V'' de $]X''[_{P''}$ dans $]Y''[_{P''}$ que l'on peut choisir d'après les lemmes 1.2 et 1.4 de la forme $V'' := V' \times_V V'$ où V' est un voisinage strict standard de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$ et $V := u_K(V')$.

– Un $\mathcal{O}_{V'}$-module cohérent $\mathcal{E}_{V'}$ tel que $E^\dagger_{Y'} = j'^\dagger \mathcal{E}_{V'}$ muni d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_{V' \times_V V'}$-modules cohérents

$$p_2^* \mathcal{E}_{V'} \simeq p_1^* \mathcal{E}_{V'},$$

satisfaisant une condition cocycle sur les produits triples $V' \times_V V' \times_V V'$.

On peut de plus supposer que $u_K : V' \to V$ est une flèche *fpqc*. D'après le théorème de [BG, 3.1], il existe alors un unique $\mathcal{O}_V$-module cohérent $\mathcal{E}_V$ tel que $u_K^* \mathcal{E}_V \simeq \mathcal{E}_{V'}$ et on pose $E^\dagger_Y = j^\dagger \mathcal{E}_V$. Cette construction est clairement fonctorielle et définit un foncteur quasi-inverse au foncteur u_K^* : soient en effet $E^\dagger_Y$ un $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y[_P}$-module cohérent et $\mathcal{E}_1$, un $\mathcal{O}_{V_1}$-module cohérent où V_1 est un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ tel que $E^\dagger_Y = j^\dagger \mathcal{E}_1$. Alors $E^\dagger_{Y'} := u_K^* E^\dagger_Y$ est un $j'^\dagger \mathcal{O}_{]Y'[_{P'}}$-module cohérent muni d'une donnée de descente. Soit V' un voisinage strict standard de $]X'[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$ et $\mathcal{E}_{V'}$, le $\mathcal{O}_{V'}$-module cohérent muni de la donnée de descente induite et tel que $E^\dagger_{Y'} = j'^\dagger \mathcal{E}_{V'}$. D'après la construction ci-dessus il existe alors un unique $\mathcal{O}_V$-module cohérent $\mathcal{E}_V$, où $V = u_K(V')$, tel que $u_K^* \mathcal{E}_V \simeq \mathcal{E}_{V'}$ et on doit montrer que $j^\dagger \mathcal{E}_V \simeq j^\dagger \mathcal{E}_1$. Quitte à remplacer V et V_1 par leur intersection, on peut supposer $V = V_1$. On a alors par construction $u_K^* \mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_{V'} \simeq u_K^* \mathcal{E}_V$ et comme u_K^* induit une équivalence de catégories, ceci montre l'assertion. La réciproque quant à elle est claire.

2. Isocristaux associés aux log-cristaux.

Pour tout log-schéma X, on notera $\underline{X}$ le schéma sous-jacent et X^* l'ouvert de X sur lequel la log-structure de X est triviale. Soient X un k-log-schéma fin et saturé, où k est muni de la log-structure triviale et $F : X \to X$ le Frobenius de X.

DÉFINITION 2.0. — *Soit E un cristal sur $X/\mathcal{V}$ muni d'une structure de Frobenius. On dira que E est un F-cristal faiblement non-dégénéré si sa restriction à X^* est un F-cristal non-dégénéré, i.e que $E|_{X^*}$ est muni d'homomorphismes*

$$\Phi : F^*E|_{X^*} \to E|_{X^*} \text{ et } V : E|_{X^*} \to F^*E|_{X^*} \text{ tels que } \Phi V = p^n \text{ et } V\Phi = p^n.$$

Nous allons montrer comment associer à tout F-cristal faiblement non-dégénéré localement libre de rang fini E sur $X/(\mathcal{V}, \sigma)$, où $\mathcal{V}$ est muni de la log-structure triviale, un F-isocristal sur $X^*/(K, \sigma)$ surconvergent le long de $X \setminus X^*$ en reprenant la méthode [B1, 2-4-1].

2.1. On suppose tout d'abord que l'on peut plonger X dans un $\mathcal{V}$-log-schéma lisse Y tel que l'immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ soit exacte. On suppose de plus que Y possède un relèvement du Frobenius de $\mathcal{V}$ et on note celui-ci F. On note $\mathcal{P}$, le faisceau d'algèbres de l'enveloppe à puissances divisées de l'immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ qui s'identifie à l'enveloppe à puissances divisées de $\underline{X}$ dans $\underline{Y}$ puisque l'immersion fermée est exacte. Nous pouvons alors associer à E, un module de type fini, séparé et complet $E_{\hat{\mathcal{P}}}$ sur $\hat{\mathcal{P}}$ le complété p-adique de $\mathcal{P}$, puis par l'extension des scalaires de [B1, 2.4.1.2] :

$$\rho : \hat{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathrm{sp}_* \mathcal{O}_{[X]_{Y,|\pi|}},$$

où $[X]_{Y,|\pi|}$ est le tube fermé de rayon π, obtenir un $\mathcal{O}_{[X]_{Y,|\pi|}}$-module cohérent noté E_0. Le Frobenius de Y induit un morphisme σ-linéaire d'espaces analytiques $F_K : Y_K \to Y_K$. En posant $\eta_n = |\pi|^{p^{-n}}$, on a alors pour tout n :

