ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ÉTIENNE GHYS
TAKASHI TSUBOI

Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1

Annales de l'institut Fourier, tome 38, n° 1 (1988), p. 215-244
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_1_215_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 1 (1988), 215-244

DIFFÉRENTIABILITÉ DES CONJUGAISONS ENTRE SYSTÈMES DYNAMIQUES DE DIMENSION 1

par E. GHYS & T. TSUBOI

1. Introduction.

On connaît de nombreux exemples de systèmes dynamiques et de feuilletages qui sont topologiquement conjugés mais pas différentiablement conjugués (feuilletages d'Anosov, difféomorphismes du cercle, fractions rationnelles, applications expansives...). Dans ce travail, nous nous intéressons à la question générale suivante : si deux systèmes dynamiques de dimension 1 et de classe C^r sont C^1-conjugués, dans quelles conditions sont-ils C^r-conjugués?

Nous nous intéressons en fait à deux types de systèmes dynamiques de dimension 1. Le premier est celui constitué des feuilletages de codimension 1. Le fait que nous considérons ces feuilletages comme des systèmes dynamiques de dimension 1 est justifié par le rôle essentiel joué par leur pseudo-groupe transverse (voir [7]). Le second type est constitué des applications (éventuellement non bijectives) du cercle dans lui-même. Il est clair que ce second type diffère essentiellement du premier à cause de l'existence de points critiques .

Mots-clés : Conjugaison - Feuilletage - Systèmes dynamiques - Invariant de Godbillon-Vey.

Pour énoncer notre premier résultat, nous introduisons une définition. Soient $(M_1, \mathcal{F}_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2)$ deux variétés feuilletées de classe C^r $(2 \leq r \leq \omega)$. Soit $\phi : M_1 \to M_2$ une application de classe C^1 envoyant les feuilles de $\mathcal{F}_1$ dans celles de $\mathcal{F}_2$. Nous dirons que ϕ est transversalement de classe C^r si, localement, ϕ induit une application de classe C^r entre les espaces des feuilles locaux. Dans une telle situation, on peut approcher ϕ dans la C^1-topologie par une application ψ de classe C^r qui envoie les feuilles de $\mathcal{F}_1$ dans celles de $\mathcal{F}_2$ (voir proposition 3.6).

THÉORÈME A. — *Soient $(M_1, \mathcal{F}_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2)$ deux variétés compactes feuilletées, de codimension 1 et de classe C^r $(2 \leq r \leq \omega)$. On suppose que l'holonomie de $\mathcal{F}_1$ est non triviale et qu'il existe un difféomorphisme ϕ, de classe C^1, envoyant $\mathcal{F}_1$ sur $\mathcal{F}_2$. Alors, ϕ est transversalement de classe C^r sur l'ouvert de M_1 constitué des feuilles non compactes de $\mathcal{F}_1$.*

Un cas très particulier de ce théorème avait déjà été démontré dans [5] dans le cadre des feuilletages d'Anosov.

Comme corollaire de ce théorème, nous retrouvons un résultat de G. Raby [14] qui est en fait la motivation initiale de ce travail. Rappelons que si $(M, \mathcal{F})$ est une variété feuilletée, de codimension 1 et de classe C^2, on peut lui associer une classe de cohomologie de $H^3(M; \mathbf{R})$ notée $gv(\mathcal{F})$ et appelée invariant de Godbillon-Vey de $\mathcal{F}$ (voir [6]). La définition de cet invariant ne peut pas s'étendre aux feuilletages de classe C^1 car le classifiant des feuilletages de classe C^1 et de codimension 1 est contractile ([21]). On a cependant le résultat suivant :

COROLLAIRE B (G. Raby). — *Soient $(M_1, \mathcal{F}_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2)$ deux variétés compactes feuilletées, de codimension 1 et de classe C^2. Soit ϕ un difféomorphisme de classe C^1 envoyant $\mathcal{F}_1$ sur $\mathcal{F}_2$. Alors on a :*

$$gv(\mathcal{F}_1) = \phi^*(gv(\mathcal{F}_2)).$$

Pour simplifier l'énoncé de nos résultats relatifs aux applications du cercle dans lui-même, nous nous limiterons en fait aux applications analytiques réelles.

THÉORÈME C. — *Soient f_1 et f_2 deux applications analytiques réelles de S^1 dans S^1 telles que le degré topologique* $\deg(f_1)$ *de f_1 vérifie* $|\deg(f_1)| \geq 2$. *Supposons qu'il existe un difféomorphisme du cercle ϕ, de classe C^1, tel que $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$. Alors, ϕ est analytique réel.*

Pour traiter du cas où $|\deg(f_1)| \leq 1$, nous sommes amenés à faire l'hypothèse suivante sur f_1 :

(∗) i) f_1 possède au moins un point périodique
ii) f_1 n'est pas constante et aucun itéré positif $f_1^n (n > 0)$ de f_1 ne coïncide avec l'identité.

Evidemment, l'hypothèse i) est automatiquement vérifiée si $\deg(f_1) \neq 1$. Si $\deg(f_1) = +1$, un théorème de [11] donne une condition simple pour que i) soit vérifiée; il suffit que f_1 possède au moins un point critique au voisinage duquel la dérivée de f_1 change de signe.

THÉORÈME C'. — *Soient f_1 et f_2 deux applications analytiques réelles de S^1 dans S^1 vérifiant l'hypothèse* (∗). *Supposons qu'il existe un difféomorphisme ϕ, de classe C^1, tel que $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$. Alors ϕ est analytique réel en dehors d'un ensemble fini K positivement invariant par f_1 (i.e.$f_1(K) \subset K$).*

Enfin, nous mentionnons un théorème (de démonstration plus simple) relatif aux systèmes dynamiques de dimension 1 complexe, analogue au théorème C. Ceci suggère qu'une version complexe du théorème A pourrait être vraie.

THÉORÈME D. — *Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fractions rationnelles de la variable complexe z, considérées comme applications holomorphes de $\mathbf{C}P^1$ dans $\mathbf{C}P^1$. On suppose que le degré de f_1 est supérieur ou égal à 2 et qu'il existe un difféomorphisme ϕ, de classe C^1 (au sens réel) tel que $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$. Alors ϕ est en fait une transformation homographique ou le composé d'une transformation homographique et de la symétrie $z \mapsto \bar{z}$.*

Cet article est organisé de la façon suivante. Le paragraphe 2 est consacré à quelques rappels concernant les germes de difféomorphismes qui sont fondamentaux pour la suite. Dans le paragraphe 3, nous démontrons le théorème A et le corollaire B. Dans le paragraphe 4, nous démontrons successivement les théorèmes D et C–C'. Enfin, nous regroupons quelques exemples et contre-exemples dans le paragraphe 5.

2. Germes de difféomorphismes.

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats qui seront à la base de la démonstration des théorèmes A et C. Notons $G^r(\mathbf{R},0)$ (resp. $G^r(\mathbf{R}^+,0)$) le groupe des germes en 0 de difféomorphismes locaux de $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}^+$), de classe C^r ($1 \leq r \leq \omega$), qui fixent 0 et respectent l'orientation. Un germe f de $G^r(\mathbf{R},0)$ ou $G^r(\mathbf{R}^+,0)$ sera dit sans point fixe si l'un de ses représentants ne fixe que 0.

Le premier résultat que nous rappelons est dû à S. Sternberg sous une forme un peu plus faible et à J.C. Yoccoz dans la forme ci-dessous. Le cas $r = \omega$ est dû à Schröder.

THÉORÈME 2.1 ([17],[22]). — *Soit $f \in G^r(\mathbf{R},0)$ un germe hyperbolique, c'est-à-dire tel que $f'(0) \neq 1$. Si $2 \leq r \leq \omega$, alors f est C^r-conjugué à sa partie linéaire.*

COROLLAIRE 2.2. — *Soient f_1 et f_2 deux germes hyperboliques de $G^r(\mathbf{R},0)$ ($2 \leq r \leq \omega$). Si ϕ est un germe de $G^1(\mathbf{R},0)$ qui conjugue f_1 et f_2, alors ϕ est de classe C^r.*

Démonstration. — D'après 2.1, on peut supposer que f_1 et f_2 sont linéaires. Le germe ϕ vérifie alors une relation du type :

$$\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x).$$

On en déduit

$$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{\phi(\lambda^n x)}{\lambda^n x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi'(0)$$

si, par exemple $0 < \lambda < 1$. Le germe ϕ est alors linéaire et donc de classe C^r. □

La situation est bien plus compliquée lorsque le germe étudié n'est pas hyperbolique. On a cependant le résultat suivant dû à G. Szekeres et amélioré par F. Sergeraert (voir aussi [22]).

THÉORÈME 2.3 ([18],[16]). — *Soit $f \in G^r(\mathbf{R}^+,0)$ un germe sans point fixe ($2 \leq r \leq \omega$). Alors, il existe un unique germe de champ de vecteurs ξ, défini au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^+$, de classe C^1, dont le flot associé ξ^t vérifie $\xi^1 = f$. De plus, ce champ ξ est de classe C^{r-1} en dehors de 0 (on convient évidemment que $\infty - 1 = \infty$ et $\omega - 1 = \omega$).*

Le théorème suivant, dû à N. Koppel, décrit le centralisateur des germes f.

