ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JOËL BRIANÇON
MICHEL GRANGER
PHILIPPE MAISONOBE
M. MINICONI

Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : Cas non dégénéré

Annales de l'institut Fourier, tome 39, n° 3 (1989), p. 553-610
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_553_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 3 (1989), 553-610

ALGORITHME DE CALCUL DU POLYNÔME DE BERNSTEIN : CAS NON DÉGÉNÉRÉ

par J. BRIANÇON, M. GRANGER, Ph. MAISONOBE, M. MINICONI

Introduction.

Étant donné un germe de fonction analytique $f \in \mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ on sait qu'il existe un polynôme non nul $e(s) \in \mathbb{C}[s]$ et un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{O}$, dépendant polynomialement de s tels que :

$$P(s)f^{s+1} = e(s)f^s.$$

On appelle polynôme de Bernstein-Sato (ou b-fonction) le générateur unitaire de l'idéal des $e \in \mathbb{C}[s]$ qui satisfont à cette propriété. L'existence de $b(s)$ a été démontrée par Bernstein [1] dans le cas algébrique et par Björk [2] dans le cas général. Il est facile de voir que, dès que $f(0) = 0$, b est de la forme $b = (s+1)\tilde{b}(s)$.

Les zéros de $\tilde{b}$ sont rationnels : ceci est démontré par B. Malgrange, pour f à singularité isolée dans [19], en mettant en évidence un lien avec la monodromie de f (les valeurs propres de la monodromie sont les $e^{-2i\pi\alpha}$, $\tilde{b}(\alpha) = 0$), et par Kashiwara [11] dans le cas général en utilisant la résolution des singularités. Malgrange généralise ensuite son résultat aux singularités non isolées dans [20], Varchenko [26] interprète les zéros de $\tilde{b}$ à l'aide d'une filtration voisine de la filtration de Hodge asymptotique.

Mots–clés : Polynôme de Bernstein – Singularités non dégénérées – Système de Gauss-Manin – $\mathcal{D}$-modules.
Classification A.M.S. : 14B05 – 32B30.

Ces résultats n'épuisent pas le problème de fournir un calcul explicite de la b-fonction. Cette question a été abordée par plusieurs auteurs : T. Yano [29] donne des procédés généraux qui lui permettent de calculer un grand nombre d'exemples. Kato dans [13] [14] donne deux exemples de calculs complets pour la déformation à μ-constant de $x^a + y^b$ lorsque $(a,b) = (5,7)$ et $(4,9)$. Plus récemment P. Cassou-Noguès a utilisé des calculs de «pôles d'intégrales» pour mettre en évidence certaines racines de la b-fonction générique de

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i^{a_i}, a_i \quad \text{deux à deux premiers entre deux [7], [8], [9].}$$

L'objet de ce travail est d'étudier la b-fonction d'une singularité non dégénérée par rapport à son polygone de Newton Γ. Nous donnons un algorithme pour calculer explicitement $b(s)$ (cf. B.3) ainsi qu'un opérateur $P(s)$ intervenant dans la relation fonctionnelle. Nous précisons cet algorithme dans le cas particulier des singularités semi-quasi-homogènes, c'est-à-dire obtenue par petite déformation à nombre de Milnor μ constant d'un polynôme quasi-homogène f_1 à singularité isolée en 0. Dans le cas $n = 2$ nous en déduisons la valeur de la b-fonction sur un ouvert générique de la strate à μ-constant de la déformation semi-universelle de f_1. Ce résultat a été retrouvé par M. Saito dans [23].

Le calcul explicite de la b-fonction est très lié à la connaissance de l'annulateur de f^s dans $\mathcal{D}[s]$ et plus particulièrement à celle d'un bon opérateur (au sens de [11]) annulant f^s. Dans le paragraphe A nous montrons comment la connaissance du degré en s d'un tel opérateur permet (via l'algorithme de division par l'idéal jacobien $J(f)$ de f) de calculer explicitement la b-fonction d'un germe à singularité isolée. Cela revient à expliciter une construction de Malgrange (cf.[19]). On note $\mathcal{D}[s]$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}$, dépendant polynomialement de s. Soit $M = \mathcal{D}[s]f^s$ le sous $\mathcal{D}[s]$-module de $\mathcal{O}\left[\frac{1}{f}, s\right]f^s$ engendré par f^s. On peut munir $\mathcal{O}\left[\frac{1}{f}, s\right]f^s$ d'une structure de $\mathcal{D}_{x,t}$-module pour laquelle s s'identifie à $-\frac{d}{dt}t$ ($\mathcal{D}_{x,t}$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n, t\}$).

Par définition $\tilde{b}$ est le polynôme minimal de l'action de s sur le $\mathcal{D}$-module $L = (s+1)\ \dfrac{\mathcal{D}[s]f^s}{\mathcal{D}[s]f^{s+1}} \cong \dfrac{\mathcal{D}[s]f^s}{\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\mathcal{D}[s]f^s}$

et on peut montrer que c'est en fait le polynôme minimal de l'action de s sur sa cohomologie de de Rham :

$$H^n(L) = L / \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, L$$

qui est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Soient $\xi_i = s(s-1)\ldots(s-i+1)f^{s-i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^i f^s$ et E un supplémentaire de l'idéal jacobien $J(f)$ dans $\mathcal{O}$. Nous donnons une décomposition $\mathcal{D}_{x,t}f^s = \sum\limits_{i\geq 0}\mathcal{D}\xi_i = \mathcal{D}J(f)f^s \oplus (\bigoplus\limits_{i\geq 0} DE\xi_i)$ où DE désigne l'ensemble des opérateurs différentiels à coefficients dans E pour l'écriture «à droite» $\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{N}^n} D^\alpha C_\alpha$.

Le passage à H^n s'identifie à la prise du terme constant à droite : $H^n(\mathcal{D}_{x,t}f) = J(f)f^s \oplus (\bigoplus\limits_{i\geq 0} E\xi_i)$ et on montre alors que les sous-espaces $H^n(\mathcal{D}[s]f^s)$ et $H^n\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\mathcal{D}[s]f^s\right)$ s'identifient à $J(f)f^s \oplus Z'$ et $J(f)f^s \oplus Z$ où $Z \subset Z'$ sont des sous-espaces de dimension finie de $\bigoplus\limits_{i\geq 0} E\xi_i$. On construit ainsi une action de s sur $Z'/Z \cong H^n(L)$ dont $\tilde{b}$ est le polynôme minimal. Cette action peut être calculée de façon effective si on connait un bon opérateur annulant f^s.

Dans le paragraphe B, nous considérons une singularité non dégénérée par rapport à son polygone de Newton. Nous introduisons à partir de la filtration de Newton ρ sur $\mathcal{O}$, une filtration naturelle ρ^* sur $\mathcal{D}_{x,t}f^s$ telle que $\rho^*(u\xi_i) = \rho(ux_1\ldots x_n) - i$ si $u \in \mathcal{O}$. Les deux idées essentielles sont alors les suivantes :

– L'action de s respecte la filtration ρ^* et on dispose en adaptant un théorème de Kouchnirenko ([11]) d'un théorème de division adapté à cette filtration. Ce théorème de division est en général faux pour la filtration de Newton ρ, cela explique l'utilisation de ρ^*.

– L'action d'opérateurs de la forme $(s + \rho - \chi_F)$, où χ_F est le champ d'Euler relatif à la face F de dimension maximale de Γ, permet d'augmenter le poids ρ^*. On construit ainsi une suite de bons opérateurs S_ℓ de degrés croissants ℓ tels que $S_\ell f^{s+1} = (s+1)H_\ell$, avec $H_\ell \in \mathcal{D}[s]f^s$ de poids croissants ℓ et finalement on trouve S'_ℓ tel que $S'_\ell f^{s+1} = 0$, car $H_L \in \mathcal{D}J(f)f^s$.

On peut alors calculer explicitement Z' et Z, puis l'action de s sur Z'/Z en fonction de $H_1, \dots, H_{L-1}$. Cette action respecte la filtration induite par ρ^* et $s+p$ est nilpotent de degré de nilpotence $\gamma(p)$ sur le p^{ième} terme du gradué associé à Z'_p/Z_p. On a alors le résultat suivant :

$$\tilde{b}(s) = \Pi(s+p)^{\gamma(p)}.$$

Notons que si $\gamma(p) \neq 0$, alors $p \geq \rho^*(1)$ et $(p + \mathbb{N}) \cap \Pi^* \neq \emptyset$ où Π^* est l'ensemble des poids des termes non nuls du gradué de E pour ρ^*. Nous montrons enfin que notre algorithme convenablement précisé permet de calculer un opérateur $P(s)$ réalisant l'équation fonctionnelle.

Dans le paragraphe C, nous montrons ce qui se passe dans le cas quasi-homogène. On peut utiliser la filtration usuelle ρ et filtrer $\mathcal{D}_{x,t}f^s$ de façon que $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f^s$ ait le poids négatif $-\alpha_i = -\rho(x_i)$.

On retrouve en particulier le fait que $\tilde{b}$ n'a que des racines simples.

Les sections B.4 et C.4 sont des sections d'exemples et d'applications de notre méthode. En guise d'illustration, nous calculons en particulier le polynôme de Bernstein des singularités

$$x_1^7 + x_2^7 + tx_1^4x_2^4 \quad \text{et} \quad x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^n + x_2^n + x_3^n \quad \text{avec } n \geq 7$$

respectivement semi-quasi homogène et non dégénérée.

Nous montrons aussi (C.4.2) comment calculer le polynôme de Bernstein générique en dimension 2 :

Soit $F = f_t(x) = f(x) + \sum t_e e(x)$ la déformation semi-universelle à μ constant d'un polynôme quasi-homogène f. On peut définir un polynôme de Bernstein $B(s)$ pour le polynôme F à coefficients dans $\mathbb{C}\{\underline{t}\}[t^{-1}]$. Il suffit de reprendre l'algorithme précédent, en particulier la construction d'opérateurs S_ℓ, H_ℓ. Pour $t \in \Omega$ ouvert de Zariski convenable les S_ℓ, H_ℓ se spécialisent sur les objets analogues relatifs à f_t et on trouve $B = b_{f_{\underline{t}}}$. Lorsque $n = 2$ nous en déduisons une expression explicite de la b-fonction générique en fonction de la dimension des espaces E_p.

Cet article est une version remaniée des deux prépublications [4] et [5].

A. PRÉLIMINAIRES

Dans ce paragraphe, on se donne $f \in \mathcal{O}$ tel que $f(0) = 0$.

On suppose que f est à singularité isolée. Donc si $J(f) = (f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n})$ est l'idéal jacobien, il existe un entier k tel que

$$\mathfrak{M}^k \subset J(f),$$

où $\mathfrak{M}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.

En suivant B. Malgrange, munissons $\mathcal{O}\left[\frac{1}{f}, s\right] f^s$ d'une stucture de $\mathcal{D}_{x,t}$-module en posant [19] :

$$\begin{aligned} &tg(s)f^s = g(s+1)f^{s+1} \\ &\frac{d}{dt}\, g(s)f^s = -\frac{1}{t}\,(s+1)g(s)f^s = -sg(s-1)f^{s-1}. \end{aligned}$$

Ainsi la multiplication par s coïncide avec l'action de $-\frac{d}{dt} \cdot t$.

A.1. Proposition de décomposition.

A.1.1. *Notation.* — $\xi_i = s(s-1)\ldots(s-i+1)f^{s-i} = (-1)^i \left(\frac{d}{dt}\right)^i f^s$ pour $i \in \mathbb{N}$.

A.1.2. *Remarque.* — $\mathcal{D}_{x,t} f^s = \sum_{i\geq 0} \mathcal{D}\xi_i = \bigoplus_{i\geq 0} \mathcal{O}\xi_i$.

Passer par les identités :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\xi_i = f'_{x_j}\xi_{i+1} \qquad t\xi_i = i\xi_{i-1} + f\xi_i$$

et le fait que $\mathcal{O}\left[\frac{1}{f}, s\right] f^s$ n'a pas de $\mathcal{O}[s]$-torsion.

A.1.3. *Notations.* — E désignera un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}$, de dimension μ, isomorphe par projection à $\frac{\mathcal{O}}{J(f)}$.

D désignera le sous-anneau de $\mathcal{D}$ formé par les opérateurs à coefficients constants.

DE désignera le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ engendré par les $\{\partial^\alpha e;\ e \in E\}$.

A.1.4. Proposition de décomposition.

$$\mathcal{D}_{x,t}f^s = \mathcal{D}J(f)f^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DE\xi_i).$$

Preuve. — $\mathcal{D}J(f)$ représente l'idéal à gauche de $\mathcal{D}$ engendré par $J(f)$. Montrons l'unicité de l'écriture et supposons pour ce faire :

$$v_0 f^s + \sum_{i=0}^{N} u_i\xi_i = 0, \quad \text{où } v_0 \in \mathcal{D}J(f)f^s \text{ et } u_i \in DE.$$

Si $N = 0$, $v_0 + u_0$ appartient à l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de f^s, donc après [19] et [29], à l'idéal à gauche de $\mathcal{D}$ engendré par les opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f'_{x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} f'_{x_j}.$$

D'où $u_0 \in DE \cap \mathcal{D}J(f)$ et $u_0 = 0$, puis $v_0 f^s = 0$.

Pour $N > 0$, en substituant $s = 0$, on trouve :

$$(v_0 + u_0)(1) = 0$$

donc $v_0 + u_0$ s'écrit :

$$(v_0 + u_0) = \sum v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Après simplification par s, nous obtenons :

$$(\sum v_j f'_{x_j} + u_1)f^{s-1} + u_2 \frac{(s-1)!}{(s-2)!} f^{s-2} + \ldots + u_N \frac{(s-1)!}{(s-N)!} f^{s-N} = 0.$$

La substitution $s+1$ à s permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_N = 0, \text{ donc}$$
$$(v_0 + u_0)f^s = 0 \text{ et } v_0 f^s = u_0 f^s = 0.$$

Pour montrer l'existence de la décomposition, il suffit d'après la remarque A.1.2 de le faire pour les éléments de la forme $u\xi_i$, où $u \in \mathcal{O}$.

La remarque de réécriture suivante et une récurrence sur i terminent la preuve.

A.1.5. *Remarque de réécriture.* — Soit $u \in \mathcal{O}$, $\exists v \in E$ unique et $\lambda_j \in \mathcal{O}$ tel que : $u = v + \sum \lambda_j f'_{x_j}$. On a alors

$$u\xi_i = v\xi_i - \sum \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_j} \xi_{i-1} + \sum \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda_j \xi_{i-1}.$$

A.2. Z', Z et le polynôme de Bernstein.

A.2.1. *L'application c «prise du terme constant à droite».*

Il s'agit de l'application linéaire surjective :

$$c: \ \mathcal{D}_{x,t} f^s = \mathcal{D}J(f) f^s \oplus (\bigoplus_{i \geq 0} DE\xi_i) \longrightarrow \bigoplus_{i \geq 0} E\xi_i$$

définie par :

$$\begin{array}{ll} c(\mathcal{D}J(f)f^s) = 0 & \\ c(\partial^\alpha e\xi_i) = 0 & \text{pour } \mid \alpha \mid > 0 \text{ et } e \in E \\ c(e\xi_i) = e\xi_i & \text{pour } e \in E. \end{array}$$

A.2.2. *Z' et Z.*

A partir de l'inclusion $\mathcal{D}[s]f^s \subset \mathcal{D}_{x,t}f^s$, on peut définir

$$\begin{array}{l} Z' = c(\mathcal{D}[s]f^s) \\ Z = \{c(U)/U \in \mathcal{D}[s]f^s \text{ et } (s+1)U \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}\} \subset Z'. \end{array}$$

On remarque que

$$Z = c\Big(\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{-1} \mathcal{D}[s]f^s\Big)$$

et, divisant par $s+1$:

$$Z = \{c(U)/U \in \mathcal{D}_{x,t}f^s \text{ et } \frac{d}{dt}U \in \mathcal{D}[s]f^s\}.$$

On a ainsi le diagramme :

$$
\begin{array}{ccccc}
\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\mathcal{D}[s]f^s & \to & \mathcal{D}[s]f^s & \to & \mathcal{D}_{x,t}f^s = \mathcal{D}J(f)f^s \oplus (\bigoplus\limits_{i\geq 0} DE\xi_i) \\
\downarrow c & & \downarrow c & & \downarrow c \\
Z & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{i\geq 0} E\xi_i
\end{array}
$$

A.2.3 *Action de s.*

Remarquons d'abord que si $U \in \mathcal{D}_{x,t}f^s$ est tel que $c(U) = 0$, alors $c(sU) \in Z$. On obtient alors une action de s sur les quotients $\dfrac{Z'}{Z}$ et $\dfrac{\bigoplus\limits_{i\geq 0} E\xi_i}{Z}$ en posant $s(c(U)) = c(sU)$.

En fait, par une formule analogue on définit aussi une action de s sur $(\bigoplus\limits_{i\geq 0} E\xi_i) \oplus J(f)f^s$.

A.2.4. Proposition. — *Si $b(s) = (s+1)\,\tilde{b}(s)$ désigne le polynôme de Bernstein de f, $\tilde{b}(s)$ est le polynôme minimal de l'action de s sur $\dfrac{Z'}{Z}$.*

Preuve. — Les points essentiels de cette preuve sont déjà contenus dans celle du théorème 5.4 de [19]. L'existence du polynôme de Bernstein implique la finitude comme $\mathcal{D}$-module de

$$L = (s+1)\ \frac{\mathcal{D}[s]f^s}{\mathcal{D}[s]f^{s+1}}.$$

L étant supporté par l'origine, on déduit du théorème de structure des $\mathcal{D}$-modules supportés par l'origine que $\tilde{b}(s)$ est le polynôme minimal de l'action de s sur

$$H^n(L) = \frac{L}{\sum \dfrac{\partial}{\partial x_i} L}.$$

H^* désigne les groupes de cohomologie de De Rham d'un $\mathcal{D}$-module; rappelons que le foncteur $H^n(*)$ est exact sur les $\mathcal{D}$-modules supportés par l'origine.

