ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PAUL BERTRANDIAS
CHRISTIAN DATRY
CHRISTIAN DUPUIS

Unions et intersections d'espaces L^p invariantes par translation ou convolution

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 2 (1978), p. 53-84
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_2_53_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 2 (1978), 53-84.

UNIONS ET INTERSECTIONS D'ESPACES L^p INVARIANTES PAR TRANSLATION OU CONVOLUTION

par J.-P. BERTRANDIAS, C. DATRY et C. DUPUIS

Dans un article précédent [4], on a étudié les propriétés générales des intersections $\bigcap^p(S)$ ou des unions $\bigcup^q(S)$ d'espaces $L^p(s)$ ou $L^q(s)$ relatifs à des mesures s variant dans un ensemble S de mesures positives définies sur un espace localement compact X. Nous nous intéressons ici au cas où l'espace X est un groupe commutatif localement compact G et où l'ensemble S est invariant par translation ou stable par convolution. Les espaces $\bigcap^p(S)$ et $\bigcup^q(S)$ ont alors des propriétés intéressantes (en particulier de stabilité par convolution) que nous étudions dans la première partie de cet article (§ 3 et 4). En choisissant convenablement l'ensemble S, on retrouve de nombreux espaces étudiés de manière classique en analyse harmonique; en particulier, on obtient ainsi les propriétés d'espace de Banach ou d'algèbre de Banach des espaces étudiés par A. Beurling [6].

Nous examinons ensuite (§ 5) une généralisation des espaces étudiés par B. Koremblium [12] en considérant le cas où S est l'ensemble des translatées d'une seule mesure ν. Si ν est une mesure « nulle à l'infini » ou une mesure absolument continue, on peut donner des caractérisations directes des éléments des espaces $\bigwedge^p$ ou $\bigcup^q$.

Dans la fin de cet article (§ 6 et 7), nous étudions des espaces notés $l^p(L^{p'})$ qui sont formés des fonctions appartenant localement à $L^{p'}$ et dont le comportement à l'infini s'apparente à celui des éléments d'un espace l^p. Pour $G = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$, ils correspondent à des espaces étudiés dans des cas particuliers par N. Wiener [18], R. Goldberg [8], P. Szeptycki [17] et dans un cas plus général par F. Holland [11]. Ces espaces interviennent dans certains problèmes d'analyse harmonique : par exemple le plus grand espace « solide » de fonctions sur lequel la transformation de Fourier peut se définir au moyen d'un prolongement par continuité est l'espace $l^2(L^1)$ (voir [5] et [17]).

1. Notations. Rappels.

a) Espaces $\bigcap^p$, $\bigwedge^p$, $\bigcup^q$ *et* $\bigvee^q$.

Nous utiliserons les notations et les résultats de [4].

L'espace X sera un groupe commutatif localement compact noté G dont une mesure de Haar sera notée m.

On notera L^1_{loc} l'espace des fonctions localement intégrables par rapport à m. On identifiera les fonctions φ de cet espace aux mesures φm correspondantes et de telles mesures seront dites *absolument continues.* Si A est un ensemble de mesures de Radon, on notera A_m l'ensemble des composantes absolument continues des mesures de A dans la décomposition de Lebesgue relativement à m.

On notera L^∞_{comp} l'espace des fonctions de $L^\infty(m)$ essentiellement nulles dans le complémentaire d'un compact et L^∞_0 l'adhérence de L^∞_{comp} dans l'espace L^∞. La norme dans les espaces $L^p(m) = L^p(G)$ sera notée $\| \ \|_p$.

Dans toute la suite, S désignera un ensemble de mesures de Radon positives borné pour la topologie vague. On notera S^v (resp. S^∇) l'enveloppe convexe, saturée et fermée pour la topologie vague (resp. quasi-forte) de l'ensemble S.

On dira qu'une mesure positive μ est *localement subordonnée* à S si pour chaque compact K, il existe une constante λ_K telle que $\chi_K \mu$ appartienne à l'ensemble $\lambda_K S^\nabla$, la fonction χ_K étant la fonction caractéristique de l'ensemble K.

L'exposant p sera tel que $1 \leqslant p < \infty$ dans les paragraphes 1 à 5 et $q = p/p - 1$ sera l'exposant conjugué.

L'espace $\bigcap^p(S) = \bigcap^p$ est l'espace de Banach des classes de fonctions complexes mesurables relativement à toutes les mesures s de S et telles que

$$\|f\|_\cap = \|f\|_{\cap^p} = \sup_{s \in S} \|f\|_{L^p(s)} < \infty .$$

L'espace $\bigwedge^p(S) = \bigwedge^p$ est l'adhérence dans $\bigcap^p$ de l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions continues à support compact.

L'espace $\bigcup^q(S) = \bigcup^q$ est l'espace vectoriel des mesures de Radon complexes σ qui sont le produit ρs d'une mesure s de l'enveloppe convexe de S et d'une fonction ρ appartenant à $L^q(s)$. La norme dans cet espace est

$$\|\sigma\|_{\bigcup} = \|\sigma\|_{\bigcup^q} = \inf_{\sigma=\rho s} \|\rho\|_{L^q(s)}.$$

Soit $\mathcal{K}m$ l'espace vectoriel des mesures de la forme km avec k dans $\mathcal{K}$. L'espace $\bigvee^q(S) = \bigvee^q$ est l'adhérence dans $\bigcup^q$ de l'espace $\bigcup^q_{\cap}\mathcal{K}m$.

Au sujet de ces différents espaces, rappelons quelques résultats de [4].

Les espaces de Banach $\bigcap^p(S)$ et $\bigcap^p(S^\nabla)$ sont identiques ainsi que les espaces $\bigwedge^p(S)$, $\bigwedge^p(S^\nabla)$ et $\bigwedge^p(S^v)$.

Les espaces $\bigcup^q(S^\nabla)$ et $\bigcup^q(S^v)$ sont des espaces de Banach. On a $\bigcup^q(S_m) = \bigcup^q(S)_{\cap}L^1_{\text{loc}}$ et $\bigvee^q(S_m) = \bigvee^q(S)$. Les applications canoniques $\bigcup^q(S_m) \to \bigcup^q(S) \to \bigcup^q(S^\nabla)$ sont isométriques.

Le dual topologique de $\bigwedge^p$ s'identifie isométriquement à l'espace $\bigcup^q(S^v)$.

Si $1 < q < \infty$, le complété de l'espace $\bigcup^q(S)$ est l'espace $\bigcup^q(S^\nabla)$ et le dual topologique de $\bigcup^q(S_m)$ s'identifie isométriquement à $\bigcap^p(S_m)$.

Si $1 < q < \infty$ et si m est localement subordonnée à S, on a $\bigvee^q(S) = \bigcup^q(S_m)$.

En appelant Σ_q la boule unité positive de $\bigcup^q$, les espaces normés $\bigcap^p$, $\bigwedge^p$, $\bigcup^q$ et $\bigvee^q$ s'identifient isométriquement aux espaces $\bigcap^1(\Sigma_q)$, $\bigwedge^1(\Sigma_q)$, $\bigcup^\infty(\Sigma_q)$ et $\bigvee^\infty(\Sigma_q)$ respectivement. La boule unité positive Σ_∞ de $\bigcup^\infty(S^\nabla)$ est l'ensemble S^∇ lui-même.

Si S est formé de mesures de base m et si m est localement subordonnée à S, on note S^Δ *l'ensemble associé* à S c'est-à-dire l'ensemble des mesures ayant pour densité par rapport à m les fonctions de la boule unité positive de $\bigcap^1(S^\nabla)$. Les espaces de Banach $\bigcap^p$, $\bigwedge^p$, $\bigcup^q(S^\nabla)$ et $\bigvee^q(S^\nabla)$ s'identifient isométriquement aux espaces $\bigcup^\infty(\Sigma_q^\Delta)$, $\bigvee^\infty(\Sigma_q^\Delta)$, $\bigcap^1(\Sigma_q^\Delta)$ et $\bigwedge^1(\Sigma_q^\Delta)$ respectivement.

b) Translatées d'une fonction ou d'une mesure.

Soit x un élément du groupe G. La translatée d'amplitude x d'une fonction f définie sur G est la fonction f_x définie par $f_x(t) = f(t - x)$. La translatée μ_x d'une mesure μ se définit par dualité. On notera $\mathcal{T}f$ ou $\mathcal{T}\mu$ l'ensemble des translatées d'une fonction f ou d'une mesure μ. Pour un ensemble A formé de fonctions ou de mesures, on notera $\mathcal{T}A$ l'ensemble de tous les translatés de tous les éléments de A. Si $\mathcal{T}A = A$, on dira que l'ensemble A est *invariant par translation.*

Si f est une fonction définie sur G, on notera $\check{f}$ la fonction définie par $\check{f}(t) = f(-t)$; pour une mesure μ, la mesure $\check{\mu}$ se définit par dualité.

c) Espaces de fonctions et de mesures.

On notera C (resp. C_0) l'espace des fonctions complexes continues et bornées (resp. continues et nulles à l'infini) définies sur G.

On notera $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{M}_+$) l'espace des mesures de Radon complexes (resp. positives) définies sur G et $\mathfrak{M}^b$ l'espace de Banach des mesures de Radon bornées. L'ensemble des mesures positives de norme bornée par 1 sera noté B_+.

On dira qu'une partie A de $\mathfrak{M}$ est *stable par convolution* (resp. par *convolution avec les mesures bornées*) si toute mesure a de A est convolable avec toute mesure μ de A (resp. de $\mathfrak{M}^b$), la convolution $a * \mu$ appartenant encore à A.

Les mesures ν telles que l'ensemble $\mathcal{T}\nu$ soit vaguement borné seront appelées *mesures à translatées bornées* et l'espace vectoriel de ces mesures sera noté $\mathfrak{M}^t$. Cet espace a été étudié par L. Argabright et J. Gil de Lamadrid [1] et C. Berg et G. Forst [3]. Les mesures ν telles que $|\nu|_x$ tendent vaguement vers la mesure nulle lorsque x tend vers l'infini dans G seront appelées *mesures à translatées nulles à l'infini* et l'espace vectoriel de ces fonctions sera noté $\mathfrak{M}^{t_0}$. L'espace des fonctions de L^1_{loc} appartenant à $\mathfrak{M}^t$ (resp. $\mathfrak{M}^{t_0}$) sera noté $\mathfrak{M}^t_m$ (resp. $\mathfrak{M}^{t_0}_m$).

Les espaces $\mathfrak{M}^t$, $\mathfrak{M}^{t_0}$, $\mathfrak{M}^t_m$ et $\mathfrak{M}^{t_0}_m$ sont stables par convolution avec les mesures bornées. Si une mesure de Radon positive ν appartient à l'un de ces espaces, les convolutions de ν avec les fonctions de L^∞_{comp} appartiennent respectivement à L^∞, L^∞_0, C et C_0.

On dira que l'ensemble S est *uniformément vaguement borné* si l'ensemble $\mathcal{J}S$ est vaguement borné c'est-à-dire si à chaque compact K de G on peut associer une constante M_K telle que pour toute mesure s de S et tout élément x de G, on ait $s_x(K) \leqslant M_K$. Ceci a lieu en particulier lorsque l'ensemble S est supposé invariant par translation. On a évidemment $S \subseteq \mathcal{J}S \subseteq \mathfrak{M}^t$.

2. Enveloppes des translatés d'un ensemble de mesures.

a) Ensemble des translatés d'une mesure.

