

ROBERT DALMASSO

**Un résultat sur les fonctions de classe $C^{1,\alpha}$ et
application au problème de Cauchy**

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 3 (1986), p. 43-55

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_3_43_0

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN RÉSULTAT SUR LES FONCTIONS DE CLASSE $C^{1,\alpha}$ ET APPLICATION AU PROBLÈME DE CAUCHY

par Robert DALMASSO

1. Introduction et notations.

Il est bien connu (voir G. Glaeser [4] et J. Dieudonné [3]) que, si f est une fonction numérique ≥ 0 , de classe C^2 dans un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ telle que les dérivées d'ordre ≤ 2 de f s'annulent aux zéros de f alors la racine carrée de f est de classe C^1 dans U .

Nous allons montrer que, si f est une fonction ≥ 0 différentiable sur un intervalle $[0, T]$, si sa dérivée est höldérienne d'ordre α avec $0 < \alpha \leq 1$ et si $f'(0) = 0$ (resp. $f'(T) = 0$) quand $f(0) = 0$ (resp. $f(T) = 0$) alors $f^{\frac{1}{1+\alpha}}$, qui est absolument continue d'après [2], admet (presque partout) une dérivée bornée presque partout.

Ceci va nous permettre d'étudier le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - a(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \quad \text{dans } [0, T] \times \mathbf{R} \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \psi(x) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

sous la condition d'hyperbolicité

$$a(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

Rappelons que le problème (1.1) est bien posé dans un espace X de fonctions ou fonctionnelles sur $\mathbf{R}$ si pour φ et ψ dans X

Mots-clés : Classe $C^{1,\alpha}$ (Hölder) – Classe de Gevrey $G^s(\mathbf{R})$ – Problème de Cauchy.

il admet une solution unique u dans $C^1([0, T], X)$ (pour plus de détails voir [1] et [2]).

Nous montrons dans ce travail le résultat suivant : si a vérifiant (1.2) est continûment différentiable et si sa dérivée est höldérienne d'ordre α avec $0 \leq \alpha \leq 1$ alors pour des données φ et ψ dans la classe de Gevrey $G^s(\mathbf{R})$ le problème (1.1) admet une solution unique dans $C^2([0, T], G^s(\mathbf{R}))$ sous la condition :

$$1 \leq s \leq \frac{3 + \alpha}{2}.$$

Ce résultat est à rapprocher du théorème obtenu par F. Colombini, E. Jannelli et S. Spagnolo (voir [2]) dans un cadre plus général.

Notations

On utilisera les espaces vectoriels topologiques (e.v.t.) suivants :

H e.v.t. des fonctions entières sur $\mathbf{R}$.

$G^s(\mathbf{R})$ pour s réel ≥ 1 e.v.t. des fonctions de Gevrey d'ordre s sur $\mathbf{R}$ c'est-à-dire des fonctions indéfiniment différentiables f telles que, pour tout compact K de $\mathbf{R}$ il existe C et A tels que

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x) \right| \leq C A^m m^{sm} \quad \forall x \in K \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

$D^s(\mathbf{R})$ e.v.t. des éléments de $G^s(\mathbf{R})$ à support compact.

H' e.v.t. des fonctionnelles holomorphes sur $\mathbf{C}$.

$C^k([0, T], X)$ où X désigne l'un des e.v.t. ci-dessus est l'e.v.t. des applications u de $[0, T]$ dans X admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre k .

$C^{1,\alpha}([a, b])$ où $a < b$ et $\alpha \in [0, 1]$ désigne l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[a, b]$ et admettant une dérivée höldérienne d'ordre α si $\alpha > 0$.

2. Etude des fonctions de $C^{1,\alpha}([a, b])$.

Nous commençons par démontrer un lemme qui généralise un résultat obtenu par J. Dieudonné dans [3] pour des fonctions de classe C^2 .