Il reste à identifier $H^n(L)$ à $\dfrac{Z'}{Z}$. on a tout d'abord :

$$L \cong \frac{\mathcal{D}[s]f^s}{\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\mathcal{D}[s]f^s}.$$

L et $\dfrac{\mathcal{D}_{x,t}f^s}{\mathcal{D}[s]f^s}$ étant supportés par l'origine, on a de plus l'isomorphisme :

$$H^n(L) \cong \frac{H^n(\mathcal{D}[s]f^s)}{H^n\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\mathcal{D}[s]f^s\right)}$$

et les injections :

$$H^n\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\mathcal{D}[s]f^s\right) \longrightarrow H^n(\mathcal{D}[s]f^s) \longrightarrow H^n(\mathcal{D}_{x,t}f^s).$$

Mais

$$H^n(\mathcal{D}_{x,t}f^s) = \frac{\mathcal{D}J(f)f^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DE\xi_i)}{\sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathcal{D}J(f)f^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} DE\xi_i)\right)} \cong J(f)f^s \oplus (\bigoplus_{i\geq 0} E\xi_i).$$

Comme les images par les injections de $H^n\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\mathcal{D}[s]f^s\right)$ et $H^n(\mathcal{D}[s]f^s)$ dans $H^n(\mathcal{D}_{x,t}f^s)$ s'identifient à $J(f)f^s \oplus Z$ et $J(f)f^s \oplus Z'$, on obtient

$$H^n(L) \cong \frac{Z'}{Z}.$$

A.2.5. *Remarques.* — D'après [19], $H^n(\mathcal{D}_{x,t}f^s)$ s'identifie au *système* de Gauß-Manin au sens de [21]. $\tilde{G}^0$, le réseau de Brieskorn saturé y est par définition l'image de $\mathcal{D}[s]f^s$. Il s'identifie donc à $J(f) \oplus Z'$; $\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\tilde{G}^0$ s'identifie alors à $J(f)f^s \oplus Z$. Donc

$$\frac{Z'}{Z} \cong \frac{\tilde{G}^0}{\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}\tilde{G}^0}.$$

Mais nous ne continuerons pas dans cette direction, voir le paragraphe 6 de [4].

A.2.6. *Détermination de Z à partir de Z'.*

Soit η l'injection $\mathbb{C}$-linéaire $\oplus E\xi_i \xrightarrow{\eta} \oplus E\xi_i$ définie par $\eta(\xi_i) = \xi_{i+1}$. A partir de la définition de Z et de Z' :

$$Z' = E\xi_0 \oplus \eta(Z).$$

A.3. Utilisation d'un bon opérateur annulant f^s.

A.3.1. DÉFINITION. — *On dira qu'un élément de $\mathcal{D}[s]f^s$ est un bon opérateur d'ordre ℓ, s'il s'écrit :*

$$s^\ell + A_1 s^{\ell-1} + \ldots + A_\ell,$$

où A_i appartient à $\mathcal{D}$ et a un degré de dérivation, $\deg(A_i)$, *inférieur ou égal à i.*

Dans [11], Kashiwara montre l'existence d'un bon opérateur annulant f^s. Cela entraîne la finitude comme $\mathcal{D}$-module de $\mathcal{D}[S]f^s$. Mais aussi :

A.3.2. PROPOSITION. — *Z et Z' sont des espace vectoriels de dimension finie et $\dfrac{Z'}{Z}$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension μ.*

Preuve. — Si L désigne le degré d'un bon opérateur S annulant f^s

$$\begin{aligned} c(\mathcal{D}[s]f^s) &= c(\mathcal{O}f^s + s\mathcal{O}f^s + \ldots + s^{L-1}\mathcal{O}f^s) \\ &= c(\mathcal{O}f^s + \mathcal{O}f\xi_1 + \ldots + \mathcal{O}f^{L-1}\xi_{L-1}) \subset \bigoplus_{i=0}^{L-1} E\xi_i, \end{aligned}$$

la dernière inclusion résultant de la réécriture A.1.5. Z' et Z sont donc des espaces vectoriels contenus dans $\bigoplus_{i=0}^{L-1} E\xi_i$. De A.2.6 il résulte alors : $\dim_{\mathbb{C}} \dfrac{Z'}{Z} = \mu$.

A.3.3. *Remarque d'effectivité.* — La connaissance de L, degré d'un bon opérateur annulant f^s, permet de déterminer effectivement Z', Z et $b(s)$. En effet, il en est ainsi des calculs de E (par exemple au moyen d'une base standard de $J(f)$ [3], [10]), de k tel que $\mathfrak{M}^k \subset J(f)$, de la réécriture

A.1.5. Il suffit donc de montrer que pour calculer l'espace vectoriel Z', il y a un nombre fini de réécritures à faire. Mais Z' est engendré par les

$$c(\mathcal{O}f^j\xi_j) \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq L-1.$$

D'où l'affirmation, car $c(\mathfrak{M}^{k(j+1)}f^j\xi_j) = 0$.

B. Singularité non dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton

B.1. Définition et théorème de division.

B.1.1 Définition. — *Soit* $f: \mathbb{C}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{C}, 0$ *un germe de fonction analytique.*

Ecrivons $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^n} f_A x^A$, *où* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *et* $x^A = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$.

B.1.1.1. *Notations.* — $N(f) = \{A \in \mathbb{N}^n / f_A \neq 0\}$ le nuage de Newton de f.

$\Gamma = \Gamma(f)$ la réunion des faces compactes de l'enveloppe convexe de $N(f) + \mathbb{N}^n$ dans $(\mathbb{R}^+)^n$. C'est le polyèdre de Newton de f.

B.1.1.2. *Hypothèse sur* f. — Nous supposerons f commode, c'est-à-dire Γ possède un point sur chaque axe de coordonnées.

Nous supposerons f non dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton : pour toute face F de Γ (de toute dimension), la restriction de f à F : $f_{|F} = \sum_{A \in F} f_A x^A$, vérifie la condition :

$$x_1 \frac{\partial f_{|F}}{\partial x_1} = \ldots = x_n \frac{\partial f_{|F}}{\partial x_n} = 0 \Longrightarrow x_1 x_2 \ldots x_n = 0.$$

B.1.1.3. *Remarque.* — Si f est à singularité isolée, on peut supposer f commode en ajoutant une puissance suffisamment grande de l'idéal maximal sans changer son type analytique (donc son polynôme de Bernstein). D'autre part, les deux hypothèses ci-dessus impliquent que f est à singularité isolée.

B.1.1.4. *Notations.*

$\mathcal{F}$ l'ensemble des faces de Γ de dimension $n-1$.

B_F, pour $F \in \mathcal{F}$, l'unique vecteur de $(\mathbb{Q}^+)^n$ tel que $< A, B_F >= 1$ pour tout A de F.

$B_F = (b_{1,F}, \dots, b_{n,F})$.

$\rho_F(g)$ le poids d'un élément $g = \sum g_A x^A$ par rapport à F de $\mathcal{F}$ défini par $\rho_F(g) = \inf\{< A, B_F >;\ g_A \neq 0\} \in \mathbb{Q}^+ \cup \{+\infty\}$.

$\rho(g)$ le poids de g par rapport au polyèdre Γ défini par $\rho(g) = \inf\{\rho_F(g);\ F \in \mathcal{F}\}$.

On considère les filtrations et gradués associés :

$$\mathcal{O}_{\geq p} = \{g \in \mathcal{O};\ \rho(g) \geq p\}.$$
$$\mathcal{O}_{> p} = \{g \in \mathcal{O};\ \rho(g) > p\}.$$
$$\mathrm{Gr}(\mathcal{O}) = \oplus\ \frac{\mathcal{O}_{\geq p}}{\mathcal{O}_{>p}}.$$
$$F_j = \left(x_j\ \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{|\Gamma} \text{ la classe de } x_j\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ dans } \frac{\mathcal{O}_{\geq 1}}{\mathcal{O}_{>1}}.$$
$$\rho_F^*(u) = \rho_F(ux_1x_2\dots x_n).$$
$$\rho^*(u) = \rho(ux_1x_2\dots x_n).$$
$$\mathcal{O}^*_{>p} = \{u \in \mathcal{O};\ \rho^*(u) > p\}.$$
$$\mathcal{O}^*_{\geq p} = \{u \in \mathcal{O};\ \rho^*(u) \geq p\}.$$
$$\mathcal{O}^*_p = \{u \in \mathcal{O};\ (ux_1x_2\dots x_n) \text{ est un polynôme supporté par } p\Gamma\}.$$
$$\mathrm{Gr}^*(\mathcal{O}) = \oplus\ \frac{\mathcal{O}^*_{\geq p}}{\mathcal{O}^*_{>p}} \cong \oplus \mathcal{O}^*_p.$$

On note $\mathrm{in}^*(g)$ la classe de g dans $\dfrac{\mathcal{O}^*_{\geq \rho*(g)}}{\mathcal{O}^*_{>\rho*(g)}}$.

B.1.2. *Théorème de division adaptée à $J(f)$.*

B.1.2.1. *Notation.* — $\mathcal{L}(f)$ désignera l'idéal engendré par $\left(x_i\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

Dans l'Appendice 1, on montrera comment déduire des théorèmes de Kouchnirenko (théorèmes 2.8 et 4.1 de [15]) les deux propositions suivantes

B.1.2.2. Proposition. — *La multiplication par $x_1x_2\dots x_n$ induit un isomorphisme*

$$\lambda :\ \frac{\mathcal{O}}{J(f)} \xrightarrow{\ \simeq\ } \frac{\mathcal{O}x_1x_2\dots x_n}{\mathcal{L}(f)\cap \mathcal{O}x_1x_2\dots x_n} \hookrightarrow \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}.$$

B.1.2.3. PROPOSITION.

(i)* *La multiplication par* $x_1x_2\dots x_n$ *induit un isomorphisme de* $\mathbb{C}$ *espaces vectoriels gradués*

$$\mathrm{Gr}^*\Big(\frac{\mathcal{O}}{J(f)}\Big) \xrightarrow[\mathrm{gr}\lambda]{\simeq} \mathrm{Gr}\lambda\Big(\frac{\mathcal{O}x_1x_2\dots x_n}{\mathcal{L}(f)\cap\mathcal{O}x_1x_2\dots x_n}\Big) \subset \frac{\mathrm{Gr}\mathcal{O}}{(F_1,\dots,F_n)}.$$

(ii)* *Tout élément* g *de* $J(f)$ *peut s'écrire*

$$g = g_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + g_n\,\frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ avec pour tout } j$$

$$\rho^*(g_j) \geq \rho^*(g) - 1 + \rho(x_j),\ \rho^*\Big(\frac{\partial g_j}{\partial x_j}\Big) \geq \rho^*(g) - 1 \text{ et } \rho^*\Big(g_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) \geq \rho^*(g).$$

B.1.2.4. *Remarque.* — (ii)* est faux si l'on y remplace ρ^* par ρ, ce qui justifie l'introduction de ρ^*.

B.1.2.5. DÉFINITION. — $E = \oplus E_p^*$, *où* E_p^* *est un supplémentaire de* $\mathcal{O}_p^*\cap \mathrm{in}^*(J(f))$ *dans* $\mathcal{O}_p^*$.

De B.1.2.3., on déduit les isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires :

$$\begin{tikzcd}
 & & \dfrac{\mathcal{O}}{J(f)} \\
E = \oplus E_p^* \arrow[urr, "\cong"] \arrow[r, hook] \arrow[drr, "\cong"'] & \mathcal{O} \arrow[ur] & \\
 & & \dfrac{\mathrm{Gr}^*\mathcal{O}}{\mathrm{in}^* J(f)}
\end{tikzcd}$$

et la proposition :

B.1.2.6. PROPOSITION DE RÉÉCRITURE (OU THÉORÈME DE DIVISION). $\forall u \in \mathcal{O}$, $\exists v \in E$ *unique et* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathcal{O}^n$ *tels que*

$$u = v + \sum \lambda_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i},\ \text{où}$$

$$\rho^*(v) \geq \rho^*(u),\ \rho^*(\lambda_i) \geq \rho^*(u) - 1 + \rho(x_i),\ \rho^*\Big(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_i}\Big) \geq \rho^*(u) - 1$$

$$\text{et } \rho^*\Big(\lambda_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) \geq \rho^*(u).$$

B.1.2.7. *Notations.* — $\Pi^* = \{q \in \mathbb{Q}^+;\ E_q^* \neq 0\}$

$$\sigma^* = \sup\{q;\ E_q^* \neq 0\}.$$

Reprenons le diagramme de la proposition B.1.2.2, $J(f)$ et $\mathcal{L}(f)$ étant définis par des suites régulières, $\dfrac{\mathcal{O}}{J(f)}$ et $\dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}$ sont des anneaux locaux de Gorenstein. Par suite les transporteurs :

$$\left(O : \frac{\mathfrak{M}}{J(f)}\right) \text{ et } \left(O : \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{L}(f)}\right),$$

où $\mathfrak{M}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}$ sont dans $\dfrac{\mathcal{O}}{J(f)}$ et $\dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}$ des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension 1. On en déduit que $\dim E_{\sigma*}^* = 1$ et, si $e_{\sigma*}$ est un générateur de $E_{\sigma*}^*$, la classe de $e_{\sigma*}$ engendre $\left(O : \dfrac{\mathfrak{M}}{J(f)}\right)$. Il s'ensuit que $x_1 x_2 \dots x_n e_{\sigma*}$ engendre $\left(O : \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathcal{L}(f)}\right)$. D'après [25], $x_1 x_2 \dots x_n e_{\sigma*}$ est donc colinéaire à la classe dans $\dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}$ du déterminant jacobien de $\left(x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

On en déduit :

$$\sigma^* \geq n - \sup_{F \in \mathcal{F}} \rho_F(x_1 x_2 \dots x_n).$$

Par ailleurs $\sigma^* \leq n$, en effet on montre en utilisant le critère valuatif [16] que pour un élément u de $\mathcal{O}$: $\overline{\nu}_{\mathcal{L}(f)}(u) = \rho(u)$. Alors si $\rho(u) \geq n$, u appartient à la clôture intégrale de $(\mathcal{L}(f))^n$, et d'après [6], [17] à $\mathcal{L}(f)$.

En dimension 2, nous vérifions que le «poids du socle», σ^*, est bien $2 - \rho(x_1 x_2) = 2 - \inf \rho_F(x_1 x_2) = 2 - \rho^*(1)$.

Signalons pour terminer qu'il résultera de l'Appendice qu'en toute dimension, $\dim_{\mathbb{C}} E_q^*$, et donc Π^*, ne dépendent que du polyèdre de Newton.

B.2. Les racines du polynôme de Bernstein.

B.2.1. *La montée de poids et ses premières conséquences.*

B.2.1.1. *Notation.* — Soit $F \in \mathcal{F}$ une face de dimension $n-1$ et $B_F = (b_{1,F}, \dots, b_{n,F})$ le vecteur associé. On notera

$$\mid B_F \mid = b_{1,F} + \dots + b_{n,F}$$

$$\chi_F = \sum_{j=1}^{n} b_{j,F} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{«le champ d'Euler associé à } F\text{»}$$

$$h_F = \chi_F(f) - f \qquad \text{«le défaut de quasi homogénéité suivant } F\text{»}$$

$$\rho_F^*(u) = \rho_F(ux_1x_2 \dots x_n).$$

B.2.1.2. *Formule de base.* — Pour toute constante ρ et $F \in \mathcal{F}$, pour tout u de $\mathcal{O}$:

$$(s + \mid B_F \mid + \rho)u\xi_i = \Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{j,F} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j\Big)u + (\rho + i)u - \chi_F(u)\Big)\xi_i - uh_F\xi_{i+1}$$

et l'on a les inégalités : pour toute face F' de $\mathcal{F}$,

$$\left(\begin{array}{l} \quad \rho_{F'}^*(x_j u) > \rho_{F'}^*(u) \geq \rho^*(u) \\ \quad \rho_{F'}^*((\rho+i)u - \chi_F(u)) \geq \rho_{F'}^*(u) \geq \rho^*(u) \\ \quad \rho_{F'}^*(uh_F) \geq \rho_{F'}^*(u) + 1 \geq \rho^*(u) + 1 \\ \text{et sur la face } F \text{ en particulier :} \\ \quad \rho_F^*(uh_F) = \rho_F^*(u) + \rho_F(h_F) > \rho^*(u) + 1. \\ \text{De plus, lorsque } \rho_F^*(u) > \rho^*(u) \text{ ou lorsque } \rho_F^*(u) = \rho^*(u) = \rho + i + \mid B_F \mid \\ \quad \rho_F^*((\rho+i)u - \chi_F(u)) > \rho^*(u). \end{array}\right.$$

La dernière inégalité résulte de l'écriture :

$$\begin{aligned} \rho_F^*((\rho+i)u - \chi_F(u)) = \rho_F(((\rho+i) + \mid B_F \mid)ux_1 \dots x_n - \chi_F(ux_1 \dots x_n)) \\ \geq \rho_F^*(u) \geq \rho^*(u). \end{aligned}$$

B.2.1.3. *Notation.* — Pour un monôme u, nous notons $\alpha(u)$ le nombre de faces $F \in \mathcal{F}$ pour lesquelles $\rho_F^*(u) = \rho^*(u)$; pour u quelconque

$$\alpha(u) = \sup\{\alpha(v);\ v \text{ monôme apparaissant dans } \mathrm{in}^*(u)\}.$$

En itérant la formule de base $\alpha(u)$-fois pour chaque monôme initial de u et en ajoutant on obtient :

B.2.1.4. Lemme de montée de poids.

$$(s+\rho^*(u)-i)^{\alpha(u)}u\xi_i \in \sum_{\ell=0}^{\alpha(u)} \mathcal{DO}^*_{>\rho*(u)+\ell}\,\xi_{i+\ell}.$$

D'autre part l'identité :

$$\sum_{j=1}^{n} g_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\xi_i = \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\,g_j - \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\Big)\xi_{i-1}$$

et la proposition B.1.2.6 fournissent :

B.2.1.5. Lemme de réécriture avec poids.

$$\mathcal{DO}^*_{\geq p}\xi_i \subset \bigoplus_{q\geq p} DE^*_q\xi_i + \mathcal{DO}^*{}_{\geq p-1}\xi_{i-1} \qquad \textit{pour } i\geq 1.$$

$$\mathcal{DO}^*_{\geq p}f^s \subset \bigoplus_{q\geq p} DE^*_q f^s + \mathcal{D}(J(f)_{\geq p})f^s \qquad (\textit{cas } i=0).$$

B.2.1.6. *Notations.* — Pour $q\in\Pi^*$, c'est-à-dire $E^*_q\neq 0$, on note

$$\alpha(q)=\sup\{\alpha(u);\ u\in E^*_q\}.$$

Pour $p\in\mathbb{Q}$, notons :

$$\beta(p)=\sup_{i\in\mathbb{N}}\{\alpha(p+i)\},\ \beta(p)=0 \text{ si } p+\mathbb{N} \text{ ne coupe pas } \Pi^*.$$

Pour $\lambda\in\mathbb{Q}$, posons :

$$\tilde{c}_\lambda(s)=\prod_{p\geq\lambda}(s+p)^{\beta(p)}.$$

$\alpha(q)$ est le nombre maximum de faces de dimension $n-1$ du polyèdre $q\cdot\Gamma$ possédant en commun un point à coordonnées entières, point appartenant au nuage de Newton d'un élément de $E^*_q x_1x_2\ldots x_n$. D'autre part, $\tilde{c}_\lambda(s)$ est bien un polynôme puisque Π^* est fini. Et si λ est strictement supérieur à σ^*, ce polynôme est égal à 1.

