ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES MEYER

# Algèbres de restrictions non isomorphes

*Annales de l'institut Fourier*, tome 19, nº 1 (1969), p. 117-124

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_117_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19,1 (1969), 117 - 124

# ALGÈBRES DE RESTRICTIONS NON ISOMORPHES

par Yves MEYER

## 1. Notations et Rappels.

1.1. On peut, par transport de structure, définir l'algèbre de Banach $A(\mathbf{R})$ de toutes les transformées de Fourier $\hat{f}$ des éléments $f$ de $L^1(\mathbf{R})$ ($L^1(\mathbf{R})$ est une algèbre de Banach quand le produit est le produit de convolution). Si E est un fermé de $\mathbf{R}$, soit $I(E)$ l'idéal fermé de $A(\mathbf{R})$ composé de tous les éléments de $A(\mathbf{R})$ nuls sur E. On appelle $A(E)$ l'algèbre quotient $A(\mathbf{R})/I(E)$. L'algèbre $A(E)$ est semi-simple, son spectre est E et les éléments de $A(E)$ peuvent être considérés, de façon canonique, comme des fonctions continues sur E.

1.2. Soit F un second fermé de $\mathbf{R}$. Un isomorphisme $\widetilde{H}$ entre $A(E)$ et $A(F)$ peut donc toujours être défini par un homéomorphisme H de F sur E et par $\widetilde{H}(f) = f \circ H$ ($f \in A(E)$). Mais tous les homéomorphismes H de F sur E ne conduisent pas, en général, à des isomorphismes $\widetilde{H}$. Plus précisément, Beurling et Helson ont montré (1953) que si $E = F = \mathbf{R}$, si $\widetilde{H}$ est un isomorphisme, alors $H(x) = ax + b$ et Katznelson et DeLeeuw ont prouvé (1964) que si la norme de $\widetilde{H}$ est 1, H préserve les relations arithmétiques satisfaites par les éléments de F : toute relation $\mathbf{Z}$-affine vérifiée par les éléments de F,

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} m_j x_j = 0,\ m_j \in \mathbf{Z},\ \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} m_j = 0,\ x_j \in F,$$

entraîne la relation correspondante entre les éléments de E

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} m_j H(x_j) = 0 .$$

Si E et F sont deux fermés de $\mathbf{R}$ tels qu'il existe un homéomorphisme H de F sur E ayant, ainsi que $H^{-1}$, cette propriété, nous dirons que E et F sont arithmétiquement équivalents.

**1.3.** Rappelons qu'un ensemble symétrique de $\mathbf{R}$ est défini à l'aide d'un intervalle $[a, b]$ et d'une suite $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ de nombres réels tels que $0 < \xi_k < \frac{1}{2}$ de la façon suivante : $E_1$ est la réunion des deux intervalles $[a, a + (b-a)\xi_1]$ et $[b-(b-a)\xi_1, b_1]$ ; pour construire $E_2$ on opère comme pour construire $E_1$ sur chacun des deux intervalles composant $E_1$ mais $\xi_1$ est remplacé par $\xi_2$ et ainsi de suite. Le fermé E est l'intersection des $E_n$ $(n \geqslant 1)$ et si

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n(\xi_1 \ldots \xi_n) = 0,$$

E est de mesure de Lebesgue nulle.

**1.4.** Si E et F sont deux ensembles symétriques construits à l'aide des suites de nombres $(\xi_k)_{k \geqslant 1}$ et $(\xi'_k)_{k \geqslant 1}$, l'homéomorphisme canonique de F sur E, H est défini par la condition d'être croissant et de transformer les extrémités des intervalles de $F_n$ en les extrémités des intervalles de $E_n$. Si $\sum_{n \geqslant 1} \xi_n^2 < +\infty$ et si $\sum_{n \geqslant 1} \xi_n'^2 < +\infty$, R. Schneider ([4]) a prouvé que A(E) et A(F) sont isomorphes et que l'isomorphisme est réalisé par l'homéomorphisme canonique.

## 2. Le théorème.

**2.1.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'ensemble $[0, 1]^{\mathbf{N}}$ muni de la tribu borélienne produit et de la mesure produit de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On notera $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$ les éléments de $\Omega$ ; $\omega_n \in [0, 1]$.

**2.2.** Theoreme. – *Soient $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ deux suites de nombres réels pris dans $]0, 1/2[$, tendant vers 0 et tels que, pour un $\varepsilon$ positif, on ait*

$$n^{2\varepsilon - 1/2} \leqslant a_n \quad et \quad b_n - a_n \geqslant (n!)^{-\varepsilon}. \tag{1}$$

*Posons* $\xi_n(\omega) = a_n \omega_n + b_n(1 - \omega_n)$ *et soit* E($\omega$) *l'ensemble parfait symétrique construit à partir de l'intervalle* [0 , 1] *à l'aide des rapports de dissection* $\xi_n(\omega)$.