Si ν est une mesure positive, on notera ν^v (resp. ν^∇) l'enveloppe convexe saturée fermée pour la topologie vague (resp. quasi-forte) de l'ensemble $\mathcal{J}\nu$ des translatés de ν.

LEMME I. — *Si* ν *appartient à* $\mathfrak{M}^t$ (resp. $\mathfrak{M}^t_m$), *l'ensemble* ν^v (resp. ν^∇) *contient l'ensemble* $\nu * B_+$ *des convolées de* ν *avec toutes les mesures de* B_+.

Si ν *appartient à* $\mathfrak{M}^{t_0}$, *l'ensemble* ν^v *est l'enveloppe saturée de l'ensemble* $\nu * B_+$.

Si ν *appartient à* $\mathfrak{M}^{t_0}_m$, *les ensembles* ν^∇ *et* ν^v *sont les mêmes et sont compacts pour la topologie faible* $\sigma(L^1_{\text{loc}}, L^\infty_{\text{comp}})$.

Démonstration. — On considère l'application $\mathfrak{M}^b \to \mathfrak{M}^t$ (resp. $\mathfrak{M}^b \to \mathfrak{M}^t_m$) définie par la convolution $\mu \to \nu * \mu$. Elle admet une application transposée définie sur $\mathcal{K}$ (resp. L^∞_{comp}) et à valeurs dans C (ou dans C_0 si ν appartient à $\mathfrak{M}^{t_0}$). Elle est donc continue pour les topologies faibles correspondantes. L'image réciproque de l'enveloppe convexe fermée pour la topologie vague (resp. pour la topologie $\sigma({}^1_{\text{loc}}, L^\infty_{\text{comp}})$ donc pour la topologie quasi-forte) de l'ensemble $\mathcal{J}\nu$ contient toutes les mesures de Dirac ε_x. D'après le théorème de la bipolaire, l'image réciproque de ν^v (resp. ν^∇) contient aussi toutes les mesures de B_+.

Si ν appartient à $\mathfrak{M}^{t_0}$, le théorème de Banach-Alaoglu montre que l'ensemble $\nu * B_+$ est vaguement compact; par suite ν_v est son enveloppe saturée $(\nu * B_+ - \mathfrak{M}_+) \cap \mathfrak{M}_+$.

Si de plus ν est absolument continue, l'ensemble $\nu * B_+$ est compact pour la topologie $\sigma(L^1_{loc}, L^\infty_{comp})$; il en résulte qu'il contient l'enveloppe convexe quasi-fortement fermée de $\mathcal{J}\nu$. L'enveloppe saturée $(\nu * B_+ - \mathfrak{M}_+)_\cap \mathfrak{M}_+$ est alors fermée pour la topologie $\sigma(L^1_{loc}, L^\infty_{comp})$ donc pour la topologie quasi-forte et par suite coïncide avec ν^∇. Elle est compacte pour la topologie $\sigma(L^1_{loc}, L^\infty_{comp}) = \sigma((L^\infty_{comp})^\times, L^\infty_{comp})$ d'après les propriétés générales de compacité faible dans les espaces ordonnés (Fremlin [7], § 82E).

Conséquences du lemme I.

On suppose que S est uniformément vaguement borné.

α) Les convolées des éléments de S avec les éléments de B_+ appartiennent à l'ensemble $(\mathcal{J}S)^v$ qu'on notera $\mathcal{J}S^v$.

β) Si l'ensemble $\mathcal{J}S^v$ est contenu dans B_+, il est stable par convolution.

γ) Si S contient une mesure absolument continue s_0, l'ensemble $\mathcal{J}S^\nabla = (\mathcal{J}S)^\nabla$ contient les convolées de s_0 avec toutes les mesures de B_+.

δ) La mesure de Haar m est localement subordonnée à $\mathcal{J}S^v$. Si S n'est pas formé uniquement de mesures étrangères à la mesure m, celle-ci est localement subordonnée à $\mathcal{J}S$ (cf. [3], lemme 1.9).

b) Caractérisation par convolution des ensembles liés à $\mathcal{J}S$.

Lemme II. — *Si l'ensemble* S *est uniformément vaguement borné, on a*

$$\mathcal{J}S^v = \{\sigma \in \mathfrak{M}^t_+ : \|k * \sigma\|_\infty \leqslant \sup_{s \in S} \|k * s\|_\infty \text{ pour tout } k \text{ dans } \mathcal{K}_+\}.$$

Si de plus S *est formé de mesures absolument continues, on a*

$$\mathcal{J}S^\nabla = \{\varphi \in (\mathfrak{M}^t_m)_+ : \|b * \varphi\|_\infty \leqslant \sup_{s \in S} \|b * s\|_\infty$$

pour tout b *dans* $(L^\infty_{comp})_+\}$

$$\mathcal{J}S^\Delta = \{f \in (\mathfrak{M}^t_m)_+ : \sup_{s \in S} \|f * \check{s}\|_\infty \leqslant 1\}$$

$$(\mathcal{J}S^\Delta)^v = \{n \in \mathfrak{M}^t_+ : \sup_{s \in S} \|n * \check{s}\|_\infty \leqslant 1\}.$$

Démonstration. — La caractérisation de $\mathcal{J}S^v$ et de $\mathcal{J}S^\nabla$ est une conséquence immédiate du théorème de la bipolaire positive appliquée respectivement aux dualités positives $(\mathfrak{M}^t,\mathcal{K})$ et $(L^1_{loc},L^\infty_{comp})$.

Pour la démonstration des deux autres propriétés, on associe à chaque mesure s de S l'ensemble filtrant des mesures $s_{K,N} = \inf(s\chi_K, Nm)$ où K parcourt l'ensemble des compacts de G et N l'ensemble des entiers positifs. Si $S \subseteq L^1_{loc}$, on peut remplacer S par l'ensemble $(s_{K,N}\}_{s,K,N}$; comme m est localement subordonnée à $\mathcal{I}S^\nabla$, une fonction positive de $\bigcap^1(\mathcal{I}S)$ appartient à $(\mathfrak{M}^t_m)_+$ (cf. Th. I) et une fonction f de cet espace appartient à $\mathcal{I}S^\Delta$ si et seulement si

$$\|f\|_{\cap^1} = \sup_{x,s,K,N} \int_G f_x \, ds_{K,N} = \sup_{s,K,N} \|f * \check{s}_{K,N}\|_\infty \leqslant 1 .$$

Par passage à la borne supérieure, on en déduit que f est convolable avec chaque mesure $\check{s}$ et que

$$\|f\|_{\cap^1} = \sup_{s\in S} \|f * \check{s}\|_\infty ,$$

ce qui donne bien la forme annoncée pour l'ensemble $\mathcal{I}S^\Delta$. Cet ensemble est évidemment convexe, saturé et invariant par translation. Il est quasi-fortement fermé d'après les propriétés générales.

D'après le théorème de la bipolaire positive, la fermeture vague de $\mathcal{I}S^\Delta$ est formée des mesures n telles que pour toute fonction k de $\mathcal{K}_+$ on ait

$$\langle n,k\rangle \leqslant \sup_{f\in S\mathcal{I}^\Delta} \langle f,k\rangle.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\langle k, n * \check{s}_{K,N}\rangle = \langle n, k * s_{K,N}\rangle &\leqslant \sup_f \langle f, k * s_{K,N}\rangle \\ &\leqslant \sup_f (f * \check{k} * \check{s}_{K,N})(0) \leqslant \sup_f \|f * \check{k} * \check{s}_{K,N}\|_\infty .\end{aligned}$$

Si $\|k\|_1 \leqslant 1$, la fonction $f * \check{k}$ appartient à $\mathcal{I}S^\Delta$ d'après le lemme I et d'après la caractérisation précédente de $\mathcal{I}S^\Delta$, on obtient

$$\left|\iint_{G\times G} k(x+y)\, dn(x)\, d\check{s}_{K,N}(y)\right| \leqslant \|k\|_1 .$$

Par passage à la borne supérieure, on en déduit que n est convolable avec chaque mesure $\check{s}$ et que $\sup_{s\in S} \|n * \check{s}\|_\infty \leqslant 1$.

Inversement, une mesure n ayant ces propriétés appartient à $(\mathscr{T}S^{\Delta})^{v}$ car elle est adhérente à l'ensemble des mesures $n * k$ avec k dans $\mathscr{K}_{+}$ et $\|k\|_1 \leqslant 1$, ces mesures appartenant à $\mathscr{T}S^{\Delta}$ d'après la caractérisation de cet ensemble.

3. Espaces $\sqcap^p$, $\wedge^p$, $\sqcup^q$ et $\vee^q$ invariants par translation.

On dira qu'un espace normé de fonctions ou de mesures est *invariant par translation* si les translatés de tout élément de l'espace appartiennent à l'espace et si la norme est invariante par translation.

Il est évident que si S est invariant par translation, les ensembles S^{∇} et S^{v} le sont aussi et que les espaces normés $\sqcap^p$, $\wedge^p$, $\sqcup^q$ et $\vee^q$ correspondant aux ensembles S, S^{∇} ou S^{v} sont invariants par translation. Inversement, d'après [4] (prop. IV, cor. III), si l'espace $\sqcup^q(S^{\nabla})$ (resp. $\sqcup^q(S^{v})$ ou $\sqcap^p(S^{v})$) est invariant par translation, l'ensemble S^{∇} (resp. S^{v}) est invariant par translation.

Si l'ensemble S est uniformément vaguement borné, les espaces $\sqcap^p$, $\wedge^p$, $\sqcup^q$ et $\vee^q$ correspondant à $\mathscr{T}S$ sont invariants par translation. On vérifie facilement que les éléments de $\sqcup^q(\mathscr{T}S)$ sont des mesures à translatées bornées si $q = \infty$ ou à translatées nulles à l'infini si $1 < q < \infty$.

Pour un élément a de $\sqcap^p$ (resp. $\sqcup^q$), on notera T_a l'application translation à valeurs dans $\sqcap^p$ (resp. $\sqcup^q$) définie sur G par $x \longmapsto a_x$.

Les éléments de $\sqcap^p(\mathscr{T}S)$ sont les éléments f de $\sqcap^p(S)$ tels que l'application T_f existe et soit bornée; on a

$$\|f\|_{\sqcap^p(\mathscr{T}S)} = \sup_{x \in G} \|f_x\|_{\sqcap^p(S)} .$$

a) Continuité de l'application translation.

THÉORÈME I. — *On suppose que* S *est uniformément vaguement borné.*

α) *Si la fonction* f *appartient à* $\wedge^p(\mathscr{T}S)$, *elle appartient à l'espace* $\mathfrak{M}^t_m$ *et l'application* T_f *est bornée et uniformément continue.*

β) *Si* f *est une fonction de* $\mathfrak{M}^t_m$ *telle que l'application* T_f *existe, soit bornée et uniformément continue, la fonction* f *est* *limite dans* $\bigcap^p(\mathscr{S})$ *d'une suite de fonctions bornées et continues ayant la même propriété.*

On suppose de plus que S *est invariant par translation.*

α') *Si la mesure* σ *appartient à* $\bigvee^q(S)$, *l'application translation* T_σ *est bornée et uniformément continue.*

β') *Si* σ *est une mesure telle que l'application* T_σ *existe et soit continue, la mesure* σ *appartient à* $\bigcup^p(S_m)$ ($= \bigvee^q(S)$ *si* $1 < q < \infty$).

Démonstration.