B.2.1.7. Proposition. — $(s+1)\tilde{c}_{\rho*(u)-i}(s)u\xi_i\in\mathcal{D}f^{s+1}$.

Preuve. — Nous démontrons la proposition par récurrence décroissante sur le rationnel $\lambda=\rho^*(u)-i$; λ appartient à $(1/d)\mathbb{N}$, où d est le dénominateur commun des poids possibles.

Lorsque λ est strictement supérieur à σ^* par itération du lemme B.2.1.5, on a bien :

$$(s+1)u\xi_i\in\mathcal{D}f^{s+1}.$$

Supposons maintenant (hypothèse de récurrence) que pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$(s+1)d_\lambda(s)\mathcal{O}^*_{>\lambda+j}\xi_i \subset \mathcal{D}f^{s+1},$$

où on a posé $d_\lambda = \prod_{p>\lambda}(s+p)^{\beta(p)}$. Prenons $u\xi_i$ satisfaisant à $\rho^*(u) - i = \lambda$ et montrons que $(s+\lambda)^{\beta(\lambda)}u\xi_i$ appartient à

$$\sum \mathcal{D}\mathcal{O}^*_{>\lambda+j}\xi_i + \mathcal{D}J(f)f^s.$$

En itérant le processus de division du lemme B.2.1.5, nous nous ramenons à prendre pour $u\xi_i$ une somme de termes dans $\bigoplus_{i\geq 0} E^*_{\lambda+i}\xi_i$ et nous pouvons utiliser le lemme B.2.1.4 pour obtenir le résultat désiré.

B.2.1.8. *Remarque.* — En prenant $u = 1$ et $i = 0$, nous obtenons comme cas particulier de la proposition le multiple suivant du polynôme de Bernstein de f :

$$(s+1) \prod_{\substack{p\geq\rho^*(1) \\ (p+\mathbb{N})\cap\Pi^* \neq \emptyset}} (s+p)^{\beta(p)}.$$

B.2.1.9. *Remarque.* — On peut montrer par ces méthodes que la multiplicité d'une racine de $\tilde{b}(s)$ est toujours majorée par n.

En fait, de manière générale pour une singularité isolée, on dispose d'un théorème de Varchenko : si $-p$ est racine de $b(s)$ de multiplicité γ, alors $\gamma < n+1-p$.

B.2.2. *Filtrations et racines du polynôme de Bernstein.*

Reprenons les notations de $A, c\ (\mathcal{D}_{x,t}f^s) = \oplus E\xi_i$ est filtré naturellement par la fonction de poids : $\rho^*(\sum u_i\xi_i) = \inf\{\rho^*(u_i) - i\}$ ou encore par les sous-espaces

$$\Big(\bigoplus_{i\geq 0} E\xi_i\Big)_{\geq p} = \bigoplus_{\substack{i\geq 0 \\ q\geq p+i}} E^*_{\geq q}\xi_i,$$

Z, Z' et $\dfrac{Z'}{Z}$ sont alors munis des filtrations induites naturelles.

En passant aux gradués, on a les injections canoniques :

$$\mathrm{Gr}^*(Z) \hookrightarrow \mathrm{Gr}^*(Z') \hookrightarrow \mathrm{Gr}^*(\oplus E\xi_i) \cong \bigoplus_p \Big(\bigoplus_{i\geq 0} E^*_{p+i}\xi_i\Big).$$

B.2.2.1. *Notation.* — On définit comme toujours

$$\mathrm{in}^*\Big(\Big(\sum_{q\geq p+i} u_q\Big)\xi_i\Big) = u_{p+i}\xi_i, \text{ où } u_q \in E_q^* \text{ et } u_{p+i} \neq 0.$$

On a alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Gr}^*(Z) & \hookrightarrow & \mathrm{Gr}^*(Z') & \hookrightarrow & \mathrm{Gr}^*(\oplus E\xi_i) \\
\| & & \| & & \| \\
\oplus Z_p^* & \subset & \oplus Z_p^{*'} & \subset & \bigoplus\limits_p(\bigoplus\limits_{i\geq 0} E_{p+i}^*\xi_i)
\end{array}$$

où l'on a posé :

B.2.2.2. *Notation.* — $Z_p^* = \mathrm{in}^*(Z) \cap (\bigoplus\limits_{i\geq 0} E_{p+i}^*\xi_i)$

$$Z_p^{*'} = \mathrm{in}^*(Z') \cap (\bigoplus_{i\geq 0} E_{p+i}^*\xi_i).$$

En A.2.3 nous avions défini l'action de s sur $(\bigoplus\limits_i E\xi_i) \oplus J(f)f^s$ et $\dfrac{Z'}{Z}$.

Remarquons :

B.2.2.3. Lemme. — *L'action de s sur $\dfrac{Z'}{Z}$ respecte la filtration induite par ρ^* et induit une action de degré zéro sur* $\mathrm{Gr}^*\Big(\dfrac{Z'}{Z}\Big)$.

Preuve. — Soit $e \in E_{p+i}^*$, $se\xi_i = ie\xi_i + ef\xi_{i+1}$. Comme $ef \in E_{\geq p+i+1}^*$, en itérant le lemme B.2.1.5, on a :

$$ef \in \bigoplus_{j\leq i+1} DE_{\geq p+j}^*\xi_j + \mathcal{D}J(f)f^s.$$

D'où $c(ef\xi_{i+1}) \in \bigoplus\limits_{j\leq i+1} E_{\geq p+j}^*\xi_j$.

B.2.2.4. THÉORÈME. — 1) *L'action de $s+p$ est nilpotente sur* $\dfrac{Z_p^{*'}}{Z_p^*}$.

2) *Si $\gamma(p)$ désigne le degré de nilpotence de l'action de $s+p$ sur* $\dfrac{Z_p^{*'}}{Z_p^*}$, *alors :*

$$b(s) = (s+1)\Pi(s+p)^{\gamma(p)}$$

est le polynôme de Bernstein de f.

Preuve de 1). — Résulte des lemmes B.2.1.4 et B.2.1.5.

Preuve de 2). — Résulte de A.2.3 et du fait que $\dim_{\mathbb{C}} \dfrac{Z'}{Z}$ est finie.

B.3. Le calcul effectif.

B.3.1. *Détermination d'un bon opérateur annulant f^s.*

Nous allons maintenant construire un bon opérateur dans l'annulateur de f^s (au sens de A.3.1), plus précisément :

B.3.1.1. PROPOSITION. — *Il existe une suite $(S_\ell)_{1\leq\ell\leq L}$ de bons opérateurs S_ℓ de degré ℓ, une suite croissante de rationnels $(p_\ell)_{1\leq\ell\leq L-1}$, où $p_1 \geq 1+\rho^*(1)$, une suite $(H_\ell)_{1\leq\ell\leq L-1}$ d'éléments de $\oplus DE\xi_i$ tel que*

a) $S_\ell f^{s+1} = (s+1)H_\ell$ *pour* $1 \leq \ell \leq L-1$
$S_L f^{s+1} = 0$

b) $H_\ell = \displaystyle\sum_{0\leq i\leq n-2} H_{\ell,i}\xi_i$, *avec* $H_{\ell,i} \in \displaystyle\bigoplus_{q\geq p_\ell+i} DE_q$ *de degré comme opérateur en $\mathcal{D}$ au plus $\ell-i-1$.*

Preuve. — Le point de départ est le suivant : choisissons une face F de $\mathcal{F}$ pour laquelle $\rho^*(1) = \rho_F^*(1)$. On a :

$$(s+1-\chi_F)f^{s+1} = -(s+1)h_F f^s$$

d'où S_1 et H_1 après redivision de h_F par l'idéal jacobien. Précisons cela, h_F s'écrit :

$$h_F = e + \sum g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ avec } e \in E,\ \rho^*(e) \geq \rho^*(h_F).$$

On prendra donc :

$$S_1 = (s+1-\chi_F) + \sum g_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad H_1 = -e\xi_0.$$

Supposons maintenant construit un bon opérateur S de degré ℓ tel que :

$$Sf^{s+1} = (s+1)H, \quad H = \sum_{i\geq 0} H_i\xi_i, \text{où } H_i \in \mathcal{D}\mathcal{O}^*_{\geq p+i}$$

de degré comme opérateur de $\mathcal{D}$ au plus $\ell - i - 1$.

En utilisant la relation de commutation :

$$(\chi_F + < B_F, I >)D^I = D^I\chi_F,$$

la formule B.2.1.2 permet d'écrire :

$$(s+p-|B_F|- < B_F, I > -\chi_F)D^I u\xi_i = D^I((p- \mid B_F \mid +i)u - \chi_F(u))\xi_i \\ -D^I u h_F \xi_{i+1}.$$

Et en itérant, comme dans le lemme B.2.1.4, sur les $\alpha(u)$ faces de Γ pour lesquelles $\rho^*_F(u) = p+i$, on obtient :

$$\prod_{F/\rho^*_F(u)=p+i} (s+p-|B_F|- < B_F, I > -\chi_F)D^I u\xi_i \in \sum_{0\leq k\leq \alpha(u)} D^I \mathcal{O}^*_{>p+i+k}\xi_{i+k}.$$

Soit $p = \inf\{\rho^*(u) - i;\ D^I u\xi_i$ apparaît dans l'écriture de $H_i\}$, opérons comme ci-dessus sur les $D^I u\xi_i$ de cet ensemble. Les opérateurs $(s+q-\chi_F)$, où $q \in \mathbb{Q}$, commutant et étant de poids positifs, faisons le produit des opérateurs apparus : on obtient un bon opérateur T de la forme

$$T = \prod_{1\leq\nu\leq\alpha} (s + r_\nu - \chi_{F_\nu}) \qquad \text{où } r_\nu \in \mathbb{Q},$$

et vérifiant

$$TSf^{s+1} = (s+1)TH$$

où $TH = \sum K_i\xi_i$, où $K_i \in \mathcal{D}\mathcal{O}^*_{>p+i}$ est de degré comme opérateur de $\mathcal{D}$ au plus $\ell - i - 1 + \alpha$.

Maintenant à chaque étape, nous pouvons réécrire

$$\prod_{1\leq\nu\leq\ell'-\ell} (s + r_\nu - \chi_{F_\nu})H \text{ dans } \bigoplus_{q\geq p+i} DE^*_q\xi_i \oplus \mathcal{D}J(f)f^s$$

et obtenir la suite demandée des $(S_{\ell'}, H_{\ell'})$ pour $\ell < \ell' \leq \ell + \alpha$.

On s'arrêtera dès que $p_{\ell'} > p$: le poids aura augmenté strictement.

On recommence cet algorithme qui se termine lorsque le poids du socle σ^* est dépassé.

B.3.2. *Application au calcul effectif.*

Montrons maintenant comment déterminer Z à partir des H_i. Pour cela, soit $U \in \mathcal{D}[s]f^s$ et $P \in \mathcal{D}[s]$ tel que

$$(s+1)U = Pf^{s+1}.$$

Les S_i étant unitaires en s, P s'écrit de façon unique :

$$P = P_0 + P_1 S_1 + \ldots + P_{L-1} S_{L-1} + P_L(s) S_L, \text{ où } P_i \in \mathcal{D} \text{ pour } i \leq L-1.$$

De plus P_0 n'a pas de terme constant dans son écriture à gauche.

Divisons par $s+1$, nous obtenons :

$$U = P_1 H_1 + \ldots + P_{L-1} H_{L-1} \text{ modulo-}\mathcal{D}J(f)f^s.$$

A partir de la définition de Z, on a établi :

B.3.2.1. *Remarque.* — $Z = \left\{ \sum_{\ell=1}^{L-1} c(A_\ell H_\ell), \text{ où } A_\ell \in \mathcal{O} \right\}.$

Afin de préciser les A_ℓ qu'il suffit de prendre pour obtenir Z, écrivons :

$$H_\ell = \sum_{0 \leq i \leq n-2} H_{\ell,i}\xi_i$$
$$H_{\ell,i} = \sum_{|I| \leq \ell - i - 1} D^I h_{\ell,i,I}, \text{ où } h_{\ell,i,I} \in E^*_{\geq p_\ell + i}.$$

On a :

$$c(A_\ell D^I h_{\ell,i,I}\xi_i) = (-1)^{|I|} D^I(A_\ell) h_{\ell,i,I}\xi_i.$$

De sorte que si $\rho^*(A_\ell) \geq n - p_\ell + \sup_{F \in \mathcal{F}} < B_F, I > $:

et
$$\rho^*(D^I(A_\ell)h_{\ell,i,I}\xi_i) \geq n + i$$
$$c(A_\ell D^I h_{\ell,i,I}\xi_i) = 0.$$

On a donc :

B.3.2.2. Proposition. — $Z = \left\{ \sum_{\ell-1}^{L-1} c(A_\ell H_\ell), \text{où } A_\ell \in \mathcal{O}^*_{<\gamma(\ell)} \right\}$ *et* $\gamma(\ell) = \sup_I \{n - p_\ell + \sup_{F\in\mathcal{F}} < B_F, I >$ *où* I *est indice de dérivation de* $H_\ell\}$.

On constate donc que si $p < 1 + \rho^*(1)$, $Z^*_p = 0$; comme alors $E^*_p\xi_0 \subset Z^*_{p'}$, on déduit de B.2.2.4 :

B.3.2.3. Proposition. — *$\tilde{b}(s)$ est multiple de* $\prod_{\substack{p\in\Pi^* \\ p<1+\rho^*(1)}} (s+p)$.

B.3.3. *Équations fonctionnelles.*

B.3.3.1. *Notation.* — Soit $U \in \bigoplus_{i\geq 0} E\xi_i$, on notera $\tilde{b}_U(s)$ le polynôme unitaire de degré minimum tel que

$$(s+1)\tilde{b}_U(s)U \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

Le polynôme $\tilde{b}_U(s)$ existe d'après B.2.1.7.

B.3.3.2. Proposition. — *Soit $U \in (\bigoplus_{i\geq 0} E^*_{p+i}\xi_i) \cap Z$, il y a équivalence entre les propriétés*

i) $U \in Z^*_p$

ii) $(s+1)U \in \mathcal{D}[s]f^{s+1} + (s+1)\sum_{q>p} DE^*_{q+i}\xi_i$

iii) *$\tilde{b}_U(s)$ est non multiple de $s+p$.*

Preuve. — • iii⇒ii : des lemmes B.2.1.4 et B.2.1.5, on déduit l'existence d'un entier α tel que :

$$(s+1)(s+p)^\alpha U \in (s+1)(\bigoplus_{\substack{i\geq 0\\ q>p}} DE^*_{q+i}\xi_i) + \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

En prenant le p.g.c.d. de $\tilde{b}_U(s)$ et $(s+p)^\alpha$, on obtient :

$$(s+1)U \in (s+1)(\bigoplus_{\substack{i\geq 0\\ q>p}} DE^*_{q+i}\xi_i) + \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

• i⇒ii : soit $W \in \mathcal{D}[s]f^s$ tel que

$$(s+1)W \in \mathcal{D}[s]f^{s+1} \text{ et } U = \text{in}^*(c(W)).$$

Écrivons : $W = \sum D^I W_I \text{ mod.} \mathcal{D}J(f)f^s$, où $W_I = \sum W_{I,i}\xi_i \in \bigoplus_{i\geq 0} E\xi_i$.

Notons enfin : $q^*(W) = \inf_{i,I}\{\rho^*(W_{I,i}) - i\}$, le minimum des poids des W_I et prenons I_0 un multi-indice de longueur maximum réalisant ce minimum.

Si I_0 est nul, $W - U \in \bigoplus_{\substack{i\geq 0\\ q>p}} DE^*_{q+i}\xi_i + \mathcal{D}J(f)f^s$.

Supposons alors $| I_0 |> 0$:

$$\frac{(-1)^{|I_0|}}{I_0!}\, x^{I_0} W = W_{I_0} + R, \text{ où } R \in \bigoplus_{\substack{i\geq 0\\ q>q^*(W)}} DE^*_{q+i}\xi_i + \mathcal{D}J(f)f^s.$$

On pose alors

$$V = W - D^{I_0}\Big(\frac{(-1)^{|I_0|}}{I_0!}\, x^{I_0} W\Big) = W - D^{I_0}W_{I_0} - D^{I_0}R.$$

V vérifie alors :

$$(s+1)V \in \mathcal{D}[s]f^{s+1} \quad \text{et} \quad c(W) = c(V).$$

Et on a un peu avancé, car ou bien $q^*(V)$ est strictement supérieur à $q^*(W)$, ou bien $q^*(V) = q^*(W)$, mais ce minimum n'est plus atteint sur le multi-indice I_0. Une induction évidente permet de conclure.

ii⇒i est évident et ii⇒iii résulte de la proposition B.2.1.7.

B.3.3.3. Proposition. — *Si $\gamma(q)$ désigne (comme en B.2.2.4) le degré de nilpotence de l'action de $s+q$ sur $\frac{Z^{*'}_q}{Z^*_q}$ et $d_p(s) = \prod_{\rho^*(1)\leq q<p} (s+q)^{\gamma(q)}$, on a la propriété suivante :*

$$(\mathcal{H})_p : \ (s+1)d_p(s)f^s \in (s+1)(\bigoplus_{\substack{i\geq 0\\ q\geq p}} DE^*_q\xi_i) + \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

Preuve. — Le point de départ est évident pour $p = \rho^*(1)$ $\quad (d_{\rho^*(1)} = 1)$.