THÉORÈME 2.4([10]). — *Soit $f \in G^r(\mathbf{R}^+,0)$ $(2 \leq r \leq \omega)$ un germe sans point fixe et $\phi \in G^1(\mathbf{R}^+,0)$ un germe commutant avec f. Alors ϕ est un élément du flot ξ^t associé à f.*

Le corollaire suivant résume ce dont nous aurons besoin pour le théorème A :

COROLLAIRE 2.5. — *Soient $a_1, b_1, a'_1, b'_1, a_2, b_2, a'_2, b'_2$ des réels tels que : $a_1 < 0 < b_1; a_2 < 0 < b_2; a'_1 < 0 < b'_1; a'_2 < 0 < b'_2$. Soit f_1 (resp.f_2) un difféomorphisme de classe C^r $(2 \leq r \leq \omega)$ de $]a_1, b_1[$ sur $]a'_1, b'_1[$ (resp.$]a_2, b_2[$ sur $]a'_2, b'_2[$) tel que $f_1(0) = 0$ (resp.$f_2(0) = 0$). Soit $\phi :]a_1, b_1[\to]a_2, b_2[$ un difféomorphisme de classe C^1 tel que $f_2 \circ \phi = \phi \circ f_1$. Alors, ϕ est de classe C^r sur l'ouvert de $]a_1, b_1[$ formé des points non fixes de f_1.*

Démonstration. — Soit $]\alpha, \beta[\subset]a_1, b_1[$ une composante connexe de $]a_1, b_1[- \mathrm{Fix}(f_1)$. L'une des deux extrémités de $]\alpha, \beta[$, par exemple α, est un point fixe de f_1. Le germe de f_1 à droite en α est alors un germe sans point fixe. Il existe donc un germe à droite de champ de vecteurs ξ_1 en α, de classe C^1, tel que le germe à droite de f_1 en α soit l'intégrale du temps 1 de ξ_1. On obtient de la même façon un germe à droite de champ de vecteurs ξ_2 en $\alpha_2 = \phi(\alpha_1)$. D'après le théorème 2.4, le difféomorphisme ϕ conjugue les flots associés ξ_1^t et ξ_2^t. On observe alors le fait élémentaire suivant : si ξ est un champ de vecteurs sans singularité de classe C^{r-1} sur $]\alpha, \alpha + \varepsilon[$, alors, le flot local de ξ est de classe C^r. On en déduit que ϕ est de classe C^r sur un intervalle I du type $]\alpha, \alpha+\varepsilon[$. La formule $f_1 \circ \phi = \phi \circ f_2$ montre alors que, pour tout n, ϕ est également de classe C^rsur $I_n = f_1^n(]\alpha, \alpha+\varepsilon[\cap \mathrm{dom}(f_1^n))$. On vérifie alors facilement que ces intervalles I_n recouvrent $]\alpha, \beta[$. Nous avons donc montré que ϕ est de classe C^r sur $]\alpha, \beta[$ et donc sur $]a_1, b_1[-\mathrm{Fix}(f_1)$. □

Pour l'étude des applications de S^1 dans S^1, nous aurons besoin de deux résultats supplémentaires. Le premier est bien connu; il traite des points fixes critiques (voir, par exemple [1]).

THÉORÈME 2.6. — *Soit f un germe d'application non constante de classe C^ω en 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Alors, il existe un entier $k \geq 2$ tel que f est analytiquement conjugué au germe de $x \mapsto x^k$.*

COROLLAIRE 2.7. — *Soit f_1 un germe d'application non constante de classe C^ω tel que $f_1(0) = f_1'(0) = 0$. Soit f_2 un germe d'application de classe C^ω tel que $f_2(0) = 0$. S'il existe ϕ dans $G^1(\mathbf{R}, 0)$ qui conjugue f_1 et f_2 alors ϕ est de classe C^ω.*

Démonstration. — On a évidemment $f_2'(0) = 0$, de sorte que f_2 est analytiquement conjugué à $x \mapsto x^{k'}$. L'entier k (resp. k') est l'unique entier tel que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{x^k} \neq 0 \quad (\text{resp.} \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)}{x^{k'}} \neq 0).$$

Puisque ϕ est de classe C^1 et conjugue f_1 et f_2, on conclut aisément que $k = k'$. Nous pouvons donc supposer que f_1 et f_2 sont les germes de $x \mapsto x^k$. On a alors :

$$\phi(x^k) = \phi(x)^k$$
$$k\phi'(x^k)\cdot x^{k-1} = k\phi(x)^{k-1}\phi'(x)$$
$$x^k \frac{\phi'(x^k)}{\phi(x^k)} = x\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}.$$

La quantité $x\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ est donc constante sur les orbites de $x \to x^k$. Lorsque x tend vers 0, cette quantité tend vers 1, de sorte que :

$$x\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = 1.$$

Cette équation différentielle donne :

$$\phi(x) = \lambda x.$$

Cette solution est donc bien analytique réelle. □

Enfin, nous utiliserons le résultat suivant de F. Takens.

THÉORÈME 2.8([19]). — *Soit $f \in G^\infty(\mathbf{R}, 0)$ un germe non hyperbolique dont le jet d'ordre infini est non trivial. Alors f est C^∞-conjugué à l'intégrale de temps 1 d'un unique champ de vecteurs du type $(ax^k + b\,x^{2k-1})\dfrac{\partial}{\partial x}$ où $a = \pm 1$, $b \in \mathbf{R}$ et $k \geq 2$. Les intégrales de temps 1 de deux champs de vecteurs de ce type ayant mêmes a, k sont C^{k-1} conjugués.*

COROLLAIRE 2.9. — *Soient f_1 et f_2 deux éléments non triviaux de $G^\omega(\mathbf{R}^+, 0)$ et ϕ un élément de $G^1(\mathbf{R}^+, 0)$ qui conjugue f_1 et f_2. Alors, si ϕ n'est pas de classe C^∞, il possède un développement asymptotique du type :*

$$\phi(x) = \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{k-1}x^{k-1} + \lambda_k x^k(\mathrm{Log}|x| + O(x)) \quad \lambda_k \neq 0.$$

Démonstration. — D'après 2.2, f_1 et f_2 ne sont pas hypberboliques et nous pouvons donc utiliser le théorème 2.8. Soient $\zeta_1 = (a_1 x^{k_1} + b_1 x^{2k_1 - 1})\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\zeta_2 = (a_2 x^{k_2} + b_2 x^{2k_2-1})\dfrac{\partial}{\partial x}$ les champs associés à f_1 et f_2.

Puisque f_1 et f_2 sont C^1-conjugués, ils sont simultanément contractants ou dilatants, c'est-à-dire que $a_1 = a_2 = a$. De même, f_1 et f_2 ont même ordre de contact avec l'identité; c'est-à-dire que $k_1 = k_2 = k$.

Soient g_1 et g_2 deux éléments de $G^\infty(\mathbf{R}^+, 0)$ tels que $f_1 = g_1 \circ \zeta_1^1 \circ g_1^{-1}$ et $f_2 = g_2 \circ \zeta_2^1 \circ g_2^{-1}$. Comme $f_2 = \phi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$, on a :

$$(g_2^{-1} \circ \phi \circ g_1) \circ \zeta_1^1 = \zeta_2^1 \circ (g_2^{-1} \circ \phi \circ g_1).$$

Si l'on avait $b_1 = b_2$, on aurait donc $\zeta_1 = \zeta_2$ et le théorème 2.4 montrerait donc que $g_2^{-1} \circ \phi \circ g_1$ serait du type ζ_1^t et donc de classe C^∞. Ceci contredit le fait que ϕ n'est pas de classe C^∞. On a donc $b_1 \neq b_2$.

Posons $\psi = g_2^{-1} \circ \phi \circ g_1$. Alors ψ conjugue ζ_1 et ζ_2 et satisfait donc à l'équation différentielle à variables séparées :

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{a\psi^k + b_2\psi^{2k-1}}{ax^k + b_1x^{2k-1}} = \frac{\psi^k + ab_2\psi^{2k-1}}{x^k + ab_1\psi^{2k-1}}.$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\begin{aligned}\psi(x) = x\{1 + x^{k-1}\{(k-1)(ab_1\mathrm{Log}|x| - ab_2\mathrm{Log}|\psi|)+ \\ ab_2\mathrm{Log}(1 + ab_2\psi^{k-1}) - ab_1\ \mathrm{Log}(1 + ab_1x^{k-1}) + \mathrm{Cst}\}\}^{\frac{1}{k-1}}.\end{aligned}$$

Puisque nous savons que ψ est de classe C^1, on a :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x\{1 + x^{k-1}(k-1)(ab_1 - ab_2)\ \mathrm{Log}|x| + x^{k-1}O(x)\}^{-\frac{1}{k-1}} \\ &= x - (ab_1 - ab_2)x^k\ \mathrm{Log}|x| + x^kO(x).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\phi = g_2 \circ \psi \circ g_1^{-1}$ admet un développement asymptotique du type :

$$\phi(x) = \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{k-1}x^{k-1} + \lambda_k x^k(\mathrm{Log}|x| + O(x)) \quad \lambda_k \neq 0.$$

□

3. Feuilletages de codimension 1.

3.a. Démonstration du théorème A.