LEMME 2.1. — Soit $f \in C^{1,\alpha}([-2T, 2T])$, $T > 0$, $\alpha \in]0, 1]$, $f \geq 0$ et $f(0) = f'(0) = 0$ alors on a :

$$|f'(x)|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \leq \frac{1+\alpha}{\alpha} f(x) M^{\frac{1}{\alpha}} \quad \forall x \in [-T, T] \quad (2.1)$$

où

$$M = \sup \{|f'(x) - f'(y)| |x - y|^{-\alpha} / x \neq y, x, y \in [-2T, 2T]\}.$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que $|f'(x)| \leq M |x|^\alpha$ pour tout $x \in [-2T, 2T]$; en effet :

$$|f'(x)| = |f'(x) - f'(0)| \leq M |x|^\alpha.$$

Ensuite, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x \in [-T, T]$ tel que

$$|f'(x)|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} > \frac{1+\alpha}{\alpha} f(x) M^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2.2)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + (y - x) f'(x) \\ &\quad + (y - x) \int_0^1 (f'(x + s(y - x)) - f'(x)) ds \end{aligned} \quad (2.3)$$

ceci pour tout $y \in [-2T, 2T]$. On a deux cas :

i) Si $f'(x) > 0$ on pose

$$y = x - \left(\frac{f'(x)}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

et la remarque précédente montre que $y \in [-2T, 2T]$.

(2.3) entraîne

$$f(y) \leq f(x) + (y - x) f'(x) + \frac{M}{1+\alpha} |y - x|^{1+\alpha}$$

d'où l'on déduit

$$f(y) \leq f(x) - \left(\frac{f'(x)^{1+\alpha}}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

et (2.2) montre que $f(y) < 0$ ce qui est absurde.

ii) Si $f'(x) < 0$ on pose

$$y = x + \left(\frac{|f'(x)|}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

alors de la même façon que pour i) on a $y \in [-2T, 2T]$ et

$$\begin{aligned} f(y) &\leq f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{M}{1+\alpha} |y-x|^{1+\alpha} \\ &= f(x) - \left(\frac{|f'(x)|}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}} |f'(x)| + \left(\frac{|f'(x)|^{1+\alpha}}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{1+\alpha} \end{aligned}$$

et (2.2) montre que $f(y) < 0$ ce qui est absurde.

Nous aurons besoin dans la suite du lemme 2.1 sous deux formes différentes contenues dans le lemme suivant :

LEMME 2.2. — Soit $g \in C^{1,\alpha}([a, b])$, $\alpha \in]0, 1]$, $g \geq 0$ et notons

$$M = \sup \{ |g'(x) - g'(y)| |x - y|^{-\alpha} / x \neq y, x, y \in [a, b] \}$$

alors, si $g(a) = g'(a) = 0$ (resp. si $g(b) = g'(b) = 0$) on a

$$|g'(x)|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \leq \frac{1+\alpha}{\alpha} g(x) (2^{1-\alpha} M)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.4)$$

pour tout $x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right]$ (resp. $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$).

Démonstration. — i) Si $g(a) = g'(a) = 0$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} g(a+x) & \text{si } x \in [0, b-a] \\ g(a-x) & \text{si } x \in [a-b, 0]. \end{cases}$$

Il est clair que $f \in C^{1,\alpha}([a-b, b-a])$ et que $f(0) = f'(0) = 0$. D'autre part un simple calcul montre que

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in [a-b, b-a]}} |f'(x) - f'(y)| |x - y|^{-\alpha} \leq 2^{1-\alpha} M$$

d'où (2.4) en appliquant le lemme 2.1.

ii) Si $g(b) = g'(b) = 0$ on pose $h(x) = g(a + b - x)$ pour $x \in [a, b]$, alors $h \in C^{1,\alpha}([a, b])$, $h(a) = h'(a) = 0$, $h'(x) = -g'(a + b - x)$ et on applique i).

Le lemme 2.2 va nous permettre de démontrer un résultat qui est essentiel pour notre travail et qui constitue la dernière partie du théorème suivant :

THEOREME 2.1. — Soit $g \in C^{1,\alpha}([0, T])$, $\alpha \in]0, 1[$ et $g \geq 0$. Posons

$$h = g^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

alors :

- i) h est absolument continue.
- ii) Il existe $E \subset [0, T]$ de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue m sur $[0, T]$ tel que $h'(x)$ existe pour tout $x \in [0, T] \setminus E$.
- iii) Supposons en outre vérifiée l'hypothèse suivante :

$$(H) \begin{cases} \text{si } g(0) = 0 \text{ (resp. } g(T) = 0) \text{ alors } g'(0) = 0 \\ \text{(resp. } g'(T) = 0) \end{cases}$$

alors h' est bornée sur $[0, T] \setminus E$.