$$F_K([X]_{Y,\eta_{n+1}}) \subset [X]_{Y,\eta_n} \quad [B1, 2.4.1.3].$$

On en déduit pour tout n des modules cohérents E_n sur $[X]_{Y,\eta_n}$, ainsi que des morphismes de transition

$$\Phi_n : E_{n+1}\ |_{[X]_{Y,\eta_n}} \to E_n.$$

Le noyau de cette flèche a pour support un fermé analytique H_n. D'autre part comme la construction qui associe à E ces modules et leur flèche de transition est fonctoriel en X, on en déduit que la restriction de la flèche Φ_n au tube $[X^*]_{Y,\eta_n}$ est un isomorphisme. En effet, ceci resulte du fait que $E_n\ |_{[X^*]_{Y,\eta_n}} \simeq (E_{|X^*})_{|[X^*]_{Y,\eta_n}}$ et le F-cristal $E_{|X^*}$ étant non-dégénéré, les flèches de transition sont alors des isomorphismes pour tout n, i.e $H_n \cap\ ]X^*[_Y = \emptyset$. On en déduit que $H_n \subset]X[\setminus]X^*[=]X\setminus X^*[$. D'autre part, le support H_n du noyau est quasi compact (car fermé dans un quasi-compact) et les $H_n \cap]X\setminus X^*[_\lambda$ forment un recouvrement admissible de H_n lorsque λ tend vers 1^- donc, il existe un $\lambda_n < 1$ tel que $H_n \subset [X \setminus X^*]_{\lambda_n}$. Ainsi on a trouvé un $\lambda_n < 1$, tel que la restriction de la flèche Φ_n à $V_n = [X]_{Y,\eta_n} \cap U_{\lambda_n}$ soit injective (nous reprenons les notations de 1.3). Nous pouvons faire de même pour le conoyau et choisir finalement un λ_n tel que la restriction de Φ_n à V_n soit bijective. On obtient de cette manière un système projectif de $\mathcal{O}_{V_n}$-modules qui se recollent pour former un $\mathcal{O}_V$-module E_V, où $V = \cup_n V_n$ est un voisinage strict de $]X^*[$ dans $]X[$ ([B1, 1.2.4, (i)]) muni d'un isomorphisme $F_K^* E_V \to E_V$. En notant alors j l'immersion ouverte $j : X^* \hookrightarrow X$, on déduit de ce module un $j^\dagger \mathcal{O}_{]X[_Y}$-module cohérent noté $E_Y^\dagger$ muni d'une action de Frobenius. On montre de manière analogue à [B1, 2.4] que cette construction est fonctorielle par rapport à E.

2.2. La construction précédente est fonctorielle par rapport à l'immersion fermée exacte $X \hookrightarrow Y$, i.e. étant donné un carré commutatif entre immersions fermées exactes :

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y \\ u\downarrow & & \downarrow v \\ X' & \hookrightarrow & Y' \end{array}$$

et un F-cristal faiblement non dégénéré localement libre de rang fini E' sur $X'/(\mathcal{V},\sigma)$, on a

$$v_K^* E'^\dagger_{Y'} \simeq (u^*_{\text{cris}} E')^\dagger_Y.$$

Il suffit par construction de vérifier ceci sur le tube fermé $[X]_{Y,|\pi|}$. Or le carré commutatif ci-dessus induit un u-p.d.-morphisme au sens de Berthelot

$$v : (X \hookrightarrow \mathcal{P}) \longrightarrow (X' \hookrightarrow \mathcal{P}'),$$

où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont respectivement les enveloppes à puissances divisées des immersions fermées $X \hookrightarrow Y$ et $X' \hookrightarrow Y'$. On en déduit ainsi l'isomorphisme

$$v^* E'_{\mathcal{P}'} \simeq u^*_{\text{cris}}(E')_{\mathcal{P}}.$$

L'assertion résulte alors aisément de la commutativité du carré :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{P}}' & \longrightarrow & \hat{\mathcal{P}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{[X']_{Y',|\pi|}} & \rightarrow & \mathcal{O}_{[X]_{Y,|\pi|}} \end{array}$$

Si l'on se donne enfin un autre carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \hookrightarrow & Y' \\ u' \downarrow & & \downarrow v' \\ X'' & \hookrightarrow & Y'' \end{array}$$

et un F-cristal faiblement non dégénéré localement libre de rang fini E'' sur $X''/(\mathcal{V}, \sigma)$, on montre que l'on a un isomorphisme canonique

$$(v'v)^*_K E''^{\dagger}_{Y''} \simeq ((u'u)^*_{\mathrm{cris}} E'')^{\dagger}_{Y}.$$