Plaçons-nous dans la situation du théorème A, c'est-à-dire que $(M_1, \mathcal{F}_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2)$ sont deux variétés feuilletées compactes, de codimension 1 et de classe C^r. On suppose que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ont une holonomie non triviale et qu'il existe un difféomorphisme ϕ de classe C^1 de M_1 sur M_2 qui envoie $\mathcal{F}_1$ sur $\mathcal{F}_2$.

Notons Ω l'ouvert de M_1 formé des points x_1 tels que ϕ est transversalement de classe C^r au voisinage de x_1. Nous devons montrer que Ω contient toutes les feuilles non compactes de $\mathcal{F}_1$. En passant à un revêtement à deux feuillets, nous pouvons évidemment supposer que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont transversalement orientés et que ϕ préserve l'orientation transverse.

Il sera commode d'introduire les pseudo-groupes transverses de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ (voir [7]). Considérons un recouvrement $\mathcal{U}^1 = (U_1^1, U_2^1, \ldots,$

U_n^1) de M_1 par des ouverts tels que la restriction de $\mathcal{F}_1$ à U_i^1 soit définie par une submersion f_i^1 de classe C^r de U_i sur un intervalle T_i^1. Le pseudo-groupe transverse Γ^1 de $\mathcal{F}_1$ opère alors sur la réunion disjointe T^1 des T_i^1. Dans ces conditions les ouverts $U_i^2 = \phi(U_i^1)$ sont aussi trivialisants pour $\mathcal{F}_2$ et la restriction de $\mathcal{F}_2$ à U_i^2 peut être définie par une submersion f_i^2 de classe C^r de U_i^2 sur T_i^2. Le pseudo-groupe transverse Γ^2 de $\mathcal{F}_2$ opère alors sur la réunion disjointe T^2 des T_i^2. Le difféomorphisme ϕ de classe C^1 permet alors de construire un difféomorphisme $\bar{\phi}$ de T^1 sur T^2 et un isomorphisme $\phi_\star$ de Γ^1 sur Γ^2 tels que, pour tout γ_1 de Γ^1 et tout x_1 de T^1 appartenant au domaine de Γ_1 :

$$\bar{\phi}(\gamma_1(t_1)) = \phi_\star(\gamma_1)(\bar{\phi}(t_1)). \tag{1}$$

On notera $\tilde{\Omega}$ l'ouvert de T^1 formé des points au voisinage desquels $\bar{\phi}$ est de classe C^r. Il est clair qu'un point x_1 de U_i^1 est dans Ω si et seulement si $f_i^1(x_1)$ est dans $\tilde{\Omega}$.

LEMME 3.1. — *Ω est saturé par $\mathcal{F}_1$, i.e. $\tilde{\Omega}$ est invariant par Γ^1.*

Démonstration. — Si $\bar{\phi}$ est de classe C^r au voisinage de t_1, la formule (1) montre que $\bar{\phi}$ est aussi de classe C^r au voisinage de $\gamma_1(t_1)$ car γ_1 et $\phi_\star(\gamma_1)$ sont de classe C^r. □

LEMME 3.2. — *Ω est non vide, i.e. $\tilde{\Omega}$ est non vide.*

Démonstration. — Puisque nous supposons que l'holonomie de $\mathcal{F}_1$ est non triviale, il existe $\gamma_1 \in \Gamma^1$ et $t_1 \in \mathrm{Dom}(\gamma_1)$ tels que $\gamma_1(t_1) = t_1$ et γ_1 n'est pas l'identité au voisinage de t_1. Dans ces conditions, $\bar{\phi}$ est un C^1-difféomorphisme qui conjugue γ_1 et $\phi_\star(\gamma_1)$ au voisinage de t_1 et $\bar{\phi}(t_1)$ respectivement. Le corollaire 2.5 permet alors de conclure que $\bar{\phi}$ est de classe C^r sur un ouvert non vide. □

Rappelons qu'un compact $K \subset M_1$ est dit minimal s'il est saturé par $\mathcal{F}_1$, non vide et minimal pour ces propriétés. Tout compact saturé contient un minimal. Un minimal ne peut être que de trois types : la variété M_1 toute entière, une feuille compacte ou un "minimal exceptionnel" (voir par exemple [8]).

LEMME 3.3. — *Les seuls minimaux contenus dans $M_1 - \Omega$*

sont des feuilles compactes.

Démonstration. — Puisque $M_1 - \Omega$ ne peut être égal à M_1, il suffit de montrer que $M_1 - \Omega$ ne contient pas de minimal exceptionnel. Le théorème de R. Sacksteder ([15]) affirme que tout minimal exceptionnel d'un feuilletage de classe C^2 contient un lacet d'holonomie hyperbolique. Si donc $M_1 - \Omega$ contenait un minimal exceptionnel, on pourrait trouver un point t_1 de $T^1 - \tilde{\Omega}$ et un élément γ_1 de Γ^1 tel que $\gamma_1(t_1) = t_1$ et $\gamma_1'(t_1) \neq 1$. Dans ce cas, $\bar{\phi}$ au voisinage de t_1 conjuguerait les deux germes hyperboliques γ_1 en t_1 et $\phi_*(\gamma_1)$ en $\bar{\phi}(t_1)$ qui sont de classe C^r. D'après 2.2, ceci montrerait que $\bar{\phi}$ est de classe C^r au voisinage de t_1 et donc que $t_1 \in \tilde{\Omega}$. Mais ceci est impossible car nous avons supposé que $t_1 \in T^1 - \tilde{\Omega}$. □

LEMME 3.4. — *Soit F une feuille compacte de F_1. Alors, il existe un voisinage V de F dans M_1 tel que toutes les feuilles passant par les points de $V - \Omega \cap V$ sont compactes.*

Démonstration. — Soit T un arc de classe C^r transverse à F en un point x de F. Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ un système de générateurs de $\pi_1(F, x)$. On peut alors trouver un voisinage J de x dans T tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :

i) L'holonomie de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ est définie sur J et à valeurs dans T.

ii) Un point de J fixe par les holonomies de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ appartient à une feuille compacte de $\mathcal{F}_1$.

En utilisant la même méthode que précédemment et le corollaire 2.5, on voit que tous les points de J qui ne sont pas fixes par l'holonomie de l'un des α_i sont dans $\tilde{\Omega}$. Il est alors facile de conclure. □

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème A.

THÉORÈME 3.5. — *Ω contient toutes les feuilles non compactes de $\mathcal{F}_1$.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe une feuille L contenue dans $M_1 - \Omega$. L'adhérence $\bar{L}$ de L contient alors un minimal de $\mathcal{F}_1$ qui est nécessairement une feuille compacte d'après 3.3. Le lemme 3.4 montre alors que L est compacte. □

Nous esquissons maintenant la démonstration du fait bien connu suivant qui a été mentionné dans l'introduction.

PROPOSITION 3.6. — *Le difféomorphisme ϕ peut être approché dans la C^1-topologie par un difféomorphisme ψ qui envoie $\mathcal{F}_1$ sur $\mathcal{F}_2$ et qui est de classe C^r sur l'ouvert des feuilles non compactes de $\mathcal{F}_1$.*

Démonstration. — Soit $i : M_2 \hookrightarrow \mathbf{R}^N$ un plongement de classe C^r. Si δ est un réel positif suffisamment petit et si l'application $\theta : M_1 \to \mathbf{R}^N$, de classe C^r, est suffisamment proche de $i \circ \phi$ dans la C^1-topologie, alors la propriété suivante est réalisée. Pour tout x de M_1, il existe un unique point $\psi(x)$ de M_2 tel que la droite joignant $\theta(x)$ à $i(\psi(x))$ est orthogonale à la boule de centre $i(\phi(x))$ et de rayon δ dans la feuille passant par $i(\phi(x))$. L'application ψ répond à la question. □

Remarque 3.7. — Nous ne savons pas si l'hypothèse suivant laquelle l'holonomie de $\mathcal{F}_1$ est non triviale est nécessaire pour obtenir le théorème A. Il est facile de vérifier que cette question est équivalente au problème suivant qui nous semble intéressant :

Problème. — Existe-t-il deux difféomorphismes du cercle, de classe C^r $(2 \leq r \leq \omega)$, de nombres de rotation irrationnels, qui sont C^1-conjugués sans être C^r-conjugués? Remarquons que le théorème de M. Herman ([9]) montre que pour la plupart des nombres de rotations, la C^0-conjugaison entraîne la C^{r-1} conjugaison.