Démonstration. — i) est un cas particulier du lemme 1 de [2] et ii) est alors bien connu (voir [5] par exemple). Montrons iii) : l'hypothèse (H) nous conduit à considérer trois cas.

Cas 1. — Si $g(0) = g'(0) = g(T) = g'(T) = 0$ nous allons montrer

$$|h'(x)| \leq \left(\frac{2^{1-\alpha} M}{\alpha^\alpha (1+\alpha)} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad \forall x \in [0, T] \setminus E \quad (2.5)$$

où $M = \sup \{ |g'(x) - g'(y)| |x - y|^{-\alpha} / x \neq y, x, y \in [0, T] \}$.

En effet (2.5) résulte du lemme 2.2 aux points $x \in [0, T] \setminus E$ tels que $g(x) \neq 0$. Soit alors $x \in [0, T] \setminus E$ tel que $g(x) = 0$. Nécessairement $g'(x) = 0$ en effet : si $x = 0$ ou T cela résulte de l'hypothèse (H) et si $x \in]0, T[$ cela résulte du fait que $g \geq 0$ sur $[0, T]$. Or pour tout $y \in [0, T]$ on a

$$g(y) = (y - x) \int_0^1 g'(x + s(y - x)) ds$$

et donc pour $y \neq x$ on a

$$\left| \frac{h(y) - h(x)}{y - x} \right| \leq |y - x|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\int_0^1 |g'(x + s(y - x)) - g'(x)| ds \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \\ \leq \left(\frac{M}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

d'où (2.5).

Cas 2. — Nous allons traiter le cas $g(0) = g'(0) = 0$ et $g(T) > 0$ (le cas $g(T) = g'(T) = 0$ et $g(0) > 0$ se traitant de façon analogue). Soit $x \in [0, T[$ le dernier zéro de g alors la même démonstration que pour le cas 1 montre que l'inégalité (2.5) est vérifiée sur $\left[0, \frac{x+T}{2} \right] \setminus E$ et comme $h \in C^1 \left(\left[\frac{x+T}{2}, T \right] \right)$ h' est bornée sur $\left[\frac{x+T}{2}, T \right]$ d'où le résultat.

Cas 3. — Si $g^{-1}(0) = \emptyset$, le résultat est trivial, car alors $h \in C^1([0, T])$. Sinon soit $x \in]0, T[$ un zéro de g et on est ramené au cas 2.

3. Application au problème de Cauchy.

Les résultats de la partie 2 vont nous permettre de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 3.1. — Soit $a \in C^{1,\alpha}([0, T])$ $\alpha \in [0, 1]$, $a \geq 0$ alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - a(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \text{ dans } [0, T] \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = \varphi(x), \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \psi(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

admet une solution unique u dans $C^2([0, T], G^s(\mathbf{R}))$ pour des données φ et ψ dans $G^s(\mathbf{R})$ si

$$1 \leq s \leq \frac{3+\alpha}{2}.$$

Démonstration. — D'après [2] il nous suffit de faire la démonstration pour $s = \frac{3+\alpha}{2}$. Comme dans [2] on montre l'unicité du problème (3.1) ce qui permet de supposer φ et ψ dans $D^{\frac{3+\alpha}{2}}(\mathbf{R})$. D'après le théorème de Ovciannikov (3.1) admet une solution u dans $C^2([0, T], H^1)$ et nous devons montrer que u appartient à $C^2([0, T], D^{\frac{3+\alpha}{2}}(\mathbf{R}))$. Notons

$$v(t, \xi) = \langle u(t, x), \exp(-ix \cdot \xi) \rangle \quad \xi \in \mathbf{R}$$

la transformée de Fourier de u par rapport à x : d'après le théorème de Paley-Wiener il nous suffit de prouver qu'il existe M et $\delta > 0$ tels que

$$|v(t, \xi)| \leq M \exp(-\delta |\xi|^{\frac{2}{3+\alpha}}) \quad (3.2)$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $t \in [0, T]$, sachant que les transformées de Fourier $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$ des données initiales vérifient une inégalité analogue. Comme $v(t, \xi)$ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} v(t, \xi) + a(t) \xi^2 v(t, \xi) = 0 \\ v(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi), \quad \frac{d}{dt} v(0, \xi) = \hat{\psi}(\xi) \end{cases}$$