Ecrivons alors l'assertion $\mathcal{H}_p$:

$$(s+1)d_p(s)f^s = (s+1)\sum D^I V_I + Pf^{s+1}, \text{ où } V_I \in \bigoplus_{\substack{p\leq q\\ i\geq 0}} E^*_{q+i}\xi_i.$$

En utilisant le même argument que pour prouver i⇒ii dans B.3.3.2, on a l'implication :

$$\rho^*(V_I) = p \Rightarrow \mathrm{in}^* V_I \in Z_p^{*'} .$$

Pour un tel I, on a donc :

$$U_I = (s+p)^{\gamma(p)} \mathrm{in}^* V_I \in Z_p^*.$$

En substituant dans $(s+p)^{\gamma(p)}(s+1)d_p(s)f^s$ ces $(s+1)U_I$, par les formules données dans la proposition B.3.3.2-ii, on obtient l'assertion $\mathcal{H}'_p$ pour le poids p' suivant p.

B.3.3.4. *Remarque.* — Pour un certain $p \leq \sigma^*$, on obtient ainsi une équation fonctionnelle : $(s+1)d_p(s)f^s \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}$. Comme l'égalité $\tilde{b}(s)\Big(\oplus \dfrac{Z^{*'}}{Z_p^*}\Big) = 0$ est évidente, B.3.3.3 redémontre B.2.2.4 sans utiliser A.2.4. De plus les équations fonctionnelles données par $(\mathcal{H}_p)$, et donc l'équation fonctionnelle réalisant le polynôme de Bernstein, sont ici données de façon algorithmique. En effet, la caractérisation B.3.2.2 de Z montre que celui-ci est déterminé algorithmiquement en un nombre fini d'étapes (voir aussi la remarque A.3.3). D'autre part, suivant la démonstration de la proposition précédente, le calcul de l'action de $b(s)$ sur f^s se fait étape par étape : il suffit de remarquer que le passage de l'écriture $(\mathcal{H}_p)$ à l'écriture $(\mathcal{H}_{p'})$, p' suivant de p, est algorithmique puisque basé sur la formule B.2.1.2 et sur la réécriture B.2.1.5 par division selon l'idéal $J(f)$ (algorithme des bases standard).

Quant aux exposants $\gamma(p)$ ils sont déjà déterminés lors du calcul de $b(s)$ mais ils peuvent l'être simultanément au calcul de l'équation fonctionnelle, toujours d'après la proposition précédente (voir à ce sujet [4] §4, et [5] Prop.II.5).

B.4. Exemples et applications (cas non-dégénéré).

B.4.1. *Résultats généraux en dimension deux.*

B.4.1.1. *Notations et rappel.* — Pour décrire Π^* associé à Γ, commençons par numéroter

- les sommets de Γ : $A_k = (a_k^1, a_k^2)$ pour $0 \leq k \leq K$,

avec $a_0^1 = 0 < a_1^1 < \ldots < a_K^1$ et $a_0^2 > a_1^2 > \ldots > a_K^2 = 0$;

• les faces de Γ : $F_k = [A_k, A_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq K-1$;

on notera ρ_k le poids relatif à F_k : $\rho_k(A) =< A, B_{F_k} >$.

Considérons les parallélogrammes ouverts

$$L_k = \{\eta A_k + \xi A_{k+1}/0 < \eta < 1 \text{ et } 0 < \xi < 1\} \qquad \text{pour } 0 \leq k \leq K-1$$

et les segments ouverts :

$$T_k = \{\eta A_k/0 < \eta < 2\} \qquad \text{pour } 1 \leq k \leq K-1.$$

Nous savons que Π^* ne dépend que de Γ; or on démontre (voir Appendice 2) que la famille des monômes x^A pour A appartenant à l'ensemble

$$\Big[\bigcup_{0 \leq k \leq K-1} \rho_k(L_k \cap \mathbb{N}^2)\Big] \cup \Big[\bigcup_{1 \leq k \leq K-1} \rho_k(T_k \cap \mathbb{N}^2)\Big]$$

fournit une base de l'espace quotient $\dfrac{\mathbb{C}\{x_1, x_2\} \cdot x_1 x_2}{\left(x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \, x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)}$ pour une singularité non-dégénérée sur Γ (et donc pour presque toute singularité non-dégénérée sur Γ).

On en déduit la proposition suivante :

B.4.1.1.1. Proposition.

$$\Pi^* = \Big[\bigcup_{0 \leq k \leq K-1} \rho_k(L_k \cap \mathbb{N}^2)\Big] \cup \Big[\bigcup_{1 \leq k \leq K-1} \rho_k(T_k \cap \mathbb{N}^2)\Big].$$

B.4.1.2. *Quelques résultats.*

B.4.1.2.1. Proposition.

$$\tilde{b}(s) = \prod_{p \in \Pi* \cup (\Pi* - 1)} (s+p)^{\gamma(p)}$$

où $\gamma(p) \in \{0, 1, 2\}$ *avec*

a) *pour* $p \in \Pi^*$:

$$\gamma(p) > 0 \textit{ ou } \gamma(p-1) > 0$$

b) *pour* $p \dot{\in} \Pi^*$:

$$\gamma(p) \in \{1, 2\} \quad \textit{si } p < 1 + \rho^*(1)$$

$$\gamma(p) = 2 \textit{ si et seulement si } p < 1 \textit{ et } p \in \bigcup_{1 \leq k \leq K-1} \rho_k(T_k \cap \mathbb{N}^2)$$

c) *pour* $p \notin \Pi^*$ *et* $p \in \Pi^* - 1$:

$$\gamma(p) \in \{0,1\} \text{ et } \gamma(p) = 0 \quad \text{si } p < \rho^*(1).$$

Preuve. — Nous avons rassemblé dans cette proposition les différents résultats obtenus précédemment, dans le cas particulier de la dimension deux. En fait le seul point qui n'a pas été démontré est la condition nécessaire et suffisante pour obtenir la racine double.

Supposons d'abord $p < 1$ et $p = \rho_k(C)$ où k est un certain entier, $1 \leq k \leq K-1$, et où $C \in T_k \cap \mathbb{N}^2$. Si $(s+p)$ était facteur simple de $\tilde{b}(s)$, il résulterait du Théorème B.2.2.4 que la composante de degré p calculée dans Z'_p de $(s+p)uf^s$ est nulle pour u de poids $\rho^*(u) = p$; soit donc u le monôme défini par $x_1x_2u = x^C$, la formule habituelle montrerait que l'élément $x_1x_2uf = x^Cf$ est dans l'idéal $\left(x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)$ modulo des éléments de poids $\rho^* > p+1$; cela donnerait :

$$x^C f = Ux_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + Vx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \qquad \text{en poids } p+1.$$

D'après le théorème de Kouchnirenko ([11] Th.4.1, cf. aussi l'Appendice 1) ou peut supposer U et V de poids au moins p. Soit F l'une des faces F_{k-1} ou F_k : en remarquant que le produit de deux monômes qui ne sont pas situés dans le cône construit sur une même face est de poids strictement supérieur à la somme de leurs poids, on obtient :

$$x^C f_{|F} = U_{|pF} \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{|F} + V_{|pF}\left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{|F}.$$

En utilisant la quasi-homogénéité de $f_{|F}$:

$$f_{|F} = b_{1,F} \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{|F} + b_{2,F} \left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{|F}$$

nous obtenons la relation :

$$(U_{|pF} - b_{1,F}x^C)\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{|F} + (V_{|pF} - b_{2,F}x^C)\left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{|F} = 0.$$

Or :

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{|F} = x^{D_F} g_1 \quad \text{et} \quad \left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{|F} = x^{D_F} g_2$$

où g_1 et g_2 sont des polynômes quasi-homogènes, premiers entre eux d'après la condition de non-dégénérescence, l'un au moins d'entre eux étant commode (voir fig.1).

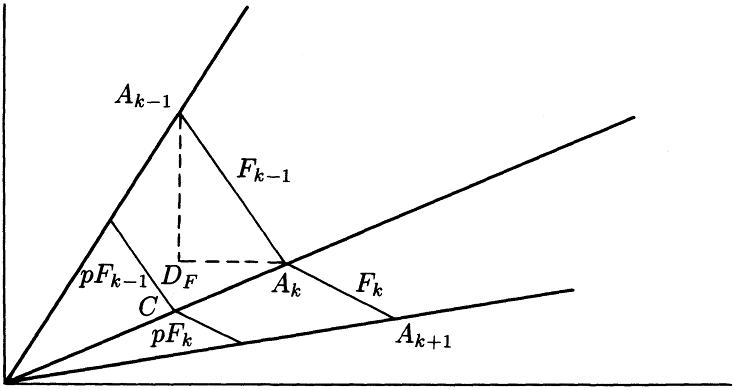


Figure 1

Donc g_1 divise $V_{|pF} - b_{2,F}x^C$ et g_2 divise $U_{|pF} - b_{1,F}x^C$; pour une raison de degré, cela implique : $U_{|pF} = b_{1,F}x^C$ et $V_{|pF} = b_{2,F}x^C$.

En opérant ainsi sur chacune des deux faces, et en comparant les résultats, on trouve $b_{1,F_{k-1}} = b_{1,F_k}$ et $b_{2,F_{k-1}} = b_{2,F_k}$, ce qui contredit le fait que les faces sont distinctes.

Réciproquement, la condition donnée sur p est nécessaire pour que le facteur $(s+p)$ soit de multiplicité 2 dans $\tilde{b}(s)$: cela résulte des remarques B.2.1.8 et B.2.1.9.

B.4.1.3. *Les faces sérieuses.*

B.4.1.3.1. Définition. — *Appelons* face sérieuse *de* Γ *une face non contenue dans* $\{(i_1, i_2)/i_1 \leq 1$ *ou* $i_2 \leq 1\}$.

B.4.1.3.2. Proposition. — *Pour toute face sérieuse* F *de* Γ, $\tilde{b}(s)$ *est multiple de* $s + \rho_F^*(1)$.

(Ce résultat était connu de F. Loeser [18], qui nous a demandé si nous pouvions le retrouver par notre méthode.)

Preuve. — Nous avons déjà vu que $\rho^*(1)$ divise $\tilde{b}(s)$; pour prouver la proposition, il nous suffit de trouver, pour toute face sérieuse F, un élément non-nul uf^{s-1} de Z' de poids $\rho^*(u) - 1 = \rho_F^*(1)$: on aura en effet :

$$0 = Z_{p-1} \not\subset Z'_{p-1} \text{ avec } p = \rho^*(u) = \rho_F^*(1) + 1$$

(c'est clair si $\rho_p^*(1) = \rho^*(1)$; sinon, remarquer que $Z_p \subset E_p^*\xi_0$ puisque $p+1 > 2$, donc $Z'_{p-1} \supset E_F^*\xi_1$ est non-nul par hypothèse, et puisque $E_p^* \neq 0$ on a $p < 2$ donc $Z_{p-1} = 0$ d'après B.3.2.3), et le Théorème B.2.2.4 montrera que le facteur $(s + p - 1)$ intervient dans $\tilde{b}(s)$.

L'existence d'un tel u va découler des trois lemmes suivants :

B.4.1.3.3. Lemme. — *Soit $u \in \mathcal{O}$ de poids $\rho^*(u) = p$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) $\rho(u) \geq 1$

(ii) *il existe une face sérieuse F de Γ telle que $\rho^*(1) < \rho_F^*(1)$ pour laquelle $p = 1 + \rho_F^*(1)$*

(iii) *pour toute face F' de Γ telle que $1 + \rho_{F'}^*(1) \geq p$ il existe des réels M et N non tous deux nuls tel que*

$$u_{|F'} = M\Big(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F'} + N\Big(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F'}.$$

Alors la classe de x_1x_2u est de poids p dans

$$\frac{\mathcal{O}}{\Big(x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\Big)}.$$

Preuve. — Des deux premières conditions on déduit sans difficulté que $(x_1x_2u)_{|C(F)} = (x_1x_2) \cdot u_{|F}$, où $C(F)$ désigne le cône de F, c'est-à-dire l'ensemble $\{\lambda A / A \in F,\ \lambda \geq 0\} \cap \mathbb{N}^2$.

Si le lemme était faux on aurait, par division :

$$(x_1x_2) \cdot u_{|F} = \lambda\Big(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F} + \mu\Big(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F}$$

où λ et μ seraient supportés par $C(F)$ et de poids $\rho_F^*(1)$.

On a alors à examiner deux cas :

– Premier cas : *La face F ne rencontre pas un axe de coordonnées.*

Comme $\rho_F^*(1) > \rho^*(1)$, la première bissectrice n'est pas dans le cône de F, et l'on obtient $\lambda = \mu = 0$ (fig.2), ce qui contredit (iii) lorsqu'on prend $F' = F$.

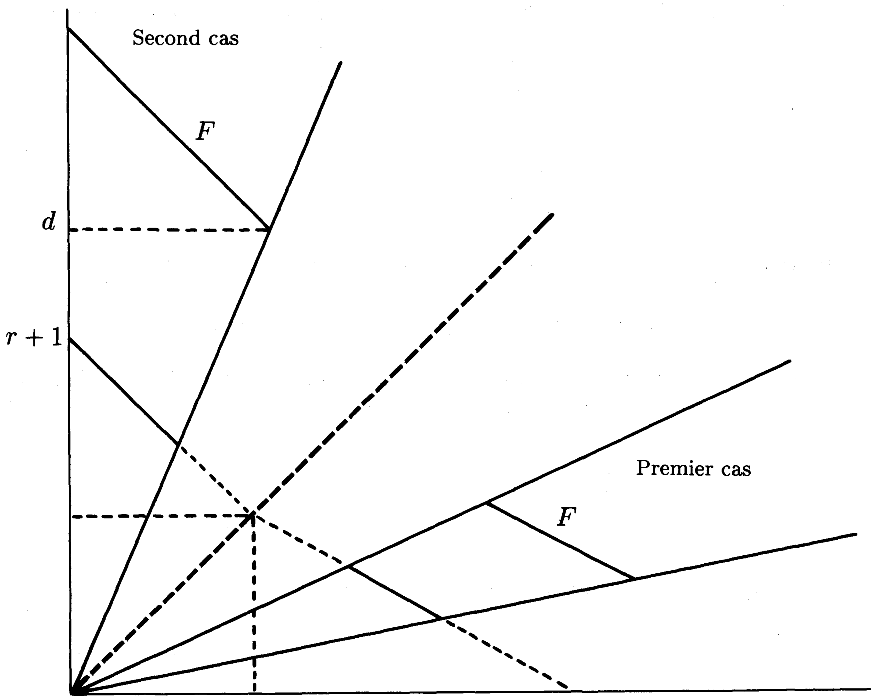


Figure 2

– Second cas : *La face F rencontre, par exemple, l'axe des i_2.*

Les coefficients λ et μ seraient proportionnels à un certain monôme x_2^{r+1} ($r \in \mathbb{N}$) ; on en déduit $\mu = 0$ (puisque divisible par x_1) et en utilisant (iii) :

$$(-Mx_1 + Cx_2^{r+1})\Big(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F} = Nx_1\Big(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F}.$$

La condition de non-dégénérescence sur F donne

$$\Big(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F} = x_2^d g_1, \ \Big(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F} = x_2^d g_2 \qquad \text{(fig.2)}$$

avec g_1 et g_2 premiers entre eux ; donc g_1 divise Nx_1 et la face étant sérieuse, $N = 0$; puis $M = C = 0$.

Contradiction !

B.4.1.3.4. LEMME. — *Soit $w \in \mathcal{O}$ de poids $\rho(w) \geq 2$; on peut écrire :*

$$w = ax_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + bx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

avec

$$\rho^*(a) \geq \rho^*(w) - 1,\ \rho^*(b) \geq \rho^*(w) - 1,\ \rho^*(a) \geq 1,\ \rho^*(b) \geq 1$$

et pour toute face F de Γ telle que $\rho^*_F(w) > \rho^*(w)$, on a :

$$\rho^*_F(a) > \rho^*(w) - 1 \text{ et } \rho^*_F(b) > \rho^*(w) - 1.$$

Preuve. — w étant de poids au moins 2, on a d'après le théorème de Kouchnirenko ([11] Th.4.1, ou Appendice 1)

$$x_1x_2w = \varphi x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \psi x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} &\rho(\varphi) \geq \rho^*(w) - 1 > 1 \\ &\rho(\psi) \geq \rho^*(w) - 1 > 1. \end{aligned}$$

On déduit de ceci et de la commodité de f :

$$\varphi(0, x_2) = \alpha(x_2)x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, x_2),\ \psi(x_1, 0) = \beta(x_1)x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0).$$

Réécrivons x_1x_2w sous la forme

$$x_1x_2w = Ax_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + Bx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A &= \varphi + (\beta(x_1) - \alpha(x_2))x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ B &= \psi + (\alpha(x_2) - \beta(x_1))x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

A et B sont multiples de x_1x_2, de poids $\rho \geq \rho^*(w) - 1$. On définit a et b par $A = ax_1x_2$, $B = bx_1x_2$.

Vérifions que les poids de a et b par rapport à Γ sont supérieurs ou égaux à 1 ; on sait que l'on peut diviser :

$$w = cx_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \rho(c) \geq \rho(w) - 1 \geq 1,\ \rho(d) \geq \rho(w) - 1 \geq 1,$$

et $\left\{x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}$ formant une suite régulière, la comparaison des deux écritures de w fournit $\rho(a) \geq 1$, $\rho(b) \geq 1$.

Passons à la dernière partie du lemme ; soit $\{F_\tau\}_\tau$ la famille des faces de Γ vérifiant $\rho^*_{F_\tau}(w) > \rho^*(w) = q$;

on a :

$$0 = (x_1x_2a)_{|(q-1)F_\tau}\Big(x_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F_\tau} + (x_1x_2b)_{|(q-1)F_\tau}\Big(x_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F_\tau}.$$

D'après [11], dans l'anneau conique construit sur F_τ on obtient :

$$(x_1x_2a)_{|(q-1)F_\tau} = K_\tau\Big(x_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F_\tau},\ (x_1x_2b)_{|(q-1)F_\tau} = -K_\tau\Big(x_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F_\tau}$$

où K_τ est à support dans le cône, de poids $q-2$, et possède x_1x_2 en facteur; comme pour tout (τ,τ') les restrictions de K_τ et de $K_{\tau'}$ à l'intersection des cônes sur F_τ et $F_{\tau'}$ coïncident, nous pouvons constuire K à support dans la réunion de ces cônes tel que $K_{|F_\tau} = K_\tau$.

Toutes les conditions demandées dans le lemme sont satisfaites en remplaçant a par $a - \dfrac{1}{x_1x_2}\,Kx_2\,\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ et b par $b + \dfrac{1}{x_1x_2}\,Kx_1\,\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$.