Remarque 3.8. — Il existe des exemples de conjugaisons de classe C^1 entre deux feuilletages de classe C^∞ et de codimension 1 qui ne sont pas transversalement de classe C^2 sur les feuilles compactes. L'exemple le plus évident d'une telle situation est donné par un feuilletage produit. Si l'holonomie d'une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de classe C^∞ est infiniment tangente à l'identité (par exemple le feuilletage de Reeb), il existe un C^1-difféomorphisme ϕ qui n'est pas C^2 et tel que $\phi^\star\mathcal{F}$ est de classe C^∞. Ceci résulte de l'observation suivante : Soit ϕ un élément de $G^1(\mathbf{R},0)$ qui est de classe C^∞ sur $[0,\varepsilon[$ et $]-\varepsilon,0]$. Alors, pour tout germe g de $G^\infty(\mathbf{R},0)$ qui est infiniment tangent à l'identité, $\phi\circ g\circ\phi^{-1}$ est encore de classe C^∞.

Il résulte de [20] que si $\mathcal{F}$ est un germe de feuilletage de classe C^∞ au voisinage d'une feuille compacte F, alors $\mathcal{F}$ est topologiquement conjugué à un germe de feuilletage de classe C^∞ au voisinage de F pour lequel l'holonomie de F est infiniment tangente à l'identité. Ceci montre qu'il n'y a pas de restriction topologique sur les feuilletages dans un voisinage d'une feuille compacte où ϕ n'est que de classe C^1.

3.b. Démonstration du corollaire B.

Nous rappelons tout d'abord la définition de l'invariant de Godbillon-Vey (voir [6]). Ici encore, nous nous limiterons au cas transversalement orientable.

Si un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 est défini par une 1-forme non singulière ω de classe C^2, la condition d'intégrabilité montre qu'il existe une 1-forme α, de classe C^1, telle que :

$$d\omega=\omega\wedge\alpha.$$

On vérifie alors que la 3-forme $\alpha\wedge d\alpha$ est fermée (éventuellement comme courant) et que sa classe de cohomologie ne dépend que de $\mathcal{F}$ (voir plus bas). Cette classe est l'invariant de Godbillon-Vey de $\mathcal{F}$. Par ailleurs, pour toute feuille L de $\mathcal{F}$, la restriction de α à L est fermée. L'intégrale de α sur un lacet de L est le logarithme de la partie linéaire de l'holonomie de ce lacet. Si M est une variété à bord et si $\mathcal{F}$ est tangent au bord, $\alpha\wedge d\alpha$ définit une classe de cohomologie relative dans $H^3(M,\partial M)$ qui ne dépend en fait que de $\mathcal{F}$.

Nous pouvons maintenant démontrer le corollaire B. Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont sans holonomie, leur invariant de Godbillon-Vey est trivial d'après [12] et il n'y a rien à démontrer. Nous pouvons donc supposer que nous sommes dans les hypothèses du théorème A. L'argument de la proposition 3.6 montre alors que l'on peut approcher ϕ par un difféomorphisme $\psi : M_1\to M_2$ qui est de classe C^2 en dehors du fermé K constitué de feuilles compactes de $\mathcal{F}_1$. On peut même supposer que la restriction de ψ à chaque feuille de $\mathcal{F}_1$ est de classe

C^2.

Soit ω_1 (resp. ω_2) une 1-forme de classe C^2 définissant $\mathcal{F}_1$ (resp.$\mathcal{F}_2$) et α_1 (resp.α_2) une 1-forme telle que :

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \alpha_1 \quad (\text{resp. } d\omega_2 = \omega_2 \wedge \alpha_2).$$

On a alors :

$$\psi^\star \omega_2 = \exp(f)\omega_1$$

$$\psi^\star \alpha_2 = \alpha_1 + \eta$$

$$\psi^\star(d\alpha_2) = d\alpha_1 + \xi$$

où f,η et ξ sont de classe C^0 et f et η sont de classe C^1 sur $M_1 - K$. Sur $M_1 - K$ l'égalité

$$d(\psi^\star \omega_2) = \psi^\star \omega_2 \wedge \psi^\star \alpha_2$$

montre que :

$$\eta = -df + g\omega_1$$

où g est une fonction continue sur $M_1 - K$. De la même façon, sur $M_1 - K$, on a évidemment

$$\xi = d\eta.$$

Toujours sur $M_1 - K$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \psi^\star \alpha_2 \wedge \psi^\star d\alpha_2 - \alpha_1 \wedge d\alpha_1 &= \alpha_1 \wedge d\eta + \eta \wedge d\alpha_1 + \eta \wedge d\eta \\ &= d(\alpha_1 \wedge \eta) + \eta \wedge \xi. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que pour $i = 1, 2$:

$$0 = d(d\omega_i) = d(\omega_i \wedge \alpha_i) = \omega_i \wedge d\alpha_i,$$

on a :

$$\begin{aligned} g\omega_1 \wedge \xi &= g\omega_1 \wedge (\psi^\star(d\alpha_2) - d\alpha_1) \\ &= g\exp(-f)(\psi^\star \omega_2) \wedge (\psi^\star(d\alpha_2)) - g\omega_1 \wedge d\alpha_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On obtient finalement sur $M_1 - K$:

$$\psi^\star \alpha_2 \wedge \psi^\star d\alpha_2 - \alpha_1 \wedge d\alpha_1 = d(\alpha_1 \wedge \eta - f\xi) \quad (\text{au sens des courants}).$$

La formule précédente, essentiellement classique, montre bien sûr que si ψ est de classe C^2, (par exemple s'il n'y a pas de feuille compacte) alors $\psi^\star(gv(\mathcal{F}_2)) = gv(\mathcal{F}_1)$. Si $\mathcal{F}_1$ possède une feuille compacte, on a cependant le lemme suivant :

LEMME 3.9. — *Si L est une feuille compacte de $\mathcal{F}_1$, alors la restriction de $\alpha_1 \wedge \eta - f\xi$ à L est exacte.*

Démonstration. — On montre d'abord que $\eta_{|L}$ est exacte. Si l'holonomie linéaire de L est non triviale, il résulte de la démonstration du théorème A que ψ est de classe C^2 au voisinage de L et on a :

$$\eta = -df + g\omega_1$$

où df et g sont continues. Donc

$$\eta_{|L} = -d_L(f_{|L}).$$

Si l'holonomie linéaire de L est triviale, alors $\alpha_{1|L}$ et $\alpha_{2|\psi(L)}$ sont des 1-formes exactes de classe C^1. Comme $\psi_{|L}$ est de classe C^2, $\psi^\star\alpha_{2|L}$ est une forme exacte, donc

$$\eta_{|L} = \psi^\star\alpha_{2|L} - \alpha_{1|L}$$

est exacte. Le lemme se démontre alors facilement car $\alpha_{1|L}$ est fermée et $\xi_{|L} = \psi^\star(d\alpha_2)_{|L} - d\alpha_{1|L} = 0$. □

La proposition suivante est bien connue et va permettre de diviser notre problème en deux cas :

PROPOSITION 3.10. — *Il existe un découpage de $(M_1, \mathcal{F}_1)$ en un nombre fini de variétés compactes feuilletées à bord $(N_i, \mathcal{H}_i)$ tel que chaque morceau $(N_i, \mathcal{H}_i)$ soit de l'un des deux types suivants :*

I - Un feuilletage d'un I-fibré feuilleté, c'est-à-dire que $N_i = B_i \times I$ et $\mathcal{H}_i$ est transverse aux fibres de la projection $N_i \to B_i$.

II - Un feuilletage tangent au bord dont les feuilles compactes sont les composantes du bord.

Comme l'invariant de Godbillon-Vey est une classe de cohomologie réelle de dimension 3, pour démontrer le corollaire B, il suffit de montrer que pour toute application $i : V \to M$ de classe C^1 d'une variété compacte orientée de dimension 3, on a :

$$\int_V i^\star\psi^\star(\alpha_2 \wedge d\alpha_2) = \int_V i^\star(\alpha_1 \wedge d\alpha_1) \quad \text{(voir [13]).}$$

On peut supposer que i est transverse aux bords des composantes $(N_i, \mathcal{H}_i)$ de type II et que l'intersection de $i(V)$ et d'un morceau de type I soit une réunion de fibres. La démonstration du corollaire B se réduit alors au cas où M_1 est un morceau de type I ou II.

Nous traitons d'abord du cas des morceaux de type II. Soit N_1 un tel morceau et N_1^ε l'ensemble des points de N_1 qui sont en dehors d'un ε-voisinage tubulaire du bord de N_1. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{i^{-1}(N_1)} & i^\star(\psi^\star(\alpha_2 \wedge d\alpha_2) - \alpha_1 \wedge d\alpha_1) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{i^{-1}(N_1^\varepsilon)} i^\star(\psi^\star(\alpha_2 \wedge d\alpha_2) - \alpha_1 \wedge d\alpha_1) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial(i^{-1}(N_1^\varepsilon))} i^\star(\alpha_1 \wedge \eta - f \cdot \xi) \\ &= \int_{\partial(i^{-1}(N_1))} i^\star(\alpha_1 \wedge \eta - f \cdot \xi).\end{aligned}$$

Le lemme 3.9 montre que cette dernière intégrale est nulle.

