ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN COQUET
GEORGES RHIN
PHILIPPE TOFFIN

Représentations des entiers naturels et indépendance statistique. II

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 1 (1981), p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 1 (1981), 1-15

REPRÉSENTATIONS DES ENTIERS NATURELS ET INDÉPENDANCE STATISTIQUE 2

par J. COQUET, G. RHIN et Ph. TOFFIN

1. INTRODUCTION

1.1. Rappels.

Dans l'article [2], Coquet et Toffin ont démontré :

THEOREME 1. – *Soit* q *un entier naturel* $\geqslant 2$. $s(n)$ *désigne la somme des chiffres de* n *en base* q *et* $\sigma(n)$ *la somme des chiffres de* n *en écriture Fibonacci. La suite de terme général* $x\, s(n) + y\, \sigma(n)$ *est équirépartie modulo 1 si et seulement si l'un au moins des nombres* x *et* y *est irrationnel.*

Nous nous proposons d'établir un résultat plus général faisant intervenir la α-somme des chiffres définie dans [3] :

Soit α un nombre irrationnel, soit $[a_0 ; a_1, \ldots, a_k, \ldots]$ son développement en fraction continue. Les dénominateurs $q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots$ des réduites successives de α vérifient les relations :

$$q_0 = 1\,,\ q_1 = a_1 \quad \text{et} \quad q_{k+2} = a_{k+2} q_{k+1} + q_k \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbf{N}\,.$$

Tout entier naturel n se développe de manière unique sous la forme : $n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(n)\, q_k$ où la suite $(\epsilon_k(n))_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie :

1) $\epsilon_0(n) \in \{0, 1, \ldots, a_1 - 1\}$

2) $\epsilon_k(n) \in \{0, \ldots, a_{k+1}\}$ quel que soit $k \in \mathbf{N}^*$ et

3) $\epsilon_{k+1}(n) = a_{k+2} \Longrightarrow \epsilon_k(n) = 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$.

Ces conditions se traduisent par :

$$\sum_{k<\mathrm{K}} \epsilon_k(n)\, q_k < q_{\mathrm{K}+1} \quad \text{pour tout} \quad \mathrm{K} \in \mathbf{N}\,.$$

Le développement précédent est appelé *α-développement de n* et $\sigma_\alpha(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(n)$ la *α-somme des chiffres de* n.

Dans [3], le résultat suivant est prouvé :

THEOREME 2. – *La suite de terme général* $y\,\sigma_\alpha(n)$ *est équirépartie modulo 1 si et seulement si* y *est irrationnel.*

1.2. Résultat principal.

La suite σ envisagée au théorème 1 est la suite σ_α relative à $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le résultat qui suit généralise donc les théorèmes 1 et 2.

THEOREME 3. – *Soient* α *un irrationnel,* q *un entier naturel* $\geqslant 2$, $s(n)$ *la somme des chiffres de* n *en base* q *et* $\sigma_\alpha(n)$ *la α-somme des chiffres de* n. *La suite de terme général* $x\,s(n) + y\,\sigma_\alpha(n)$ *est équirépartie modulo 1 si (et seulement si) l'un au moins des nombres* x *et* y *est irrationnel.*

1.3. Principe de la démonstration.

On suit essentiellement le schéma de démonstration du théorème 1. On pose encore, pour tout u réel, $e(u) = e^{2i\pi u}$ et $\|u\|$ désigne la distance de u à $\mathbf{Z}$.

D'après le critère de Weyl, il s'agit de prouver que, si l'un au moins des nombres x et y est irrationnel, la suite de terme général $G(n) = g(n)\,g'(n)$ où $g(n) = e(x\,s(n))$ et $g'(n) = e(y\,\sigma_\alpha(n))$ a une valeur moyenne nulle.

Lorsque $x(q-1) \in \mathbf{Z}$, la suite q-multiplicative g est périodique ; on montre au paragraphe 2 que G a alors une valeur moyenne nulle si y est irrationnel.

Au paragraphe 3, on montre que g' possède une corrélation.

Dans le cas où $x(q-1) \notin \mathbf{Z}$, g est pseudo-aléatoire [1] ; on en déduit au paragraphe 4 que G l'est aussi donc a une valeur moyenne nulle.

2. CAS OU g EST PERIODIQUE

2.1. Un type de suites arithmétiques [3].

Lorsque $x(q-1) \in \mathbf{Z}$, $g(n) = e(xn)$ puisque $n \equiv s(n)$ modulo $q-1$. La suite $\mathrm{G}(n) = e(xn + y\,\sigma_\alpha(n))$ fait partie d'une famille de suites arithmétiques introduite dans [3].