B.4.1.3.5. Lemme. — *Soit $u \in \mathcal{O}$ de poids $\rho(u) \geq 1$ satisfaisant à $uf^s \in \mathcal{D}(s)f^{s+1}$, et tel que pour toute face F de Γ il existe des constantes $M(F,u)$ et $N(F,u)$ avec*

$$u_{|F} = M(F,u)\Big(x_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F} + N(F,u)\,\Big(x_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F}.$$

Alors : il existe v vérifiant les mêmes conditions que u avec de plus $\rho^*(v) \geq \rho^*(u)$; il existe une face F où $\rho^*(u) = \rho^*_F(u) < \rho^*_F(v)$; pour toute face F, $\rho^*_F(u) > \rho^*(u)$ implique $\rho^*_F(v) > \rho^*(u)$; enfin, sur toute face F on a la relation

$$M(F,v) + N(F,v) = (\rho^*(u) - 1 - \rho^*_F(1))(M(F,u) + N(F,u)).$$

Preuve. — Soit F_1 telle que $\rho^*(u) = \rho^*_{F_1}(u)$; avec les notations du lemme B.1.3.4, écrivons :

$$w = uh_{F_1} = ax_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + bx_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2},\quad \text{et posons :}$$

$$v = \rho^*_{F_1}(u)u - \chi_{F_1}(u) + \frac{\partial(ax_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(bx_2)}{\partial x_2}.$$

On sait que la classe de vf^s modulo $J(f)f^s$ est dans Z, et sur toute face F on a :

$$\begin{aligned} u_{|F}(h_{F_1})_{|F} &= (b_{1,F_1} - b_{1,F})u_{|F}\Big(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F} + (b_{2,F_1} - b_{2,F})u_{|F}\Big(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F} \\ &= a_{|F}\Big(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F} + b_{|F}\Big(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} a_{|F} &= (b_{1,F_1} - b_{1,F})u_{|F} + c(F)\Big(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F} \\ b_{|F} &= (b_{2,F_1} - b_{2,F})u_{|F} - c(F)\Big(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F} \\ v_{|F} &= (\rho_F^*(u) - 1 - \rho^*(1))u_{|F} + c(F)\bigg(\Big(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)_{|F} - \Big(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)_{|F}\bigg). \end{aligned}$$

Il est alors aisé de voir que v vérifie les propriétés demandées.

Fin de la preuve de la proposition B.4.1.3.2. — A partir de h_{F_0} où F_0 est une face rencontrant la diagonale (on sait que $h_{F_0}f^s$ appartient à Z) et en appliquant autant de fois qu'il le faut le lemme B.4.1.3.5, on construit une suite d'éléments de Z «passant» par tous les points voulus d'après le lemme B.4.1.3.3.

B.4.2. *Exemples.*

B.4.2.1. *Un exemple en dimension deux.*

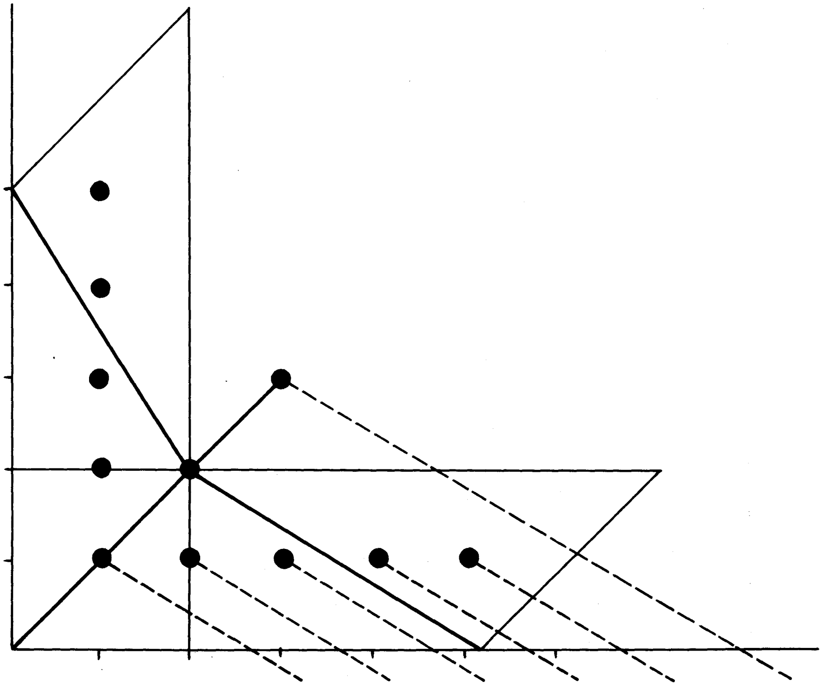
$$f = x_1^2x_2^2 + x_1^5 + x_2^5.$$

On vérifie, en calculant dans la base de monômes choisie (voir fig.3) que $Z_p = 0$ lorsque p est dans Π^* distinct de $\dfrac{3}{2}$, et que $Z_{3/2}$ est de dimension 1 engendré par $x_1^2x_2^2f^s$.

Nous obtenons :

$$\tilde{b}(s) = \prod_{p\in\Pi^*} (s+p)^{\gamma(p)}$$

avec $\gamma(p) = 1$ pour p appartenant à $\Pi^* - \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$



$$\Pi^* = \left\{\frac{1}{2}\ ;\ \frac{7}{10}\ ;\ \frac{9}{10}\ ;\ 1\ ;\ \frac{11}{10}\ ;\ \frac{13}{10}\ ;\ 1+\frac{1}{2}\right\}$$

Figure 3

$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad \gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 0.$

B.4.2.2. *Un exemple significatif en dimension supérieure à deux.*

$$f = x_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1^n + x_2^n + x_3^n, \ n \geq 7.$$

B.4.2.2.1. *Quelques formules.* — Aux trois faces F_j du polyèdre de Newton correspondent les vecteurs normaux :

$$B_{F_1} = \left(\frac{n-4}{2n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \ B_{F_2} = \left(\frac{1}{n}, \frac{n-4}{2n}, \frac{1}{n}\right), \ B_{F_3} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{n-4}{2n}\right).$$

On a

$$h_{F_j} = \chi_{F_j}(f) - f = \left(\frac{n}{2} - 3\right) x_j^n, \quad j = 1, 2, 3.$$

On note $f_i' = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $f_{ij}'' = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, etc...

Des relations $x_j f'_j = 2(x_1x_2x_3)^2 + nx_j^n$, $j = 1,2,3$
on déduit la formule :

$$(x_1x_2x_3)^5 = A\Big[f'_1f'_2f'_3 + n^2\Big((x_2x_3)^{n-1}f'_1 + (x_1x_3)^{n-1}f'_2 + (x_1x_2)^{n-1}f'_3\Big)$$
$$(*) \qquad -n(x_3^{n-1}f'_1f'_2 + x_2^{n-1}f'_1f'_3 + x_1^{n-1}f'_2f'_3)\Big]$$

où A désigne l'unité suivante :

$$A = \frac{1}{8}\Big(1 + \frac{n^3}{8}\,(x_1x_2x_3)^{n-6}\Big)^{-1}.$$

On a d'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(**)\begin{cases} (s-k-\chi_{F_i})\xi_k = \Big(3-\frac{n}{2}\Big)\,x_i^n\xi_{k+1} \\ (s-k-\chi_{F_j})(s-k-\chi_{F_i})\xi_k = \Big(3-\frac{n}{2}\Big)^2 x_i^nx_j^n\xi_{k+2} \qquad i \neq j \\ (s-k-\chi_{F_1})(s-k-\chi_{F_2})(s-k-\chi_{F_3})\xi_k = \Big(3-\frac{n}{2}\Big)^3 x_1^nx_2^nx_3^n \\ \text{avec les modifications évidentes dans le cas } k=-1 : \\ (s+1-\chi_{F_i})f^{s+1} = (s+1)\Big(3-\frac{n}{2}\Big)x_i^n\xi_0, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

B.4.2.2.2. *Un bon opérateur.* — Utilisons la formule précédente (*) sous la forme

$$(x_1x_2x_3)^n = (x_1x_2x_3)^{n-6}A(x_1x_2x_3)K$$

où K désigne l'expression entre crochets dans (*), et remplaçons dans la troisième formule de (**) :

$$\prod_{i=1,2,3} (s+1-\chi_{F_i})f^{s+1} = (s+1)\Big(3-\frac{n}{2}\Big)^3 (x_1x_2x_3)^n\xi_2;$$

en examinant les diverses contributions du produit $(s+1)(x_1x_2x_3)K$, on trouve des termes de trois types, que l'on transformera séparément :

B.4.2.2.2.1. — $-nx_1x_2x_3^nf'_1f'_2\xi_2 = \dfrac{-2n}{6-n}x_1x_2f'_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}\,(s-\chi_{F_3})\xi_0$

(utiliser $f'_1\xi_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\,\xi_1$ et la première formule de (**))

ce qui donne, après commutation :

$$\frac{2n}{6-n}\Big[4(s-\chi_{F_3}+1)(x_1x_2x_3)^2 - x_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}(s-\chi_{F_3}+1)x_2f'_2\Big]\xi_0;$$

en remplaçant $(x_1x_2x_3)^2$ par $\frac{1}{2}(x_1 f_1' - n x_1^n)$, et en appliquant $s+1$ à cette expression, on trouve enfin une première contribution égale à :

$$\frac{2n}{6-n}\left[(s-\chi_{F_3}+1)\Big(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(2-x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)-2n(s+1-\chi_{F_1})\Big)\right]f^{s+1},$$

et un résultat analogue pour les deux autres termes.

B.4.2.2.2.2. Un calcul du même genre donne

$$(s+1)n^2x_1(x_2x_3)^n f_1'\xi_2 = \Big(\frac{2n}{6-n}\Big)^2 x_1\frac{\partial}{\partial x_1}(s+1-\chi_{F_2})(s+1-\chi_{F_3})f^{s+1}$$

et idem pour les deux autres termes.

B.4.2.2.2.3. De même :

$$(s+1)x_1x_2x_3 f_1'f_2'f_3' = \Big[x_1x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3} - 2\Big(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}-4\Big)\cdot\Big(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-n(s+1-\chi_{F_1})\Big)\Big]f^{s+1}.$$

Il reste à rassembler ces résultats pour obtenir un bon opérateur S tel que $Sf^{s+1}=0$. On retiendra que S est de degré 3.

B.4.2.2.3. *Un supplémentaire E de $J(f)$.*

B.4.2.2.3.1. Remarquons d'abord que le socle de l'algèbre $\dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}$ est engendré par $(x_1x_2x_3)^5$, de poids $5/2$.

Calculons une base de monômes de $\dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}$: on vérifie, par division par l'idéal $\mathcal{L}(f)$, que le système suivant induit un système de générateurs de $\dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}$:

$$\left\{\begin{array}{llll} (x_1x_2x_3)^{\varepsilon}x_1^ix_2^j & & \text{et permutés} & \\ & \text{avec } \varepsilon=0,1 & \text{et} & i,j=0,1,\dots,n-1\\ (x_1x_2x_3)^{\varepsilon'}x_1^i & & \text{et permutés} & \\ & \text{avec } \varepsilon'=2,3 & \text{et} & i=0,\dots,n-1\\ & \text{ou } \ \varepsilon'=4,5 & \text{et} & i=0. \end{array}\right.$$

B.4.2.2.3.2. — Pour montrer que ce système induit une base, il suffit de constater qu'il contient $3!V_3(\Gamma)$ éléments où $V_3(\Gamma) = n^2$ désigne le volume sous le polyèdre de Newton Γ de f (voir Kouchnirenko [11], Th B.1, et C.1).

Si l'on enlève alors les monômes de cette base qui sont non-multiples de $x_1x_2x_3$ on obtient une base de $\dfrac{\mathcal{O}\cdot x_1x_2x_3}{\mathcal{L}(f)\cap(x_1x_2x_3)}$, d'où, divisant par $x_1x_2x_3$, une base de $\dfrac{\mathcal{O}}{J(f)}$, ou encore une base d'un supplémentaire E de $J(f)$ dans $\mathcal{O}$:

$$\begin{cases} x_1^ix_2^j & & \text{et permutés,} & & \\ & \text{avec} & i,j=0,1,\dots,n-1 & & \\ (x_1x_2x_3)^\varepsilon x_1^i & & \text{et permutés,} & & \\ & \text{avec} & \varepsilon=1,2 & \text{et} & i=0,\dots,n-1 \\ & \text{ou} & \varepsilon=3,4 & \text{et} & i=0. \end{cases}$$

Le nombre de Milnor μ de f est égal à $3n^2+3n-1$.

B.4.2.2.3.3. — Il résulte de ce qui précède que Π^* est formé des rationnels de la forme $\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{n}$ pour k variant de 0 à $2n$.

B.4.2.2.4. *Calcul de Z et Z'.*

B.4.2.2.4.1. LEMME. — *On a $Z=F\xi_0\oplus\mathbb{C}\cdot(x_1x_2x_3)^4\xi_1$ où F est engendré sur $\mathbb{C}$ par les monômes*

$$\begin{cases} (x_1x_2x_3)^\varepsilon x_1^i & \textit{et permutés,} \\ & \text{avec } \varepsilon=1 \text{ et } i=n-1, \text{ ou } \varepsilon=2 \text{ et } i=0,\dots,n-1, \\ & \text{ou } \varepsilon=3,4 \text{ et } i=0 \\ x_1^ix_2^j & \textit{et permutés,} \\ & \text{avec } i,j\in\{n-2,n-1\}. \end{cases}$$

Preuve. — Soit $U\in\mathbb{Z}$: $U=c(V)$ avec $V\in\oplus_i DE\xi_i$ et $(s+1)V=P(s)f^{s+1}$ où $P(s)\in\mathcal{D}[s]$.

En divisant P par $s+1-\chi_{F_1}$, $(s+1-\chi_{F_2})(s+1-\chi_{F_1})$ et par le bon opérateur S, on trouve, après simplification par $s+1$:

$$V=P_2K_2+P_1K_1+K_0$$

avec $K_0\in\mathcal{D}J(f)f^s$, $P_i\in\mathcal{D}$

et $K_1=\left(3-\dfrac{n}{2}\right)x_1^n\xi_0,\quad K_2=\left(3-\dfrac{n}{2}\right)^2(x_1x_2)^n\xi_1.$

Calculons le terme constant de V : en utilisant les relations

$$x_j^n=-\frac{2}{n}(x_1x_2x_3)^2+\frac{1}{n}x_jf_j'$$

on trouve, pour $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ monôme quelconque

$$\begin{cases} u x_1^n \xi_0 = -\dfrac{2}{n}\, u(x_1x_2x_3)^2\xi_0 & \bmod J(f)f^s \\ u(x_1x_2)^n\xi_1 = \dfrac{4}{n^2} u(x_1x_2x_3)^4\xi_1 + \dfrac{2}{n^2}(\alpha_1+\alpha_2+4)u(x_1x_2x_3)^2\xi_0 & \\ & \bmod \mathcal{D}J(f)f^s. \end{cases}$$

On voit que Z contient déjà tous les multiples de $(x_1x_2x_3)^2\xi_0$ qu'il faut réécrire dans $E\xi_0$, et contient aussi $\mathbb{C}\cdot(x_1x_2x_3)^4\xi_1$. Il reste alors à déterminer les monômes obtenus par réécriture de $u(x_1x_2x_3)^4\xi_1$ avec u non-constant : si l'on suppose $\alpha_3 > 0$, on explicite f_1' et f_2' dans l'expression entre crochets de la formule (*) de B.4.2.2.1 ; on trouve alors des expressions dont le terme constant est multiple de $(x_1x_2x_3)^2\xi_0$ ainsi qu'un élément de $\mathcal{O}\,\dfrac{\partial}{\partial x_3}\,(x_1x_2)^{n-2}\xi_0$, que l'on réécrit après commutation avec la dérivation.

B.4.2.2.4.2. Corollaire. — *Avec les notations du lemme précédent*

$$Z' = E\xi_0 \oplus F\xi_1 \oplus \mathbb{C}(x_1x_2x_3)^4\xi_2$$

et pour $p \in \Pi^*$,

$$\frac{Z_p'^*}{Z_p^*} = \frac{E_p}{F_p}\,\xi_0 \oplus \frac{F_{p+1}}{\left(\mathbb{C}(x_1x_2x_3)^4\right)_{p+1}}\,\xi_1 \oplus \left(\mathbb{C}(x_1x_2x_3)^4\right)_{p+2}\xi_2.$$

B.4.2.2.4.3. *Remarque.* — Pour $p < 1 + \rho^*(1) = 3/2$, on a

$$Z_p^* = 0$$

et

$$Z_p'^* = E_p\xi_0 \oplus F_{p+1}\xi_1 \oplus \begin{cases} 0, & p \neq 1/2, \\ \mathbb{C}\cdot(x_1x_2x_3)^4\xi_2, & p = 1/2. \end{cases}$$

B.4.2.2.5. *Calcul des multiplicités.* — De la formule de base B.2.1.2 on tire, pour tout monôme $u \in \mathcal{O}^*_{p+i}$:

$$(s+p)u\xi_i = \left(3 - \frac{n}{2}\right) u x_j^n \xi_{i+1} + P\xi_i,\ j = 1,\ 2,\ \text{ou } 3$$

où $P \in \mathcal{D}$ est sans terme constant à droite.

Cette formule va permettre de calculer l'action de $(s+p)$ sur $\dfrac{Z_p'^*}{Z_p^*}$, et par conséquent de déterminer le polynôme de Bernstein de f, d'après le théorème B.2.2.4.

Notons que les multiplicités sont majorées par 3 (Remarque B.2.1.9).

Examinons les monômes de base :

B.4.2.2.5.1. *Les termes* $x_1^i x_2^j \xi_0$, $i \leq j$:

leur poids est $p = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i+j}{n}$;

on a $\rho^*((s+p)x_1^i x_2^j \xi_0) - p = i \cdot \dfrac{n-6}{2n}$; alors

$i > 0$: $(s+p)x_1^i x_2^j \xi_0 = 0$ dans $Z_p'^*$ car de poids $> p$

$i = 0, j > 0$: $\left(s + \dfrac{1}{2} + \dfrac{j}{n}\right) x_2^j \xi_0 \notin Z_p^*$

et $\left(s + \dfrac{1}{2} + \dfrac{j}{n}\right)^2 x_2^j \xi_0 = 0$ dans $Z_p'^*$

donc $-\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{j}{n}\right)$ est racine au moins double, $j = 1, \ldots, n-1$.

