JEAN-PIERRE SERRE
EVA BAYER (réd.)

Groupes linéaires modulo p et Points d'ordre fini des variétés abéliennes

Cours de Jean-Pierre Serre, tome 7 (1986)
<http://www.numdam.org/item?id=CJPS_1986__7_>

Groupes linéaires modulo p

et

Points d'ordre fini des variétés abéliennes

Jean-Pierre SERRE

Cours au Collège de France, janvier-mars 1986

notes de Eva BAYER

Annuaire du Collège de France

Résumé des cours de 1985-1986

I. SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES

Algèbre et géométrie

M. Jean-Pierre SERRE, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours a continué celui de l'année précédente, consacré aux représentations ℓ-adiques associées aux variétés abéliennes. Il s'est surtout attaché à la « variation avec ℓ » des groupes de Galois considérés.

1. *Notations*

K est une extension finie de $\mathbf{Q}$, de clôture algébrique $\overline{K}$; on note G_K le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

A est une variété abélienne sur K, de dimension $n \geq 1$.

Pour tout nombre premier ℓ, T_ℓ est le module de Tate de A relativement à ℓ ; c'est un $\mathbf{Z}_\ell$-module libre de rang $2n$. Le groupe G_K opère sur T_ℓ par une représentation

$$\rho_\ell : G_K \to \mathrm{Aut}\,(T_\ell) \simeq \mathbf{GL}_{2n}(\mathbf{Z}_\ell).$$

L'image de cette représentation est notée $G_{K,\ell}$; le groupe $G_{K,\ell}$ est le groupe de Galois des « points de ℓ^∞-division » de A.

La famille des ρ_ℓ, pour ℓ premier, définit un homomorphisme

$$\rho : G_K \to \prod_\ell G_{K,\ell} \subset \prod_\ell \mathrm{Aut}\,(T_\ell).$$

Le groupe $\rho(G_K)$ est le groupe de Galois des points de torsion de A.

2. *Résultats*

2.1. *Indépendance des* ρ_ℓ

Disons que les représentations ρ_ℓ sont *indépendantes sur* K si l'homomorphisme $\rho : G_K \to \prod_\ell G_{K,\ell}$ est *surjectif*, i.e. si $\rho(G_K)$ est égal au produit des $G_{K,\ell}$.

THÉORÈME 1 - *Il existe une extension finie* K' *de* K *telle que les* ρ_ℓ *soient indépendantes sur* K'.

(Bien entendu, K' dépend de la variété abélienne A considérée.)

Ce résultat peut se reformuler de la manière suivante :

THÉORÈME 1' - *Si* K *est assez grand,* $\rho(G_K)$ *est un sous-groupe ouvert du produit des* $G_{K,\ell}$.

2.2. *Homothéties*

On sait (BOGOMOLOV) que $G_{K,\ell}$ contient un sous-groupe ouvert du groupe $\mathbf{Z}_\ell^*$ des homothéties. Notons $c(\ell)$ l'indice de $\mathbf{Z}_\ell^* \cap G_{K,\ell}$ dans $\mathbf{Z}_\ell^*$. D'après une conjecture de S. Lang, on devrait avoir $c(\ell) = 1$ pour ℓ assez grand. On peut prouver le résultat plus faible suivant (d'ailleurs suffisant pour les applications que Lang avait en vue) :

THÉORÈME 2 - *Les entiers* $c(\ell)$ *restent bornés quand* ℓ *varie.*

Vu le th. 1, ce résultat équivaut à :

THÉORÈME 2' - *Il existe un entier* $c \geq 1$ *tel que le groupe* $\rho(G_K)$ *contienne toutes les homothéties de* $\hat{\mathbf{Z}}^* = \prod_\ell \mathbf{Z}_\ell^*$ *qui sont des puissances c-ièmes.*

Une autre façon d'énoncer le th. 2' consiste à dire qu'il existe un entier $c \geq 1$ ayant la propriété suivante :

pour tout entier $m \geq 1$, *il existe* $s_m \in G_K$ *tel que* $s_m(x) = m^c x$ *pour tout* $x \in A(\overline{K})$ *d'ordre fini premier à m.*

2.3. *Comparaison avec le groupe des similitudes symplectiques*

Choisissons une polarisation e sur A, ce qui munit chacun des T_ℓ d'une forme alternée e_ℓ à discriminant $\neq 0$ (et même à discriminant inversible, si ℓ est assez grand). Le groupe de Galois $G_{K,\ell}$ est contenu dans le groupe $\mathbf{GSp}(T_\ell, e_\ell)$ des similitudes symplectiques de T_ℓ relativement à e_ℓ.

THÉORÈME 3 - *Faisons les hypothèses suivantes :*

(i) *L'anneau* End (A) *des* $\overline{K}$*-endomorphismes de* A *est réduit à* $\mathbf{Z}$;

(ii) *La dimension* n *de* A *est impaire, ou égale à* 2, *ou à* 6.