DEFINITIONS. –

1) $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite *additive relativement à* α si

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\epsilon_k(n)\,q_k) \quad \text{quel que soit} \quad n \in \mathbf{N}.$$

2) $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite *multiplicative relativement à* α si $f(0) = 1$ et $f(n) = \prod_{k=0}^{\infty} f(\epsilon_k(n)\,q_k)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

La suite $n \longmapsto xn + y\,\sigma_\alpha(n)$ est additive relativement à α donc G est multiplicative relativement à α.

2.2. Condition de moyenne nulle [3].

LEMME 1. – *f étant une suite de module $\leqslant 1$ multiplicative relativement à α, on pose $\mu_k(f) = \dfrac{1}{q_k} \sum_{n<q_k} f(n)$. Alors f a une valeur moyenne nulle sur* $\mathbf{N}$ *si et seulement si* $\lim_{k\to\infty} \mu_k(f) = 0$.

2.3. Relations de récurrence [3].

Les notations sont celles du lemme 1.

LEMME 2. –

1) $$q_{k+2}\,\mu_{k+2}(f) = q_{k+1}\,\mu_{k+1}(f) \sum_{0<b<a_{k+2}} f(bq_{k+1}) + q_k\,\mu_k(f)\, f(a_{k+2}q_{k+1})$$

2) si $a_{k+2} = a_{k+1} = 1$,

$$q_{k+2}\,\mu_{k+2}(f) = q_k\,\mu_k(f)\,(1 + f(q_{k+1})) + q_{k-1}\,\mu_{k-1}(f)\,f(q_k).$$

2.4. Etude de G.

On suppose y irrationnel et on pose $\mu_k(\mathrm{G}) = \mu_k$.

2.4.1. *Premier cas* : $\{k \in \mathbf{N} ; a_k \neq 1\}$ est fini.

Pour $k \geqslant \mathrm{K}$, $a_k = 1$. Soit $k \geqslant \mathrm{K}$. Le lemme 2. 2) donne :

$$q_{k+2} \, |\mu_{k+2}| \leqslant q_k \, |\mu_k| \, |1 + e(xq_{k+1} + y)| + q_{k-1} \, |\mu_{k-1}|. \tag{1}$$

L'hypothèse faite ici sur la suite (a_k) implique que :

$$\frac{q_{k+1}}{q_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Soit $\mu = \limsup_{k\to\infty} |\mu_k|$. Puisque $x \in (q-1)^{-1}\mathbf{Z}$, $\|xq_{k+1} + y\|$ est minoré par la distance de y à $(q-1)^{-1}\mathbf{Z}$, qui est > 0. Donc il existe $\mathrm{A} < 2$ tel que, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$|1 + e(xq_{k+1} + y)| \leqslant \mathrm{A}. \tag{3}$$

Les relations (1), (2) et (3) donnent : $\mu \leqslant \mu(\mathrm{A}\alpha_0^{-2} + \alpha_0^{-3})$, de sorte que $\mu = 0$, et d'après le lemme 1, G a une moyenne nulle.

2.4.2. *Deuxième cas* : $\{k \in \mathbf{N} ; a_k \geqslant 2\}$ est infini.

On pose $\mathrm{M}_k = \mathrm{Max}\,\{|\mu_k|, |\mu_{k-1}|\}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. D'après le lemme 2.1)

$$q_{k+1} \, |\mu_{k+1}| \leqslant \mathrm{M}_k \left(\Big| \sum_{0 \leqslant b < a_{k+1}} e(b(xq_k + y)) \Big| \, q_k + q_{k-1} \right), \tag{4}$$

de sorte que la suite (M_k) est décroissante.

D'autre part, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\Big| \sum_{0 \leqslant b < m} e(b(xq_k + y)) \Big| \leqslant (1-\beta)m \tag{5}$$

pour tout entier k et tout entier $m \geqslant 2$.

Ceci résulte de l'inégalité :

$$\left| \frac{\sin(\pi m z)}{\sin(\pi z)} \right| \leqslant \mathrm{Min}\left(\frac{1}{|\sin(\pi z)|}, m - 2 + 2\,|\cos \pi z| \right) \quad \text{pour} \quad z \notin \mathbf{Z}$$

et du fait que $\|xq_k + y\|$ est minoré par une quantité strictement positive indépendante de k.