2.3. On suppose à présent que l'immersion fermée $X \hookrightarrow Y$ se factorise en une immersion fermée exacte $X \hookrightarrow Z$ suivie d'un morphisme étale $u : Z \to Y$. D'après 2.1, on peut alors associer à E un $j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_Z}$-module cohérent $E^\dagger_Z$. La flèche u étant étale sa restriction aux ouverts Z^* de Z et Y^* de Y l'est aussi et u est donc étale au voisinage X^*. D'après [B1, 1.3.7 et 2.1.10], u^*_K donne une équivalence de catégories entre les $j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_Y}$ et $j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_Z}$-modules cohérents. Il correspond ainsi à $E^\dagger_Z$ un unique $j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_Y}$-module cohérent $E^\dagger_{Y,u}$ (à unique isomorphisme près). On montre que ce dernier est en fait indépendant du choix de u : si l'on a une autre factorisation de $X \hookrightarrow Y$ en une immersion fermée exacte $X \hookrightarrow Z'$ suivie d'un morphisme étale $v : Z' \to Y$, on considère alors l'immersion

$$X \hookrightarrow Z'' := Z \times_Y Z',$$

qui est encore une immersion fermée exacte, celle-ci étant stable par changement de base ou produit fibré. On note $q : Z'' \to Z$ et $q' : Z'' \to Z'$ les projections canoniques tel qu'on ait $uq = vq'$. On note respectivement $E^\dagger_Z$, $E^\dagger_{Z'}$ et $E^\dagger_{Z''}$ les $j^\dagger\mathcal{O}_{]X[}$-modules cohérents construits par (2.1) et $E^\dagger_{Y,u}$ et $E^\dagger_{Y,v}$ les deux $j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_Y}$-modules cohérents induits par les équivalences de catégories u^*_K et v^*_K. Comme $uq = vq'$ est étale au voisinage de X^*, il induit une équivalence de catégories entre les $j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_Y}$ et $j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_{Z''}}$-modules cohérents. Il suffit donc de montrer que

$$(uq)^*_K E^\dagger_{Y,u} \simeq (vq')^*_K E^\dagger_{Y,v}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } (uq)^*_K E^\dagger_{Y,u} &\simeq {q_K}^* E^\dagger_Z \text{ par construction,} \\ &\simeq E^\dagger_{Z''} \simeq {q'_K}^* E^\dagger_{Z'} \text{ en utilisant 2.2,} \\ &\simeq (vq')^*_K E^\dagger_{Y,v}. \end{aligned}$$

Enfin cet isomorphisme est de manière analogue à 2.2 naturel. On notera ainsi $E_Y^\dagger$ le $j^\dagger \mathcal{O}_{]X[_Y}$-module cohérent obtenu dans un tel contexte. La construction est encore fonctorielle par rapport à E puisque l'identification pour deux factorisations de $X \hookrightarrow Y$ en $u : Z \to Y$ et $v : Z' \to Y$ de $E_{Y,u}^\dagger$ et $E_{Y,v}^\dagger$ est une équivalence de catégories.

2.4. La construction précédente est fonctorielle au sens suivant : supposons donné un diagramme commutatif d'immersions fermées exactes suivies de morphismes étales :

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & Z & \to & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ X' & \hookrightarrow & Z' & \to & Y' \end{array}$$

Soit de plus E' est un F-cristal faiblement non-dégénéré localement libre de rang fini sur $X'/(\mathcal{V}, \sigma)$, alors on a

$$h_K^* E'^\dagger_{Y'} \simeq (f_{\mathrm{cris}}^* E')_Y^\dagger.$$

Ceci résulte de la fonctorialité 2.2 étant donné les équivalences de catégories induites par u_K^* et u'^*_K où $u : Z \to Y$ et $u' : Z' \to Y'$ sont les morphismes étales factorisant les immersions. Enfin, comme en 2.2, on vérifie la compatibilité de cet isomorphisme par rapport à la donnée de tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \hookrightarrow & Z' & \to & Y' \\ f' \downarrow & & \downarrow g' & & \downarrow h' \\ X'' & \hookrightarrow & Z'' & \to & Y'' \end{array}$$

2.5. On suppose à présent que X se plonge dans un $\mathcal{V}$-schéma log-lisse Y. Soient $\underline{Y}_i$ et $\underline{X}_i$ des recouvrements étales de $\underline{Y}$ et $\underline{X}$ tels qu'on ait pour tout i un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_i & \hookrightarrow & Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{X} & \hookrightarrow & \underline{Y} \end{array}$$

On munit chaque $\underline{Y}_i$ (respectivement $\underline{X}_i$) de la log-structure image inverse de celle de Y (resp. X) par le morphisme $Y_i \to \underline{Y}$ (resp. $X_i \to \underline{X}$). Le recouvrement peut être choisi de telle sorte que l'immersion $X_i \hookrightarrow Y_i$ se factorise pour tout i en une immersion fermée exacte $X_i \hookrightarrow Z_i$ suivie d'un morphisme étale $u_i : Z_i \to Y_i$. Pour tout i et tout j, le schéma sous-jacent à $Y_{ij} := Y_i \times_Y Y_j$ est $\overline{\underline{Y_i \times_Y Y_j}}$ et la log-structure est l'image inverse de celle de Y_i (ou de celle de Y_j) par la projection canonique $Y_{ij} \to Y_i$ (respectivement $Y_{ij} \to Y_j$). On constitue de même le produit fibré $X_{ij} := X_i \times_X X_j$. L'immersion fermée $X_{ij} \hookrightarrow Z_{ij} := Z_i \times_Y Z_j$ est exacte et factorise l'immersion $X_{ij} \hookrightarrow Y_{ij}$. On a de plus le morphisme étale $(u_i \times u_j) : Z_{ij} \to Y_{ij}$. On note $E^\dagger_{Y_i}$ (respectivement $E^\dagger_{Y_j}$, $E^\dagger_{Y_{ij}}$) le $j^\dagger\mathcal{O}$-module cohérent associé par 1.3 à la restriction de E au site $X_i/\mathcal{V}$ (respectivement $X_j/\mathcal{V}$, $X_{ij}/\mathcal{V}$) et $p_i : Y_{ij} \to Y_i$ et $p_j : Y_{ij} \to Y_j$ les projections canoniques. On déduit alors par 2.4 du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X_{ij} & \hookrightarrow & Z_{ij} & \to & Y_{ij} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_i & \hookrightarrow & Z_i & \to & Y_i \end{array}$$