α) Soit K un compact de G. Comme m est localement subordonnée à $\mathscr{S}^v$, la mesure $m\chi_K$ appartient à un ensemble $\lambda_K(\mathscr{S}^v)$; pour une fonction f de $\bigwedge^p(\mathscr{S}^v)$ ou de $\bigcap^p(\mathscr{S}^v)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_K |f_x|\, dm &\leqslant \Big(\int_K |f_x|^p\, dm\Big)^{1/p}\Big(\int_K dm\Big)^{1/q}\\ &\leqslant (\lambda_K)^{1/p}\|f_x\|_{\cap^p(\mathscr{S}^v)}(m(K))^{1/q}\\ &\leqslant C\|f\|_{\cap^p(\mathscr{S}^v)}\,.\end{aligned}$$

On en déduit que les fonctions de $\bigwedge^p(\mathscr{S}^v)$ ou de $\bigcap^p(\mathscr{S}^v)$ appartiennent à $\mathfrak{M}^t_m$. Si k est une fonction de $\mathscr{K}$ portée par K, l'application T_k est évidemment bornée et elle est uniformément continue car si V est un voisinage compact de l'origine, on a, pour tout k dans V,

$$\|k_{x+h} - k_x\|^p_\cap \leqslant \sup_{h\in V}\|k_h - k\|^p_\infty \sup_{x,s} s(x + K + V).$$

β) Soit f une fonction de $\mathfrak{M}^t_m$ telle que l'application T_f existe, soit bornée et uniformément continue. On sait déjà qu'elle appartient à $\bigcap^p(\mathscr{S})$. Considérons l'ensemble de ses régularisées $f^H = f * \chi_H/m(H)$ où H parcourt l'ensemble des voisinages compacts de l'origine. Ces fonctions sont continues et bornées comme convolution d'une fonction de $\mathfrak{M}^t_m$ par une fonction de L^∞_{comp}. Elles appartiennent à $\bigcap^p(\mathscr{S})$ car

$$\begin{aligned}\|f^H_x\|^p_\cap &= \sup_{s\in S}\int^\bullet_G \left|\frac{1}{m(H)}\int_H f(t-x-u)\, du\right|^p ds(t)\\ &\leqslant \sup_{s\in S}\int^\bullet_G \frac{1}{m(H)}\int_H |f(t-x-u)|^p\, du\, ds(t)\\ &\leqslant \frac{1}{m(H)}\int_H \|f_{x+u}\|^p_\cap\, du\\ &\leqslant \sup_{u\in H}\|f_{x+u}\|^p_\cap \leqslant \|f\|^p_{\cap^p(\mathscr{S})} \quad \text{pour tout } x \text{ dans } G\,.\end{aligned}$$

De la même façon on vérifie que l'application T_{f^H} est uniformément continue :

$$\|f^H_{x+h} - f^H_x\|_{\cap} \leqslant \sup_{u \in H} \|f_{x+h+u} - f_{x+u}\|_{\cap}$$

et que f^H tend vers f dans $\cap^p(\mathscr{S}S)$:

$$\|f^H - f\|_{\cap^p(\mathscr{S}S)} = \sup_{x \in G} \|f^H_x - f_x\|_{\cap} \leqslant \sup_{x \in G} \sup_{u \in H} \|f_{x+u} - f_x\|_{\cap} \cdot$$

cette dernière quantité pouvant être rendue arbitrairement petite par un choix convenable de H car l'application T_f est uniformément continue.

Remarque. — Si l'application T_f est continue et nulle à l'infini, il en est de même des applications T_{f^H}.

α') On a $\mathsf{V}^q(S) = \mathsf{V}^q(S_m)$. Si S_m est réduit à la mesure nulle, la propriété est triviale. Sinon, m est localement subordonnée à S et toute mesure km de $\mathscr{K}m$ appartient à $\mathsf{U}^q(S^\nabla)$. Soit K le support de k et soit V un voisinage compact de l'origine. Pour tout x dans G et h dans V, on a, dans l'espace $\mathsf{U}^q(S^\nabla)$,

$$\|(km)_x\|_{\mathsf{U}} \leqslant \|k\|_\infty \quad \|\chi_K m\|_{\mathsf{U}} ,$$
$$\|(km)_{x+h} - (km)_x\|_{\mathsf{U}} \leqslant \|k_h - k\|_\infty \quad \|\chi_{K+V} m\|_{\mathsf{U}} ,$$

ce qui montre que l'application T_{km} est bornée et uniformément continue. Par convergence uniforme, cette propriété reste vraie pour les éléments de $\mathsf{V}^q(S^\nabla)$ et donc de $\mathsf{V}^q(S)$.

β') Supposons que l'application T_σ existe et soit continue. Les mesures σ_x appartiennent donc à $\mathsf{U}^q(S)$ et pour tout compact K, il existe une constante $c = (M_K)^{1/p}$ telle que

$$|\sigma_{x'}(K) - \sigma_x(K)| \leqslant |\sigma_{x'} - \sigma_x|(K) \leqslant c\|\sigma_{x'} - \sigma_x\|_{\mathsf{U}} \cdot$$

Pour tout compact K, la fonction numérique $x \longmapsto \sigma_x(K)$ est donc continue. On sait que cela est équivalent au fait que la mesure σ est absolument continue ([16], p. 230, [13], th. I). La mesure σ appartient donc à $\mathsf{U}^q(S) \cap L^1_{\text{loc}} = \mathsf{U}^q(S_m)$ qui coïncide avec $\mathsf{V}^q(S)$ si $1 < q < \infty$.

b) Convolution par les mesures bornées.

THÉORÈME II. — *On suppose que l'ensemble* S *est invariant par translation.*

α) *Les espaces* $\bigcup^q(S^v)$, $\bigcup^q(S_m^\nabla)$, $\bigvee^q(S^v)$ *et* $\bigvee^q(S^\nabla)$ *sont stables par convolution avec les mesures bornées et on a*

$$\|\sigma * \mu\|_\cup \leqslant \|\sigma\|_\cup \|\mu\|_{\mathfrak{M}} .$$

β) *Les espaces* $\bigcap^p(S_m)$ *et* $\bigwedge^p(S_m)$ *sont stables par convolution avec les mesures bornées et on a* $\|f * \mu\|_\cap \leqslant \|f\|_\cap \|\mu\|_{\mathfrak{M}}$.

COROLLAIRE. — *Soit* $\mathfrak{V}$ *une base de filtre d'unités approchées de* $\mathfrak{M}^b$ *dont les ensembles sont formés de mesures* ω *positives telles que* $\|\omega\|_m \leqslant 1$ *et* $\lim_{\mathfrak{V}} \omega(W) = 1$ *pour tout voisinage compact* W *de l'origine. Pour un élément* a *d'un des espaces du théorème, on a* $\lim_{\mathfrak{V}} \omega * a = a$, *la limite étant prise suivant les cas*

— *dans un espace* $\bigvee^q$ (*ou* $\bigwedge^p$) *muni de la topologie de la norme,*

— *dans un espace* $\bigcup^q$ (*ou* $\bigcap^p$) *muni de la topologie* $\sigma(\bigcup^q, \bigwedge^p)$ (*ou* $\sigma(\bigcap^p, \bigvee^q)$).

Démonstration.

α) Les espaces de Banach $\bigcup^q(S^v)$ et $\bigcup^q(S_m^\nabla)$ s'identifient à des espaces $\bigcup^\infty$ dont les boules unités positives sont respectivement vaguement compacte et quasi-fortement fermée ([4], th. II et III, prop. VIII). D'après le lemme I, ces boules unités positives sont stables par convolution avec les mesures de B_+. On en déduit que $\bigcup^q(S^v)$ et $\bigcup^q(S_m^\nabla)$ sont stables par convolution avec les mesures bornées et que

$$\|\sigma * \mu\|_\cup \leqslant \|\sigma\|_\cup \|\mu\|_{\mathfrak{M}} .$$

En approchant chaque élément σ de $\bigvee^q(S^v)$ ou $\bigvee^q(S^\nabla)$ par des mesures de la forme km et la mesure bornée μ par des mesures à support compact, il en résulte que $\bigvee^q(S^v)$ et $\bigvee^q(S^\nabla)$ sont aussi stables par convolution avec les mesures bornées.

β) Les espaces de Banach $\bigcap^p(S_m) = \bigcap^p(S_m^\nabla)$ et $\bigwedge^p(S_m) = \bigwedge^p(S_m^\nabla)$ s'identifient à des espaces $\bigcup^\infty$ et $\bigvee^\infty$ correspondant à des ensembles de mesures absolument continues quasi-fortement fermés et invariants par translation (§ 1.a et lemme II). La conclusion résulte alors de la propriété α).

Pour démontrer le corollaire, on prend d'abord a dans un espace $\mathscr{K}m_{\cap}\bigcup^{q}$ ou $\mathscr{K}$ et on voit par les méthodes classiques que $\lim_{\mathfrak{V}} \omega * a = a$ dans les espaces normés $\bigcup^{q}(S^{v})$, $\bigcup^{q}(S_{m}^{\nabla})$ ou $\bigcap^{p}(S_{m})$, compte tenu du fait que m est localement subordonnée aux ensembles S^{v} ou S_{m}^{∇} (s'ils ne sont pas réduits à la mesure nulle). Le théorème permet alors d'étendre par continuité cette propriété aux éléments h des espaces normés $\bigvee^{q}(S^{v})$, $\bigvee^{q}(S^{\nabla})$ ou $\bigwedge^{p}(S_{m})$; si a est un élément de $\bigcup^{p}(S_{m})$, $\bigcup^{q}(S_{m})$ ou $\bigcup^{q}(S^{v})$, on en déduit la dernière propriété du corollaire en vérifiant d'abord que

$$\langle \omega * a, h\rangle = \langle a, \check{\omega} * h\rangle.$$

c) Propriétés de dualité.

Les propriétés générales (§ 1.*a*) et le lemme II donnent immédiatement le résultat suivant :

THÉORÈME III. — *On suppose que l'ensemble* S *est uniformément vaguement borné.*

Si $1 \leqslant p < \infty$, *le dual topologique de* $\bigwedge^{p}(\mathscr{S}S)$ *est l'espace de Banach* $\bigcup^{q}(\mathscr{S}S^{v})$.

Si $1 < p < \infty$, *le dual topologique de* $\bigcup^{q}(\mathscr{S}S_{m}) = \bigvee^{q}(\mathscr{S}S)$ *est l'espace de Banach* $\bigcap^{p}(\mathscr{S}S_{m})$.

Le dual topologique de $\bigvee^{\infty}(\mathscr{S}S^{\nabla})$ *est l'espace des mesures de Radon* n *telles que* $\check{n}$ *soit convolable avec les mesures* s *de* S_{m}, *la convolution appartenant à* $L^{\infty}(m)$ *et*

$$\|n\| = \sup_{s \in S_{m}} \||n| * \check{s}\|_{\infty}.$$

4. Espaces $\bigcup^{q}$ et $\bigvee^{q}$ stables par convolution.

a) Algèbres de convolution.

THÉORÈME IV. — *Si l'ensemble* S *est stable par convolution, l'espace* $\bigcup^{q}(S)$ *est une algèbre normée, le produit étant la convolution.*

COROLLAIRE. — *Si l'ensemble* S *est stable par convolution, les espaces* $\bigcup^{q}(S_{m})$ *et* $\bigvee^{q}(S_{m})$ *sont des algèbres normées pour la convolution et les espaces* $\bigcup^{q}(S^{\nabla})$ *et* $\bigvee^{q}(S^{\nabla})$ *sont des algèbres de Banach pour la convolution.*

Démonstration. — Si l'ensemble S est stable par convolution, on vérifie facilement que l'enveloppe convexe saturée de S est aussi stable par convolution.