$i = j = 0$: on a $Z_{1/2}^* = 0$ et $(s+1/2)\xi_0 \neq 0$, $(s+1/2)^2 \xi_0 \neq 0$

donc $-1/2$ est racine triple.

B.4.2.2.5.2. *Les termes* $(x_1 x_2 x_3) x_1^i \xi_0$:

leur poids est $p = 1 + \dfrac{i}{n}$;

$i > 0$: $(s+p)(x_1 x_2 x_3) x_1^i \xi_0 = 0$ dans $Z_p'^*$, car de poids $> p$

$i = 0$: $(s+1)(x_1 x_2 x_3)\xi_0 \neq 0$ dans $Z_1'^*$ $(Z_1^* = 0)$;

d'autre part, on vérifie par un calcul direct utilisant le formule (*) de B.4.2.2.1 que $(s+1)^2 (x_1 x_2 x_3)\xi_0 = 0$ dans $Z_1'^*$ car de poids > 1.

Or, les autres contributions au poids $p = 1$ dans $Z_1'^*$ sont celles de $(x_1 x_2 x_3)^3 \xi_1$ et des $(x_1^i x_2^j)\xi_0$ (et permutés) avec $i + j = \dfrac{n}{2}$ lorsque n est pair ; par un calcul analogue au précédent, on vérifie que $(s+1)^2 (x_1 x_2 x_3)^3 \xi_1 = 0$ dans $Z_1'^*$.

On peut donc conclure que -1 est racine double.

B.4.2.2.5.3. *Les termes* $(x_1 x_2 x_3) x_1^i \xi_1$:

leur poids est $\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{n}$.

$i > 0$: $(s+p)^2 (x_1 x_2 x_3)^2 x_1^i \xi_0 = 0$ dans $Z_p'^*$, ce qui n'ajoute rien aux résultats de B.4.2.2.5.1.

$i = 0$: dans ce cas $p = \dfrac{1}{2}$, et l'on a déjà vu en B.4.2.2.5.1 que $-1/2$ est racine triple.

B.4.2.2.5.4. Les autres termes de $F\xi_1$ et le terme $(x_1x_2x_3)^4\xi_2 \in Z'^{*}_{1/2}$ relèvent de calculs déjà faits au paragraphes précédents et n'apprennent rien de plus quant aux multiplicités.

Il reste à regrouper tous ces résultats, en distinguant les cas n pair et n impair ; on trouve finalement :

$$\tilde{b}(s) = \prod_{k=0}^{2n-6} \left(s + \frac{1}{2} + \frac{k}{n}\right)^{\gamma(k)}, \qquad n \text{ pair}$$

ou

$$\tilde{b}(s) = \prod_{k=0}^{2n-6} \left(s + \frac{1}{2} + \frac{k}{n}\right)^{\gamma(k)} (s+1)^2 \prod_{\ell=1}^{n-2} \left(s + 1 + \frac{\ell}{n}\right), \qquad n \text{ impair}$$

avec

$$\gamma(k) = \begin{cases} 3 & \text{si } k = 0 \\ 2 & \text{si } k = 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{si } k = n, \dots, 2n-6. \end{cases}$$

C. SINGULARITÉS SEMI QUASI-HOMOGÈNES

C.1. Définition et théorème de division.

C.1.1. *Définition.*

C.1.1.1. DÉFINITION DE ρ. — *A un n-uplet de rationnels $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ on associe une fonction de poids $\rho : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par*

$$\rho(\ell) = \inf\{<\alpha, I> = \alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_n i_n : \ell_I \neq 0\}, \text{ où } \ell = \sum \ell_I x^I.$$

Comme toujours on appellera partie initiale *de ℓ :*

$$\text{in}\ell = \sum_{<\alpha,I>=\rho(\ell)} \ell_I x^I.$$

C.1.1.2. DÉFINITION. — Soit $f : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}, 0$ *un germe de fonction analytique. On dira que f est semi quasi-homogène* («S.Q.H.») *par rapport à α si sa partie initiale est à singularité isolée à l'origine.*

Dans cette partie C, nous fixerons $f \in \mathcal{O}$, S.Q.H. relativement à α et nous supposerons, quitte à multiplier α par un rationnel, que $\rho(f) = 1$.

C.1.1.3. Définition. — *Filtrons $\mathcal{O}$ par le poids ρ et notons :*

$\mathcal{O}_{>\rho} = \{u \in \mathcal{O};\ \rho(u) > \rho\}$

$\mathcal{O}_{\geq\rho} = \{u \in \mathcal{O};\ \rho(u) \geq \rho\}$

$\mathcal{O}_\rho$ polynômes quasi-homogènes relativement à α de poids ρ

$$\mathrm{gr}\mathcal{O} = \oplus \frac{\mathcal{O}_{\geq\rho}}{\mathcal{O}_{>\rho}} = \oplus\mathcal{O}_\rho.$$

C.1.2. *Théorème de division.*

C.1.2.1. Notation et proposition. — *Soit E_ρ un supplémentaire de* $\mathrm{in}(J(f))$ *dans $\mathcal{O}_\rho$; on a les isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires :*

$$\begin{tikzcd}
 & & \dfrac{\mathcal{O}}{J(f)} \\
E = \oplus E_p \arrow[r, hook] \arrow[urr, "\cong"] \arrow[drr, "\cong"'] & \mathcal{O} \arrow[ur] & \\
 & & \dfrac{\mathrm{Gr}\mathcal{O}}{\mathrm{in}J(f)}
\end{tikzcd}$$

Preuve. — Montrer que $\mathrm{in}(J(f)) = \mathrm{in}(J(\mathrm{inf}))$ en utilisant que $\mathrm{in}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ forment une suite régulière.

C.1.2.2. *Notations.* — $d(\rho) = \dim_{\mathbb{C}} E_\rho$

$$\Pi = \{\rho / d(\rho) \neq 0\}$$

$$\sigma = \rho(\det \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}) = n - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 = \sup\{\rho; \rho \in \Pi\}.$$

L'exactitude du complexe de Koszul gradué associé à cette suite régulière montre que $d(\rho)$ ne dépend que de α et ρ; σ est le poids du socle de l'algèbre artinienne $\dfrac{\mathcal{O}}{J(f)}$ ou $\dfrac{\mathrm{gr}\mathcal{O}}{\mathrm{in}J(f)}$. Les égalités ci-dessus sont alors bien connues; Π est un ensemble de rationnels. Enfin, on a :

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{J(f)} = \sum_{\rho \in \Pi} d(\rho) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha_j} - 1\right).$$

C.1.2.3. Proposition de réécriture (ou théorème de division). — *$\forall u \in \mathcal{O}$, $\exists v \in E$ unique et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{O}^n$ tels que*

$$u = v + \sum \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

avec $v = 0$ ou $\rho(v) \geq \rho(u)$, $\lambda_j = 0$ ou $\rho(\lambda_j) \geq \rho(u) - 1 + \rho(x_j)$.

Preuve. — Si $\rho(u) > \sigma$, on a $v = 0$. L'existence de v se démontre par récurrence descendante sur $\rho(u)$. L'unicité de v et l'existence des λ_j satisfaisant à la condition de poids est une conséquence du fait que les $\mathrm{in}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ forment une suite régulière.

C.2. Les racines du polynôme de Bernstein.

C.2.1. *La montée de poids et ses premières conséquences.*

C.2.1.1. *Notations.* — $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$

$$\chi = \sum \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$h = \chi(f) - f.$$

Si $f = \sum f_I x^I$, $h = \sum(< \alpha, I > -1) f_I x^I$ satisfait à $\rho(h) > 1 = \rho(f)$. Quitte à faire un changement de coordonnées nous pouvons supposer :

soit $h = 0$ si la singularité est quasi-homogène (c'est-à-dire, d'après [17], si $f \in J(f)$),

soit $\mathrm{in} h \in E - \{0\}$ dans le cas contraire.

C.2.1.2. *Formule de base.* — Pour tout $u \in \mathcal{O}$, $i \in \mathbb{N}$

$$(s + \mid \alpha \mid + \rho) u \xi_i = \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} x_j u + (\rho + i) u - \chi(u) \Big) \xi_i - u h \xi_{i+1}.$$

Les deux lemmes suivants se prouvent alors de façon analogue aux lemmes B.2.1.4 et B.2.1.5.

C.2.1.3. Lemme. — $(s + \rho(u) + \mid \alpha \mid - i) u \xi_i \in \Big(\sum_{\ell=0}^{1} \mathcal{DO}_{>\rho(u)+\ell} \xi_{i+\ell} \cdot \Big)$

C.2.1.4. LEMME. — $$\mathcal{D}\mathcal{O}_{\geq p}\xi_i \subset (\bigoplus_{q\geq p} DE_q)\xi_i + \mathcal{D}\mathcal{O}_{\geq p-1}\xi_{i-1}$$ *pour* $i \geq 1$
$$\mathcal{D}\mathcal{O}_{\geq p}f^s \subset (\bigoplus_{q\geq p} DE_q)f^s + (\mathcal{D}J(f))_{\geq \rho}f^s$$ *(cas* $i = 0$*).*

En faisant monter les poids par C.2.1.3, en réécrivant par C.2.1.4 et en s'arrêtant lorsque on est arrivé au poids du socle, on montre :

C.2.1.5. PROPOSITION. — *Pour* $u \in \mathcal{O}, (s+1)c_{\rho(u)-i}(s)u\xi_i \in \mathcal{D}f^{s+1}$, *où* $c_{\rho(u)-i}(s) = \Big(\prod_{\rho'\in\mathcal{P}_{\rho(u)-i}} (s+|\alpha|+\rho')\Big)_{\text{red}}$, *le produit étant étendu à l'ensemble* $\mathcal{P}_{\rho(u)-i} = \{\rho' : \exists j \in \mathbb{N} \quad \rho'+j \in \Pi, \rho' \geq \rho(u)-i+(j-i)+(\rho(h)-1)\}$. ($\lambda_+ = \max(\lambda, 0)$ et e_{red} *désigne, pour* $e \in \mathbb{C}[s]$, *le polynôme sans racine multiple ayant les mêmes racines et le même coefficient dominant que* e).

En particulier :

C.2.1.6. COROLLAIRE. — *Le polynôme de Bernstein de* f *divise*
$$(s+1)\Big(\prod_{j=0}^{n-1} \prod_{\substack{\omega\in\Pi \\ \omega\geq j\rho(h)}} (s+\mid\alpha\mid+\omega-j)\Big)_{\text{red}}.$$

C.2.2. *Filtrations et racines du polynôme de Bernstein.*

Reprenons les notations de A, $c(\mathcal{D}_{x,t}f^s) = \oplus E\xi_i$ est filtré naturellement par la fonction de poids :
$$\rho(\sum u_i\xi_i) = \inf\{\rho(u_i) - i\},$$
ou encore par les sous-espaces :
$$(\oplus E\xi_i)_{\geq p} = \bigoplus_{\substack{q\geq p+i \\ i\geq 0}} E_q\xi_i.$$

Z, Z' et $\dfrac{Z'}{Z}$ sont alors munis des filtrations induites naturelles. En passant aux gradués associés, on a les injections canoniques :
$$\mathrm{Gr}(Z) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(Z') \hookrightarrow \mathrm{Gr}(\oplus E\xi_i) \cong \bigoplus_p(\bigoplus_{i\geq 0} E_{p+i}\xi_i).$$

C.2.2.1. *Notation.* — On définit comme suit la partie initiale d'un élément de $\bigoplus\limits_{i\geq 0} E\xi_i$:

$$\mathrm{in}\Big(\Big(\sum_{q\geq p+i} = \lambda u_q\Big)\xi_i\Big) = u_{p+i}\xi_i, \text{ où } u_q \in E_q \text{ et } u_{p+i} \neq 0.$$

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Gr}(Z) & \hookrightarrow & \mathrm{Gr}(Z') & \hookrightarrow & \mathrm{Gr}(\oplus E\xi_i) \\ \Big| \wr & & \Big| \wr & & \Big| \wr \\ \oplus Z_p & \subset & \oplus Z'_p & \subset & \bigoplus\limits_p (\bigoplus\limits_{i\geq 0} E_{i+p}\xi_i), \quad \text{où} \end{array}$$

C.2.2.2. *Notation.* — $Z_p = \mathrm{in}(Z) \cap (\bigoplus\limits_{i\geq 0} E_{i+p}\xi_i)$

$$Z'_p = \mathrm{in}(Z') \cap (\bigoplus_{i\geq 0} E_{i+p}\xi_i).$$

L'action de s sur $\oplus E\xi_i \oplus J(f)f^s$ étant définie comme en A.2.3, on montre comme en B.2.2.3 que cette action est de poids positif et induit donc des morphismes de poids zéro sur les gradués, notamment $\mathrm{Gr}\Big(\dfrac{Z'}{Z}\Big)$. D'autre part, tout élément de $\dfrac{Z'_p}{Z_p}$ est annulé par $s + p + \mid \alpha \mid$. On déduit alors de A.2.4, comme pour la preuve de B.2.2.4 :

C.2.2.3. THÉORÈME. — *Le polynôme de Bernstein de f est*

$$(s+1) \prod_{Z_p \subsetneq Z'_p} (s + p + \mid \alpha \mid).$$

En fait comme en B.3.3, on peut démontrer ce résultat sans utiliser A.2.4, en montrant directement :

$$\mathcal{H}_p : (s+1) \prod_{\substack{|\alpha|\leq q<p \\ Z_q \subsetneq Z'_q}} (s + q + \mid \alpha \mid) f^s \in (s+1)\Big(\bigoplus_{\substack{i\geq 0 \\ q\geq p}} DE_{q+i}\xi_i\Big) + \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

C.3. Le calcul effectif.

C.3.1. *Détermination d'un bon opérateur annulant f^s.*

Contrairement à B, on peut munir $\oplus DE\xi_i$ d'une fonction de poids en posant

$$\rho\Big(\sum D^I u_{I,i}\xi_i\Big) = \inf\{- < \alpha, I > +\rho(u_{I,i}) - i;\ u_{I,i} \neq 0\}.$$

La formule de base pour faire monter ces poids est :

$$(F):\ (s+\rho-\chi)D^I u\xi_i = \Big(\big((i+\rho+ < \alpha, I > -\rho(u)\big)D^I u - D^I(\chi(u) \\ -\rho(u)u)\Big)\xi_i - D^I uh\xi_{i+1}.$$

C.3.1.1. — PROPOSITION. — *Il existe une suite de rationnels*

$$\rho_0 = 1 < \rho_1 = \rho(h) < \rho_2 < \ldots < \rho_L \text{ et pour } \ell = 0, 1, \ldots, L-1$$

– *des éléments* $H_\ell = \sum H_{\ell,i}\xi_i \in \bigoplus_0^{n-2} DE\xi_i$ *vérifiant :*

$$\rho(H_\ell) = \rho_{\ell+1}, \rho(H_{\ell,i}\xi_i) \geq (i+1)\rho(h) - i,\ \deg(H_{\ell,i}) \leq \ell - i$$

– *des opérateurs $T_\ell \in \mathcal{D}$, bons au sens de A, vérifiant* $\deg T_\ell \leq \ell + 1$, *tels que les opérateurs $S_\ell \in \mathcal{D}[s]$ définis pour $\ell = 0, \ldots, L$ par*

$$S_0 = (s+1-\chi) - T_0$$
$$S_{\ell+1} = (s+\rho_{\ell+1}-\chi)S_\ell - T_{\ell+1}, \qquad \text{pour } \ell = 0, \ldots, L-1$$

satisfassent à

$$S_\ell f^{s+1} = (s+1)H_\ell \qquad \text{pour } 0 \leq \ell \leq L-1$$
$$S_L f^{s+1} = 0.$$

Preuve de la proposition. — La preuve est rigoureusement identique à celle de la Proposition B.3.1.2, au détail près suivant : la formule (F) ci-dessus permet de faire monter les poids à chaque étape.

C.3.2. — *Application au calcul effectif.*

Tout comme en B.3.2 :

$$Z = \Big\{\sum_{\ell=0}^{L-1} c(A_\ell H_\ell),\ A_\ell \in \mathcal{O}\Big\}.$$

Et vu les poids des H_ℓ, pour décrire Z_p il suffira de prendre

$$A_\ell \in \bigoplus_{\rho'=0}^{\rho-\rho_{\ell+1}} \mathcal{O}_{\rho'}.$$

C.4. Exemple et Application (cas S.Q.H.).

C.4.1. *Exemple simple pour illustration.*

On se propose d'illustrer le cas S.Q.H. au moyen de l'exemple :

$$f(x_1, x_2) = x_1^7 + x_2^7 + tx_1^4x_2^4.$$

f est S.Q.H. relativement à $\alpha = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$. On peut choisir comme E_ρ les sous-espaces vectoriels engendrés par :

$$\{x_1^i x_2^j;\ 0 \leq i \leq 5 \text{ et } 0 \leq j \leq 5 \text{ et } \frac{i}{7} + \frac{j}{7} = \rho\}.$$

Ainsi E est le sous-espace vectoriel engendré par $\{x_1^i x_2^j;\ O \leq i \leq 5$ et $0 \leq j \leq 5\}$. L'ensemble Π est $\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{10}{7}\}$ et $\sigma = \frac{10}{7}$.