l'isomorphisme

$$p_i^* E^\dagger_{Z_i} \simeq E^\dagger_{Z_{ij}},$$

puis en échangeant i et j, on en déduit finalement

$$p_i^* E^\dagger_{Z_i} \simeq p_j^* E^\dagger_{Z_j}.$$

On vérifie enfin que ces isomorphismes vérifient la condition cocycle. La proposition 1.1 nous permet alors de conclure que les $j_i^\dagger\mathcal{O}_{]X_i[_{Y_i}}$-modules cohérents $E^\dagger_{Y_i}$ se recollent en un $j^\dagger\mathcal{O}_{]X[_Y}$-module cohérent $E^\dagger_Y$. Enfin cette construction est fonctorielle par rapport à E puisque la construction 2.3 ainsi que la descente 1.1 le sont.

2.6. La construction est fonctorielle par rapport à l'immersion $X \hookrightarrow Y$, i.e. si on a un carré commutatif entre immersions fermées :

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y \\ u\downarrow & & \downarrow v \\ X' & \hookrightarrow & Y' \end{array}$$

et un F-cristal faiblement non-dégénéré localement libre de rang fini E' sur $X'/(\mathcal{V},\sigma)$, on a

$$v_K^* E'^\dagger_{Y'} \simeq (u^*_{\text{cris}} E')^\dagger_Y.$$

D'après le théorème de descente, on peut se placer dans la situation locale-étale et donc supposer que l'immersion $X \hookrightarrow Y$ (respectivement $X' \hookrightarrow Y'$) se factorise en une immersion fermée exacte suivie d'un morphisme étale $Z \to Y$ (respectivement $Z' \to Y'$). Comme le morphisme $Z' \to Y'$ induit une équivalence de catégories on se ramène au cas où dans le carré (*) l'immersion $X' \hookrightarrow Y'$ est exacte. On peut alors décomposer le carré commutatif ci-dessus en une immersion fermée de X vers $X' \times_{Y'} Y$ et un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' \times_{Y'} Y & \hookrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \hookrightarrow & Y' \end{array}$$

On se ramène de cette façon à montrer la fonctorialité par rapport au carré (*) dans les deux cas suivants :

1) le carré est cartésien.

2) $Y' = Y$ et $X \to X'$ est une immersion fermée.

Dans le premier cas, l'assertion résulte alors clairement de 2.4. Dans le second cas, comme l'immersion $X' \hookrightarrow Y'$ est exacte, on montre qu'il en est de même de l'immersion $X \hookrightarrow X'$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & Z' & \to & Y' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \hookrightarrow & Z' & \to & Y' \end{array}$$

et l'assertion résulte encore de 2.4.

2.7. On se replace sous les hypothèses et notations de 2.5. Soit Y' le produit de Y par lui-même dans la catégorie des log-schémas fins et saturés. Comme ce produit est effectué au-dessus d'une log-structure triviale le schéma sous-jacent de Y' est $\underline{Y} \times_{\mathcal{V}} \underline{Y}$. Soient $p_1, p_2 : Y' \to Y$ les deux projections canoniques. On déduit alors d'après (2.6) de la commutativité du carré d'immersions fermées :

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow p_i \\ X & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

un isomorphisme de $j^\dagger \mathcal{O}_{]X[_{Y'}}$-modules cohérents

$$p_2^* \,{}_K E_Y^\dagger \simeq p_1^* \,{}_K E_Y^\dagger.$$

Comme $Y/\mathcal{V}$ est lisse, $\underline{Y}$ est lisse au voisinage de X^* et d'après [B1, remarque p. 2.16], l'isomorphisme précédent munit ainsi $E_Y^\dagger$ d'une structure d'isocristal sur $X^*/(K, \sigma)$ surconvergent le long de $X \setminus X^*$. On montre en utilisant la fonctorialité 2.6, et de manière analogue à [B1, 2.3.2], l'indépendance de ce dernier par rapport au choix du plongement Y et la fonctorialité de la contruction par rapport à tout morphisme de k-log-schémas $X' \to X$. On déduit d'autre part de la fonctorialité de la construction 2.5 par rapport à E que la construction ci-dessus l'est aussi. En particulier cette fonctorialité par rapport à E et X permet de munir l'isocristal $E_Y^\dagger$ d'une structure de F-isocristal surconvergent.

Nous noterons dans la suite de l'article $E \mapsto E^\dagger$ le foncteur défini ci-dessus de la catégorie des F-cristaux faiblement non-dégénérés localement libres de rang fini sur $X/(\mathcal{V}, \sigma)$ définis à isogénie près dans celle des F-isocristaux sur $X^*/(K, \sigma)$ surconvergent le long de $X \setminus X^*$. Nous allons à présent étudier ses propriétés.