Soient $\sigma_1 = \rho_1 s_1$ et $\sigma_2 = \rho_2 s_2$ deux éléments de $\mathrm{U}^q(\mathrm{S})$. Si k est une fonction de $\mathscr{K}$, on a, d'après l'inégalité de Hölder ou une majoration directe si $p = 1$:

$$\begin{aligned}\iint_{G\times G} |k(x+y)|\,|\rho_1(x)|\,ds_1(x)\,|\rho_2(y)|\,ds_2(y) \\ \leqslant \Big(\iint_{G\times G} |k(x+y)|^p\,ds_1(x)\,ds_2(y)\Big)^{1/p} \|\rho_1\|_{L^q(s_1)} \|\rho_2\|_{L^q(s_2)} \\ \leqslant \Big(\int_G |k|^p\,d(s_1 * s_2)\Big)^{1/p} \|\rho_1\|_{L^q(s_1)} \|\rho_2\|_{L^q(s_2)}\,.\end{aligned}$$

On en déduit que les mesures σ_1 et σ_2 sont convolables et que

$$\Big|\int_G kd(\sigma_1 * \sigma_2)\Big| \leqslant \|k\|_{L^p(s_1 * s_2)} \|\rho_1\|_{L^q(s_1)} \|\rho_2\|_{L^q(s_2)}\,.$$

Il existe donc une fonction r appartenant à $L^q(s_1 * s_2)$ telle que

$$\int_G kd(\sigma_1 * \sigma_2) = \int_G krd(s_1 * s_2)$$

et

$$\|r\|_{L^q(s_1 * s_2)} \leqslant \|\rho_1\|_{L^q(s_1)} \|\rho_2\|_{L^q(s_2)}\,.$$

Il en résulte que $\sigma_1 * \sigma_2$ appartient à $\mathrm{U}^q(\mathrm{S})$ et que

$$\|\sigma_1 * \sigma_2\|_{\mathrm{U}} \leqslant \|\sigma_1\|_{\mathrm{U}}\,\|\sigma_2\|_{\mathrm{U}}\,.$$

Le corollaire provient immédiatement des propriétés générales (§ 1.*a*) et du fait que si S est stable par convolution, l'ensemble S^∇ est aussi stable par convolution.

b) *Structure d'algèbre de Segal.*

Rappelons qu'on appelle *algèbre de Segal* sur le groupe G une algèbre de Banach A qui est une sous-algèbre de convolution de l'algèbre $L^1(m)$ du groupe G et qui vérifie les propriétés suivantes :

- l'espace normé A est invariant par translation;
- l'espace vectoriel A est dense dans $L^1(m)$;
- l'application translation T_f: G $\to$ A est continue pour tout élément f de A .

Ces algèbres ont été étudiées principalement par H. Reiter [14], [15] (voir aussi Hewitt-Ross [10], § 31-32). Leur intérêt provient de ce que la théorie spectrale de ces algèbres est très proche de celle de $L^1(m)$.

Les résultats précédents montrent que si S est invariant par translation et est formé de mesures de B_+ qui ne sont pas toutes étrangères à m, les espaces $\bigcup^q(S_m^\nabla)$ si $1 < q < \infty$ et $\bigvee^\infty(S_m^\nabla)$ sont des algèbres de Segal. Remarquons que dans ce cas, $\bigvee^\infty(S_m^\nabla)$ est l'espace des éléments f de $\bigcup^\infty(S_m^\nabla)$ tels que l'application T_f à valeurs dans $\bigcup^q(S_m^\nabla)$ soit continue sur G.

c) Algèbres de Beurling.

Dans [6], A. Beurling étudie des algèbres de convolution formées de fonctions intégrables. On peut aisément vérifier que ce sont des espaces $\bigcup^q(S)$ correspondant à des ensembles S formés de mesures positives, bornées et absolument continues, cet ensemble étant convexe et stable par convolution. Il a de plus la propriété de fermeture suivante : pour toute suite $\{s_n\}$ d'éléments de S et pour toute suite $\{\lambda_n\}$ de nombres positifs tels que $\Sigma\lambda_n = 1$, la série $\Sigma\lambda_n s_n$ converge vers un élément de S.

Le théorème précédent et les propriétés générales des espaces $\bigcup^q(S)$ montrent que ce sont des algèbres de Banach pour $1 < q \leqslant \infty$ et que pour $1 < q < \infty$, leurs duals topologiques sont les espaces $\bigcap^p(S)$ correspondants.

5. Ensembles S formes des translatées d'une seule mesure.

Dans ce paragraphe, nous étudions les espaces $\bigcap^p$, $\bigwedge^p$ et $\bigcup^q$ correspondant à l'ensemble $\mathcal{T}\nu$ des translatées d'une seule mesure. Pour que $\mathcal{T}\nu$ soit vaguement borné, il faut supposer que ν est une mesure à translatées bornées. Avec d'autres restrictions sur la mesure ν, on peut caractériser de manière simple les éléments des espaces $\bigwedge^p(\nu^\nabla)$ et $\bigcup^q(\nu^\nabla)$. Les espaces de ce type ont été introduits et étudiés par B. Koremblium [12] (voir E. Hewitt [9]).

a) Espaces $\bigcap^p$.

On voit immédiatement qu'un élément f de $\bigcap^p(\mathcal{T}\nu)$ est une fonction f telle que ses translatées f_x sont ν-mesurables et appartiennent à $\bigcap^p(\nu) = L^p(\nu)$ avec

$$\|f\|_{\cap} = \sup_{x\in G} \left(\int_G |f_x|^p \, d\nu\right)^{1/p}$$

ou encore, si ν est absolument continue, telle que $|f|^p$ soit convolable avec $\check{\nu}$ avec (voir lemme II)

$$\|f\|_{\cap} = \||f|^p * \check{\nu}\|_{\infty}^{1/p} < \infty .$$

b) *Espaces* $\bigwedge^p$.

Si f appartient à $\bigwedge^p(\mathscr{J}\nu) = \bigwedge^p(\nu^{\nabla}) = \bigwedge^p(\nu^{\nu})$, on sait (théorème I) que f appartient à $\mathfrak{M}^t_m$ et que l'application translation T_f: $G \rightarrow L^p(\nu)$ est bornée et continue pour la norme dans $L^p(\nu)$. Pour des mesures ν particulières, on peut améliorer le théorème I et caractériser les éléments de $\bigwedge^p$.

Proposition I. — *Pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}^t_m$ appartienne à $\bigwedge^p(\mathscr{J}\nu)$, il faut et il suffit que :*

α) *L'application T_f: $G \rightarrow L^p(\nu)$ existe et soit continue nulle à l'infini (dans le cas où ν appartient à $\mathfrak{M}^{t_0}$).*

β) *La convolution $|f|^p * \check{\nu}$ existe et soit continue nulle à l'infini (dans le cas où ν appartient à $\mathfrak{M}^{t_0}_m$).*

γ) *La convolution $|f|^p * \check{\nu}$ soit nulle à l'infini (dans le cas où ν appartient à L^{∞}_{comp}).*

Démonstration. — Si f appartient à l'espace $\mathscr{K}$, on vérifie immédiatement que les conditions α, β et γ sont réalisées. Par convergence uniforme, elles sont aussi réalisées pour les fonctions f de $\bigwedge^p(\mathscr{J}\nu)$.

Inversement, si l'une des trois conditions est réalisée, la fonction f appartient à $\bigcap^p(\mathscr{J}\nu)$ et il faut montrer qu'elle est limite d'une suite de fonctions de $\mathscr{K}$.

α) Si la condition α est réalisée, on voit que la convolution $|f|^p * \check{\nu}$ est définie, continue, nulle à l'infini et on sait déjà (théorème I) que f est limite dans $\bigcap^p(\mathscr{J}\nu)$ d'une suite de fonctions continues vérifiant aussi la condition α. Il faut montrer qu'une telle fonction g est limite d'une suite de fonctions de $\mathscr{K}$. Pour cela, on considère la famille des fonctions ξ de $\mathscr{K}$ telles que $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Elle est filtrante croissante pour l'ordre naturel et la famille $\{\xi|g|\}$ converge ponctuellement en croissant vers la fonction $|g|$. On a :

$$\|g - \xi g\|^p_{\cap^p(\mathcal{T}\nu)} = \||g - \xi g|^p * \check{\nu}\|_\infty \leqslant \||g|^p(1 - \xi^p) * \check{\nu}\|_\infty$$
$$\leqslant \||g|^p * \check{\nu} - |\xi g|^p * \check{\nu}\|_\infty .$$

La famille des fonctions continues $|\xi g|^p * \check{\nu}$ converge ponctuellement en croissant vers la fonction continue nulle à l'infini $|g|^p * \nu$; la convergence est uniforme d'après le théorème de Dini. La fonction g peut donc bien s'approcher dans $\cap^p(\mathcal{T}\nu)$ par une suite de fonctions de la forme ξg qui appartiennent à $\mathcal{K}$.

β) Si ν appartient à $\mathfrak{M}^{t_0}_m$, les fonctions de L^∞_{comp} appartiennent à $\wedge^p(\mathcal{T}\nu)$ car ν^∇ est compact pour la topologie $\sigma(\mathfrak{M},\mathfrak{B})$ (lemme I et prop. IX de [4]). Si la condition β est réalisée, on montre au moyen du théorème de Dini comme ci-dessus que f est limite dans $\cap^p(\mathcal{T}\nu)$ d'une suite de fonctions de L^∞_{comp} de la forme $\chi_K f_N$ où K est un compact de G et $f_N(t) = f(t)$ si $|f(t)| \leqslant N$ et 0 ailleurs et que f appartient bien à $\wedge^p(\mathcal{T}\nu)$.

γ) Si ν appartient à L^∞_{comp}, la fonction $|f|^p * \nu$ est toujours continue et la condition β se réduit à la condition γ.

Remarque : Si $\nu = \varphi m$ avec φ dans l'espace $L^\alpha(m)$ si $1 \leqslant \alpha < \infty$ ou dans l'espace $L^\infty_0(m)$, la condition β montre que l'espace $\wedge^p(\mathcal{T}\nu)$ contient l'espace $L^\beta(m)$ avec

$$\beta = \alpha p/\alpha - 1$$

(ou $L^\infty_0(m)$ si $\alpha = 1$) et on a pour toute fonction f de $L^\beta(m)$

$$\|f\|_{\wedge^p(\mathcal{T}\nu)} \leqslant \|\varphi\|^{1/p}_\alpha \|f\|_\beta .$$

c) Espaces $\cup^q$.

Si ν est une mesure absolument continue à translatée nulle à l'infini, le lemme I montre que $\nu^\nabla = \nu^v$ est l'enveloppe saturée de l'ensemble $\nu * B_+$. On peut dans ce cas donner une caractérisation intéressante des éléments de $\cup^q(\nu^\nabla)$ (B. Koremblium [12]).