il est clair que (3.2) résulte de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. — Soit $a \in C^{1,\alpha}([0, T])$, $\alpha \in [0, 1]$, $a \geq 0$ alors il existe une fonction $\mu : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ vérifiant $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mu(s) = 0$ quand s tend vers $+\infty$ telle que toute solution $u(t, \xi)$ de l'équation différentielle $\frac{d^2}{dt^2} u(t, \xi) + a(t) \xi^2 u(t, \xi) = 0$ vérifie l'inégalité

$$|u(t_1, \xi)|^2 + \left| \frac{d}{dt} u(t_1, \xi) \right|^2 \leq C(|u(t_2, \xi)|^2 + \left| \frac{d}{dt} u(t_2, \xi) \right|^2) (1 + |\xi|)^\varrho \exp(\mu(|\xi|)|\xi|^{\frac{2}{3+\alpha}}) \quad (3.3)$$

pour tous t_1, t_2 dans $[0, T]$, où C et ϱ sont des constantes positives indépendantes de ξ, t_1, t_2 .

Commençons par démontrer deux lemmes :

LEMME 3.1. — Soit $k \in C^1([c, d])$, $k \geq 0$ et supposons k croissante (resp. k décroissante) alors toute solution u de l'équation différentielle $\frac{d^2}{dt^2} u(t, \xi) + k(t) \xi^2 u(t, \xi) = 0$ vérifie l'inégalité

$$|u(t_1, \xi)|^2 + \left| \frac{d}{dt} u(t_1, \xi) \right|^2 \leq C(1 + |\xi|)^\varrho \left(|u(t_2, \xi)|^2 + \left| \frac{d}{dt} u(t_2, \xi) \right|^2 \right) \quad (3.4)$$

pour tous t_1, t_2 dans $[c, d]$, où C et ϱ sont des constantes positives indépendantes de ξ, t_1, t_2 .

Démonstration. — On suppose k croissante (l'autre cas se traitant de façon analogue). Tout d'abord quand $|\xi| < R$ pour tout $R > 0$, l'inégalité (3.4) est évidente les coefficients étant uniformément bornés.

1) Si $k(c) > 0$, on pose $E(t, \xi) = k(t) \xi^2 |u|^2 + \left| \frac{d}{dt} u \right|^2$ on dérive et on applique le lemme de Gronwall pour obtenir l'inégalité

$$E(t_1, \xi) \leq E(t_2, \xi) \exp \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{k'(t)}{k(t)} dt \right|$$

pour tous t_1, t_2 dans $[c, d]$, d'où (3.4).

2) Si $k(c) = 0$ soit $R > 0$ tel que pour tout $|\xi| \geq R$ il existe $t_\xi \in]c, d[$ tel que $k(t_\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}$ et posons $E_1(t, \xi) = |u|^2 + \left| \frac{d}{dt} u \right|^2$ alors on a $\left| \frac{d}{dt} E_1(t, \xi) \right| \leq E_1(t, \xi)$ pour tout $t \in [c, t_\xi]$, d'où (3.4) sur $[c, t_\xi]$. Sur $[t_\xi, d]$ on pose $E_2(t, \xi) = k(t) \xi^2 |u|^2 + \left| \frac{d}{dt} u \right|^2$

et on obtient $\left| \frac{d}{dt} E_2(t, \xi) \right| \leq \frac{k'(t)}{k(t)} E_2(t, \xi)$ pour tout $t \in [t_\xi, d]$,
d'où (3.4) sur $[t_\xi, d]$.

LEMME 3.2. — Soit $a \in C^1([0, T])$, $a \geq 0$ et telle que $a(0) = 0$ et $a'(0) \neq 0$ (resp. $a(T) = 0$ et $a'(T) \neq 0$) alors $a'(0) > 0$ (resp. $a'(T) < 0$). De plus pour tout $\alpha > 0$, $a^{\frac{1}{1+\alpha}}$ n'est pas dérivable à droite en 0 (resp à gauche en T).

Démonstration. — Traitons le cas $a(0) = 0$ et $a'(0) \neq 0$. On a

$$a(t) = t(a'(0) + \theta(t)) \quad (3.5)$$

où $\theta(t) = \int_0^1 (a'(st) - a'(0)) ds$, donc θ est continue et $\theta(0) = 0$. L'hypothèse $a \geq 0$ entraîne donc $a'(0) > 0$, et (3.5) permet alors de montrer la deuxième partie du lemme 3.2.