3. Propriétés du foncteur $E \mapsto E^\dagger$.

PROPOSITION 3.1. — *Le foncteur $E \mapsto E^\dagger$ préserve le rang du cristal, commute aux images inverses et est stable par produit tensoriel et $\mathcal{H}om$ interne.*

Démonstration. — La vérification (laborieuse) de ces assertions est laissée en exercice.

PROPOSITION 3.2. — *Si X/k est un log-schéma fin, saturé et lisse alors le foncteur $E \mapsto E^\dagger$ est fidèle.*

Démonstration. — Nous aurons besoin pour démontrer la proposition de quelques lemmes. Le premier est une généralisation du résultat de [B3, 1.9].

LEMME 3.2.1. — *Soit X/k un schéma lisse, E un F-cristal non-dégénéré localement libre de rang fini et E_K le F-isocristal convergent associé. On a un isomorphisme canonique*

$$H^i_{\mathrm{conv}}(X/K, E_K) \simeq H^i_{\mathrm{cris}}(X/\mathcal{V}, E) \otimes K.$$

Démonstration. — Soient $X \hookrightarrow P$ une immersion fermée dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, $\mathcal{P}$ l'enveloppe à puissances divisées de cette immersion et $\hat{\mathcal{P}}$ sa complétion p-adique. Soit P_K, l'espace analytique rigide associé à P, $\mathrm{sp} : P_K \to P$, la flèche de spécialisation et $]X[_P := \mathrm{sp}^{-1}(X)$ ([B1, 0.2]). D'après [B3, 1.9], on a un morphisme

$$\mathrm{sp}_* \mathcal{O}_{]X[_P} \to \hat{\mathcal{P}} \otimes K$$

qui est compatible aux dérivations et induit ainsi un quasi-isomorphisme entre les complexes de de Rham. L'isomorphisme en cohomologie en résulte aussitôt d'après l'isomorphisme de comparaison de [BO, 7.24].

LEMME 3.2.2. — *On se place sous les hypothèses de la proposition 3.2 en supposant de plus que X est connexe. La flèche canonique*

$$H^0_{\mathrm{cris}}(X/\mathcal{V}, E) \to H^0_{\mathrm{cris}}(X^*/\mathcal{V}, E_{|X^*})$$

est injective.

Démonstration. — La question étant locale étale, on peut supposer que X se relève en un schéma formel $\mathcal{X}$ log-lisse sur $\mathcal{V}$. Dans ce cas X^*

se relève en $\mathcal{X}^*$, l'ouvert de $\mathcal{X}$ sur lequel la log-structure est triviale, lisse sur $\mathcal{V}$. D'autre part, par définition de la cohomologie (log-)cristalline et fonctorialité, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0_{\text{cris}}(X/\mathcal{V}, E) & \rightarrow & H^0_{\text{cris}}(X^*/\mathcal{V}, E_{|X^*}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\mathcal{X}, E_{\mathcal{X}}) & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{X}^*, E_{\mathcal{X}^*}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont injectives. Nous sommes ainsi ramenés à montrer que la flèche

$$\Gamma(\mathcal{X}, E_{\mathcal{X}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}^*, E_{\mathcal{X}^*})$$

est injective. Enfin comme la question est locale et E localement libre de rang fini, il suffit de montrer l'assertion sur les coefficients triviaux.

Pour montrer l'injectivité de la flèche

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}^*, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*}),$$

il suffit de travailler modulo p^n et comme modulo p^n cette flèche est un homomorphisme de W_n-modules plats, il est en fait suffisant de montrer l'injectivité de la flèche modulo p. Nous sommes ainsi ramenés à montrer l'injectivité de la flèche

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X^*, \mathcal{O}_{X^*}).$$

Comme X/k est fin, saturé et log-lisse, X^* est un ouvert dense de X. En effet la question est locale-étale en X et locale-étalement, il existe une flèche étale $X \rightarrow \operatorname{Spec} k[P]$ telle qu'on ait un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X^* & \rightarrow & \operatorname{Spec} k[P^{gp}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & \operatorname{Spec} k[P] \end{array}$$

où $\operatorname{Spec} k[P^{gp}]$ est un ouvert dense de $\operatorname{Spec} k[P]$. En particulier $\Gamma(X^*, \mathcal{O}_{X^*})$ s'injecte dans la somme directe des fibres du faisceau structural de X en les points génériques, d'où l'assertion.

Démonstration de la proposition 3.2. — Soient E un F-log-cristal faiblement non-dégénéré sur $X/\mathcal{V}$ et $E^\dagger$ le F-isocristal sur X^*/K surconvergent associé. Le foncteur $E \mapsto E^\dagger$ préservant les $\mathcal{H}om$ internes, il suffit de montrer qu'on a une injection

$$H^0_{\text{cris}}(X/\mathcal{V}, E) \otimes K \hookrightarrow H^0_{\text{rig}}(X^*/K, E^\dagger).$$

D'autre part, on peut supposer que X est connexe (quitte à décomposer celui-ci en l'union de ses composantes connexes et à prouver l'assertion sur chacune d'entre elles) et que X^* admet un point rationnel x (quitte à faire un changement de base par une extension de corps finie). Notons E_x (resp. $E_x^\dagger$) la section globale du cristal x^*E (resp. la fibre de l'isocristal $E^\dagger$ en x). Le morphisme d'adjonction $E \to x_*x^*E$ ainsi que la fonctorialité de la construction permettent de déduire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0_{\text{cris}}(X/\mathcal{V}, E) \otimes K & \to & E_x \otimes K \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0_{\text{rig}}(X^*/K, E^\dagger) & \to & E_x^\dagger \end{array}$$