Proposition II. — *Si $\nu = \varphi m$ est une mesure absolument continue à translatée nulle à l'infini, l'espace* $\cup^q(\nu^\nabla) = \cup^q(\nu^v)$

est l'espace des mesures absolument continues $\sigma = ym$ *dont la densité s'écrit* $y = \tau(\varphi * \mu)^{1/p}$ *où* τ *est une fonction de* $L^q(m)$ *et* μ *une mesure positive de norme bornée par* 1. *La norme de* y *est donnée par*

$$\|y\|_{\cup^q} = \inf_{\mu \in B_+} \left(\int_G \frac{|y|^q}{(\varphi * \mu)^{q-1}}\, dm\right)^{1/q} = \inf_{y=\tau(\varphi*\mu)^{1/p}} \|\tau\|_q \quad si\ 1 < q < \infty$$

$$\|y\|_{\cup^\infty} = \inf_{\mu \in B_+} \left\|\frac{y}{\varphi * \mu}\right\|_\infty = \inf_{y=\tau[\varphi*\mu)} \|\tau\|_\infty \qquad si\ q = \infty.$$

Démonstration : D'après le lemme I, un élément $\sigma = ym$ de $\cup^q(\nu^\nabla)$ est de la forme $\rho(\varphi * \mu)m$ avec ρ dans $L^q(\varphi * \mu)$. On a donc $y = \rho(\varphi * \mu)$ localement m-presque partout. En multipliant par la fonction $(\varphi * \mu)^{-1/p}$ et en posant

$$\tau = y(\varphi * \mu)^{-1/p},$$

on a

$$\|\tau\|_q^q = \int_G |\tau|^q\, dm = \int_G |\rho|^q(\varphi * \mu)\, dm = \|\rho\|^q_{L(\varphi*\mu)}$$

ce qui montre que σ est bien de la forme indiquée et que sa norme est donnée par les formules indiquées.

Inversement, si $y = \tau(\varphi * \mu)^{1/p} = \tau(\varphi * \mu)^{1-1/q}$, on a, en posant $\rho = \tau(\varphi * \mu)^{-1/q}$,

$$\|\rho\|_{L^q(\varphi*\mu)} = \left(\int_G |\tau|^q\, dm\right)^{1/q} = \|\tau\|_q$$

et par conséquent y appartient à $\cup^q(\nu^\nabla)$ avec $\|y\|_\cup \leqslant \|\tau\|_q$ et donc, d'après la première partie de la démonstration, $\|y\|_\cup = \|\tau\|_q$.

Remarque I. — Si on se place dans les conditions de la remarque sur la proposition I, on voit par dualité (ou directement si $\alpha = 1$) que les éléments de $\cup^q(\nu^\nabla)$ s'identifient à des fonctions de $L^\gamma(m)$ avec $\gamma = \alpha q/\alpha + q - 1$ et que pour tout élément y de $\cup^q(\nu^\nabla)$ on a

$$\|y\|_\gamma \leqslant \|\varphi\|_\alpha^{1/p}\|y\|_\cup.$$

Remarque II. — Si $G = \mathbf{R}$, et si ν est la fonction caractéristique d'un intervalle de longueur 1, on vérifie facilement qu'un élément f de $\cup^\infty(\nu^\nabla)$ appartient à $\vee^\infty(\nu^\nabla)$ si et seulement si f est une fonction continue sur G; l'algèbre

$\bigvee^{\infty}(\nu^{\nabla})$ n'est autre, à une équivalence de norme près, que l'algèbre étudiée par Wiener [18] et Goldberg [8]. Le théorème III permet de retrouver la caractérisation du dual de $\bigvee^{\infty}(\nu^{\nabla})$ [8].

6. Espaces $l^p(\mathrm{L}^{p'})$ comme espaces $\bigcap^p$ ou $\bigcup^q$.

a) Définition des espaces $l^p(\mathrm{L}^{p'})$.

Dans ce paragraphe, E désignera une partie universellement mesurable de G dont l'intérieur $\mathring{\mathrm{E}}$ est non vide et dont l'adhérence $\overline{\mathrm{E}}$ est compacte. On notera simplement χ la fonction caractéristique χ_{E} de l'ensemble E. A cet ensemble, on associera un nombre fini J d'éléments τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_J$ de G tels que la famille $\{\tau_J + \mathring{\mathrm{E}}\}_{J=1\ldots J}$ forme un recouvrement du compact $\overline{\mathrm{E}} - \overline{\mathrm{E}}$:

$$\mathrm{E} - \mathrm{E} \subseteq \overline{\mathrm{E}} - \overline{\mathrm{E}} \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} (\tau_j + \mathring{\mathrm{E}}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} (\tau_j + \mathrm{E}).$$

On appellera *pavage de* G par des translatés de E (ou simplement *pavage de* G) toute famille disjointe $\{t_i + \mathrm{E}\}_{i \in \mathrm{I}}$ de translatés de l'ensemble E. On notera $\wp$ l'ensemble de tous les pavages de G. Cet ensemble est évidemment inductif pour l'ordre défini par l'inclusion et admet donc des éléments maximaux qu'on appellera *pavages maximaux de* G. Remarquons que si $\{t_i + \mathrm{E}\}$ est un pavage maximal de G, la famille $\{t_i + \tau_j + \mathrm{E}\}$ forme un recouvrement de G et chaque point x de G appartient à au plus J éléments de la famille. Pour simplifier les notations, on notera E_i l'élément $t_i + \mathrm{E}$ d'un pavage et E_{ij} l'ensemble $t_i + \tau_j + \mathrm{E}$.

Soient p et p' deux exposants tels que $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $1 \leqslant p' \leqslant \infty$ dont les exposants conjugués seront notés respectivement q et q'. Dans ce paragraphe, on notera r l'exposant conjugué de qp'.

Si $1 \leqslant p < \infty$, on notera $l^p(\mathrm{L}^{p'})$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables f appartenant localement à $\mathrm{L}^{p'}(m)$ et telles que les familles $\{\|f\|^p_{\mathrm{L}^{p'}(\mathrm{E}_i)}\}_{i \in \mathrm{I}}$ soient sommables pour tout pavage $\{E_i\}_{i \in I}$ de G avec

$$\sup_{\wp} \Big(\sum_{i \in I} \|f\|^p_{L^{p'}(E_i)} \Big)^{1/p} < \infty .$$

Cette borne supérieure sera notée $\|f\|_{p,p'}$. On vérifie facilement que cette expression définit une norme sur l'espace vectoriel $l^p(L^{p'})$.

Si $p = p'$, l'espace normé $l^p(L^{p'})$ est isomorphe à l'espace $L^p(m)$ car pour un pavage maximal $\{E_i\}$ de G, on a

$$\sum_i \int_{E_i} |f|^p \, dm \leqslant \int_G |f|^p \, dm \leqslant \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} |f|^p \, dm$$

et donc

$$\|f\|_{p,p} \leqslant \|f\|_p \leqslant J^{1/p} \|f\|_{p,p} .$$

On notera $l^p(\mathscr{C})$ le sous-espace vectoriel normé de $l^p(L^\infty)$ formé par les fonctions continues de $l^p(L^\infty)$. Il est fermé dans $l^p(L^\infty)$ car $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{p,\infty}$.

Si $p = \infty$, l'espace $l^\infty(L^{p'})$ sera l'espace vectoriel normé des (classes de) fonctions mesurables f telles que

$$\|f\|_{\infty,p'} = \sup_{t \in G} \|f\|_{L^{p'}(t-E)} < \infty .$$

L'espace $c_0(L^{p'})$ sera le sous-espace fermé de $l^\infty(L^{p'})$ formé par les fonctions telles que $\lim\limits_{t \to \infty} \|f\|_{L^{p'}(t-E)} = 0$.

On voit immédiatement que les espaces normés $l^\infty(L^{p'})$ (resp. $c_0(L^{p'})$ pour $p' < \infty$) s'identifient isométriquement à l'espace $\bigcap^{p'}(\chi^\nabla)$ (resp. $\bigwedge^{p'}(\chi^\nabla)$).

Enfin, on notera $l^p(\mathfrak{M})$ l'espace normé des mesures de Radon μ telles que

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{p,1} &= \sup_{\wp} \Big(\sum_i \|\mu\chi_{E_i}\|^p_{\mathfrak{M}} \Big)^{1/p} < \infty \quad \text{si} \quad 1 \leqslant p < \infty , \\ &= \sup_{t \in G} \|\mu\chi_{t-E}\|_{\mathfrak{M}} < \infty \qquad\qquad \text{si} \quad p = \infty . \end{aligned}$$

L'espace $c_0(\mathfrak{M})$ sera le sous-espace fermé de $l^\infty(\mathfrak{M})$ formé des mesures telles que $\lim\limits_{t \to \infty} \|\mu\chi_{t-E}\|_{\mathfrak{M}} = 0$. Les espaces $l^\infty(\mathfrak{M})$, $c_0(\mathfrak{M})$, $l^\infty(L^1)$ et $c_0(L^1)$ s'identifient respectivement aux espaces $\mathfrak{M}^t$, $\mathfrak{M}^{t_0}$, $\mathfrak{M}^t_m$ et $\mathfrak{M}^{t_0}_m$. L'espace normé $l^1(\mathfrak{M})$ est isomorphe à l'espace normé $\mathfrak{M}^b$.

Pour étudier ces espaces, on va d'abord vérifier que comme espaces vectoriels normés, ils sont isomorphes (en général non isométriquement) à des unions ou intersections d'espaces L^p relatives à des ensembles S bien choisis. En particulier, il en résultera que ce sont des espaces de Banach ayant les propriétés de dualité attendues et que si on change d'ensemble E, on obtient des espaces isomorphes.

b) Espaces $\cap^{p'}$ *et* $\cup^{q'}$ *construits à partir de* $\mathscr{S}_p$.

Pour $1 \leqslant p < \infty$, on note $\mathscr{S}_p$ la boule unité positive de l'espace $l^\infty(L^p)$ (ou de $\cap^p(\chi^\nabla)$) c'est-à-dire l'ensemble des fonctions positives α appartenant localement à $L^p(m)$ et telles que

$$\sup_{t \in G} \int_{t-E} |\alpha|^p \, dm \leqslant 1 .$$

C'est un ensemble convexe, saturé, invariant par translation, quasi-fortement fermé si $1 \leqslant p < \infty$ et vaguement compact si $1 < p < \infty$ ([4], § 8).

Si $p = 1$, l'ensemble $\mathscr{S}_1$ est l'ensemble associé à l'ensemble χ^∇ et d'après le lemme II, la fermeture vague $\overline{\mathscr{S}}_1$ de $\mathscr{S}_1$ est l'ensemble des mesures positives μ telles que

$$\sup_{t \in G} \operatorname{ess} \int_{t-E} d\mu \leqslant 1 .$$

PROPOSITION III. — *On suppose que* $1 \leqslant p$, $p' < \infty$.

α) *L'espace normé* $\cap^{p'}(\mathscr{S}_p)$ *est isomorphe à l'espace* $l^{p'}(L^{qp'})$;

β) *L'espace normé* $\cup^{q'}(\mathscr{S}_p)$ *est isomorphe à l'espace* $l^{q'}(L^r)$;

γ) *L'espace normé* $\cup^{q'}(\overline{\mathscr{S}}_1)$ *est isomorphe à l'espace* $l^{q'}(\mathfrak{M})$.

Démonstration.

α) Soit f une fonction de $\cap^{p'}(\mathscr{S}_p)$. Soit $\{E_i\}$ un pavage de G. Pour tout α de $\mathscr{S}_p$, on a

$$\sum_i \int_{E_i} |f|^{p'} \alpha \, dm \leqslant \|f\|_\cap^{p'} .$$

Par un choix convenable de α sur chaque E_i, on obtient

$$\sum_i \|f^{p'}\|_{L^q(E_i)} \leqslant \|f\|_\cap^{p'} \quad \text{donc} \quad \sum_i \|f\|_{L^{qp'}(E_i)}^{p'} \leqslant \|f\|_\cap^{p'} .$$

Il en résulte que f appartient à $l^{p'}(L^{qp'})$ avec $\|f\|_{p',qp'} \leqslant \|f\|_\cap$.