Soit alors k tel que $a_{k+1} \geqslant 2$. (4) et (5) donnent :

$$q_{k+1} \, |\mu_{k+1}| \leqslant ((1-\beta) \, a_{k+1} q_k + q_{k-1}) \, \mathrm{M}_k \, ,$$

d'où il résulte en tenant compte de $a_{k+1} q_k > \frac{2}{3} q_{k+1}$,

$$|\mu_{k+1}| \leqslant \left(1 - \frac{2\beta}{3}\right) \mathrm{M}_k \, . \tag{6}$$

(6) et le lemme 2.1) donnent ensuite :

$$q_{k+2} \, |\mu_{k+2}| \leqslant \mathrm{M}_k \left(a_{k+2} q_{k+1} \left(1 - \frac{2\beta}{3}\right) + q_k \right) ;$$

puis en remarquant que $a_{k+2} q_{k+1} > \frac{q_{k+2}}{2}$,

$$|\mu_{k+2}| \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) \mathrm{M}_k \, . \tag{7}$$

De (6) et (7), il vient :

$$a_{k+1} \geqslant 2 \Longrightarrow \mathrm{M}_{k+2} \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) \mathrm{M}_k \, . \tag{8}$$

L'inégalité (8), la décroissance de la suite (M_k) et l'hypothèse faite sur la suite (a_k) entraînent finalement : $\lim\limits_{k \to \infty} \mathrm{M}_k = 0$, et d'après le lemme 1, G a une valeur moyenne nulle.

3. EXISTENCE DE LA CORRELATION DE g'

3.1. Existence de densités asymptotiques.

h étant un entier naturel, ψ_h désigne l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définie par $\psi_h(n) = \sum\limits_{k<h} \epsilon_k(n) \, q_k$. Le but de ce paragraphe est de prouver le

THEOREME 4. – *Soit a un entier naturel $< q_{h+1}$. L'ensemble $\mathcal{E}(h, a) = \{n \in \mathbf{N} \, ; \, \psi_h(n) = a\}$ possède une densité asymptotique égale à :*

$$\delta = (q_{h+1} + q_h \, [0 \, ; a_{h+2} \, , a_{h+3} \, , \ldots])^{-1} \quad si \quad a \geqslant q_h$$

$$\delta' = \delta(1 + [0 \, ; a_{h+2} \, , a_{h+3} \, , \ldots]) \quad si \quad a < q_h \, .$$

On commence par évaluer $d(\mathrm{N}) = \mathrm{Card}\, \{n \in \mathcal{E}(h, a) \, ; \, n < \mathrm{N}\}$.

3.1.1. *Un lemme de dénombrement.*

LEMME 3. – *On pose* $\theta = \begin{cases} 0 & si \quad a \geqslant \sum_{k<h} \epsilon_k(\mathrm{N})\, q_k \\ 1 & dans\ le\ cas\ contraire. \end{cases}$

1) *Lorsque* $a \geqslant q_h$, $d(\mathrm{N}) = \sum_{k>h} \epsilon_k(\mathrm{N})\, \omega_k + \theta$, (ω_k) *étant la suite définie pour* $k \geqslant h-1$ *par :*

$$\omega_{h-1} = 1, \ \omega_h = 0, \ \omega_{k+1} = a_{k+1}\,\omega_k + \omega_{k-1} \quad pour \quad k \geqslant h$$

2) *Lorsque* $a < q_h$, $d(\mathrm{N}) = \sum_{k>h} \epsilon_k(\mathrm{N})\, \omega'_k + \theta$, (ω'_k) *étant la suite définie pour* $k \geqslant h-1$ *par :*

$$\omega'_{h-1} = 1 - a_{h+1}, \ \omega'_h = 1 \ \text{ et } \ \omega'_{k+1} = a_{k+1}\,\omega'_k + \omega'_{k-1} \quad pour \quad k \geqslant h.$$

Principe de la démonstration. – On pose $\mathrm{N}_h = \sum_{k>h} \epsilon_k(\mathrm{N})\, q_k$.

On a : $d(\mathrm{N}) = d(\mathrm{N}_h) + \theta$. Reste à évaluer $d(\mathrm{N}_h)$.

Par récurrence sur $k \geqslant h$, on vérifie d'abord que

$$d(q_k) = \begin{cases} \omega_k & \text{si} \quad a \geqslant q_k \\ \omega'_k & \text{si} \quad a < q_k. \end{cases}$$

Par récurrence sur l'entier $\lambda \geqslant h$, on montre ensuite en supposant que $\mathrm{N} \in [q_\lambda, q_{\lambda+1}[$, les relations

$$d(\mathrm{N}_h) = \begin{cases} \sum_{k>h} \epsilon_k(\mathrm{N})\, \omega_k & \text{si} \quad a \geqslant q_k \\ \sum_{k>h} \epsilon_k(\mathrm{N})\, \omega'_k & \text{si} \quad a < q_k. \end{cases}$$

3.1.2. *Comportement des suites* $(\omega_k \cdot q_k^{-1})$ et $(\omega'_k \cdot q_k^{-1})$.