Démonstration de la proposition 3.1. En premier lieu on remarque que pour tout $R > 0$, quand $|\xi| < R$ l'inégalité (3.3) est évidente, les coefficients étant uniformément bornés.

Si $a(0) = 0$ et $a'(0) \neq 0$ (resp. $a(T) = 0$ et $a'(T) \neq 0$) le lemme 3.2 montre qu'il existe $\beta \in]0, T[$ tel que a soit croissante dans $[0, \beta]$ (resp. décroissante dans $[\beta, T]$) et le lemme 3.1 entraîne (3.3) sur $[0, \beta]$ (resp. $[\beta, T]$).

On peut donc supposer que, pour $\alpha \in]0, 1]$, a vérifie l'hypothèse (H) du théorème 2.1 appliqué à $g = a$. On introduit $a_\epsilon(t) = a(t) + \epsilon$ pour tout $t \in [0, T]$ où $\epsilon \in]0, 1[$ désigne un paramètre et on définit :

$$E_\epsilon(t, \xi) = a_\epsilon(t) \xi^2 |u(t, \xi)|^2 + \left| \frac{d}{dt} u(t, \xi) \right|^2.$$

On a facilement

$$\left| \frac{d}{dt} E_\epsilon(t, \xi) \right| \leq \left(\frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} + \epsilon^{\frac{1}{2}} |\xi| \right) E_\epsilon(t, \xi)$$

pour tout $t \in [0, T]$. On en déduit, en utilisant le lemme de Gronwall

$$E_\epsilon(t_1, \xi) \leq E_\epsilon(t_2, \xi) \exp \left(\int_0^T \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt + T \epsilon^{\frac{1}{2}} |\xi| \right) \quad (3.6)$$

pour tous t_1, t_2 dans $[0, T]$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.3. — Soit $a \in C^{1,\alpha}([0, T])$, $\alpha \in [0, 1]$ et $a \geq 0$ alors, avec les notations ci-dessus, pour tout ensemble mesurable $A \subset [0, T]$, on a

$$\int_A \left| (a_\epsilon^{\frac{1}{1+\alpha}})'(t) \right| dt \leq \int_A \left| (a^{\frac{1}{1+\alpha}})'(t) \right| dt.$$

Démonstration. — Si $\alpha = 0$ l'inégalité est triviale, on peut donc supposer que $\alpha \in]0, 1]$ et il nous suffit alors de montrer

$$\left| (a_\epsilon^{\frac{1}{1+\alpha}})'(t) \right| \leq \left| (a^{\frac{1}{1+\alpha}})'(t) \right| \quad \forall t \in A \setminus E \quad (3.7)$$

où E désigne l'ensemble de mesure nulle du théorème 2.1 appliqué à $g = a$. On a deux cas :

1) Si $t \in A \setminus E$ est tel que $a(t) > 0$ l'inégalité (3.7) résulte du fait que $a_\epsilon \geq a$.

2) Si $t \in A \setminus E$ est tel que $a(t) = 0$ alors $a'(t) = 0$ en effet : si $a'(t) \neq 0$ nécessairement $t = 0$ (ou T) car $a \geq 0$ et le lemme 3.2 entraîne que $t = 0$ (ou T) appartient à E ce qui est absurde. Mais alors le premier membre de (3.7) est nul et ceci achève la démonstration du lemme 3.3.

Revenons à la démonstration de la proposition 3.1. Posons pour $|\xi|$ suffisamment grand

$$F_{|\xi|} = \{t \in \text{supp } a / a(t) \geq |\xi|^{-\gamma}\}$$

$$G_{|\xi|} = \{t \in \text{supp } a / 0 < a(t) < |\xi|^{-\gamma}\}$$

où $\gamma \in]0, \frac{2}{3+\alpha}]$ [et $\text{supp } a$ désigne le support de a et remarquons que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} m(G_{|\xi|}) = 0$$

(m désignant la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$).