Inversement, soit f une fonction de $l^{p'}(L^{qp'})$. Soit $\{E_i\}$ un pavage maximal de E. En considérant le recouvrement associé $\{E_{ij}\}$, on a pour toute fonction α de $\mathcal{S}_p$:

$$\int_G |f|^{p'} \alpha\, dm \leqslant \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} |f|^{p'} \alpha\, dm \leqslant \sum_{i,j} \|f^{p'}\|_{L^q(E_{ij})} \|\alpha\|_{L^p(E_{ij})}$$
$$\leqslant \sum_{i,j} \|f\|^{p'}_{L^{qp'}(E_{ij})} \leqslant J \sup_{\wp} \sum_i \|f\|^{p'}_{L^{qp'}(E_i)} = J\|f\|^{p'}_{p',qp'} .$$

On en déduit que f appartient à $\bigcap^{p'}(\mathcal{S}_p)$ avec

$$\|f\|_{\cap} \leqslant J^{1/p'} \|f\|_{p',qp'} .$$

β) Soit y une fonction de $l^{q'}(L^r)$. Pour toute fonction k de $\mathcal{K}$ et pour tout pavage maximal $\{E_i\}$, on a

$$\left|\int_G ky\, dm\right| \leqslant \sum_{i,j} \int_{E_{ij}} |k|\, |y|\, dm \leqslant \sum_{i,j} \|k\|_{L^{qp'}(E_{ij})} \|y\|_{L^r(E_{ij})}$$
$$\leqslant \Big(\sum_{i,j} \|k\|^{p'}_{L^{qp'}(E_{ij})}\Big)^{1/p'} \Big(\sum_{i,j} \|y\|^{q'}_{L^r(E_{ij})}\Big)^{1/q'} \quad \text{si} \quad p' \neq 1$$
$$\leqslant J\|k\|_{p',qp'} \|y\|_{q',r} \quad \text{si} \quad 1 \leqslant p' < \infty$$
$$\leqslant J\|k\|_{\cap} \|y\|_{q',r} .$$

Si $1 < p < \infty$, l'espace $\bigcup^{q'}(\mathcal{S}_p)$ s'identifie au dual de $\mathcal{K}$ muni de la semi-norme $\| \quad \|_{\cap^{p'}(\mathcal{S}_p)}$; il en résulte que y appartient à $\bigcup^{q'}(\mathcal{S}_p)$ avec

$$\|y\|_{\cup} \leqslant J\|y\|_{q',r} .$$

La même conclusion reste valable pour $p = 1$ car

$$\bigcup^{q'}(\overline{\mathcal{S}}_1) \cap L^1_{loc} = \bigcup^{q'}(\mathcal{S}_1) .$$

Inversement, soit y un élément de $\bigcup^{q'}(\mathcal{S}_p)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut écrire $y = \rho\alpha$ avec α dans $\mathcal{S}_p$ tel que

$$\|\rho\|_{L^{q'}(\alpha m)} \leqslant \|y\|_{\cup} + \varepsilon .$$

Supposons que $1 < p' < \infty$. Pour un pavage $\{E_i\}$ de G, on a

$$\sum_i \int_{F_i} |\rho|^q \alpha\, dm = \sum_i \int_{F_i} |y|^{q'} \alpha^{1-q'}\, dm \leqslant (\|y\|_{\cup} + \varepsilon)^{q'} .$$

Or d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{E_i} |y|^r\, dm \leqslant \Big(\int_{E_i} |y|^{q'} \alpha^{1-q'}\, dm\Big)^{r/q'} \Big(\int_{E_i} \alpha^p\, dm\Big)^{r/pp'} .$$

On a donc

$$\sum_i \left(\int_{E_i} |y|^r\, dm\right)^{q'/r} \leqslant \sum_i \int_{E_i} |y|^{q'} \alpha^{1-q'}\, dm \leqslant (\|y\|_{\mathrm{U}} + \varepsilon)^{q'}.$$

On en déduit que pour $1 < p' < \infty$, la fonction y appartient à $l^{q'}(\mathrm{L}^r)$ avec $\|y\|_{q',r} \leqslant \|y\|_{\mathrm{U}}$.

La même conclusion reste valable pour $p' = 1$ car dans ce cas, on a $r = p$ et pour un translaté quelconque E' de E :

$$\int_{E'} |y|^p\, dm = \int_{E'} \left|\frac{y}{\alpha}\right|^p \alpha^p\, dm \leqslant (\operatorname*{sup\,ess}_{E'} |\rho|^p) \int_{E'} \alpha^p\, dm$$

et donc $\left(\int_{E'} |y|^p\, dm\right)^{1/p} \leqslant \|y\|_{\mathrm{U}} + \varepsilon$.

γ) On peut faire la même démonstration que pour β) avec $p = 1$ et $r = 1$ en remplaçant $\mathscr{S}_1$ par $\overline{\mathscr{S}}_1$.

c) Espaces $\bigcap^{p'}$ *et* $\bigcup^{q'}$ *construits à partir de* $\mathfrak{S}_p$.

Pour $1 \leqslant p < \infty$, on note $\mathfrak{S}_p$ la boule unité positive de l'espace $\bigcap^p(\mathscr{S}_1)$. D'après la proposition précédente, les ensembles $\mathfrak{S}_p$ et $\mathrm{B}_+(l^p(\mathrm{L}^\infty))$ sont subordonnés l'un à l'autre :

$$\mathfrak{S}_p \subseteq \mathrm{B}_+(l^p(\mathrm{L}^\infty)) \subseteq \mathrm{J}^{1/p}\mathfrak{S}_p .$$

D'après les résultats généraux ([4], § 8), on sait que l'ensemble $\mathfrak{S}_p$ est convexe, saturé, quasi-fortement fermé si $1 \leqslant p < \infty$ et vaguement compact si $1 < p < \infty$. Il est aussi vaguement compact pour $p = 1$ car dans ce cas $\mathfrak{S}_1$ est l'ensemble associé à $\mathscr{S}_1$ et coïncide donc avec $\chi^\nabla = \chi^v$. Les ensembles $\mathfrak{S}_p$ sont évidemment invariants par translation.

Proposition IV. — *On suppose que* $1 \leqslant p, p' < \infty$.

α) *L'espace normé* $\bigcap^{p'}(\mathfrak{S}_p)$ *est isomorphe à l'espace* $l^{qp'}(\mathrm{L}^{p'})$;

β) *L'espace normé* $\bigcup^{q'}(\mathfrak{S}_p)$ *est isomorphe à l'espace* $l^r(\mathrm{L}^{q'})$;

γ) *L'espace normé* $\bigcup^{q'}(\chi^\nabla)$ *est isomorphe à l'espace* $l^1(\mathrm{L}^{q'})$.

Démonstration. — Soit f une fonction de $\bigcap^{p'}(\mathfrak{S}_p)$ et soit $\{\mathrm{E}_i\}$ un pavage de G. On considère les fonctions α positives, constantes et égales à α_i sur chaque E_i, nulles ailleurs et telles que $\Sigma\alpha_j^p \leqslant 1$. On vérifie facilement (par exemple au moyen de la proposition IX) qu'elles appartiennent à un multiple de $B_+(l^p(L^\infty))$ et donc à un multiple $M\mathfrak{S}_p$ de $\mathfrak{S}_p$. Par suite

$$\sum_i \int_{E_i} |f|^{p'} \alpha \, dm = \sum_i \alpha_i \int_{E_i} |f|^{p'} \, dm \leqslant \sup_{\beta \in M\mathfrak{S}_p} \int_G |f|^{p'} \beta \, dm \leqslant M \|f\|_{\cap}^{p'} .$$

En prenant la borne supérieure pour les fonctions α de la forme indiquée, on obtient

$$\Big(\sum_i \Big(\int_{E_i} |f|^{p'} \, dm \Big)^q \Big)^{1/q} \leqslant M \|f\|_{\cap}^{p'} .$$

On en déduit que la fonction f appartient à $l^{qp'}(L^{p'})$ avec $\|f\|_{qp',p'} \leqslant M^{1/p'} \|f\|_{\cap}$.

Inversement, on vérifie comme dans la proposition précédente qu'une fonction f de $l^{qp'}(L^{p'})$ appartient à $\bigcap^{p'}(\mathfrak{S}_p)$ avec $\|f\|_{\cap} \leqslant J^{1/p'} \|f\|_{qp',p'}$.

La démonstration de β) est analogue à la démonstration correspondante dans la proposition précédente et on obtient

$$\|y\|_{r,q'} \leqslant \|y\|_{\cup} \leqslant J^{1+1/pp'} \|y\|_{r,q'} .$$

La propriété γ) correspond au cas $p = 1$, compte tenu du fait que $\mathfrak{S}_1 = \chi^\nabla$.

Proposition V. — *Si* ψ *est la fonction caractéristique* χ' *d'une partie* E' *de* G *universellement mesurable d'intérieur non vide et d'adhérence compacte ou si* ψ *est un élément positif non nul de* $\bigcup^\infty(\chi^\nabla)$ *ou de* $l^1(L^\infty)$, *les ensembles* ψ^∇ *et* χ^∇ *sont subordonnés l'un à l'autre et les espaces normés* $\bigcup^q(\psi^\nabla)$ *et* $\bigcup^q(\chi^\nabla)$ *sont isomorphes ainsi que les espaces normés* $\bigcap^p(\mathcal{J}\psi)$ *et* $\bigcap^p(\mathcal{J}\chi)$.

Proposition VI. — *Soit* ψ *un élément positif non nul de* $l^1(L^\infty)$. *Une fonction mesurable* f *appartient à* $l^1(L^\infty)$ *si et seulement si il existe une mesure de Radon* $\mu = \mu_f$ *bornée et telle que* $|f| \leqslant \psi * \mu$. *La borne inférieure des normes* $\|\mu_f\|_{\mathfrak{M}}$ *des mesures qu'on peut ainsi associer à* f *définit sur* $l^1(L^\infty)$ *une norme équivalente à* $\| \quad \|_{1,\infty}$.

PROPOSITION VII. — *Soit* ψ *un élément positif non nul de* $l^1(\mathrm{L}^\infty)$. *Si* $1 \leqslant p < \infty$, *la norme sur* $l^\infty(\mathrm{L}^p)$ *est équivalente à la norme définie par*

$$\|f\|_\cap = \sup_{\mu \in \mathrm{B}_+} \left(\int_{\mathrm{G}} |f|^p(\psi * \mu)\, dt\right)^{1/p}.$$

Démonstration. — On sait (conséquence δ du lemme I) que m est localement subordonnée à χ^∇ ou $(\chi')^\nabla$. Par suite χm (resp. $\chi' m$) ainsi que toutes ses translatées sont subordonnées à $(\chi')^\nabla$ (resp. χ^∇) et les deux ensembles χ^∇ et $(\chi')^\nabla$ sont bien subordonnés l'un à l'autre.

Si ψ est un élément positif non nul de $\bigcup^\infty(\chi^\nabla)$ ou de $l^1(\mathrm{L}^\infty)$ dont la norme dans $\bigcup^\infty(\chi^\nabla)$ est λ, toutes les translatées de ψ appartiennent à $\lambda\chi^\nabla$ et l'ensemble ψ^∇ est donc subordonné à χ^∇. Comme d'autre part la mesure χm est subordonnée à ψ^∇, les ensembles χ^∇ et ψ^∇ sont bien subordonnés l'un à l'autre.

On en déduit immédiatement que les espaces normés $\bigcap^p$ et $\bigcup^q$ bâtis sur les ensembles χ^∇, ψ^∇ ou $(\chi')^\nabla$ sont isomorphes.