LEMME 4. – $\delta = \lim_{k\to\infty} \dfrac{\omega_k}{q_k}$ *et* $\delta' = \lim_{k\to\infty} \dfrac{\omega'_k}{q_k}$, δ *et* δ' *étant les quantités introduites au théorème 4.*

Démonstration. – On pose $\mathrm{M}_n = \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix}$, $\dfrac{p_n}{q_n}$ étant la $n^{ième}$ réduite de α, $\Lambda_n = \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et on désigne par $\left(\dfrac{v_{n+h}}{\omega_{n+h}}\right)_{n \geqslant 1}$, la suite des réduites de $[a_{h+1}\,;\,a_{h+2}\,,\ldots]$

$$\mathrm{M}_{n+h} = (\Lambda_0\,\Lambda_1 \ldots \Lambda_h)\ (\Lambda_{h+1} \ldots \Lambda_{n+h})$$

donc

$$\begin{bmatrix} p_{n+h} & p_{n+h-1} \\ q_{n+h} & q_{n+h-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_h & p_{h-1} \\ q_h & q_{h-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n+h} & v_{n+h-1} \\ \omega_{n+h} & \omega_{n+h-1} \end{bmatrix}$$

d'où
$$\frac{\omega_{n+h}}{q_{n+h}} = \left(q_{h-1} + q_h\,\frac{v_{n+h}}{\omega_{n+h}}\right)^{-1}.$$

Il apparaît que :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\omega_k}{q_k} = (q_{h-1} + q_h\,[a_{h+1}\,;\,a_{h+2}\,,\ldots])^{-1} = \delta\,.$$

D'autre part, soit $\omega''_k = \omega'_k - \omega_k$ pour $k \geqslant h-1$

$$\omega''_h = 1\,,\ \omega''_{h+1} = 0 \quad \text{et} \quad \omega''_{k+1} = a_{k+1}\,\omega''_k + \omega''_{k+1} \quad \text{pour} \quad k \geqslant h\,.$$

Soit $\left(\dfrac{v''_{n+h}}{\omega''_{n+h}}\right)_{n\geqslant 2}$ la suite des réduites de $[a_{h+2}\,;\,a_{h+3}\,,\ldots]$.

$$\mathrm{M}_{n+h} = \mathrm{M}_{h+1} \begin{bmatrix} v''_{n+h} & v''_{n+h-1} \\ \omega''_{n+h} & \omega''_{n+h-1} \end{bmatrix}$$

ce qui entraîne :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\omega''_k}{q_k} = (q_h + q_{h+1}\,[a_{h+2}\,;\,a_{h+3}\,,\ldots])^{-1}$$
$$= \frac{[0\,;\,a_{h+2}\,,\ldots]}{q_{h+1} + q_h\,[0\,;\,a_{h+2}\,,\ldots]} = \delta' - \delta\,.$$

3.1.3. *Fin de la preuve du théorème 4.*

On traite par exemple le cas où $a \geqslant q_k$. Il s'agit de prouver que : $\delta = \lim\limits_{\mathrm{N}\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{N}} \sum\limits_{k>h} \epsilon_k(\mathrm{N})\,\omega_k$. Soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 4, il existe $r > h$ tel que :

$$\forall k \geqslant r\,,\quad \delta\,q_k(1-\epsilon) \leqslant \omega_k \leqslant \delta\,q_k(1+\epsilon)\,. \tag{9}$$

D'autre part, il existe $\mathrm{K} \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$q_r \leqslant \epsilon\,\delta\,q_{\mathrm{K}}\,. \tag{10}$$

On suppose $N \geqslant q_K$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k>h} \epsilon_k(N)\,\omega_k &\leqslant \sum_{k<r} \epsilon_k(N)\,q_k + \sum_{k\geqslant r} \epsilon_k(N)\,q_k\,\delta(1+\epsilon) \quad \text{d'après (9)}\\ &< q_r + \delta(1+\epsilon)N \leqslant \delta(1+2\epsilon)N \quad \text{d'après (10)}.\end{aligned} \tag{11}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{k>h} \epsilon_k(N)\,\omega_k &\geqslant \delta(1-\epsilon) \sum_{k\geqslant r} \epsilon_k(N)\,q_k \quad \text{d'après (9)}\\ &> \delta(1-\epsilon)\,(N-q_r) \geqslant \delta(1-2\epsilon)N \quad \text{d'après (10)}.\end{aligned} \tag{12}$$