Comme x est un point rationnel de X^*, on a $E_x \simeq (E|_{X^*})_x \simeq E_{Kx}$, où E_K est le F-isocristal convergent associé à $E|_{X^*}$ par [B1,2.4] et la fibre de ce dernier est la même que celle de $E^\dagger$. Nous sommes donc ramenés à montrer l'injectivité de la flèche horizontale supérieure. Or cette flèche se décompose de la manière suivante :

$$H^0_{\text{cris}}(X/\mathcal{V}, E) \otimes K \to H^0_{\text{cris}}(X^*/\mathcal{V}, E|_{X^*}) \otimes K \to E_x \otimes K$$

et la première flèche étant une injection d'après le lemme 3.2.2, on est donc ramené via l'isomorphisme 3.2.1 à montrer qu'on a une injection

$$H^0_{\text{conv}}(X^*/K, (E|_{X^*})_K) \to E_x \otimes K$$

ce qui résulte de [CLS, 1.1.2].

Le foncteur $E \mapsto E^\dagger$, comme c'est le cas en caractéristique 0, n'est cependant ni essentiellement surjectif ni plein comme le montre les exemples qui suivent.

Exemples 3.3.

(i) Considérons tout d'abord le F-isocristal de Dwork $\mathcal{L}_\pi$. C'est un F-isocristal surconvergent de rang 1 sur $\mathbf{A}^1/\mathbf{Q}_p(\pi)$, où π est une racine $p-1$-ième de $-p$. La connexion est donnée par $\nabla(\theta) = -\pi\theta dt$. Un changement de variable $u = 1/t$ en dehors de l'origine nous donne la connexion $\nabla(\theta) = (\pi/u)\theta \mathrm{dlog} u$. Si on munit $\mathbf{P}^1$ de la log-structure associée au point à l'infini, on voit donc aisément que $\mathcal{L}_\pi$ ne provient pas d'un F-log-cristal faiblement non-dégénéré E puisque π/u n'est pas défini en 0.

Cela montre que le foncteur $E \mapsto E^\dagger$ n'est pas essentiellement surjectif. En général, on dira qu'un F-isocristal surconvergent est *régulier à l'infini* s'il est dans l'image essentielle de notre foncteur.

(ii) On munit maintenant $\mathbf{A}^1$ de la log-structure associée à l'origine et on regarde le log-cristal E de rang 1 dont la connexion est définie par $\nabla(\theta) = \theta \mathrm{dlog} t$. Le log-cristal F^*E est donc muni de la connexion

$\nabla(\theta^{(p)}) = p\theta^{(p)}\mathrm{dlog}t$. On munit E d'un Frobenius en posant $\phi(\theta^{(p)}) = t^{p-1}\theta$. Le F-isocristal surconvergent $E^\dagger$ est isomorphe au F-isocristal surconvergent trivial $\mathcal{O}^\dagger$ sur $\mathbf{A}^1\backslash\{0\}$ (on envoie θ sur $1/t$). Mais on a $H^0_{\mathrm{log-cris}}((\mathbf{A}^1,0),E) = 0$ si bien que E n'est pas isomorphe au F-log-cristal trivial $\mathcal{O}$.

On voit donc que le foncteur $E \mapsto E^\dagger$ n'est pas pleinement fidèle. On voit aussi qu'en général, $H^n_{\mathrm{cris}}(X,E) \otimes K \neq H^n_{\mathrm{rig}}(X^*,E^\dagger)$.

(iii) On munit toujours $\mathbf{A}^1$ de la log-structure associée à l'origine et on considère le F-log-cristal de Kummer $\mathcal{K}$. C'est encore un log-cristal de rang 1 et la connexion est définie par $\nabla(\theta) = (1/p-1)\theta\mathrm{dlog}t$. Le log-cristal F^*E est donc muni de la connexion $\nabla(\theta^{(p)}) = (p/p-1)\theta^{(p)}\mathrm{dlog}t$ et le Frobenius est donné par $\phi(\theta^{(p)}) = t\theta$. Bien sûr, $\mathcal{K}^\dagger$ n'est autre que le F-isocristal de Kummer sur $\mathbf{A}^1\backslash\{0\}$ et on a, $H^0_{\mathrm{log-cris}}((\mathbf{A}^1,0),\mathcal{K}) = H^0_{rig}(\mathbf{A}^1\backslash\{0\},\mathcal{K}^\dagger)$.

On peut remarquer que le log-cristal de Kummer est bien faiblement non-dégénéré mais que ce n'est pas un log-cristal non-dégénéré. Cette condition serait bien trop restrictive pour obtenir les F-isocristaux de la géométrie classique. En fait, un F-log-cristal unité non-trivial ne sera jamais non-dégénéré à moins que ce ne soit un vrai cristal. Même chose pour les F-log-cristaux de rang 1.