La proposition VI résulte alors du lemme I et la proposition VII s'en déduit d'après la caractérisation de $\bigcap^p(\mathfrak{S}_1)$ donnée par la proposition IV.

7. Propriétés générales des espaces $l^p(\mathrm{L}^{p'})$.

a) Les espaces $l^p(\mathrm{L}^{p'})$ *et* $l^p(\mathfrak{M})$ *définis à partir de deux ensembles* E *et* E' *différents sont isomorphes.*

Cela résulte immédiatement de la proposition V et de la définition des ensembles $\mathscr{S}_p$ et $\mathfrak{S}_p$.

b) Les espaces $l^p(\mathrm{L}^{p'})$ *et* $l^p(\mathfrak{M})$ *sont des espaces de Banach.*

Cela résulte du fait que ce sont des espaces $\bigcup^{q'}$ ou $\bigcap^{p'}$ relatifs à des ensembles S convexes, saturés et quasi-fortement fermés convenablement choisis.

c) Si $p \leqslant p_0$, *l'application canonique* $l^p(\mathrm{L}^{p'}) \to l^{p_0}(\mathrm{L}^{p'})$ *existe et est continue.*

Si $p' \leqslant p'_0$, *l'application canonique* $l^p(\mathrm{L}^{p'_0}) \to l^p(\mathrm{L}^{p'})$ *existe et est continue.*

Cela résulte de la définition des espaces $l^p(L^{p'})$ et des propriétés classiques des espaces l^p et $L^{p'}$. Les applications canoniques ont pour norme 1 si $m(E) = 1$.

d) Si E' *est un ouvert relativement compact, l'application canonique* $L^{p'}(E') \to l^p(L^{p'})$ *ou* $\mathfrak{M}(E') \to l^p(\mathfrak{M})$ *est un isomorphisme sur un sous-espace fermé de* $l^p(L^{p'})$ *ou de* $l^p(\mathfrak{M})$ *(celui des fonctions ou mesures portées par* E'*).*

Cela résulte immédiatement de la propriété a).

e) Approximation par des fonctions ou des mesures à support compact.

Soit f *une fonction de* $l^p(L^{p'})$ *ou une mesure de* $l^p(\mathfrak{M})$*. Si* $1 \leqslant p < \infty$, *à tout* $\varepsilon > 0$, *on peut faire correspondre un compact* K *tel que* $\|f - f\chi_K\| < \varepsilon$. *La fonction (ou la mesure)* f *est portée par une réunion dénombrable de compacts.*

En effet, si $1 \leqslant p, p' < \infty$ l'espace $l^p(L^{p'})$ ou $l^p(\mathfrak{M})$ est toujours un espace $\bigcup^\alpha$ avec $1 \leqslant \alpha < \infty$ et sa norme a donc la propriété de Lebesgue, ce qui entraîne la propriété indiquée ([4], th. II, rem. II).

Si $p' = \infty$, on considère l'isomorphisme de $l^p(L^\infty)$ avec $\bigcap^p(\mathscr{S}_1)$. Comme la norme de cet espace a la propriété de Fatou ([4], prop. VII, th. IV), il existe un compact H tel que $\|f\|^p - \varepsilon^p < \|f\chi_H\|^p \leqslant \|f\|^p$. En considérant le compact $K = H + \overline{E} - \overline{E}$, on a, d'après la définition de $\mathscr{S}_1$,

$$\|f\chi_{CK}\|^p + \|f\chi_H\|^p = \|f\chi_{CK} + f\chi_H\|^p \leqslant \|f\|^p$$

et donc

$$\|f\chi_H\|^p \leqslant \|f\chi_{CK}\|^p + \|f\chi_H\|^p \leqslant \|f\|^p < \|f\chi_H\|^p + \varepsilon^p$$

ce qui entraîne bien que $\|f\chi_{CK}\| = \|f - f\chi_K\| < \varepsilon$.

f) Adhérence de $\mathscr{K}$ *dans* $l^p(L^{p'})$.

α) Si $1 \leqslant p < \infty$ *et* $1 \leqslant p' < \infty$, *l'espace* $\mathscr{K}$ *est dense dans* $l^p(L^{p'})$.

β) Si $1 \leqslant p < \infty$ *et* $p' = \infty$, *l'adhérence de* $\mathscr{K}$ *dans* $l^p(L^\infty)$ *est* $l^p(\mathscr{C})$.

γ) Si $p = \infty$ *et* $1 \leqslant p' < \infty$, *l'adhérence de* $\mathscr{K}$ *dans* $l^\infty(L^{p'})$ *est* $c_0(L^{p'})$.

La propriété γ) résulte immédiatement du théorème I.

La propriété α) résulte des deux propriétés précédentes :

tout élément f de $l^p(L^{p'})$ est limite d'une suite d'éléments de la forme $f\chi_K$ d'après e); tout élément $f\chi_K$ est limite dans l'espace $L^{p'}(K + \mathring{E})$ d'une suite de fonctions continues à support dans $K + \mathring{E}$ d'après les propriétés classiques et donc dans $l^p(L^{p'})$ d'après d).

Enfin, si $p' = \infty$, on a évidemment $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{p,\infty}$ pour tout élément de $l^p(L^\infty)$. Il en résulte que toute limite dans $l^p(L^\infty)$ d'une suite de fonctions continues est continue et donc que l'adhérence de $\mathscr{K}$ est contenue dans $l^p(L^\infty)\cap\mathscr{C} = l^p(\mathscr{C})$. Inversement, si f est un élément de $l^p(\mathscr{C})$, et si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $\|f - f\chi_K\| < \varepsilon$ d'après e). Si ξ est une fonction continue à support compact, comprise entre 0 et 1 et valant 1 sur K, on a $\|f-f\xi\| < \varepsilon$ et la fonction $f\xi$ est un élément de $\mathscr{K}$. L'adhérence de $\mathscr{K}$ coïncide donc avec $l^p(\mathscr{C})$.

g) *Propriétés de dualité topologique. Réflexivité.*

α) *Le dual de* $l^p(L^{p'})$ *est isomorphe à l'espace normé* $l^q(L^{q'})$ *si* $1 \leqslant p, p' < \infty$.

β) *Le dual de* $l^p(\mathscr{C})$ *est isomorphe à l'espace normé* $l^q(\mathfrak{M})$ *si* $1 \leqslant p < \infty$.

γ) *Le dual de* $c_0(L^{p'})$ *est isomorphe à l'espace normé* $l^1(L^{q'})$ *si* $1 \leqslant p' < \infty$.

δ) *L'espace de Banach* $l^p(L^{p'})$ *est réflexif si* $1 < p, p' < \infty$.

Cela résulte du théorème III et des résultats généraux de dualité de [4].

Les dualités sont réalisées par les accouplements naturels $\int_G fg\, dm$ ou $\int_G f\, d\mu$.

Remarquons que le dual topologique de $l^1(\mathscr{C})$ est isomorphe à l'espace $\mathfrak{M}^t$ muni de la norme de $l^\infty(\mathfrak{M})$.

h) *Produits ponctuels.*

On généralise facilement aux espaces $l^p(L^{p'})$ les propriétés classiques relatives au produit ponctuel des fonctions. Soient t, t', r et r' des exposants tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{t} = \frac{1}{r} \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{t'} = \frac{1}{r'} \leqslant 1\,.$$

Les définitions et les inégalités classiques montrent immédiatement qu'on a, avec les inégalités attendues sur les normes :

$$\begin{array}{|ll|}\hline \alpha) & l^p(L^{p'}).l^t(L^{t'}) \subseteq l^r(L^{r'}) \\ \beta) & l^p(\mathscr{C}).l^t(\mathscr{C}) \subseteq l^r(\mathscr{C}) \\ \gamma) & c_0(L^{p'}).c_0(L^{t'}) \subseteq c_0(L^{r'}) \\ \hline \end{array}$$

Inversement, on montre au moyen du théorème du graphe fermé que si φ est une fonction telle que pour tout fonction f de $l^t(L^{t'})$, le produit φf appartient à $l^r(L^{r'})$, la fonction φ appartient à $l^p(L^{p'})$.

i) Convolutions.

Les espaces $l^p(L^{p'})$ ont les propriétés de convolution qui généralisent de manière naturelle les propriétés classiques ([10], § 20). Soient t, t', r et r' des exposants tels que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{t}=1+\frac{1}{r} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{p'}+\frac{1}{t'}=1+\frac{1}{r'} \geqslant 1;$$

et soient respectivement u, u', s et s' leurs exposants conjugués. On a

$$\begin{array}{|llll|}\hline \alpha) & l^p(L^{p'}) * l^t(L^{t'}) \subseteq l^r(L^{r'}) & & \\ \beta) & l^p(L^{p'}) * l^q(L^{t'}) \subseteq c_0(L^{r'}) & \text{si} & 1 < p < \infty \\ \gamma) & l^p(L^{p'}) * l^t(L^{q'}) \subseteq l^r(\mathscr{C}) & \text{si} & 1 < p' < \infty \\ \delta) & l^p(L^{p'}) * l^q(L^{q'}) \subseteq c_0(\mathscr{C}) = \mathscr{C}_0 & \text{si} & 1 < p < \infty \\ \varepsilon) & l^p(\mathfrak{M}) * l^t(\mathfrak{M}) \subseteq l^r(\mathfrak{M}) & & \\ \zeta) & l^p(\mathfrak{M}) * l^q(\mathfrak{M}) \subseteq c_0(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}^{t_0} & & \\ \hline \end{array}$$

Démonstration. — On prend pour ensemble E un voisinage compact symétrique de l'origine. Soient f et g des éléments de $l^p(L^{p'})$ et $l^t(L^{t'})$ respectivement et k une fonction continue dont le support est contenu dans le compact K. Si $\{E_i\}$ est un pavage maximal de G et $\{E_{ij}\}$ le recouvrement associé, on a

$$\left|\iint_{G\times G} k(x+y)f(x)g(y)\,dx\,dy\right| \leqslant \sum_{i,j,l,m} \iint_{E_{ij}\times E_{lm}} |k(x+y)|\,|f(x)|\,|g(y)|\,dx\,dy\,.$$

D'après l'inégalité de Hölder généralisée ([10], § 20-18 et 12-5), on a

$$\begin{aligned}\iint_{E_{ij}\times E_{lm}} &|k(x+y)|\,|f(x)|\,|g(y)|\,dx\,dy \\ &\leqslant \left(\iint |f(x)|^{p'}|g(y)|^{t'}\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\iint |k(x+y)|^{s'}|f(x)|^{p'}\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{u'}} \\ &\quad \left(\iint |k(x+y)|^{s'}|g(y)|^{t'}\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leqslant (\|f\|^{p'}\|g\|^{t'})^{\frac{1}{r'}} (\|k\|^{s'}\|f\|^{p'})^{\frac{1}{u'}} (\|k\|^{s'}\|g\|^{t'})^{\frac{1}{q'}} \leqslant \|f\|\,\|g\|\,\|k\|\,,\end{aligned}$$

les normes étant prises pour f, g et k respectivement dans les espaces $L^{p'}(E_{ij})$, $L^{t'}(E_{lm})$ et $L^{s'}(E_{ij}+E_{lm})$. Comme

$$\begin{aligned}E_{ij}+E_{lm} &= t_i+\tau_j+t_l+\tau_m+E+E \\ &\subseteq \bigcup_{n=1}^{J} t_i+\tau_j+t_l+\tau_m+\tau_n+E = \bigcup_{n=1}^{J} E_{ijlmn},\end{aligned}$$

on a

$$\|k\|_{L^{s'}(E_{ij}+E_{lm})} \leqslant \sum_{n=1}^{J} \|k\|_{L^{s'}(E_{ijlmn})}\,.$$