(11) et (12) donnent finalement, pour $N \geqslant q_K$:

$$\delta(1-2\epsilon) \leqslant \frac{1}{N} \sum_{k>h} \epsilon_k(N)\,\omega_k \leqslant \delta(1+2\epsilon).$$

3.2. Une partition de $\mathbf{N}$.

LEMME 5. — *Pour tout entier naturel* t, *il existe une partition de* $\mathbf{N}$ *en sous-ensemble* Q_k, $k \in \mathbf{N}$, *et une suite* $(\lambda'_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *telles que :* $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall n \in Q_k$, $\sigma_\alpha(n+t) - \sigma_\alpha(n) = \lambda'_k$.

Démonstration. — Soit $t \in \mathbf{N}^*$. On définit $\ell \in \mathbf{N}$ par $q_{\ell-1} < t \leqslant q_\ell$. Pour tout $v \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\mathcal{R}_v = \{n \in \mathbf{N}\ ;\ \psi_{\ell+v}(n) + t < q_{\ell+v+1} \ \text{ et } \ \epsilon_{\ell+v+1}(n) < a_{\ell+v+2}\}.$$

$N = \bigcup_{v\in\mathbf{N}} \mathcal{R}_v$: en effet, si $n < q_{\ell+m}$, $m \geqslant 1$,

$$\psi_{\ell+m+1}(n) + t = n + t < q_{\ell+m} + t \leqslant q_{\ell+m+1} \quad \text{et} \quad \epsilon_{\ell+m+2}(n) = 0,$$

de sorte que $n \in \mathcal{R}_{m+1}$.

Soit alors $\mathcal{S}_0 = \mathcal{R}_0$ et, pour $v \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{S}_v = \mathcal{R}_v - \bigcup_{k=0}^{v-1} \mathcal{R}_k$. Les ensembles $\mathcal{S}_v$, $v \in \mathbf{N}$, forment une partition de $\mathbf{N}$. Si $n \in \mathcal{S}_v$,

$$n + t - \sum_{k>\ell+v} \epsilon_k(n)\,q_k = \psi_{\ell+v}(n) + t < q_{\ell+v+1}.$$

Il résulte de l'inégalité précédente et de $\epsilon_{\ell+v+1}(n) < a_{\ell+v+2}$, que : $\epsilon_k(n+t) = \epsilon_k(n)$ si $k \geqslant \ell + v + 1$. Donc, si $n \in \mathcal{S}_v$,

$$\sigma_\alpha(n+t) - \sigma_\alpha(n) = \sigma_\alpha(\psi_{\ell+v}(n) + t) - \sigma_\alpha(\psi_{\ell+v}(n)).$$

Lorsque $\mathcal{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a)$ est non vide,

$$n \in \mathcal{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a) \Rightarrow \sigma_\alpha(n + t) - \sigma_\alpha(n) = \sigma_\alpha(a + t) - \sigma_\alpha(a).$$

Il suffit de numéroter les ensembles $\mathcal{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a)$ non vides pour obtenir la partition $\{Q_k ; k \in \mathbf{N}\}$.

Notons que, si $\mathcal{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a)$ est non vide,

$$\mathcal{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a) = \mathcal{E}(\ell + v, a) \cap \{n \in \mathbf{N} ; \epsilon_{\ell+v+1}(n) < a_{\ell+v+2}\}$$

est réunion finie d'ensembles $\mathcal{E}(\ell + v + 1, b)$ donc, d'après le thèorème 4, *les ensembles* Q_k *possèdent une densité asymptotique.*

3.3. Minoration d'une densité.

Les notations sont celles des paragraphes 3.1 et 3.2.

LEMME 6. — *Soit* $\epsilon > 0$. *Il existe* $w \in \mathbf{N}^*$ *tel que :*

$$B_w = \mathbf{N} - \bigcup_{v<w} \mathcal{R}_v$$

ait une densité $\leqslant \epsilon$.