*Soit* F *un ensemble parfait symétrique construit à partir de* [0 , 1] *et à l'aide d'une suite de rapports de dissection* $(\xi'_n)_{n \geqslant 1}$ *dont la somme des carrés converge.*

*Pour presque tout* $\omega$ *dans* $\Omega$, A(E($\omega$)) *et* A(F) *ne sont pas isomorphes.*

2.3. Avant de prouver ce théorème faisons deux remarques : grâce au théorème de R. Schneider, toutes les algèbres A(F) sont isomorphes dès que $\sum_{n > 1} \xi'^2_n < + \infty$ ; le résultat ci-dessus montre que l'exposant 2 est le meilleur possible permettant un isomorphisme. D'autre part on peut choisir les $\xi'_n$ tels que les ensembles E($\omega$) et F soient arithmétiquement équivalents pour presque tout $\omega$ dans $\Omega$ (voir la proposition 3.2. ci-dessous).

2.4. Avant d'entrer dans les détails de la démonstration, nous allons indiquer ce qui distingue les algèbres A(E) et A(F). On ignore encore si la connaissance de l'algèbre A(E) permet de décider si E est d'unicité ou de multiplicité. Si c'était le cas, les algèbres de restrictions A(E) et A(F) ne seraient pas isomorphes quand E($\omega$) est un ensemble de multiplicité et F un ensemble d'unicité (c'est le cas ici pour presque tout $\omega$ de $\Omega$ [3] th. I p. 532). La méthode que nous emploierons est la suivante : soit $\mathcal{R}$ une algèbre de Banach commutative, régulière et semi-simple que l'on identifiera à une algèbre de fonctions continues sur le spectre K de $\mathcal{R}$ ; on appelle "pseudomesures" les éléments du dual $\mathcal{R}^*$ de $\mathcal{R}$ et l'on peut définir le support d'une telle pseudomesure de la façon naturelle. Soit $\sigma(\mathcal{R}^*, \mathcal{R})$ la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{R}$ des éléments de $\mathcal{R}^*$. On dira que l'algèbre $\mathcal{R}$ est du premier type si toute pseudomesure S de $\mathcal{R}^*$ est limite dans $\sigma(\mathcal{R}^*, \mathcal{R})$ d'une suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{R}^*$ à support fini. Si ce n'est pas le cas $\mathcal{R}$ est dite du second type. Une telle propriété est invariante par isomorphisme.

Si $\sum_1^\infty \xi'^2_k < + \infty$, A(F) est du premier type ([4] et [5]). Au contraire pour presque tout $\omega \in \Omega$, $A(E(\omega))$ est du second type comme nous allons le montrer.

## 3. Détails de la démonstration : A(E(ω)) est presque sûrement du second type.

3.1. Soit N(E) l'espace de Banach dual de A(E) ; N(E) est l'espace de Banach de toutes les distributions S de support contenu dans E dont la transformée de Fourier $\hat{S}$ est bornée et telle que pour tout élément $f$ de $L^1(\mathbf{R})$ on ait

$$\hat{f}|_E = 0 \Longrightarrow \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\hat{S}(x)\,dx = 0$$

On a $$\|S\|_{N(E)} = \|\hat{S}\|_\infty .$$

Soit $N_f(E)$ la partie de N(E) composée de toutes les distributions S de N(E) à support fini.

3.2. Proposition. – *Pour presque tout* $\omega \in \Omega$, *il existe un élément* S *de* $N(E(\omega))$ *qui n'est pas limite dans* $\sigma(N(E), A(E))$ *d'une suite d'éléments de* $N_f(E(\omega))$. $(A(E(\omega))$ *est du second type*).

3.3. Une étude précise de la structure Q-linéaire de $E(\omega)$ est nécessaire. Soit $t_n(\omega) = \xi_1(\omega)\ldots\xi_{n-1}(\omega)\,(1 - \xi_n(\omega))$. Alors $E(\omega)$ est l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n t_n(\omega)$ associées à toutes les suites $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ de 0 et de 1. L'application de $\Omega$ dans $l^1$,

$$\omega \longrightarrow (t_n(\omega))_{n\geqslant 1}$$

est continue et d'image compacte.

Proposition. – *Pour presque tout* $\omega$ *dans* $\Omega$, *l'ensemble* $E(\omega)$ *possède la propriété que si* $x_j = \sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_{n,j}\, t_n(\omega)$, $1 \leqslant j \leqslant k$ *et si* $\sum_{1\leqslant j\leqslant k} x_j p_j = 0$, $p_j \in \mathbf{Z}$, *alors pour tout n, on a* $\sum_{1\leqslant j\leqslant k} \varepsilon_{n,j}\, p_j = 0$. (*Les seules relations* **Z**-*linéaires vérifiées par les points de* $E(\omega)$ *sont les relations évidentes*).