De nouveau, d'après l'inégalité de Hölder généralisée, on a, la norme pour k étant prise maintenant dans l'espace $L^{s'}(E_{ijlmn})$,

$$\sum_{i,j,l,m,n} \|f\|\,\|g\|\,\|k\| \leqslant (\Sigma\|f\|^{p}\|g\|^{t})^{\frac{1}{r}} (\Sigma\|k\|^{s}\|f\|^{p})^{\frac{1}{u}} (\Sigma\|k\|^{s}\|g\|^{t})^{\frac{1}{q}}\,.$$

Pour chaque terme du second membre, on obtient

$$\begin{aligned}\Sigma\|f\|^{p}\|g\|^{t} &\leqslant J\sum_{i,j}\|f\|^{p}\sum_{l,m}\|g\|^{t} \leqslant J^{3}\|f\|^{p}_{p,p'}\|g\|^{t}_{t,t'}\,,\\ \Sigma\|k\|^{s}\|f\|^{p} &\leqslant \sum_{i,j,n}\|f\|^{p}\sum_{m=1}^{J}\sum_{l}\|k\|^{s} \\ &\leqslant \sum_{i,j,n}\|f\|^{p}\,J\|k\|^{s}_{s,s'} \leqslant J^{3}\|f\|^{p}_{p,p'}\,\|k\|^{s}_{s,s'}\,,\\ \Sigma\|k\|^{s}\|g\|^{t} &\leqslant J^{3}\|g\|^{t}_{t,t'}\,\|k\|^{s}_{s,s'}\,.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\left|\iint_{G\times G} k(x+y)f(x)g(y)\,dx\,dy\right| \leqslant J^3\|f\|_{p,p'}\,\|g\|_{t,t'}\,\|k\|_{s,s'}\,. \quad (*)$$

Comme $\|k\|_{s,s'} \leqslant \|k\|_\infty\,\|\chi_K\|_{s,s'}$, on en déduit que les fonctions f et g sont convolables et comme l'une au moins est portée par une réunion dénombrable de compacts (d'après e)), on a

$$f * g(t) = \int_G f(t-x)g(x)\,dx\,.$$

L'inégalité $(*)$, les résultats de densité et de dualité (paragraphes f) et g)) et le fait que $l^r(L^1) = l^r(\mathfrak{M})\cap L^1_{loc}$ donnent immédiatement le résultat α) avec

$$\|f * g\|_{r,r'} \leqslant J^3\|f\|_{p,p'}\,\|g\|_{t,t'}\,.$$

Dans les conditions de δ), on a $f * g(t) = \langle f_t, \check{g}\rangle$; la continuité de la translation (théorème I) et le fait que f et g sont limites de fonctions portées par des compacts donnent alors le résultat δ). Comme $l^t(L^{q'}) \subseteq l^q(L^{q'})$ on en déduit immédiatement γ). Le résultat β) provient du fait que f et g sont limites de fonctions portées par des compacts. Enfin, les résultats ε) et ζ) se vérifient de la même façon que pour $p' = t' = r' = 1$.

j) Autre définition des espaces $l^p(L^{p'})$.

PROPOSITION VIII. — *Une fonction f appartient à $l^p(L^{p'})$ si et seulement si la fonction n_f définie sur G par*

$$n_f(t) = \|f\|_{L^{p'}(t-E)}$$

appartient à $L^p(G)$. Il existe deux constantes C' et $C'' \geqslant 0$ telles que $C''\|f\|_{p,p'} \leqslant \|n_f\|_p \leqslant C'\|f\|_{p,p'}$.

Démonstration. — On suppose que $1 \leqslant p$, $p'' < \infty$. La démonstration s'adapte facilement au cas $p = \infty$ ainsi qu'au cas de l'espace $l^p(\mathfrak{M})$.

Soient $\{E_i\}$ un pavage maximal et $\{E_{ij}\}$ le recouvrement associé. On a

$$\int_G \|f\|^p_{L^{p'}(t-E)}\,dt \leqslant \sum_{i,j}\int_{E_{ij}}\left(\int_{t-E}|f|^{p'}\,du\right)^{\frac{p}{p'}} dt$$

$$\leqslant m(E)\sum_{i,j}\left(\sum_{j'}\int_F |f|^{p'}\,du\right)^{\frac{p}{p'}},$$

la dernière intégrale étant prise sur l'ensemble

$$F = t_i + \tau_j + \tau_{j'} + E .$$

Comme $j' \leqslant J$, il existe une constante M' telle que

$$\int_G \|f\|^p_{L^{p'}(t-E)} \, dt \leqslant M' \sum_{i,j,j'} \left(\int_F |f|^{p'} du\right)^{\frac{p}{p'}}$$

et on en déduit que si f appartient à $l^p(L^{p'})$, la fonction n_f appartient à $L^r(G)$ avec $\|n_f\|_p \leqslant C'\|f\|_{p,p'}$.

Pour la réciproque, supposons que E soit un voisinage compact de l'origine et soit E' un voisinage de l'origine tel que $E' - E' \subseteq E$. Soit $\{E'_i\}$ un pavage quelconque par des translatés de E'. Si t appartient à $E'_i = t_i + E'$, on a évidemment $E'_i \subseteq t - E$. Par suite

$$\int_G \|f\|^p_{L^{p'}(t-E)} \, dt \geqslant \sum_i \int_{E'_i} dt \left(\int_{t-E} |f|^{p'} du\right)^{\frac{p}{p'}}$$
$$\geqslant m(E') \sum_i \left(\int_{E'_i} |f|^{p'} du\right)^{\frac{p}{p'}}.$$

On en déduit que si n_f appartient à $L^p(G)$, la fonction f appartient à $l^p(L^{p'})$ avec $C''\|f\|_{p,p'} \leqslant \|n_f\|_p$.

Cette proposition permet d'établir un rapport entre les espaces et les espaces à norme mixte étudiés par A. Benedek et R. Panzone [2].

Soit $B^{p,p'}$ l'espace vectoriel normé des (classes de) fonctions Φ mesurables sur $G \times G$ et telles que

$$\|\Phi\|_{B^{p,p'}} = \left(\int_G \left(\int_G |\Phi(x,y)|^{p'} dx\right)^{\frac{p}{p'}} dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

avec les modifications habituelles si $p = \infty$ ou si $p' = \infty$.

A la fonction f de $l^p(L^{p'})$, on associe la fonction F définie sur $G \times G$ par $F(x,y) = f(x)\chi(y-x)$.

A la fonction Φ de $B^{p,p'}$ on associe la fonction φ définie localement presque partout sur G par

$$\varphi(x) = \frac{1}{m(E)} \int_{x+E} \Phi(x,y) \, dy .$$

Proposition IX. — *L'application* $f \longmapsto F$ *est un isomorphisme de l'espace normé* $l^p(L^{p'})$ *sur le sous-espace* $A^{p,p'}$ *de* $B^{p,p'}$ *formé des éléments de la forme* $F(x,y) = f(x)\chi(y-x)$.

L'application $\Phi \longmapsto \varphi$ *est une application linéaire continue de* $B^{p,p'}$ *sur* $l^p(L^{p'})$.

La composée de $f \longmapsto F$ *et de* $\Phi \longmapsto \varphi$ *est l'application identique.*

La composée de $\Phi \longmapsto \varphi$ *et de* $f \longmapsto F$ *est une projection continue de* $B^{p,p'}$ *sur* $A^{p,p'}$.

Démonstration. — La première partie résulte immédiatement de la proposition précédente, compte tenu du fait que

$$\|n_f\|_p = \|F\|_{B^{p,p'}}.$$

D'après les définitions, la composée de $f \longmapsto F$ et de $\Phi \longmapsto \varphi$ est l'application identique et la composée de $\Phi \longmapsto \varphi$ et de $f \longmapsto F$ est une projection de $B^{p,p'}$ sur $A^{p,p'}$. Pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier que cette projection est continue. Si $1 \leqslant p' \leqslant p < \infty$, on a

$$\begin{aligned}
\|n_\varphi\|_p^p &= \int_G dy \left(\int_{j-E} dx \left|\frac{1}{m(E)} \int_{x+E} \Phi(x,v)\, dv\right|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leqslant K \int_G dy \left(\int_{y-E} dx \int_{x+E} |\Phi(x,v)|^{p'}\, dv\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leqslant K \int_G dy \left(\int_{y-E+E} dv \int_G |\Phi(x,v)|^{p'}\, dx\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leqslant K' \int_G dy \int_{y-E+E} \left(\int_G |\Phi(x,v)|^{p'}\, dx\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leqslant K' m(E-E) \int_G dv \left(\int_G |\Phi(x,v)|^{p'}\, dx\right)^{\frac{p}{p'}} = K'' \|\Phi\|_{B^{p,p'}}^p .
\end{aligned}$$

Pour $1 < p < p' < \infty$, on se ramène au cas précédent par dualité et on étudie directement et de manière analogue les cas limites.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. N. Argabright and J. Gil de Lamadrid, Fourier analysis of unbounded measures on locally compact abelian groups, *Memoirs of the Ann. Math. Soc.*, n° 145 (1974).

[2] A. Benedek and R. Panzone, The spaces L^P, with mixed norm, *Duke Math. J.*, 28 (1961), 301-324.

[3] C. Berg and G. Forst, Potential theory on locally compact abelian groups, Springer 1975.

[4] J.-P. Bertrandias, Unions et intersections d'espaces L^p sur un espace localement compact, *Bull. Sc. Math.*, 101 (1977).
[5] J.-P. Bertrandias et C. Dupuis, Transformation de Fourier sur les espace $l^p(L^{p'})$, *Ann. Inst. Fourier* 29 (1979).
[6] A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebras, *Ann. Inst. Fourier*, 14 (1964), 1-32.
[7] D. H. Fremlin, Topological Riesz spaces and measure theory, Cambridge, 1974.
[8] R. Goldberg, On a space of functions of Wiener, *Duke Math. J.*, 34 (1967), 683-691.
[9] E. Hewitt, A survey of abstract harmonic analysis, dans : Some aspects of analysis and probability, Wiley & sons, 1958.
[10] E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract harmonic analysis. 2 volumes, Springer, 1963 et 1970.
[11] F. Holland, Harmonic analysis on amalgams of L^p and l^q, *J. London Math. Soc.*, 2, 10 (1975), 295-305.
[12] B. Koremblium, On certain special commutative normed rings. (en russe), *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 64 (1949), 281-284.
[13] R. Larsen, Measures with separable orbits, *Proc. Am. Math. Soc.*, 19 (1968), 569-572.
[14] H. Reiter, Classical harmonic analysis and locally compact groups, Clarendon Press, Oxford, 1968.
[15] H. Reiter, L^1-algebras and Segal algebras, Lectures Notes n° 231, Springer 1971.
[16] W. Rudin, Measures algebras on abelian groups, *Bull. Am. Math. Soc.*, 65 (1959), 227-247.
[17] P. Szeptycki, On functions and measures whose Fourier transforms are functions, *Math. Ann.*, 179 (1968), 31-41.
[18] N. Wiener, Tauberian theorems, *Ann. of Math.*, 33 (1932), 1-100.

Manuscrit reçu le 28 décembre 1976
Proposé par J.-P. Kahane.

J.-P. Bertrandias, C. Datry, C. Dupuis,
Université Scientifique et Médicale
de Grenoble,
Laboratoire de Mathématiques Pures
associé au C.N.R.S. n° 188
B.P. 116
38402 St-Martin-d'Hères.