Démonstration. — $B_w = \{n \in \mathbf{N} ; \forall v \leqslant w, \psi_{\ell+v}(n) \geqslant q_{\ell+v+1} - t$ ou $\epsilon_{\ell+v+1}(n) = a_{\ell+v+2}\}$. Si $v \geqslant 1$,

$$q_{\ell+v+1} - t \geqslant q_{\ell+v+1} - q_\ell \geqslant a_{\ell+v+1}\, q_{\ell+v}.$$

Donc

$$B_w \subset \{n \in \mathbf{N} ; \forall v \leqslant w, \epsilon_{\ell+v}(n) = a_{\ell+v+1} \text{ ou } \epsilon_{\ell+v+1}(n) = a_{\ell+v+2}\}.$$

On pose $w = 2r$. Si $n \in B_{2r}$,

$$(\epsilon_{\ell+1}(n), \ldots, \epsilon_{\ell+2r}(n)) = (a_{\ell+2}, 0, a_{\ell+4}, 0, \ldots, 0, a_{\ell+2r}, b)$$

avec $b < a_{\ell+2r+1}$, ou bien

$$(\epsilon_{\ell+1}(n), \ldots, \epsilon_{\ell+2r}(n)) = (0, a_{\ell+3}, 0, \ldots, a_{\ell+2r-1}, 0, a_{\ell+2r+1}).$$

Dans le premier cas, puisque nécessairement $\epsilon_\ell(n) = 0$, $\psi_{\ell+2r}(n)$ peut prendre au plus $q_\ell\, a_{\ell+2r+1}$ valeurs. Dans le deuxième cas, $\psi_{\ell+2r}(n)$ peut prendre au plus $q_{\ell+1}$ valeurs. D'après le théorème 4, la densité de B_{2r} est majorée par :

$$[1 ; a_{\ell+2r+2}, \ldots]\ (q_{\ell+2r+1} + q_{\ell+2r}[0; a_{\ell+2r+2}, \ldots])^{-1}\ (q_{\ell+1} + q_\ell\, a_{\ell+2r+1}),$$

donc par $2(q_{\ell+1} + q_\ell\, a_{\ell+2r+1})\, q_{\ell+2r+1}^{-1}$, enfin par :

$$2\left(\frac{q_{\ell+1}}{q_{\ell+2r+1}} + \frac{q_\ell}{q_{\ell+2r}}\right).$$

Le lemme est démontré.

3.4. g' possède une corrélation.

A l'aide des lemmes 5 et 6 et du théorème 4, on démontre exactement comme dans [2] au paragraphe 3.4 que g' possède une corrélation $\gamma_{g'}$ donnée par : $\gamma_{g'}(t) = \sum_{k\in\mathbf{N}} d(\mathrm{Q}_k)\, e(y\lambda'_k)$.

4. CAS OU g EST PSEUDO-ALEATOIRE

4.1. Valeur de la corrélation de G.

Besineau a démontré [1] :

LEMME 7. – 1) *Pour tout* $t \in \mathbf{N}$, *il existe une partition de* $\mathbf{N}$ *en progressions arithmétiques* $\mathcal{R}_j$, $j \in \mathbf{N}$, *et une suite* $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ *telles que :* $\forall j \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathcal{R}_j$, $s(n + t) - s(n) = \lambda_j$.

2) g *possède une corrélation donnée par :*

$$\gamma_g(t) = \sum_{j\in\mathbf{N}} d(\mathcal{R}_j)\, e(x\lambda_j).$$

En reprenant les arguments des paragraphes 3.3 et 3.4, on montre que $\mathrm{G} = gg'$ possède une corrélation donnée par :

$$\gamma_{\mathrm{G}}(t) = \sum_{j,k} d(\mathcal{R}_j \cap \mathrm{Q}_k)\, e(x\lambda_j)\, e(y\lambda'_k).$$

Le lemme 8 qui suit montre que cette quantité est égale à :

$$\sum_{j,k} d(\mathcal{R}_j)\, d(\mathrm{Q}_k)\, e(x\lambda_j)\, e(y\lambda'_k) \quad \text{soit} \quad \gamma_g(t)\, \gamma_{g'}(t).$$

Donc $|\gamma_{\mathrm{G}}(t)| \leqslant |\gamma_g(t)|$, et si g est pseudo-aléatoire, G l'est aussi donc a une moyenne nulle, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

4.2. Un résultat d'indépendance statistique.

LEMME 8. – *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$, Q_k *est statistiquement indépendant de toute progression arithmétique.*

Il revient au même de prouver que $\mathcal{E}(h, a)$ est statistiquement indépendant de toute progression arithmétique $u\mathbf{N} + v$, $u \geqslant 2$.

On désigne par χ la fonction caractéristique de $u\mathbf{N} + v$ et par χ' celle de $\mathcal{E}(h, a)$, de sorte que :

$$\chi(n)\,\chi'(n) = \frac{1}{u} \sum_{0 \leqslant z < u} e\Big(-\frac{zv}{u}\Big)\,\chi'(n)\,e\Big(\frac{zn}{u}\Big).$$

Il s'agit de prouver que, si $1 \leqslant z < u$, la suite de terme général $\chi'(n)\, e\Big(\dfrac{zn}{u}\Big)$ a une moyenne nulle.