Maintenant, si N_1 est un morceau de type I, $i^\star\mathcal{F}_1$ et $i^\star\psi^\star\mathcal{F}_2$ sont des I-fibrés feuilletés. Dans ce cas, l'intégrale de la forme de Godbillon-Vey est une somme de l'intégrale sur l'ensemble fermé formé des feuilles compactes et d'intégrales sur des morceaux de type II. Nous laissons au lecteur la vérification du fait élémentaire que l'intégrale de la forme de Godbillon-Vey sur l'ensemble des feuilles compactes est nulle. Ceci résulte de la formule du cocycle de Godbillon-Vey de $H^2(B\ \mathrm{Diff}^2(I)^\delta)$ [4] ou encore d'une application simple d'un théorème de G. Duminy [3] (voir aussi [2]). Ceci achève la démonstration du corollaire B.

4. Endomorphismes de S^1 et CP^1.

4.a. *Le cas des fractions rationnelles.*

Nous commencerons par le théorème D, de démonstration plus facile. Nous nous fixons donc deux fractions rationnelles $f_1(z)$ et $f_2(z)$ de la variable complexe z, de degré supérieur ou égal à 2, ainsi qu'un difféomorphisme ϕ de $\mathbf{C}P^1$ de classe C^1 (au sens réel) tel que $f_1 \circ \phi = \phi \circ f_2$.

Soit $x_1 \in \mathbf{C}P^1$. Les espaces tangents à $\mathbf{C}P^1$ en x_1 et $\phi(x_1)$ sont naturellement munis de structures conformes. Si C est un cercle contenu dans $T_{\phi(x_1)}\mathbf{C}P^1$, l'ellipse $d\phi^{-1}(C)$ a une excentricité $e(x_1)$ bien définie. La fonction $e : \mathbf{C}P^1 \to [0,1[$ est continue puisque ϕ est de classe C^1.

LEMME 4.1. — *La fonction e est constante sur les orbites de f_1.*

Démonstration. — Si x_1 est un point non critique de f_1, alors $(df_1)_{x_1}$ (resp.$(df_2)_{\phi(x_1)}$) est une similitude de $T_{x_1}\mathbf{C}P^1$ sur $T_{f_1(x_1)}\mathbf{C}P^1$ (resp.$T_{\phi(x_1)}\mathbf{C}P^1$ sur $T_{f_2(\phi(x_1))}\mathbf{C}P^1$). Il est alors immédiat que $e(x_1) = e(f_1(x_1))$. Si x_1 est un point critique, le lemme résulte de la continuité de e et du fait que x_1 peut être approché par des points non critiques. □

LEMME 4.2. — *La fonction e est constante.*

Démonstration. — Rappelons que si f_1 est une fraction rationnelle de degré supérieur ou égal à 2, on lui associe un ensemble de Julia $J(f_1)$ (voir par exemple [1]). Cet ensemble a en particulier la propriété suivante. Si $z_0 \in J(f_1)$, alors pour tout z de $\mathbf{C}P^1$ (avec peut-être deux exceptions), l'orbite négative de z (i.e. $\bigcup_{n=0}^{\infty} f_1^{-n}(z)$) s'accumule sur z_0. Cette propriété implique évidemment que toute fonction continue constante sur les orbites de f_1, est nécessairement constante. □

LEMME 4.3. — *L'application e est nulle.*

Démonstration. — Supposons e non nulle. Si C est un cercle contenu dans $T_{\phi(x_1)}\mathbf{C}P^1$, l'ellipse $d\phi^{-1}(C)$ n'est donc pas un cercle et la direction de son grand axe $\Delta_x \subset T_{x_1}\mathbf{C}P^1$ est donc bien définie. On obtiendrait ainsi un champ de droites non singulier et continu sur $\mathbf{C}P^1$. Il est bien connu que ceci est impossible. □

La démonstration du théorème D est maintenant claire :

THÉORÈME 4.4. — *L'application ϕ est une homographie ou le composé d'une homographie et de la symétrie $z \mapsto \bar{z}$.*

Démonstration. — Le lemme 4.3 signifie précisément que ϕ est conforme, c'est-à-dire holomorphe ou anti-holomorphe. Le théorème résulte alors de la description bien connue des automorphismes holomorphes de $\mathbf{C}P^1$. □

Remarque 4.5. — Il est possible de construire deux fractions rationnelles f_1 et f_2 qui ne sont pas homographiquement conjuguées mais qui sont conjuguées par un homéomorphisme ϕ qui est analytique réel en dehors d'un ensemble fini. Il s'agit des exemples de Lattès. Soient Λ_1 et Λ_2 deux réseaux de $\mathbf{C}$ et p_1,p_2 les fonctions de Weierstrass associées; c'est-à-dire les fonctions holomorphes de $\mathbf{C}/\Lambda_1$ et $\mathbf{C}/\Lambda_2$ dans $\mathbf{C}P^1$ telles que $p_i^{-1}(p_i(z)) = \{z, -z\} \quad (i = 1,2)$. Il existe alors des fractions rationnelles f_1 et f_2 telles que $p_i(2z) = f_i(p_i(z)) \quad (i = 1,2)$. Soit L une application $\mathbf{R}$- linéaire telle que $L(\Lambda_1) = \Lambda_2$. On peut alors construire un homéomorphisme ϕ de $\mathbf{C}P^1$ tel que $p_2 \circ L = \phi \circ p_1$ et ϕ conjugue f_1 et f_2. Cet homéomorphisme ϕ est analytique réel sauf en un nombre fini de points correspondants aux points de ramification de p_1 et p_2. Il est clair que ϕ conjugue f_1 et f_2 et que si Λ_1 et Λ_2 ne sont pas images l'un de l'autre par une application $\mathbf{C}$-linéaire, les fractions rationnelles f_1 et f_2 ne sont pas homographiquement conjuguées.

4.b. Applications du cercle dans lui-même.

Pour démontrer le théorème C, C', nous conserverons les mêmes notations : f_1 et f_2 désignent maintenant deux applications analytiques réelles de S^1 dans S^1 telles que :

(*) {
i) f_1 (et f_2) possèdent au moins un point périodique
ii) f_1 (et f_2) ne sont pas constants et, pour tout $n \geq 1$, f_1^n et f_2^n ne coïncident pas avec l'identité (ou,ce qui revient au même, f_1 et f_2 ne sont pas conjugués à une rotation périodique).

Nous désignons toujours par ϕ un difféomorphisme de S^1, de classe C^1, tel que $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$. Soit Ω l'ouvert de S^1 formé des points au voisinage desquels ϕ est de classe C^ω et par $K = S^1 - \Omega$ le compact complémentaire.

LEMME 4.6. — *K est positivement invariant par f_1, i.e. $f_1(K) \subset K$.*

Démonstration. — Soit $x_1 \in S^1$ et $y_1 = f_1(x_1)$. Nous supposerons que $y_1 \in \Omega$, c'est-à-dire que ϕ est de classe C^ω au voisinage de y_1 et nous allons montrer que x_1 est lui aussi dans Ω.

Si x_1 n'est pas un point critique de f_1, alors f_1 (resp. f_2) définit un difféomorphisme analytique réel d'un voisinage de x_1 (resp. $\phi(x_1)$) sur un voisinage de y_1 (resp. $\phi(y_1)$). Dans ces conditions, le fait que ϕ est analytique réel au voisinage de y_1 et la relation $\phi \circ f_1 = f_2 \circ \phi$ montrent que ϕ est aussi analytique réel au voisinage de x_1, c'est-à-dire que $x_1 \in \Omega$.

On suppose donc que x_1 est un point critique de f_1 que l'on peut évidemment supposer différent de y_1. Il est alors possible de définir des coordonnées locales analytiques réelles u_1, v_1, u_2, v_2 au voisinage de x_1, y_1, $x_2 = \phi(x_2)$ et $y_2 = \phi(y_1)$ telles que :

i) le point x_1 (resp. y_1, x_2, y_2) a une u_1 (resp. v_1, u_2, v_2)-coordonnée nulle,

ii) dans le voisinage de x_1 (resp. x_2) et dans les coordonnées u_1, v_1 (resp. u_2, v_2), l'application f_1 (resp. f_2) s'écrit :

$$v_1 = u_1^k \quad (\text{resp. } v_2 = u_2^{k'}).$$

De même que dans la démonstration de 2.7, on voit que les entiers k et k' sont égaux. L'application ϕ définit alors deux applications ψ et $\bar{\psi}$ au voisinage de 0 :

$$u_2 = \psi(u_1)$$
$$v_2 = \bar{\psi}(v_1).$$

Par hypothèse, $\bar{\psi}$ est analytique réelle au voisinage de 0 et il s'agit de montrer que ψ est aussi analytique réelle. En effet :

$$\psi(u_1) = u_2 = v_2^{1/k} = \bar{\psi}(v_1)^{1/k} = \bar{\psi}(u_1^k)^{1/k}.$$

Cette formule montre que ψ est analytique réelle. □

Comme nous le verrons plus loin, le compact K peut par contre ne pas être négativement invariant.