Une autre façon d'exprimer cette propriété des $t_n(\omega)$ est la suivante :

3.4. DEFINITION. – *Soit* $(t_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite de nombres réels telle que* $\sum_1^\infty |t_n| < +\infty$ ; *cette suite est dite complètement indépendante si la seule suite bornée* $(p_n)_{n \geqslant 1}$ *d'entiers relatifs telle que* $\sum_1^\infty p_n t_n = 0$ *est la suite nulle.*

On montre facilement que si $(t_n)_{n \geqslant 1}$ est complètement indépendante on a $\underline{lim} \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 0$ mais l'indépendance sur $\mathbf{Q}$ de l'ensemble des $t_n$ et la condition $lim \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 0$ ne suffisent pas à assurer l'indépendance complète.

D'où l'intérêt de la proposition 3.5 ; $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ sont deux suites de nombres réels tendant vers 0 et

$$\xi_n(\omega) = a_n \omega_n + (1 - \omega_n) b_n .$$

3.5. PROPOSITION. – *Pour presque tout* $\omega$ *de* $\Omega$ *la suite* $(t_n(\omega))_{n \geqslant 1}$ *est complètement indépendante.*

Soit N l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe une suite bornée non nulle d'entiers relatifs $(p_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $\sum_{n \geqslant 1} p_n t_n(\omega) = 0$ ; si en outre on peut avoir $|p_n| \leqslant k$ on dira que $\omega \in \mathrm{N}_k$ – ainsi $\mathrm{N} = \bigcup_{k \geqslant 1} \mathrm{N}_k$ – et si $\omega \in \mathrm{N}_k$, il y a un premier indice $j$ tel que $p_j \neq 0$ ; on écrira alors $\omega \in \mathrm{N}_{k,j}$ et l'on a $\mathrm{N}_k = \bigcup_{j \geqslant 1} \mathrm{N}_{k,j}$. Si nous prouvons que la mesure de chaque $\mathrm{N}_{k,j}$ est nulle, la proposition sera démontrée.

D'abord $\mathrm{N}_{k,j}$ est fermé et donc mesurable. Regardons $\Omega$ comme le produit $[0, 1]^j \times [0, 1]^{\mathrm{N}}$ ; on écrira $\omega = (\omega', \omega'')$ où

$$\omega' = (\omega_1, \ldots, \omega_j) \quad \text{et} \quad \omega'' = (\omega_{j+1}, \ldots, \omega_n, \ldots) .$$

Calculons la mesure de $\mathrm{N}_{k,j}$ en appliquant le théorème de Fubini : nous allons montrer que pour tout $\omega''$ fixé, la mesure de l'ensemble des $\omega' \in [0, 1]^j$ tels que $(\omega', \omega'') \in N_{k,j}$ est nulle. Il en résultera que $N_{k,j}$ est de mesure nulle. Mais $(\omega', \omega'') \in N_{k,j}$ est l'une des $2k$ conditions

$$p_j(1 - \xi_j(\omega_j))\,\xi_j^{-1}(\omega_j) \in G(\omega'')\ ; p_j \in \{-k, \ldots, -1, 1, \ldots, k\} \quad (2)$$

où $G(\omega'')$ est l'ensemble de toutes les sommes

$$\sum_{n \geqslant j+1} p_n \xi_{j+1}(\omega) \ldots \xi_{n-1}(\omega)\,(1 - \xi_n(\omega)),\ p_n \in \mathbf{Z},\ |p_n| \leqslant k .$$

Grâce à la condition que $\xi_n$ tende vers 0, $G(\omega'')$ est de mesure nulle et l'ensemble des $\omega_j$ vérifiant (2) est de mesure nulle tout comme l'ensemble des $(\omega_1, \ldots, \omega_j)$ de $[0, 1]^j$ tels que $(\omega', \omega'')$ appartienne à $N_{k,j}$. Ceci achève la démonstration.

Soit $(t_n)_{n \geqslant 1}$ une suite complètement indépendante et E l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n t_n$ associées à toutes les suites $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ de 0 et de 1. L'espace $N_f(E)$ peut être déterminé, à une isométrie près, grâce au lemme suivant.