Puisque $\chi'(n) = \dfrac{1}{q_{h+1}} \displaystyle\sum_{0 \leqslant z' < q_{h+1}} e\Big(-\frac{z'a}{q_{h+1}}\Big)\, e\Big(\frac{z'\psi_h(n)}{q_{h+1}}\Big)$, il est équivalent de vérifier que la suite de terme général

$$H'_{z,z'}(n) = e\Big(\frac{zn}{u} + \frac{z'\psi_h(n)}{q_{h+1}}\Big)$$

a une moyenne nulle si $1 \leqslant z < u$.

Il est clair que $H_{z,z'}$ est multiplicative relativement à α et que, si $k \geqslant h + 1$ et $0 \leqslant b \leqslant a_{k+1}$

$$H_{z,z'}(bq_k) = e\Big(\frac{zbq_k}{u}\Big).$$

Le lemme 2 donne, en posant $\delta_k = \mu_k(H_{z,z'})$:

LEMME 2bis. – *On a pour* $k \geqslant h + 2$

1) $$q_{k+2}\,\delta_{k+2} = q_{k+1}\,\delta_{k+1} \sum_{0 \leqslant b < a_{k+2}} e\Big(\frac{zbq_{k+1}}{u}\Big) + q_k\,\delta_k\, e\Big(\frac{za_{k+2}\,q_{k+1}}{u}\Big)$$

2) *si* $a_{k+2} = a_{k+1} = 1$,

$$q_{k+2}\,\delta_{k+2} = q_k\,\delta_k\,\Big(1 + e\Big(\frac{zq_{k+1}}{u}\Big)\Big) + q_{k-1}\,\delta_{k-1}\, e\Big(\frac{zq_k}{u}\Big).$$

4.3. Fin de la démonstration du lemme 8.

Il reste à prouver que $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$. On distingue plusieurs cas. Les deux lemmes suivants seront utiles.

LEMME 9. – *Soit* $D_k = \text{Max}\,\{|\delta_k|, |\delta_{k+1}|\}$. *La suite* (D_k) *est décroissante.*

Démonstration. – Le lemme 9 résulte du lemme 2 bis.

LEMME 10. – *L'égalité* $1 = e\left(\frac{zq_k}{u}\right) = e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right)$ *est impossible si* $z \in \{1, \ldots, u-1\}$.

Démonstration. – L'égalité précédente entraîne, par récurrence descendante, $e\left(\frac{zq_0}{u}\right) = 1$ donc $z \equiv 0$ modulo u.

4.3.1. *Premier cas :* $\{k \in \mathbf{N}\,;\, a_{k+2} \geqslant 2$ et $a_{k+1} \geqslant 2\}$ *est infini.*

D'après le lemme 10,

$$S_1 = \left\{k \geqslant h\,;\, a_{k+2} \geqslant 2 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right) \neq 1\right\} \text{ est infini.}$$

Soit $k \in S_1$. D'après le lemme 2 bis 1),

$$q_{k+2}\,|\delta_{k+2}| \leqslant D_k\left(q_k + q_{k+1}\left|\sum_{0 \leqslant b < a_{k+2}} e\left(\frac{bzq_{k+1}}{u}\right)\right|\right). \tag{18}$$

Puisque $\left|1 - e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right)\right| \geqslant \left|1 - e\left(\frac{1}{u}\right)\right|$, on peut affirmer comme au paragraphe 2.4.2 qu'il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $k \in S_1$

$$\left|\sum_{0 \leqslant b < a_{k+2}} e\left(\frac{bzq_{k+1}}{u}\right)\right| \leqslant (1-\beta)\,a_{k+2}\,. \tag{19}$$

Comme au paragraphe 2.4.2, on obtient

$$k \in S_1 \Longrightarrow D_{k+2} \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) D_k\,. \tag{20}$$

A l'aide du lemme 9, on conclut que $D_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

4.3.2. *Deuxième cas :* $\{k \in \mathbf{N}\,;\, a_{k+3} = a_{k+2} = a_{k+1} = 1\}$ *est infini.*

D'après le lemme 10,

$$S_2 = \left\{ k > h \, ; \, a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \quad \text{et} \quad e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right) \neq 1 \right\} \quad \text{est infini.}$$

D'après le lemme 2 bis 2), si $k \in S_2$

$$q_{k+2} \, |\delta_{k+2}| \leqslant D_k \left(q_k \left| 1 + e\left(\frac{1}{u}\right) \right| + q_{k-1} \right),$$

donc,

$$|\delta_{k+2}| \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) D_k \,. \tag{21}$$

A l'aide du lemme 2 bis 1), on en déduit :

$$q_{k+3} \, |\delta_{k+3}| \leqslant D_k \left(\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) a_{k+3} \, q_{k+2} + q_{k+1} \right)$$

$$|\delta_{k+3}| \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_k \,, \tag{22}$$

de sorte que $k \in S_2 \Rightarrow D_{k+2} \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_k$.