C.4.1.1. *La suite* $(S_i,\ H_i)$:

$$\chi = \frac{1}{7}\, x_1\, \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{7}\, x_2\, \frac{\partial}{\partial x_2},\quad h = \chi(f) - f = \frac{1}{7}\, tx_1^4x_2^4.$$

Avec les notations de C.3.1, les bons opérateurs S_i de degré i vérifient

$$\begin{aligned}
S_1 f^{s+1} &= -(s+1)\ \frac{t}{7} x_1^4 x_2^4 f^s \\
S_2 f^{s+1} &= (s+1)\ \frac{32t^3}{(49)^2}\ x_1^5 x_2^5 f^s \\
S_3 f^{s+1} &= 0.
\end{aligned}$$

En effet :

$$(s+1-\chi) f^{s+1} = -(s+1) h f^s = -(s+1)\ \frac{t}{7}\ x_1^4 x_2^4 f^s$$

$$(s + \frac{8}{7} - \chi)(s+1-\chi) f^{s+1} = s(s+1)\ \frac{t^2}{49}\ x_1^8 x_2^8 f^{s-1}.$$

Divisons $x_1^8x_2^8$ par $J(f)$ (suivant la direction α) :

$$\begin{aligned}
x_1^8x_2^8 &= \frac{1}{7}\, x_1^2x_2^8\, \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{4t}{7}\, x_2^{12}x_1^5 \\
&= \frac{1}{7}x_1^2x_2^8\, \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{4t}{49}\, x_2^6x_1^5\, \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{16t^2}{49}x_1^9x_2^9 \\
&= \frac{1}{1-\dfrac{16}{49}t^2x_1x_2}\, \Big(\frac{1}{7}\, x_1^2x_2^8\, \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{4t}{49}\, x_2^6x_1^5\, \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big).
\end{aligned}$$

Soit λ_1 et λ_2, les coefficients de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ dans cette écriture. On a :

$$(s+\frac{8}{7}-\chi)(s+1-\chi)f^{s+1} = (s+1)\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\,\lambda_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,\lambda_2 - \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x_2}\Big)f^s.$$

– Comme $\sigma = \dfrac{10}{7}$,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\equiv \frac{1}{7}x_2^8x_1^2 & \lambda_2 &\equiv O \operatorname{mod} J(f) \\
&\equiv -\frac{4t}{49}x_1^5x_2^6 \\
&\equiv O \operatorname{mod} J(f) \\
\frac{d\lambda_1}{dx_1} &\equiv \frac{2}{7}x_2^8x_1 & \frac{d\lambda_2}{dx_2} &= -\frac{24}{49}\, tx_1^5x_2^5 \operatorname{mod} J(f) \\
&\equiv -\frac{8}{49}\, tx_1^5x_2^5 \operatorname{mod} J(f).
\end{aligned}$$

Donc, il existe $P_2 \in \mathcal{D}$, d'ordre de dérivation au plus égal à 2 tel que :

$$(s+\frac{8}{7}-\chi)(s+1-\chi)f^{s+1} - P_2f^{s+1} = (s+1)\ \frac{32t^3}{49}\, x_1^5x_2^5f^s.$$

On pose donc $S_2 = (s+\dfrac{8}{7}-\chi)(s+1-\chi) - P_2$.

– Comme $\rho(x_1^5x_2^5) = \sigma$,

$$\Big(s+\frac{10}{7}-\chi\Big)S_2f^{s+1} \in (s+1)\mathcal{D}J(f)f^s,$$

on en déduit l'opérateur S_3 annoncé.

C.4.1.2. *Calcul du polynôme de Bernstein.*

D'après C.3.2, nous avons :

$$\begin{aligned} Z &= \{c(\lambda(-(s+1)\frac{t}{7}x_1^4x_2^4f^s) + \mu((s+1)\frac{32}{49^2}t^3x_1^5x_2^5f^s));\ \lambda \text{ et } \mu \in \mathcal{O}\} \\ &= \{c(-(s+1)x_1^4x_2^4\lambda f^s);\ \lambda \in \mathcal{O}\} \text{ (si } t \neq 0). \end{aligned}$$

On déduit donc pour $t \neq 0$

$$Z_\rho = \begin{cases} 0 \text{ pour } \rho \leq 1 \text{ et } \rho \notin \{\frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}\} \\ \mathbb{C} \cdot x_1^4x_2^4f^s \text{ pour } \rho = \frac{8}{7} \\ \mathbb{C} \cdot x_1^5x_2^4f^s \oplus \mathbb{C}x_1^4x_2^5f^s \text{ pour } \rho = \frac{9}{7} \\ \mathbb{C} \cdot x_1^5x_2^5f^s \text{ pour } \rho = \frac{10}{7} \end{cases}$$

$Z'_\rho = E_\rho f^s \oplus sZ_{\rho-1}f^{s-1}$. Du théorème C.2.2.3, on déduit si $t \neq 0$, que le polynôme de Bernstein de f est :

$$(s+1)\prod_{k=0}^{8}\left(s+\frac{k}{7}+\frac{2}{7}\right).$$

C.4.1.3. Le calcul de l'opérateur intervenant dans la relation fonctionnelle se fait de la façon suivante : on calcule $(s+1)\prod_{\rho<\sigma}(s+p+\mid\alpha\mid)f^s$ à l'aide des formules B.2.1.2 pour aboutir, après réécriture (divisions par l'idéal $J(f)$), à une expression $(s+1)(\sum D^\alpha c_\alpha)f^s$ où $\rho(c_\alpha) \geq \sigma$ le poids du socle : les c_α peuvent donc s'exprimer $\mathcal{O}$-linéairement à l'aide de h et de f'_{x_1} et f'_{x_2}, et l'on conclut en remarquant que $(s+1)hf^s = -(s+1-\chi)f^{s+1}$ et $(s+1)f'_{x_i}f^s = \dfrac{\partial}{\partial x_i}f^{s+1}$.

C.4.2.*Polynômes de Bernstein génériques en dimension deux.*

C.4.2.1. *Polynôme de Bernstein générique pour les S.Q.H.*

Commençons par dire quelque chose en dimension n quelconque.

Soit f un polynôme quasi-homogène à singularité isolée, $\mathcal{E}$ une base de E constituée de monômes. Considérons :

$$F = f + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \rho(e) > 1}} t_e e \in \mathbb{C}[t, x_1, \ldots, x_n],$$

la déformation S.Q.H. standard.

C.4.2.1.1. Définition. — *Le polynôme de Bernstein générique, $B(s)$, de F est le générateur unitaire de l'idéal*

$$\{c(s) \in \mathbb{C}[s];\ \exists P \in \mathcal{D}[s] \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t)) :\ Pf^{s+1} = c(s)F^s\}.$$

On peut alors recopier tout ce qui a été dit dans les sections précédentes en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C}((t))$ et montrer ainsi l'existence de B et donner une méthode algébrique pour le calculer. On introduit Z, Z' que l'on gradue. On construit comme en C.3 une suite (H_ℓ, S_ℓ) «universelle», et en utilisant la preuve directe du théorème C.2.2.3, une équation fonctionnelle :

$$PF^{s+1} = B(s)F^s,\ \text{où } P \in \mathcal{D}[s] \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$$

et

$$B = (s+1)\Big(\prod_{Z_\rho \subsetneq Z'_\rho} (s + \mid \alpha \mid + \rho)\Big).$$

C.4.2.1.2. Proposition. — *Il existe un ouvert de Zariski, Ω de l'espace des paramètres tel que si $t \in \Omega$, B est le polynôme de Bernstein de F_t.*

Preuve. — Lorsqu'on spécialise $t = \underline{t}$ au voisinage de 0, $\underline{t}$ appartenant à un ouvert de Zariski, les $H_\ell(\underline{t})$ sont les spécialisations des H_ℓ et on montre facilement que les dimensions de $Z(\underline{t})$ puis de $Z_\rho(\underline{t})$ sont génériquement égales aux dimensions de Z et Z_ρ sur $\mathbb{C}((t))$.

Pour déterminer le polynôme de Bernstein générique d'un S.Q.H. générique en fonction des poids, il nous faut commencer par calculer les poids des $c(H_\ell)$. P. Cassou-Nogues dans [9] donne une formule pour $f = x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n}$ lorsque les a_i sont deux à deux premiers entre eux. En dimension au moins égale à 3, la formule simple que l'on pouvait espérer dans ce cas est fausse (voir l'exemple $f = x_1^{10} + x_2^{21} + x_3^{23}$ traité dans [4]).

C.4.2.2. *Cas de la dimension 2.* — On se donne f un polynôme S.Q.H. en dimension 2 relativement à α_1 et α_2.

C.4.2.2.1. *Hypothèses et notation.* — f est donc une déformation de $x_1^a + x_2^b, x_1^a + x_1x_2^b$ ou $x_1^a x_2 + x_1 x_2^b$. Nous supposons f choisi assez général pour admettre pour base $\mathcal{E}$ de E l'ensemble des monômes $x_1^p x_2^q$ tels que :

$(p,q) \in [0,a-2] \times [0,b-2]$ si f est une déformation de $x_1^a + x_2^b$

$(p,q) \in [0,a-1] \times [0,b-2] \cup \{(0,b-1)\}$ si f est une déformation de $x_1^a + x_1x_2^b$

$(p,q) \in [0,a-1] \times [0,b-1]$ si f est une déformation de $x_1^a x_2 + x_1 x_2^b$.

On note $F = f + \sum\limits_{\substack{e\in\mathcal{E} \\ \rho(e)>1}} t_e e$, la déformation S.Q.H. standard de f dont on se propose de calculer le polynôme de Bernstein générique.

C.4.2.2.2. *Notations et définition.* — On note :

$$\rho(x_1) = \alpha_1 = \frac{p_1}{r}, \quad \rho(x_2) = \alpha_2 = \frac{p_2}{r}. \quad (p_1, p_2) = 1 \text{ (car } \rho(f) = 1)$$

$1 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots \sigma_L = \sigma$ suite strictement croissante de $\Pi \cap]1, \sigma[$.

On définit :

$$\delta_{\sigma_j} = \dim_{\mathbb{C}} E_{\sigma_j} - \sum_{i=1}^{j} \dim_{\mathbb{C}} E_{\sigma_j - \sigma_i},$$
$$d_\rho = \dim_{\mathbb{C}} E_\rho.$$

C.4.2.2.3. Lemme. — 1) *Pour tout couple ρ, ρ' d'éléments de $\rho(\mathcal{O})$ tels que $1 < \rho < \rho'$, on a : $d_\rho \geq d_{\rho'} - 1$.*

2) $\delta_{\sigma_j} > 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, j\}$ $\sigma_i = 1 + \frac{i}{r}$ *et* $\delta_{\sigma_i} \geq 0$.

Preuve de 1). — On constate facilement que $x_1^p x_2^q \in E_\rho$ équivaut à une condition du type $(p,q) \in I_\rho$, où I_ρ est un segment de longueur ℓ_ρ et $\ell_\rho \leq \ell_{\rho'}$, si $i < \rho < \rho' < \sigma$. Le résultat 1 s'en déduit.

Preuve de 2). — Remarquons que $\delta_{\sigma_i} \leq d_{\sigma_j} - d_0 = d_{\sigma_j} - 1$. Donc $\delta_{\sigma_j} > 0$ implique $d_{\sigma_j} \geq 2$, donc $d_\rho \geq 1$ quel que soit $\rho \in \rho(\mathcal{O}) \cap]1, \sigma_j[$. On en déduit $\sigma_i = 1 + \frac{i}{r}$ pour $i = 1, \ldots, j$ car pour tout entier i : $1 + \frac{i}{r} \in \rho(\mathcal{O})$.

D'autre part, on a $\delta_{\sigma_i} = \dim_{\mathbb{C}} E_{\sigma_i} - \sum\limits_{\rho < \sigma_i - 1} d_\rho$, car vu la base $\mathcal{E}$, $u \in \mathcal{E}$ de poids σ_i, $v \in \mathcal{E}$ de poids $\rho < \sigma_i - 1$ entraîne $\frac{u}{v} \in \mathcal{E}$ de poids $\sigma_i - \rho > 1$

et donc $\sigma_i - \rho \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i\}$. D'où pour $i \in \{1, 2, \dots, j\}$:

$$\delta_{\sigma_i} = d_{\sigma_i} - \sum_{\rho<\sigma_i-1} d_\rho \geq d_{\sigma_j} - 1 - \sum_{\rho<\sigma_i-1} d_\rho \geq d_{\sigma_j} - \sum_{\rho<\sigma_j-1} d_\rho - 1 = \delta_{\sigma_j} - 1 \geq 0.$$

C.4.2.2.4. *Notations.* — $h = F - \chi(F) = \sum_{\substack{e\in\mathcal{E} \\ \rho(e)>1}} (1-\rho(e)) \cdot t_e e$

$S \subset \mathbb{C}[t]\{x_1, x_2\}$ le carré de l'idéal $(t_e)_e \in \mathcal{E}_1$
$\Xi_i = s(s-1)\dots(s-i+1)F^{s-i}$
$\underline{E} = \mathbb{C}[t]E \quad \underline{\mathcal{D}} = \mathbb{C}\{t\}\mathcal{D}$.

On construit comme en C.3.1, une suite $H_\ell \in \bigoplus_{i=0}^{n-2} D\underline{E}\Xi_i$ et des opérateurs $S_\ell \in \underline{\mathcal{D}}$ tels que $S_\ell F^{s+1} = (s+1)H_\ell$.

C.4.2.2.5. Lemme. — *Le poids de $H_\ell = H_{\ell,0}F^s$ et le poids de $h_\ell = c(H_\ell)$ sont égaux à $\sigma_{\ell+1}$ et la suite des H_ℓ contient donc L termes. Plus précisément $H_{\ell,0}$ et h_ℓ sont égaux modulo $S \cdot \mathcal{D}$ et on a :*

$$h_\ell \equiv \sum_{e\in\mathcal{E}_1} (\sigma_1 - \rho(e))\dots(\sigma_\ell - \rho(e))(\rho(e)-1)t_e e \qquad (\mathrm{mod} S)$$

$$\mathrm{in} h_\ell F^s = c(\mathrm{in} H_\ell) \in Z.$$

Preuve. — Le point de départ est évident $H_0 = hF^s$.

L'algorithme de C.3.1 s'écrit ici :

$$(s + \sigma_{\ell+1} - \chi) - H_\ell \equiv H_{\ell+1} \qquad (\mathrm{mod} \underline{\mathcal{D}} J(F)F^s),$$

et on trouve :

$$c(H_{\ell+1,0}) = \sigma_{\ell+1}h_\ell - \chi(h_\ell) - \frac{\partial\lambda_\ell}{\partial x_1} - \frac{\partial\mu_\ell}{\partial x_2} \qquad (\mathrm{mod}(F'_{x_1}, F'_{x_2}))$$

où $\quad hh_\ell = \lambda_\ell F'_{x_1} + \mu_\ell F'_{x_2}$.

Comme λ_ℓ, μ_ℓ appartiennent à S le lemme en découle par récurrence sur ℓ car :

$$H_{\ell+1} - h_{\ell+1}F^s = -\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\lambda_\ell + \frac{\partial}{\partial x_2}\mu_\ell\Big)F^s + (s + \sigma_{\ell+1} - \chi)(H_\ell - h_\ell F^s)$$

et $\sigma_{\ell+1}e - \chi(e) = (\sigma_{\ell+1} - \rho(e))e$.

C.4.2.2.6. LEMME. — L'application linéaire $\varphi_j : \bigoplus_{i=1}^{j} \underline{E}_{\sigma_j-\sigma_i} \longrightarrow \underline{E}_{\sigma_i}$ définie par

$$\mathrm{in}_{\sigma_j} c\Big(\sum_{i=1}^{j} u_i H_{i-1}\Big) = \varphi_j(u_1,\ldots,u_j)F^s \text{ modulo } J(F)F^s \text{ détermine}$$

une application $\mathbb{C}((t))$-linéaire de rang maximum.

Preuve. — Soient u et v des monômes appartenant respectivement à $\mathcal{E}_{\sigma_j}$ et $\mathcal{E}_{\sigma_j-\sigma_i}$; $\dfrac{u}{v}$ est alors un élément de $\mathcal{E}_{\sigma_i}$, avec le choix effectué pour $\mathcal{E}$. Le coefficient de $\varphi_j(v)$ sur u est alors égal à $t\,u/v$ modulo S.

La matrice dans $\mathbb{C}[t]$ modulo S de l'application linéaire φ_j dans les bases respectives $\mathcal{E}_{\sigma_j}$ et $\bigcup_{\rho<\sigma_j} \mathcal{E}_\rho$ est donc de la forme $(t_{u,v})$ où les $t_{u,v}$ sont des indéterminées, deux à deux distinctes dans chaque ligne et chaque colonne. Il est facile de voir qu'une telle matrice est de rang maximum sur $\mathbb{C}((t))$. ($\mathcal{E}_\rho$ désigne les éléments de $\mathcal{E}$ de poids ρ).

C.4.2.2.2.7. THÉORÈME. — *Le polynôme de Bernstein d'une singularité S.Q.H. générique est, avec les notations précédentes, égal à*

$$b(s) = (s+1)\Big(\prod_{\delta_\rho>0}(s+\alpha+\beta+\rho)\prod_{\substack{\rho\in\Pi\\ \rho>1}}(s+\alpha+\beta+\rho-1)\Big)_{\mathrm{red}}.$$

Preuve. — D'après le lemme C.4.2.2.5, pour tout $\rho \in \Pi$ tel que $\rho > 1$ ($\rho = \sigma_j$) il existe $u = h_{j-1}$ tel que : $\rho(u) = \rho, \quad uF^s \in Z_\rho$.

Lorsque $\delta_\rho \leq 0$, d'après le lemme C.4.2.2.6 : $E_\rho F^s = Z_\rho$.

Lorsque $\delta_\rho > 0$, on a aussi $\delta_{\rho'} \leq 0$ si $1 < \rho' = \sigma_i \leq \rho$, et d'après le lemme C.4.2.2.6 φ_i est injective pour $i = 1, 2, \ldots, j$, φ_j étant en plus non surjective. Soit $u \in E_\rho - \mathrm{Im}\varphi_j$: uF^s ne peut pas appartenir à Z_ρ car si $u = \mathrm{in}\ c(\sum \lambda_k H_k)$ avec $\lambda_k \in \mathcal{O}$, on a puisque $u \notin \mathrm{Im}\varphi_j$:

$$\rho' = \inf \rho(\lambda_k H_k) < \rho$$

donc

$$\mathrm{in}_{\rho'}(\sum \lambda_k H_k) = 0$$

ce qui contredit l'injectivité de l'application φ_i correspondant à ρ'.

On a donc $uF^s \in Z'_\rho - Z_\rho$.

Le théorème se déduit alors du théorème C.2.2.3.

APPENDICE 1

PREUVE DU THÉORÈME DE DIVISION ADAPTÉE À $J(f)$

Il s'agit de prouver la proposition B.1.2.3. On reprend donc dans ce paragraphe les notations de B.1.1.4.