3.6. LEMME. – *Soit* $P(x) = \sum_{\lambda \in E} a_\lambda \exp\left[i\left(\sum_{n \geqslant 1} t_n \varepsilon_n(\lambda)\ x\right]\right.$ *un polynome trigonométrique à spectre dans* E. *On a*

$$\|P(x)\|_\infty = \sup_{(x_n)_{n \geqslant 1}} \left|\sum_{\lambda \in E} a_\lambda \exp\left[i\left(\sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n(\lambda) x_n\right)\right]\right| \quad (3)$$

*où le sup du membre de droite est étendu à toutes les suites* $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *de nombres réels nulles à partir d'un certain rang.*

En effet, grâce à l'indépendance complète des $t_n$ et pour tout choix de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$, il existe une application L, **Q** linéaire, de **R** dans $\mathbf{R}$, telle que, pour toute suite $\varepsilon_n$ de 0 et de 1,

$$L\left(\sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n t_n\right) = \sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n x_n .$$

Par le théorème de Kronecker le membre de droite de (3) est donc inférieur ou égal à celui de gauche. Mais l'inégalité inverse est évidente.

3.7. Soit $\Lambda_n$ l'ensemble de toutes les sommes $\sum_1^n \varepsilon_n t_n$ et posons

$t'_{n+1} = t_{n+1} + t_{n+2} + \cdots$ Pour tout élément S de N(E), soit, en appelant $\delta(x)$ la masse unité en 0,

$$L_n(S) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \delta(x - \lambda) \int_{\lambda}^{\lambda + t'_{n+1}} dS(t).$$

PROPOSITION. — *On a, pour tout* $\mu$ *de* $N_f(E)$,

$$\| L_n(\mu) \|_{N(E)} \leqslant \| \mu \|_{N(E)}.$$

En effet $\| L_n(\mu) \|_{N(E)}$ est le sup du second membre de (3) étendu à toutes les suites $(x_k)_{k \geqslant 1}$ telles que $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0$.

**3.8.** Nous supposons jusqu'à la fin que $a_n$ et $b_n$ vérifient la condition (1) du théorème 2.2.

PROPOSITION. — *Pour presque tout* $\omega$ *dans* $\Omega$ *la suite des fonctions*

$$f_n(x) = \cos(t_1(\omega)x) \ldots \cos(t_{n-1}(\omega)x) \sin(t_n(\omega)x) \cos(t_{n+1}(\omega)x) \ldots$$

*converge uniformément vers* 0 *sur tout* R.

La proposition peut être démontrée en modifiant légèrement la preuve, donnée par Salem, du fait que, pour presque tout $\omega$ dans $\Omega$, $\prod_{n \geqslant 1} \cos(t_n(\omega)x)$ tend vers 0 à l'infini. ([3] p. 532 th. I).

**3.9.** Fin de la démonstration de la proposition 3.2. Si tout élément S de N(E) est limite dans $\sigma(N(E), A(E))$ d'une suite $S_n$, $n \geqslant 1$, d'éléments de $N_f(E)$, il est possible de trouver une constante C telle que l'on puisse, en outre, choisir les $S_n$ vérifiant $\| S_n \|_{N(E)} \leqslant C \| S \|_{N(E)}$.

Mais pour tout $k$ on a

$$\| L_k(S_n) \|_{N(E)} \leqslant \| S_n \|_{N(E)} \leqslant C \| S \|_{N(E)}.$$

Quand $n$ tend vers l'infini, $L_k(S_n)$ converge vers $L_k(S)$ dans $\sigma(N(E), A(E))$. D'où, pour tout S de N(E)

$$\| L_k(S) \|_{N(E)} \leqslant C \| S \|_{N(E)}. \tag{4}$$

Soit $\mu_k$ la mesure portée par E et dont la transformée de Fourier est la fonction $f_k(x)$ de la proposition 3.8.

On a $\lim_{k \to +\infty} \| \mu_k \|_{N(E)} = 0$. Mais $L_k(\mu_k)$ a pour transformée de Fourier $\cos t_1 x \ldots \cos t_{k-1} x \sin t_k x$ et donc

$$\| L_k(\mu_k) \|_{N(E)} = 1 .$$

L'inégalité (4) est impossible et la proposition 3.2 est prouvée.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] A. Beurling et H. Helson, Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers, *Math. Scand.* 1, 120-126 (1953).

[2] K. DeLeeuw et Y. Katznelson, On certain homomorphisms of quotients of group algebras, *Israël J. Math.* 2, 120-126 (1964).

[3] R. Salem, On sets of multiplicity for trigonometrical series, *Amer. J. Math.*, 64, 531-538 (1942).

[4] R.B. Schneider, Doctoral dissertation, Stanford University (1968).

[5] Séminaire Bourbaki de Février 1968, Problème de l'unicité, de la synthèse et des isomorphismes en analyse harmonique.


Manuscrit reçu le 22 juillet 1968

Yves Meyer
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
91-Orsay