4.3.3. *Troisième cas* :

$$\left\{ k \in \mathbf{N} \, ; \, a_{k+3} \geqslant 2, \; a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \quad \text{et} \quad e\left(\frac{zq_{k+2}}{u}\right) \neq 1 \right\} \quad \textit{infini.}$$

$$S_3 = \left\{ k > h \, ; \, a_{k+3} \geqslant 2 \, , \; a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \quad \text{et} \quad e\left(\frac{zq_{k+2}}{u}\right) \neq 1 \right\}$$

est infini.

Soit $k \in S_3$. D'après le lemme 2 bis 1),

$$\begin{aligned} q_{k+3} \, |\delta_{k+3}| &\leqslant q_{k+2} \, |\delta_{k+2}| \, a_{k+3} \, (1 - \beta) + q_{k+1} \, |\delta_{k+1}| \\ &\leqslant D_{k+1} \, (q_{k+3} - \beta \, a_{k+3} \, q_{k+2}), \end{aligned}$$

donc

$$|\delta_{k+3}| \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) D_{k+1} \,. \tag{23}$$

En appliquant le lemme 2 bis 1), $|\delta_{k+4}| \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_{k+1}$.

Finalement, $k \in S_3 \Longrightarrow D_{k+3} \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_{k+1}$.

4.3.4. *Quatrième cas* :

$$\left\{ k \in \mathbf{N} \, ; \, a_{k+3} \geqslant 2 \, , \; a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \quad \text{et} \quad e\left(\frac{zq_{k+2}}{u}\right) = 1 \right\} \quad \textit{infini.}$$

Dans ce cas, $S_2 = \left\{ k > h \,;\, a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right) \neq 1 \right\}$ est infini. On conclut comme dans le deuxième cas.

4.3.5. *Cinquième cas : aucune des conditions précédentes n'est réalisée.*

Alors il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $a_{K+2p} \geqslant 2$ et $a_{K+2p+1} = 1$. D'autre part, l'égalité

$$1 = e\left(\frac{zq_{K+2p+3}}{u}\right) = e\left(\frac{zq_{K+2p+1}}{u}\right)$$

est impossible. En effet, elle entraîne $e\left(\frac{zq_{K+2p+2}}{u}\right) = 1$ car $q_{K+2p+2} = q_{K+2p+3} - q_{K+2p+1}$. Et l'égalité

$$1 = e\left(\frac{zq_{K+2p+2}}{u}\right) = e\left(\frac{zq_{K+2p+1}}{u}\right)$$

est impossible d'après le lemme 10.

L'ensemble

$$S_4 = \left\{ k > h \,;\, a_{k+2} \geqslant 2\,,\ a_{k+1} = 1\,,\ a_k \geqslant 2 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right) \neq 1 \right\}$$

est donc infini. Si $k \in S_4$, on a d'après le lemme 2 bis 1) :

$$\begin{aligned} q_{k+2}\, |\delta_{k+2}| &\leqslant (1-\beta)\, a_{k+2}\, q_{k+1}\, |\delta_{k+1}| + q_k\, |\delta_k| \\ &\leqslant D_k (q_{k+2} - \beta a_{k+2}\, q_{k+1}), \end{aligned}$$

donc $|\delta_{k+2}| \leqslant D_k \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)$.

On obtient, grâce au lemme 2 bis 1) à nouveau :

$$k \in S_4 \Longrightarrow D_{k+2} \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_k\,. \tag{24}$$

Le lemme 8 est prouvé et le théorème 3 aussi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Besineau, Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres", *Acta Arithmetica,* 20 (1972), 401-414.

[2] J. COQUET, Ph. TOFFIN, Représentations des entiers naturels et indépendance statistique, *Bull. des Sciences Math.*, à paraître 1981.

[3] J. COQUET, Répartition de la somme des chiffres associée à une fraction continue, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* à paraître 1980.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1980.

J. COQUET,
Département de Mathématiques
Université de Valenciennes
59326 Aulnoy-les-Valenciennes.

G. RHIN,
Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy
57000 Metz.

Ph. TOFFIN,
U.E.R. des Sciences
Université de Caen
Esplanade de la Paix
14000 Caen.