(iv) On considère maintenant un F-log-cristal de rang 2 sur $(\mathbf{A}^1,0)$. La connexion est définie par $\nabla(\theta_1) = \theta_2\mathrm{dlog}t$ et $\nabla(\theta_2) = 0$. Le log-cristal F^*E est donc muni de la connexion $\nabla(\theta_1^{(p)}) = p\theta_2^{(p)}\mathrm{dlog}t$ et $\nabla(\theta_2^{(p)}) = 0$. On munit E d'un Frobenius en posant $\phi(\theta_1^{(p)}) = p\theta_1$ et $\phi(\theta_2^{(p)}) = \theta_2$.

On voit donc qu'il existe quand même des F-log-cristaux non-dégénérés qui ne sont pas de vrais cristaux. En fait, on peut conjecturer que si X/k est propre et log-lisse, le foncteur $E \mapsto E^\dagger$ induit une équivalence de catégorie entre les F-log-cristaux unipotents non-dégénérés et les F-isocristaux surconvergents unipotents. En utilisant la même méthode que [CLS, 2.4], ce résultat serait en fait une conséquence d'une autre conjecture que nous ferons plus tard (4.4) et que nous prouverons dans une situation géométrique favorable (Proposition 4.2).

4. Comparaison des cohomologies.

Nous étudions dans cette dernière partie le cas où ces deux cohomologies se ramènent à une cohomologie de de Rham et où la log-structure est celle induite par un diviseur à croisements normaux (cf. [BC]).

4.1. Soient $\mathcal{X}/V$ un schéma propre et lisse, $\mathcal{Z}$ un diviseur à croisements normaux de $\mathcal{X}$ relativement à $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{Z}$ soit une union finie de sous-schémas fermés $\mathcal{Z}_i$ de $\mathcal{X}$ de codimension 1, à fibres géométriquement connexes et $\mathcal{X}^* := X \setminus Z$. On note respectivement X, Z et X^* leur fibre spéciale et $\mathcal{X}_K$, $\mathcal{Z}_K$ et $\mathcal{X}_K^*$ leur fibre générique. Notons $\hat{\mathcal{X}}$ le complété π-adique de $\mathcal{X}$. Enfin, on notera $X^{\#}$(resp. $\mathcal{X}_K^{\#}$), le log-schéma de schéma sous-jacent X (resp. $\mathcal{X}_K$) et dont la log-structure est celle induite par Z (resp. $\mathcal{Z}_K$). Celui-ci est donc propre et log-lisse sur $\mathcal{V}$ (resp. K). Soient E un F-log-cristal faiblement non-dégénéré localement libre de rang fini sur $X^{\#}/(\mathcal{V},\sigma)$ et $E^{\dagger}$ le F-isocristal sur $X^*/(K,\sigma)$ surconvergent le long de Z associé. Le log-cristal E correspond à la donnée d'un $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{X}}}$-module $\mathcal{E}$ muni d'une connexion à pôles logarithmiques (satisfaisant les conditions d'intégrabilité usuelles). On montre de manière analogue à [O, 1.4] que cette donnée est équivalente à celle d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module à connexion logarithmique que nous noterons encore $\mathcal{E}$. On notera $\mathcal{E}\otimes\omega^{\cdot}_{\mathcal{X}}/\mathcal{V}$ le complexe de de Rham associé et $H^*_{\log-dR}(\mathcal{X},\mathcal{E})$ sa cohomologie. Comme $\mathcal{E}\otimes\omega^{\cdot}_{\mathcal{X}/\mathcal{V}}$ est un complexe de modules cohérents, on peut effectuer le calcul de la cohomologie pour la topologie de Zariski. On a alors un isomorphisme

$$H^*_{\mathrm{cris}}(X^{\#}/\mathcal{V},E)\otimes K \simeq H^*_{\log-dR}(\mathcal{X},\mathcal{E})\otimes K \simeq H^*_{\log-dR}(\mathcal{X}_K,\mathcal{E}_K). \tag{4.1.1}$$

PROPOSITION 4.2.

(i) *On a une suite exacte longue de cohomologie*

$$\ldots \to H^i_{\log-dR,\mathcal{Z}_K}(\mathcal{X}_K,\mathcal{E}_K) \to H^i_{\mathrm{cris}}(X^{\#}/\mathcal{V},E)\otimes K \to H^i_{\mathrm{rig}}(X^*/K,E^{\dagger}) \to \ldots$$

(ii) *Si de plus les résidus de la connexion de $\mathcal{E}_K$ le long des $\mathcal{Z}_{iK}$ n'admettent aucun entier strictement positif pour valeurs propres (cf. [D1, II, 3.8.4]) alors on a un isomorphisme en cohomologie*

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X^*/K,E^{\dagger}) \simeq H^i_{\mathrm{cris}}(X^{\#}/\mathcal{V},E)\otimes K. \tag{4.2.1}$$

Démonstration. — Comme le log-cristal est muni d'une structure de Frobenius les exposants de monodromie du module à connexion $(\mathcal{E}_K,\nabla_K)$ le long des branches de $\mathcal{Z}_K$ sont des nombres algébriques et donc non-Liouville (voir par exemple [G, 2.3] ou [B2, p. 271]). De même, la donnée du Frobenius assure que l'hypothèse de surconvergence $(SC)_G$ de Baldassarri-Chiarellotto sur $E^{\dagger}$ ([BC, p. 15]) est automatiquement vérifiée. On en déduit d'après [BC, 2.6], un isomorphisme

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X^*/K,E^{\dagger}) \simeq H^i_{dR}(\mathcal{X}^*{}_K,\mathcal{E}_K|_{\mathcal{X}^*{}_K}). \tag{4.2.2}$$

L'assertion (i) résulte alors de la suite d'excision en cohomologie de de Rham via les identifications (4.1.1) et (4.2.2).