On peut écrire

$$\int_0^T \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt = \int_{F_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt + \int_{G_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt \quad (3.8)$$

et on a

$$\int_{F_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt \leq C |\xi|^\gamma \quad (3.9)$$

(C désignant une constante) et

$$\frac{1}{1+\alpha} \int_{G_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt \leq \epsilon^{-\frac{1}{1+\alpha}} \int_{G_{|\xi|}} \left| (a_\epsilon^{\frac{1}{1+\alpha}})'(t) \right| dt. \quad (3.10)$$

En utilisant successivement le lemme 3.3 et le théorème 2.1 appliqué à $g = a$ on déduit de (3.10)

$$\int_{G_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt \leq C \epsilon^{-\frac{1}{1+\alpha}} m(G_{|\xi|}) \quad (3.11)$$

(C désignant une constante). Posons

$$\lambda_{|\xi|} = \max \left(m(G_{|\xi|}), \frac{1}{|\xi|} \right)$$

alors (3.8), (3.9) et (3.11) donnent

$$\int_0^T \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt + T \epsilon^{\frac{1}{2}} |\xi| \leq C (|\xi|^\gamma + \epsilon^{-\frac{1}{1+\alpha}} \lambda_{|\xi|} + \epsilon^{\frac{1}{2}} |\xi|) \quad (3.12)$$

pour une nouvelle constante C. Choisissons

$$\epsilon = (\lambda_{|\xi|} |\xi|^{-1})^{\frac{2(1+\alpha)}{3+\alpha}} \quad (3.13)$$

alors, de (3.6), (3.12) et (3.13) on tire

$$E_\epsilon(t_1, \xi) \leq C E_\epsilon(t_2, \xi) \exp(\mu(|\xi|) |\xi|^{\frac{2}{3+\alpha}})$$

pour tous $t_1, t_2 \in [0, T]$, C désignant une constante et μ étant définie par :

$$\mu(s) = C(2 \lambda_s^{\frac{1+\alpha}{3+\alpha}} + s^{\gamma - \frac{2}{3+\alpha}})$$

pour s suffisamment grand. Or on a pour $|\xi|$ suffisamment grand

$$|u(t, \xi)|^2 + \left| \frac{d}{dt} u(t, \xi) \right|^2 \leq E_\epsilon(t, \xi)$$

et

$$E_\epsilon(t, \xi) \leq C(1 + |\xi|)^2 (|u(t, \xi)|^2 + \left| \frac{d}{dt} u(t, \xi) \right|^2)$$

pour tout $t \in [0, T]$ (C étant une constante) et donc la proposition 3.1 est démontrée.

Remarque. — Nous remercions le referee pour avoir noté que, par le lemme 1 de [2], si a est une fonction de classe $C^{k,\alpha}([0, T])$ $k \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ vérifiant $a(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ alors $a^{\frac{1}{k+\alpha}}$ est absolument continue et si $\gamma > 0$ et

$$G_{|\xi|} = \{t \in \text{supp } a / 0 < a(t) < |\xi|^{-\gamma}\}$$

on a

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \int_{G_{|\xi|}} \left| (a^{\frac{1}{k+\alpha}})'(t) \right| dt = 0. \quad (*)$$

On peut ainsi démontrer la proposition 3.1 à partir de l'inégalité (3.10) en utilisant successivement le lemme 3.3 pour $a \in C^{k,\alpha}([0, T])$ et (*) (sans recours au théorème 2.1).

Notons alors que le théorème 3.1 est valable pour une fonction a de classe $C^{k,\alpha}([0, T])$ $k \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ vérifiant $a(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ sous la condition suivante

$$1 \leq s \leq 1 + \frac{k + \alpha}{2}$$

ce qui permet d'améliorer le résultat de [2] dans le cas particulier $n = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. COLOMBINI, E. DE GIORGI, S. SPAGNOLO, Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 6 (1979), 511-559.
- [2] F. COLOMBINI, E. JANNELLI, S. SPAGNOLO, Well posedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for a non strictly hyperbolic equation with coefficients depending on time, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 10 (1983), 291-312.
- [3] J. DIEUDONNE, Sur un théorème de Glaeser, *J. Analyse Math.*, 23 (1970), 85-88.

- [4] G. GLAESER, Racine carrée d'une fonction différentiable, *Ann. Inst. Fourier*, 13-2 (1963), 203-210.
- [5] F. RIESZ, B. SZ. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier – Villars, Paris.

Manuscrit reçu le 4 mars 1985.

Robert DALMASSO,
Faculté des Sciences de Tunis
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
1060 Tunis (Tunisie).