Nous introduisons alors $K' \subset K$ l'ensemble des points d'accumulation de K et $\Omega' \supset \Omega$ le complémentaire de K' dans S^1. Puisque

$f_1(K) \subset K$, on a évidemment $f_1(K') \subset K'$ (on utilise ici le fait que chaque point de S^1 n'a qu'un nombre fini de pré-images par f_1 d'après $(*)$). Nous nous proposons de montrer que K' est vide, c'est-à-dire que K est fini. Supposons donc le contraire.

LEMME 4.7. — *Soit I une composante connexe de $\Omega' = S^1 - K'$ (supposé différent de S^1). Alors, l'intérieur de $f_1(I)$ est contenu dans Ω'.*

Démonstration. — Notons $]\alpha, \beta[$ "l' intervalle" I du cercle. Soient $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ les points critiques de f_1 contenus dans $]\alpha, \beta[$ et $I_0, I_1, \ldots, I_n$ les intervalles $]\alpha, t_1[,]t_1, t_2[, \ldots,]t_n, \beta[$. Puisque $]\alpha, \beta[$ est contenu dans Ω', les points de $K \cap I$ sont isolés dans I. Par conséquent, les intervalles $I_2, \ldots, I_{n-1}$ ne contiennent qu'un nombre fini de points de K. De même, α et β sont les seuls points d'accumulation éventuels de $K \cap I_0$ et $K \cap I_n$ dans S^1.

Puisque la restriction de f_1 à chacun des intervalles I_i est un difféomorphisme analytique réel, on déduit que

$$f_1(I_i) \cap K = f_1(I_i \cap K).$$

Il s'en suit que $f_1(I_2), \ldots, f_1(I_{n-1})$ ne contiennent qu'un nombre fini de points de K. De même, les seuls points d'accumulation éventuels de $f_1(I_0) \cap K$ et $f_1(I_n) \cap K$ sont $f_1(\alpha)$ et $f_1(\beta)$. En résumé, les seuls points d'accumulation éventuels de $f_1(]\alpha, \beta[) \cap K$ sont $f_1(\alpha)$ et $f_1(\beta)$.

Supposons que $f_1(\alpha)$ soit dans l'intérieur de l'image $f_1(I)$. Nous allons montrer que, dans ce cas, $f_1(\alpha)$ ne peut être un point d'accumulation de $f_1(]\alpha, \beta[) \cap K$. On peut en effet trouver un intervalle compact J contenu dans $]\alpha, \beta[$ tel que $f_1(J)$ soit un voisinage de $f_1(\alpha)$. Les remarques précédentes montrent alors que $f_1(J)$ contient un nombre fini d'éléments de K et donc que $f_1(\alpha)$ n'est pas un point d'accumulation de K.

On procède alors de même pour $f_1(\beta)$. Les seuls points d'accumulation éventuels de $K \cap f_1(]\alpha, \beta[)$ sont donc finalement $f_1(\alpha)$ et $f_1(\beta)$ lorsque ceux-ci ne sont pas dans l'intérieur de $f_1(I)$. En résumé, tous les points de $K \cap \overset{\circ}{\overparen{f_1(I)}}$ sont isolés dans $\overset{\circ}{\overparen{f_1(I)}}$. Ceci signifie précisément que $\overset{\circ}{\overparen{f_1(I)}} \subset \Omega'$. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème C'.

THÉORÈME 4.8. — *Si f_1 et f_2 satisfont aux conditions* $(*)$, *alors ϕ est analytique réel en dehors d'un ensemble fini K positivement invariant par f_1.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que K' est vide. Soit $x_1 \in S^1$ un point périodique de f_1, i.e. $f_1^n(x_1) = x_1 \quad (n \geq 1)$. D'après $(*)$, x_1 est un point fixe isolé de f_1^n. Si x_1 est un point fixe critique de f_1^n, alors $x_1 \in \Omega$ d'après 2.7. Si x_1 n'est pas critique, alors le corollaire 2.5 montre que $x_1 \in \Omega$ ou $x_1 \in K - K'$. Dans tous les cas, on a donc $x_1 \in \Omega'$.

Supposons donc que K' est non vide et soit $I =]\alpha, \beta[$ la composante connexe de Ω' qui contient x_1. D'après 4.6, l'intérieur de $f_1^n(I)$ est contenu dans Ω' et contient x_1, de sorte que $\overbrace{f_1^n(I)}^{\circ} \subset I$. Comme α et β sont dans K',il en est de même pour $f_1^n(\alpha)$ et $f_1^n(\beta)$ qui ne sont donc pas dans $I \subset \Omega'$. Il en résulte que $\overbrace{f_1^n(I)}^{\circ} = I$. Quitte à remplacer f_1^n par f_1^{2n}, on a donc $f_1^{2n}(\alpha) = \alpha$. Mais ceci est impossible car nous avons vu qu'un point périodique de f_1 est nécessairement dans Ω'. □

LEMME 4.9. — *Soit x_1 un point de S^1 tel que $f_1(x_1)$ est un point périodique de f_1 contenu dans K. Si la dérivée de f_1 ne change pas de signe en x_1, alors x_1 est un point de K.*

Démonstration. — Supposons, par l'absurde, que $x_1 \notin K$. Si x_1 n'est pas critique, f_1 définit un C^ω-difféomorphisme d'un voisinage de x_1 sur un voisinage de $f_1(x_1)$ de sorte que le fait que $x_1 \notin K$ entraînerait que $f_1(x_1) \notin K$.

Nous supposerons donc que x_1 est un point critique. On pose alors :

$$y_1 = f_1(x_1).$$

Par hypothèse, il existe un entier n tel que :

$$f_1^n(y_1) = y_1.$$

Considérons alors les points $x_2 = \phi(x_1)$ et $y_2 = \phi(y_1)$. Puisque x_1

et y_1 sont différents, on peut introduire des coordonnées locales u_1, v_1, u_2, v_2 de classe C^ω, au voisinage de x_1, y_1, x_2, y_2 telles que :

i) dans la coordonnée u_1(resp. v_1, u_2, v_2), le point x_1(resp. y_1, x_2, y_2) a une coordonnée nulle,

ii) l'application f_1 (resp.f_2) s'écrit au voisinage de x_1 (resp. x_2) dans les coordonnées u_1, v_1 (resp. u_2, v_2) :

$$v_1 = u_1^\ell \quad (\text{resp. } v_2 = u_2^\ell).$$

L'hypothèse faite sur x_1 signifie que ℓ est impair. L'application ϕ définit alors deux difféomorphismes locaux de classe C^1 :

$$u_2 = \psi(u_1)$$
$$v_2 = \bar{\psi}(v_1).$$

La relation de conjugaison s'écrit :

$$\bar{\psi}(u_1^\ell) = \psi(u_1)^\ell.$$

Par hypothèse, ψ est analytique réelle et s'écrit donc sous la forme :

$$\psi(u_1) = a_1 u_1 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i u_1^i\right).$$

Ceci montre que $\bar{\psi}$ s'écrit :

$$\bar{\psi}(v_1) = \psi(u_1^{1/\ell})^\ell = a_1 v_1 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i v_1^{i/\ell}\right). \tag{2}$$

Cette expression a un sens que v_1 soit positif ou négatif car ℓ est impair. Deux cas sont alors possibles. Le premier apparaît lorsque tous les coefficients c_i pour lesquels ℓ ne divise pas i sont nuls. Dans ce cas, $\bar{\psi}$ serait analytique réel ce qui est absurde puisque nous savons que y_1 est dans K.

Dans le second cas, $\bar{\psi}$ n'est pas une fonction de classe C^∞ en 0. On remarque alors que $\bar{\psi}$ conjugue les germes de f_1^n et f_2^n en y_1 et y_2. Si y_1 est un point critique de f_1^n, le corollaire 2.7 montrerait que $y_1 \notin K$ ce qui est absurde. Si y_1 n'est pas un point critique de f_1^n, quitte à remplacer n par $2n$, le corollaire 2.9 montrerait alors que $\bar{\psi}$ a un développement asymptotique du type :

$$\bar{\psi}(v_1) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_1^{k-1} + \lambda_k v_1^k(\mathrm{Log}|v_1| + O(v_1)) \quad \lambda_k \neq 0.$$

Cette dernière formule est évidemment incompatible avec le fait que $\bar{\psi}(v_1)$ admet un développement du type (2). Cette dernière contradiction achève la démonstration du lemme par l'absurde. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème C.

THÉORÈME 4.10. — *Si le degré topologique* $\deg(f_1)$ *vérifie* $|\deg(f_1)| \geq 2$, *alors* K *est vide.*

Démonstration. — Il est clair que l'image inverse par f_1 de n'importe quel point de S^1 contient au moins $|\deg(f_1)|$ points en lesquels la dérivée de f_1 ne change pas de signe. En remplaçant f_1 par une de ses puissances, on pourra toujours supposer que $|\deg(f_1)|$ est strictement supérieur au cardinal de K.

Supposons alors que K est non vide. Puisque K est fini, il existe un point y de K qui est périodique pour f_1. L'image inverse de y par f_1 contient alors au moins un point hors de K en lequel la dérivée de f_1 ne change pas de signe. Ceci est contraire au lemme 4.9. □

5. Quelques exemples.

Dans ce paragraphe, nous proposons quelques exemples qui montrent que le théorème C-C' ne peut pas être amélioré. Nous distinguerons trois cas suivant le degré de différentiabilité de f_1.