Sous l'hypothèse supplémentaire de (ii), on a alors d'après [D1, 3.16] et (4.1.1), un isomorphisme

$$H^i_{\mathrm{cris}}(X^\#/\mathcal{V}, E) \otimes K \simeq H^i_{dR}(\mathcal{X}^*{}_K, \mathcal{E}_K|_{\mathcal{X}^*{}_K})$$

qui par composition avec l'isomorphisme (4.2.1) donne l'isomorphisme souhaité.

Remarque 4.3. — L'hypothèses 4.2, (ii) est évidemment vérifiée pour le log-cristal trivial sur $X/\mathcal{V}$ et on en déduit un isomorphisme

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X^*/K) \simeq H^i_{\mathrm{cris}}(X^\#/\mathcal{V}) \otimes K.$$

On aurait également pu déduire ce résultat de [Ts, 3.9.1].

Quitte à définir le résidu d'un log-cristal en toute généralité, il semble raisonnable de faire la conjecture suivante (version "cristalline" de [D1, 3.14]).

CONJECTURE 4.4. — *Soit X/k un schéma propre et log-lisse. Soient E un F-log-cristal faiblement non-dégénéré localement libre de rang fini sur $X/(\mathcal{V}, \sigma)$ et $E^\dagger$ le F-isocristal sur $X^*/(K, \sigma)$ surconvergent le long de $X \setminus X^*$ associé. On suppose que les résidus de E le long de $X \setminus X^*$ n'admettent aucun entier positif pour valeur propre. Alors*

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X^*/K, E^\dagger) \simeq H^i_{\mathrm{cris}}(X/\mathcal{V}, E) \otimes K.$$

Nous reviendrons dans un article ultérieur sur cette question.

BIBLIOGRAPHIE

[BG] S. BOSCH et V. GÖRTZ, Coherent modules and their descent on relative rigid spaces, J. reine angew. Math., 495 (1998), 119–134.

[BL] S. BOSCH et W. LÜTKEBOHMERT, Formal and rigid geometry II, Math. Ann., 296 (1993), 403–429.

[BO] P. BERTHELOT et A. OGUS, Notes on crystalline cohomology, Mathematical Notes 21, Princeton University Press (1978).

[Ba] F. BALDASSARRI, Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p-adique rigide à coefficients dans un module différentiel, Math. Ann., 280 (1988), 417–439.

[B1] P. BERTHELOT, Cohomologie rigide et cohomologie à support propre, Première partie (version provisoire 1991), Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).

[B2] P. BERTHELOT, $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 29 (1996), 185–272.

[B3] P. BERTHELOT, Finitude et pureté en cohomologie rigide, Invent. Math., 128 (1997), 239–377.

[B4] P. BERTHELOT, Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I (1997), 493–498.

[BC] F. BALDASSARRI et B. CHIARELLOTTO, Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients, in Barsotti Symposium in algebraic geometry, Perpective in Math. 15, Academic Press (1994).

[CLS] B. CHIARELLOTTO et B. LE STUM, F-isocristaux unipotents, Comp. Math., 116 (1999), 81–110.

[D1] P. DELIGNE, Équations différentielles à points singuliers réguliers, L.N. in Math. 163, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1970).

[D2] P. DELIGNE, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in Galois Groups over $\mathbf{Q}$, MSRI Publ. 16, Springer, New York, 1989.

[F] G. FALTINGS, F-isocrystals on open varieties. Results and conjectures. The Grothendieck Festschrift, Collect. Artic. in Honor of the 60th Birthday of A. Grothendieck. Vol. II, Prog. Math., 87 (1990), 219–248.

[G] F. GACHET, Structure fuchsienne pour des modules différentiels sur une polycouronne ultramétrique, Thèse de Doctorat (1997).

[K] K. KATO, Logarithmic structures of Fontaine-Illusie. Algebraic analysis, geometry, and number theory, Proc. JAMI Inaugur. Conf., Baltimore/MD (USA) 1988, 191–224 (1989).

[O] A. OGUS, F-isocrystals and de Rham cohomology II-Convergent isocrystals, Duke Math. J., Vol. 51, N° 4 (1984).

[T] F. TRIHAN, Fonction L de Hasse-Weil d'une variété abélienne sur un corps de fonction algébrique à réduction semi-stable, preprint de l'Université de Tokyo, UTMS 2000-59.

[Ts] N. TSUZUKI, On the Gysin isomorphism of rigid cohomology, preprint (1998).

Manuscrit reçu le 25 octobre 1999,
révisé le 6 septembre 2000,
accepté le 1er mars 2001.

Bernard LE STUM,
Université de Rennes I
IRMAR, Campus de Beaulieu
35042 Rennes (France).
lestum@univ-rennes1.fr

Fabien TRIHAN,
University of Tokyo
Graduate School of Mathematical Sciences
3-8-1 Komaba, Meguro
Tokyo 153–8914 (Japon).
trihan@ms.u-tokyo.ac.jp