Considérons $K^\bullet\Big(\mathcal{O}, x_i\,\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)$ le complexe de Koszul :

$$0 \to \wedge^0(\mathcal{O}^n) \to \ldots \to \wedge^p(\mathcal{O}^n) \xrightarrow{\ d_p\ } \wedge^{p+1}(\mathcal{O}^n) \to \ldots \to \wedge^n(\mathcal{O}^n) \to 0$$

muni de la différentielle $d_p(\omega) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}x_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j \wedge \omega$; f étant à singularité isolée, ce complexe fournit une résolution de $\dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}$. Il est filtré par la filtration de Newton ρ sur $\mathcal{O}$ en donnant à la différentielle d le poids 1. Le complexe gradué associé n'et autre que le complexe de Koszul $K^\bullet(\mathrm{Gr}\mathcal{O}, F_i)$. Enonçons le théorème 2.8 de Kouchnirenko [11] :

THÉORÈME (Kouchnirenko). — $K^\bullet(\mathrm{Gr}\mathcal{O}, F_i)$ est une résolution de $\dfrac{\mathrm{Gr}\mathcal{O}}{(F_1, \ldots, F_n)}$.

Kouchnirenko en déduit le théorème suivant (théorème 4.1 de [15]) :

THÉORÈME (Kouchnirenko). — i) *$\dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}$ étant muni de la filtration induite par ρ, on a l'isomorphisme canonique de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels gradués :*

$$\mathrm{Gr}\Big(\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{L}(f)}\Big) \cong \frac{\mathrm{Gr}\mathcal{O}}{(F_1, \ldots, F_n)}.$$

ii) *tout élément g de l'idéal $\mathcal{L}(f) = \Big(x_i\,\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)$ peut s'écrire :*

$$g = g_1 x_1\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + \ldots + g_n x_n\,\frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ avec } \forall j : \ \rho(g_j) \geq \rho(g) - 1.$$

Introduisons alors les notations suivantes :

Notations. — Pour un sous-ensemble d'indices $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, et pour un entier $p, 1 \leq p \leq n$, notons K_I^p le sous-espace de $K^p\Big(\mathcal{O}, x_i\,\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)$

défini par :

$$K_I^p = \Big\{\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p};\ \omega_{i_1,\ldots,i_p} \in \mathcal{O}\Big(\prod_{j\in I\cap\{i_1,\ldots,i_p\}} x_j\Big)\Big\}.$$

Notons : $B_I^p = \ker(d_p)\cap K_I^p$ pour $p\leq n$
$B_I^n = \operatorname{Im} d_{n-1}\cap K_I^n$.

LEMME. — *Pour tout $p\in\{1,2,\ldots,n\}$, $\omega\in\mathcal{B}_I^p$, il existe $\theta\in K_I^{p-1}$ tel que*

$$\omega = d_{p-1}(\theta) \text{ et } \rho(\theta)\geq\rho(\omega)-1.$$

Preuve. — Nous démontrons ce lemme par induction sur le nombre d'éléments de I; si $I=\emptyset$, cela résulte du théorème de Kouchnirenko.

Supposons $I=\{1\}\cup I'$ et prenons $\omega\in\mathcal{B}_I^p$, $p\geq 2$; par hypothèse de récurrence, il existe $\theta\in K_{I'}^{p-1}$ tel que $\omega=d_{p-1}(\theta)$ et $\rho(\theta)\geq\rho(\omega)-1$. Ecrivons $\theta = dx_1\wedge\xi+\eta$, où $\eta\in K_I^{p-1}$ et $\xi\in K_{I'}^{p-2}$ ne sont pas multiples de dx_1.

$$\omega = d_{p-1}(\theta) = dx_1\wedge\Big(\sum_{j=2}(-1)^j x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j\wedge\xi\Big)+d_{p-1}\eta.$$

Par hypothèse, le coefficient de dx_1 dans ω doit s'annuler pour $x_1=0$ et par conséquent si $\xi=\xi(0,x_2,\ldots,x_n)+x_1\xi'$, on a :

$$d'_{p-2}(\xi(0,x_2,\ldots,x_n))=0$$

où d' désigne le différentielle du complexe de Koszul construit sur $\mathcal{O}'=\mathbb{C}\{x_2,\ldots,x_n\}$ et avec la fonction $f(0,x_2,\ldots,x_n)$: l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour les sous-espaces correspondants construits avec I', donc il existe $\lambda\in K^{p-3}$ tel que $\xi(0,x_2,\ldots,x_n)=d'_{p-3}\lambda$ avec $\rho(\lambda)\geq\rho(\theta)-1$. Alors $\theta-d_{p-2}(dx_1\wedge\lambda)=dx_1\wedge d_{p-3}\lambda+\eta$ satisfait aux conditions demandées.

En appliquant ce lemme à $I=\{1,2,\ldots,n\}$, on obtient :

PROPOSITION.

i) $K^\bullet_{\{1,2,\ldots,n\}}$ *est une résolution filtrée par ρ de* $\dfrac{\mathcal{O}x_1x_2\ldots x_n}{\mathcal{L}(f)\cap\mathcal{O}x_1x_2\ldots x_n}$.

ii) *Les gradués étant considérés par rapport aux filtrations induites par ρ,* $\operatorname{Gr}(K^\bullet_{\{1,2,\ldots,n\}})$ *est une résolution de* $\operatorname{Gr}\Big(\dfrac{\mathcal{O}x_1x_2\ldots x_n}{\mathcal{L}(F)\cap\mathcal{O}x_1x_2\ldots x_n}\Big)\cong \operatorname{Gr}\Big(\dfrac{\mathcal{O}x_1\ldots x_n+\mathcal{L}(f)}{\mathcal{L}(f)}\Big)$.

iii) *Si $gx_1x_2\dots x_n$ est un élément de $\mathcal{L}(f)$, g peut s'écrire :*

$$g=\sum g_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\ \text{avec } \forall j:\ \rho(g_jx_1\dots\hat{x}_j\dots x_n)\geq\rho(g)-1.$$

Prouvons maintenant les résultats annoncés au chapitre B.1.2 :

Preuve de la proposition B.1.2.2. — Résulte maintenant du (iii) de la proposition.

Preuve de la proposition B.1.2.3. — L'isomorphisme de (i)* résulte de la proposition. Quant à l'inclusion $\mathrm{Gr}\left(\dfrac{\mathcal{O}x_1x_2\dots x_n}{\mathcal{L}(f)\cap\mathcal{O}x_1x_2\dots x_n}\right)\subset\dfrac{\mathrm{Gr}\mathcal{O}}{(F_1,\dots,F_n)}$, elle est la conséquence d'une adaptation évidente du lemme précédent au complexe de Koszul $K^\bullet(\mathrm{Gr}\mathcal{O},F_i)$ et aux sous-objets $K_I^p(\mathrm{Gr}\mathcal{O},F_i)$, $p=1,\dots,n$ définis comme les K_I^p du lemme.

Montrons (ii)* :

On sait d'après la proposition que l'on peut choisir les g_j tels que $\rho(g_jx_1x_2\dots\hat{x}_j\dots x_n)\geq\rho^*(g)-1$. Il en résulte la première inégalité :

$$\rho^*(g_j)\geq\rho^*(g)-1+\rho(x_j).$$

La deuxième inégalité de B.1.2.3 résulte du fait que le nuage de Newton de $x_j\,\dfrac{\partial g_j}{\partial x_j}\,x_1\dots\hat{x}_j\dots x_n$ est contenu dans celui de $g_jx_1\dots\hat{x}_j\dots x_n$.

La dernière inégalité de B.1.2.3 résulte de (iii), proposition précédente, et de la première inégalité de (ii)*.

APPENDICE 2
PREUVE DE LA PROPOSITION B.4.1.1.1

Avec les notations de B.4.1.1, on a vu qu'il suffit de montrer que la famille des monômes x^A pour A appartenant à l'ensemble

$$\Big[\bigcup_{0\leq k\leq K-1}(L_k\cap\mathbb{N}^2\Big]\cup\Big[\bigcup_{1\leq k\leq K-1}(T_k\cap\mathbb{N}^2)\Big]$$

fournit une base de l'espace quotient $\dfrac{\mathbb{C}\{x_1,x_2\}\cdot x_1x_2}{\left(x_1\,\dfrac{\partial f}{\partial x_1},x_2\,\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)}$ pour une singularité f non dégénérée sur Γ.

Ajoutons à cette famille de monômes les monômes x^A pour A décrivant les segments des axes :

$$T_0 = \{\eta A_0,\ 0 \le \eta < 1\} \text{ et } T_K = \{\eta A_K,\ 0 \le \eta < 1\},$$

et montrons alors qu'on obtient une base de

$$\frac{\mathbb{C}\{x_1, x_2\}}{\left(x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)}$$

lorsque l'on prend $f = \sum_{0 \le k \le K} x^{A_k}$.

Le nombre de monômes est le bon; en effet, d'après Kouchnirenko [15] la dimension de cet espace est :

$$2V_2(\Gamma) = \mu + a_K^1 + a_0^2 - 1 = \sum_{0 \le k \le K-1} d_k$$

où d_k est la surface du parallélogramme de sommets 0, A_k, A_{k+1}, $A_k + A_{k+1}$, surface égale au cardinal du groupe $\dfrac{\mathbb{Z}^2}{\mathbb{Z}A_k \oplus \mathbb{Z}A_{k+1}}$; par conséquent :

$$\begin{aligned} d_k &= \#[\{\eta A_k + \xi A_{k+1},\ 0 \le \eta < 1,\ 0 \le \xi < 1\} \cap \mathbb{N}^2] \\ &= \#[L_k \cap \mathbb{N}^2] + r_k + r_{k+1} + 1 \qquad \text{avec } r_k = \#\{\eta A_k,\ 0 < \eta < 1\}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\sum_{0 \le k \le K-1} d_k = [r_0 + r_k + 1] + \sum_{1 \le k \le K-1} (2r_k + 1) + \sum_{0 \le k \le K} \#[L_k \cap \mathbb{N}^2]$$

d'où, comme $\#[T_k \cap \mathbb{N}^2] = 2r_k + 1$ pour $1 \le k \le K-1$ et $\#[(T_0 \cup T_K) \cap \mathbb{N}^2] = r_0 + r_K + 1 = a_K^1 + a_0^2 - 1$, on obtient le bon nombre de monômes.

Les classes de ces monômes dans le quotient sont indépendantes; en effet supposons, d'après le théorème de Kouchnirenko, une relation dans le gradué :

$$u x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v x_2 \frac{x f}{\partial x_2} = \sum s_A x^A \qquad \text{modulo } \mathcal{O}'_{p+1}, \text{ avec } \rho(u) = \rho(v) = p,$$

$\rho(x^A) = p + 1$, A décrivant l'ensemble

$$\Big[\bigcup_{0 \le k \le K-1} (L_k \cap \mathbb{N}^2\Big] \cup \Big[\bigcup_{0 \le k \le K} (T_k \cap \mathbb{N}^2)\Big].$$

On a donc, sur chaque face F_k la relation :

$$u_{|pF_k}(a_k^1 x^{A_k} + a_{k+1}^1 x^{A_{k+1}}) + v_{|pF_k}(a_k^2 x^{A_k} + a_{k+1}^2 x^{A_{k+1}}) = \sum s_A x^A$$

qù, maintenant, le multi-indice A appartient à :

$$(L_k \cup T_k \cup T_{k+1}) \cap [(p+1)F_k].$$

Le dessin montre (voir figure 4) que $s_A = 0$ pour A dans $L_k \cap \mathbb{N}^2$, et il reste :

$$\sum s_A x^A = s_{(p+1)A_k} x^{(p+1)A_k} + s_{(p+1)A_{k+1}} x^{(p+1)A_{k+1}}$$

et donc, comme $p+1 < 2$:

$$\begin{cases} a_k^1 u_{|pF_k} + a_k^2 v_{|pF_k} = s_{(p+1)A_k} x^{pA_k} \\ a_{k+1}^1 u_{|pF_k} + a_{k+1}^2 v_{|pF_k} = s_{(p+1)A_{k+1}} x^{pA_{k+1}}. \end{cases}$$

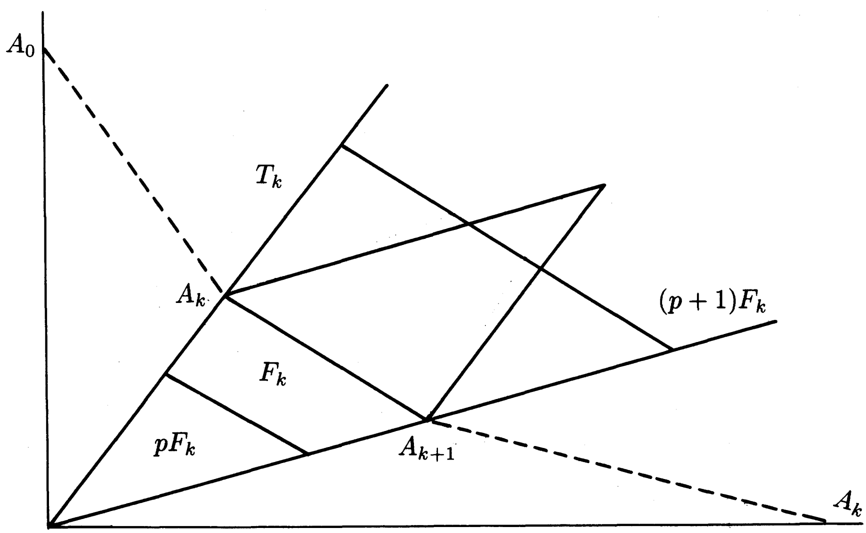


Figure 4

La résolution de ce sytème donne :

$$u_{|pF_k} = -\frac{s_{(p+1)A_k} a_{k+1}^2}{d_k} x^{pA_k} + \frac{s_{(p+1)A_{k+1}} a_k^2}{d_k} x^{pA_{k+1}}.$$

Pour $1 \leq k \leq K-1$ nous obtenons ainsi, en prenant le coefficient de x^{pA_k} dans u (donné également par la face F_{k-1}) :

$$-\frac{s_{(p+1)A_k}a_{k+1}^2}{d_k} = \frac{s_{(p+1)A_{k+1}}a_k^2}{d_k}$$

et comme a_{k-1}^2, d_k, d_{k-1} sont strictement positifs et a_{k+1}^2 est positif ou nul, on aboutit bien à : $s_{(p+1)A_k} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I.N. BERNSTEIN, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, Fonct. Anal. and Applic., vol.6 (1972).

[2] J.E. BJORK, Rings of Differential Operators, North-Holland Math. Library, 1979.

[3] J. BRIANÇON, Description de $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}\{x,y\}$, Inv. Math., 41 (1977).

[4] J. BRIANÇON, M. GRANGER, Ph. MAISONOBE, Sur le polynôme de Bernstein des singularités semi-quasi homogènes, Prépub. n° 138 de l'Univ. de Nice, (1986).

[5] J. BRIANÇON, M. GRANGER, Ph. MAISONOBE, M. MINICONI, Polynôme de Bernstein d'une singularité non dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton, Prépub. n° 155 de l'Univ. de Nice, (1987).

[6] J. BRIANÇON, H. SKODA, Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbb{C}^n$, C.R. Acad. Sci., Paris, 278 (1974).

[7] P. CASSOU-NOGUÈS, Racines de polynômes de Bernstein, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 36-4 (1986), 1-30.

[8] P. CASSOU-NOGUÈS, Etude du comportement du polynôme de Bernstein lors d'une déformation à μ constant de $x^a + y^b$ avec $(a,b) = 1$, Comp. Math., 63 (1987).

[9] P. CASSOU-NOGUÈS, Polynôme de Bernstein générique des singularités semi-quasi homogènes, Prépub. Bordeaux, (1986).

[10] A. GALLIGO, Algorithme de calcul de bases standard, Prépub. Univ. Nice, 9 (1983).

[11] M. KASHIWARA, B-function and holonomic system, Inv. Math., 38 (1976).

[12] M. KATO, An estimate of the roots of b-functions by Newton polyhedra, Proc. Japan Acad, 57. Ser.A, (1981).

[13] M. KATO, The b-function of μ-constant deformation of $x^7 + y^5$, Bull. Coll. of Sc. Univ. of Ryukyu, 32 (1981).

[14] M. KATO, The b-function of μ-constant deformation of $x^9 + y^4$, Bull. Coll. of Sc. Univ. of Ryukyu, 32 (1982).

[15] A.G. KOUCHNIRENKO. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Inv. Math., 32 (1976), 1-31.

[16] M. LEJEUNE, B TEISSIER, Clôtures intégrales des idéaux et équisingularité, Séminaire Lejeune-Teissier, Prépub. Univ. de Grenoble, (1974).

[17] J. LIPMAN, B. TEISSIER, Pseudo rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, Michig. Math. Journ., vol 28, (1981).

[18] F. LOESER, Fonctions d'Igusa p-adiques et polynômes de Bernstein, Amer. Journ. of Math., 109 (1987), 1-22.

[19] B. MALGRANGE, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, in *Fourier Integral Operators and partial Differential Equations*, Coll. Intern. de Nice, (1974), Lectures Notes in Math., vol. 459, (1975).

[20] B. MALGRANGE, Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers, Coll. Luminy (1981), Astérisque 101 et 102, Soc. Math. France.

[21] F. PHAM, Singularités des systèmes différentiels de Gauß-Manin, Prog. in Math. 2, Birkhäuser, 1979.

[22] K. SAITO, Quasi-homogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Inv. Math., 14 (1971).

[23] K. SAITO, On the stucture of Brieskorn lattices, Prépub. RIMS, Kyoto Univ., 608 (1988).

[24] K. SAITO, Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities, Prépub., Inst. Fourier,Grenoble, (1983).

[25] G. SCHEJA, U. STORCH, Uber Spurfunktionen bei vollständiger Durchschnitten, Journal für reine und angewandte Mathematik, 278/279 (1975).

[26] A.N. VARCHENKO, Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology, Math USSR Izvestija, vol. 18, n° 3,(1982).

[27] A.N. VARCHENKO, The Gauß-Manin connection of isolated singular points and Bernstein polynomial, Bull. Soc. Math. Fr., 2° série, 104 (1980).

[28] A.N. VARCHENKO, A.G. HOVANSKY, Asymptotic behavior of integrals on vanishing cycles and Newton polyhedron, Dan. SSSR, 283-3 (1985).

[29] T. YANO, On the theory of b-functions, Publ. RIMS, Kyoto Univ, 14 (1978).

Manuscrit reçu le 10 janvier 1989,
révisé le 12 juillet 1989.

J. BRIANÇON, Ph. MAISONOBE
& M. MINICONI,
Université de Nice
I.M.S.P. – Mathématiques
Parc Valrose
06034 Nice cedex.

M. GRANGER,
Université d'Angers
Mathématiques
2 boulevard Lavoisier
49045 Angers Cedex.