5.a. Applications analytiques réelles.

Soient f_1 et f_2 deux applications analytiques réelles du cercle dans lui-même qui sont conjuguées par un difféomorphisme ϕ de classe C^1. Nous supposerons toujours que f_1 et f_2 vérifient les conditions $(*)$ et nous notons toujours K l'ensemble (fini) des points au voisinage desquels ϕ n'est pas de classe C^ω.

Avant de montrer que K peut effectivement être non vide ou non négativement invariant (i.e. $f_1^{-1}(K) \not\subset K$), nous allons montrer que si K est non vide, la dynamique de f_1 est d'un type très particulier.

Supposons donc K non vide. Si K est complètement invariant (i.e.$f_1(K) \subset K$ et $f_1^{-1}(K) \subset K$), alors le graphe de f_1 est contenu dans $(S^1 - K) \times (S^1 - K) \cup (K \times K)$. Nous allons voir que si K n'est que positivement invariant, la situation est presque la même. Supposons qu'il existe un point x dans $f_1^{-1}(K) - K$. D'après le lemme 4.9, la dérivée de f_1 change de signe en x. Soit $\tilde{f}_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un relevé de f_1, $\tilde{K}$ l'image inverse de K dans $\mathbf{R}$ et $\{I_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathbf{R} - \tilde{K}$. Chaque fois que le graphe de $\tilde{f}_{1|I_1}$ intersecte $I_i \times \tilde{K}$, la dérivée de $\tilde{f}_1$ change de signe. Il en résulte que le graphe de $\tilde{f}_{1|I_i}$ est contenu dans un rectangle du type $I_i \times \bar{I}_j$. Cette décomposition du graphe de f_1 en "blocs" est évidemment très restrictive.

Nous décrivons maintenant une construction générale qui sera à la base de presque tous les exemples que nous avons en vue. Soit f une application de classe C^ω du cercle dans lui-même et $K = \{a_1, \ldots, a_k\}$ une partie finie du cercle, complètement invariante par f. Soient ψ_i des germes en a_i de difféomorphismes de classe C^1 tels que :

i) ψ_i laisse fixe a_i et préserve l'orientation

ii) ψ_i est de classe C^ω en dehors de a_i

iii) si $f(a_i) = a_j$, alors $\psi_j \circ f \circ \psi_i^{-1}$ est de classe C^ω.

On peut alors définir une nouvelle structure analytique réelle sur le cercle en prenant comme cartes locales les identités de chaque composante de $S^1 - K$ et ψ_i au voisinage de a_i. Le lecteur vérifiera facilement que les conditions i), ii) et iii) assurent que f reste analytique dans cette nouvelle structure. Cette nouvelle structure est évidemment conjuguée à la structure originale par l'identité mais celle-ci n'est que de classe C^1 en général. Par ailleurs, l'unicité des structures analytiques sur le cercle assure l'existence d'un difféomorphisme ϕ analytique entre l'ancienne et la nouvelle structure. Dans ces conditions $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est de classe C^ω pour la structure originale. Dans un voisinage de a_i, on peut écrire ϕ sous la forme $\psi \circ \psi_i$ où ψ est un germe de difféomorphisme de classe C^ω. Par conséquent, si ψ_i n'est que de classe C^1 en a_i, alors ϕ n'est que classe C^1 (au sens usuel) en a_i.

Lorsque K n'est plus supposé complètement invariant, la construction précédente fonctionne encore si l'on suppose que les

ψ_i vérifient la condition supplémentaire suivante :

iv) pour chaque point x de $f^{-1}(a_j) - K$, l'application $\phi_j \circ f$ est de classe C^ω au voisinage de x.

PROPOSITION 5.1. — *Il existe des triplets* (f_1, f_2, ϕ) *avec* $\deg(f_1) = 0$ *et* K *non vide et non négativement invariant.*

Démonstration. — Soit $f : S^1 \to S^1$ une application de classe C^ω telle que :

a) $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$

b) $f(]0, \frac{1}{2}[) \subset]0, \frac{1}{2}]$

c) $f(] - \frac{1}{2}, 1[) \subset [-\frac{1}{2}, 0]$

d) f est tangent à l'identité en 0 et $f''(0) \neq 0$

e) $\frac{1}{2}$ est un point régulier de f.

L'ensemble $K = \{0, \frac{1}{2}\}$ est alors positivement invariant. On applique alors la construction précédente. Pour cela, on choisit pour ψ_1 le germe en 0 du difféomorphisme de classe C^1 tel que $\psi_{1|]-\epsilon,0[} = \mathrm{id}_{|]-\epsilon,0[}$ et $\psi_{1|[0,\epsilon[} = f_{|[0,\epsilon[}$. Alors ψ_1 n'est pas de classe C^2 en 0. Pour ψ_2 on choisit le germe défini par $\psi_2(x) = \frac{1}{2} - \psi_1(f(x))$.

On vérifie immédiatement les conditions i), ii) et iii). Pour la condition iv), considérons un point x de $f^{-1}(\frac{1}{2})$. Comme l'image d'un voisinage de x est contenue dans $]0, \frac{1}{2}]$ ou dans $[-\frac{1}{2}, 0[$, il est clair que $\psi_2 \circ f$ est de classe C^ω.

Il existe donc un C^1-difféomorphisme ϕ tel que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ soit de classe C^ω mais tel que $K = \{0, \frac{1}{2}\}$ est non vide. De plus, il est facile de construire des exemples où $\{0, \frac{1}{2}\}$ n'est pas négativement invariant. $\square$

PROPOSITION 5.2. — *Il existe des triplets* (f_1, f_2, ϕ) *tels que* $\deg(f_1) = 1$ *et* K *est non vide et non négativement invariant.*

Démonstration. — Soit $f : S^1 \to S^1$ de classe C^ω telle que :

a) $f(0) = 0, \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

b) $f(]0, \frac{1}{2}[) \subset [0, \frac{1}{2}]; \quad f(]\frac{1}{2}, 1[) \subset [\frac{1}{2}, 1]$

c) $f$est tangent à l'identité en 0 et$\frac{1}{2}$et$f"(0) \neq 0, \ f"(\frac{1}{2}) \neq 0$.

On applique la construction précédente à $K = \{0, \frac{1}{2}\}$. Pour ψ_1, on choisit le germe en 0 défini par :$\psi_{1|]-\varepsilon,0]} = \mathrm{id}$ et $\psi_{1|]0,\varepsilon]} = f_{|[0,\varepsilon[}$. Pour ψ_2, on choisit le germe défini par : $\psi_{2|]\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}]} = f_{|]\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}]}$ et $\psi_{2|[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\varepsilon[} = \mathrm{id}$. Les conditions i) ii) iii) et iv) se vérifient facilement. Comme il est facile de construire des f pour lesquels $\{0, \frac{1}{2}\}$ n'est pas négativement invariant, on obtient l'exemple cherché. □

5.b. Applications de classe C^∞ n'ayant qu'un nombre fini de points critiques.

Dans ce sous-paragraphe, f_1 et f_2 désignent deux applications de classe C^∞ de S^1 qui n'ont qu'un nombre fini de points critiques. On suppose toujours que les conditions $(*)$ sont vérifiées et que le C^1- difféomorphisme ϕ conjugue f_1 et f_2. On désigne par K le fermé des points au voisinage desquels ϕ n'est pas de classe C^∞.

Nous signalons d'abord que certains des théorèmes démontrés plus haut se généralisent dans ce nouveau contexte. Nous omettons les démonstrations car elles sont de simples adaptations des précédentes.

PROPOSITION 5.3. — *Si les points critiques de f_1 et f_2 ne sont pas plats, alors K est fini et positivement invariant.*

PROPOSITION 5.4. — *Si $|\deg(f_1)| \geq 2$, alors K est fini et positivement invariant.*

Par contre cet ensemble K peut être non vide :

PROPOSITION 5.5. — *Il existe des triplets (f_1, f_2, ϕ) vérifiant les hypothèses de ce sous-paragraphe tels que $\deg(f_1) = 2$ et K est* *non vide*

Démonstration. — On utilise une méthode similaire à celle déjà employée. Soit $f : S^1 \to S^1$ telle que :

a) f est de classe C^∞, de degré 2

b) $f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f^{(k)}(0) = 0\,(k \geq 2)$

c) $f(\frac{1}{2}) = 0, \quad f^{(k)}(\frac{1}{2}) = 0 \quad (k \geq 1)$.

Alors, $\{0\}$ est positivement invariant par f. Choisissons un difféomorphisme ψ de classe C^1 (et non de classe C^2) défini au voisinage de 0 tel que les restrictions de ψ à $]-\varepsilon, 0]$, et $[0, \varepsilon[$ sont de classe C^∞. On vérifie facilement que :

- $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ est de classe C^∞ (infiniment tangent à l'identité)
- $\psi \circ f$ est de classe C^∞ (en fait une fonction plate).

Il existe donc un difféomorphisme ϕ de classe C^1 tel que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est de classe C^∞ mais qui n'est pas de classe C^2 sur $\{0\}$. □

Pour les applications f_1 de degré 1, on peut avoir un fermé quelconque comme ensemble de points fixes. Pour les difféomorphismes infiniment tangents à l'identité en leurs points fixes, l'ensemble K peut coïncider avec l'ensemble des points fixes. L'ensemble K peut cependant être infini, même si l'ensemble des points fixes est fini. Voici un exemple de cette situation.

PROPOSITION 5.6. — *Il existe des triplets (f_1, f_2, ϕ) vérifiant les hypothèses de ce sous-paragraphe et tels que* $\deg(f_1) = 0$ *(resp. 1), K est infini et f_1 n'a qu'un nombre fini de points périodiques.*

Démonstration. — Posons $\ell_n = \exp(-\exp(\exp(n))) \quad (n \geq 0)$ et $x_n = \sum_{m=n}^{\infty} \ell_m$. On peut construire une application $h : [0, x_0] \to [0, x_1]$, de classe C^∞, telle que :

a) $h([x_n, x_{n-1}]) = [x_{n+1}, x_n]$

b) $h_{|[x_n + x_{n-1})/2, x_{n-1}]}$ est un homéomorphisme affine sur $[(x_{n+1} + x_n)/2, x_n]$.

(Le lecteur pourra d'abord construire la dérivée de h.)

Soit k_n l'intégrale du temps 1 du champ de vecteurs $x^2\eta(nx)\dfrac{\partial}{\partial x}$ sur $[0,1]$ où $\eta : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction de classe C^∞ telle que $\eta([0,1/3]) = \{1\}$ et $\eta([2/3,1]) = \{0\}$. Alors k_n tend vers l'identité quand n tend vers $+\infty$ dans la topologie C^1. La norme C^r de K_n croit polynomialement en n.

Soit g le difféomorphisme de $[0,1]$ défini de la façon suivante : La restriction de g à $[(x_n+x_{n-1})/2, x_{n-1}]$ est le conjugué de k_{n-1} par l'homéomorphisme affine qui envoie $[0,1]$ sur $[(x_n+x_{n-1})/2, x_{n-1}]$ et g est l'identité ailleurs. Alors, g est un difféomorphisme de classe C^1 de $[0,x_0]$ et g n'est pas de classe C^2 sur $\{0\} \cup \{(x_n+x_{n-1})/2 | n \geq 0\}$.

Soit f une application de classe C^∞ qui est un homéomorphisme de $[0,1]$ et qui satisfait aux conditions suivantes :

c) $f_{|[0,x_0]} = h$

d) f est plate en $f^{-1}((x_0 + x_1)/2)$ (i.e. toutes ses dérivées s'annulent en ce point).

On peut vérifier que $g \circ f \circ g^{-1}$ est une fonction de classe C^∞.

En utilisant l'homéomorphisme f, il est alors facile de construire les triplets (f_1, f_2, ϕ) annoncés. □

5.c. Applications de classe C^∞.

Dans ce sous-paragraphe, nous supposons seulement que f_1 et f_2 sont de classe C^∞.

PROPOSITION 5.7. — *Il existe des triplets (f_1, f_2, ϕ) tels que K est un ensemble de Cantor et* $\deg(f_1) = 0$ (resp.1) (resp. .2)

Démonstration. — On pose encore $\ell_n = \exp(-\exp(\exp(n)))$ $(n \geq 0)$ et $x_n = \sum_{m=n}^{\infty} \ell_m$. Soit $I_{0,0}$ l'intervalle de longueur ℓ_0 situé au centre de $[0,x_0]$. Par récurrence, on définit $I_{i,j}$ $(0 \leq j < 2^i)$ comme l'intervalle de longueur $\ell_i/2^i$ situé au centre de la $j$ème composante connexe de $[0,1] - \cup\{I_{k,\ell} | k < i,\ 0 \leq \ell < 2^k\}$. On définit alors une fonction $\alpha : [0,x_0] \to [0,x_1/2]$ par $\alpha_{|I_{i,j}} = A_{i+1,j} \circ \rho \circ A_{i,j}^{-1}$ où $\rho : [0,1] \to [0,1]$ est de classe C^∞ et vérifie $\rho^{(k)}(0) = 0$ $(k \geq 0)$ et

$\rho(1) = 1$; $\rho^{(k)}(1) = 0 \quad (k \geq 1)$ et où $A_{i,j}$ est l'homéomorphisme affine qui envoie $[0,1]$ sur $I_{i,j}$. L'application α s'étend en une application C^∞ croissante de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ une application de classe C^1 qui préserve chacun des intervalles $I_{i,j}$ et qui n'est pas de classe C^2 sur $[0, x_1/2] - \cup I_{i,j}$. On vérifie facilement qu'il existe un tel g tel que $g \circ \alpha \circ g^{-1}$ et $g \circ \alpha$ sont de classe C^∞.

Soit u (resp. v) : $[-1/6, 1/6] \to [-1/6, 1/6]$ la fonction paire (resp. impaire) telle que $u(x) = \alpha(6x)/6$ $(v(x) = \alpha(6x)/6)$ pour $x \geq 0$).

On se fixe enfin une application f de classe C^∞ qui satisfait l'une des conditions suivantes :

0) f est de degré 0,

$$f([1/6, 1/3]) = f([2/3, 5/6]) = [1/6; 5/6]$$

et

$$f(x) = -f(x + 1/2) = u(x) \, (x \in [-1/6, 1/6])$$

1) f est de degré 1, croissante et :

$$f(x) = v(x) \quad (x \in [-1/6, 1/6])$$

2) f est de degré 2, croissante et :

$$f(x) = f(x + 1/2) = v(x) \quad (x \in [-1/6, 1/6]).$$

Alors, l'application g précédente permet de construire un C^1- difféomorphisme ϕ du cercle tel que $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est de classe C^∞. Par ailleurs ϕ n'est pas de classe C^∞ sur un ensemble de Cantor. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BLANCHARD. — Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bulletin of the A.M.S., 11 (1984), 85-141.

[2] J. CANTWELL & L. CONLON. — The dynamics of open foliated manifolds and a vanishing theorem for the Godbillon-Vey class, Adv. in Math., 53 (1984), 1-27.

[3] G. DUMINY. — L'invariant de Godbillon-Vey se localise sur les feuilles ressort, preprint, Université de Lille, 1982.

[4] G. DUMINY & V. SERGIESCU. — Sur la nullité de l'invariant de Godbillon-Vey, C.R.A.S., Paris, 292 (1981), 821-824.

[5] E. GHYS. — Actions localement libres du groupe affine, Invent. Math., 82 (1985), 479-526.

[6] C. GODBILLON & J. VEY. — Un invariant des feuilletages de codimension 1, C.R.A.S., Paris, 273 (1971), 92-95.

[7] A. HAEFLIGER. — Groupoïdes d'holonomie et classifiants, Astérisque, 116 (1984), 70-97.

[8] G. HECTOR & U. HIRSCH. — Introduction to the geometry of foliations, Part B, Aspects in Mathematics, 3 (1983), Freid-Vieweg und Sohn.

[9] M. HERMAN. — Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Publ. Math. I.H.E.S., 49 (1979), 5-234.

[10] N. KOPPEL. — Commuting diffeomorphisms, in Global Analysis, Proc. of Symp. in Pure Math., AMS, XIV (1970).

[11] I. MALTA. — On Denjoy's theorem for endomorphisms, Ergod. Th. Dynam. Syst., 6 (1986), 259-264.

[12] S. MORITA & T. TSUBOI. — The Godbillon-Vey class of codimension one foliations without holonomy, Topology, 19 (1980), 43-49.

[13] T. MIZUTANI, S. MORITA & T. TSUBOI. — The Godbillon-Vey classes of codimension one foliations which are almost without holonomy, Annals of Math., 113 (1981), 515-527.

[14] G. RABY. — L'invariant de Godbillon-Vey est stable par C^1-difféomorphisme, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 38-1 (1988).

[15] R. SACKSTEDER. — Foliations and pseudo-groups, Am. J. Math., 87 (1965), 79-102.

[16] F. SERGERAERT. — Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité, Invent. Math., 39 (1977), 253-275.

[17] S. STERNBERG. — Local C^n-transformations of the real line, Duke Math. J., 24, 97-102.

[18] G. SZEKERES. — Regular iteration of real and complex functions, Acta Math., 100 (1958),203-258.

[19] F. TAKENS. — Normal forms for certain singularities of vector fields, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23 (1973), 163-195.

[20] T. TSUBOI. — Γ_1-structures avec une seule feuille, Astérisque, 116 (1984), 222-234.

[21] T. TSUBOI. — On the foliated products of class C^1, preprint.

[22] J.C. YOCCOZ. — Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle, Thèse, Univ. Paris-Sud, 1985.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1987.

E. GHYS,
Université de Lille I
UER de Mathématiques
Cité Scientifique M 3
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX
&
T. TSUBOI,
Department of Mathematics
Faculty of Sciences
University of Tokyo, Hongo
TOKYO 113 (Japan).