Alors $G_{K,\ell}$ *est ouvert dans* $\mathbf{GSp}(T_\ell,e_\ell)$ *pour tout* ℓ, *et est égal à* $\mathbf{GSp}(T_\ell,e_\ell)$ *pour tout* ℓ *assez grand.*

En combinant ce résultat avec le th.1, on obtient :

COROLLAIRE - *Si* (i) *et* (ii) *sont satisfaites,* $\rho(G_K)$ *est un sous-groupe ouvert du produit des* $\mathbf{GSp}(T_\ell,e_\ell)$.

Pour $n = 1$, cela revient à dire que $\rho(G_K)$ est ouvert dans le produit des $\mathbf{GL}(T_\ell)$: on retrouve une propriété des courbes elliptiques sans multiplications complexes qui avait fait l'objet du cours de 1970-1971 (voir aussi *Invent. Math.* 15 (1972), 259-331).

2.4. *Orbites des points de torsion de* A

Soit $A(\overline{K})_t$ le sous-groupe de torsion de $A(\overline{K})$. Si $x \in A(\overline{K})_t$, posons :

$N(x)$ = ordre de x ;

$d(x) = |G_K \cdot x|$ = nombre de conjugués de x sur K.

THÉORÈME 4 - *Supposons que* A *ne contienne aucune sous-variété abélienne* $\neq 0$ *de type* CM. *Alors, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe une constante* $C(\epsilon,A,K) > 0$ *telle que* :

$$d(x) \geqslant C(\epsilon,A,K)\cdot N(x)^{2-\epsilon} \quad \textit{pour tout } x \in A(\overline{K})_t.$$

Lorsque A contient une sous-variété abélienne $\neq 0$ de type CM, cet énoncé reste vrai à condition d'y remplacer l'exposant $2 - \epsilon$ par $1 - \epsilon$: cela résulte du th. 2'.

2.5. *Groupes de Galois des points de division par* ℓ

Soit $G_K(\ell)$ l'image de $G_{K,\ell}$ dans $\mathbf{GL}(T_\ell/\ell T_\ell) \simeq \mathbf{GL}_{2n}(\mathbf{F}_\ell)$ par réduction modulo ℓ. L'un des principaux résultats du cours a été de montrer que $G_K(\ell)$ est « presque algébrique ». De façon plus précise, on construit, pour tout ℓ assez grand, un *sous-groupe réductif connexe* H_ℓ de $\mathbf{GL}_{2n}$, défini sur $\mathbf{F}_\ell$, qui jouit des propriétés suivantes :

2.5.1. Quitte à remplacer K par une extension finie, $G_K(\ell)$ est contenu dans $H_\ell(\mathbf{F}_\ell)$, et son indice est borné quand ℓ varie. Pour ℓ assez grand, $G_K(\ell)$ contient le groupe dérivé de $H_\ell(\mathbf{F}_\ell)$.

2.5.2. Le rang de H_ℓ est indépendant de ℓ, et est égal au rang de l'algèbre de Lie du groupe ℓ-adique $G_{K,\ell}$.

2.5.3. La composante neutre du centre de H_ℓ est un tore « indépendant de ℓ » : il s'obtient par réduction (mod ℓ) à partir d'un tore défini sur $\mathbf{Q}$. Ce tore contient le groupe $\mathbf{G}_m$ des homothéties.

2.5.4. La représentation linéaire de degré $2n$ de H_ℓ définie par le plongement $H_\ell \to \mathbf{GL}_{2n}$ est semi-simple ; son commutant est $\mathbf{F}_\ell \otimes \mathrm{End}\,(A)$.

Remarque. Il devrait être possible de préciser (2.5.2) et (2.5.3) en montrant que H_ℓ est la réduction (mod ℓ) de la composante neutre $(G_\ell^{alg})^\circ$ de l'enveloppe algébrique du groupe ℓ-adique $G_{K,\ell}$ (du moins pour ℓ assez grand). Cela n'a pas été fait dans le cours.

3. *Ingrédients des démonstrations*

Il y a d'abord ceux déjà utilisés dans l'étude ℓ-adique, pour ℓ fixé : théorèmes de Faltings, tores de Frobenius, théorie abélienne, et propriétés des groupes d'inertie en les places de K divisant ℓ.

On a également besoin de renseignements sur les sous-groupes de $\mathbf{GL}_N(\mathbf{F}_\ell)$:

3.1. *Sous-groupes d'ordre premier à la caractéristique*

Si k est un corps, *tout sous-groupe fini de* $\mathbf{GL}_N(k)$, *d'ordre premier à la caractéristique de* k, *contient un sous-groupe abélien d'indice* $\leqslant c_1(N)$, où $c_1(N)$ ne dépend que de N. C'est là un théorème classique de C. Jordan (du moins lorsque $k = \mathbf{C}$, cas auquel on se ramène sans difficulté). On a reproduit la démonstration qu'en avait donnée FROBENIUS en 1911 (*Ges. Abh.*, III, n^{os} 87-88). Cette démonstration donne pour $\log c_1(N)$ une majoration de l'ordre de $N^2 \log N$; d'après un résultat récent de B. WEISFEILER (basé sur la classification des groupes finis simples) on peut remplacer $N^2 \log N$ par $N \log N$, ce qui est essentiellement optimal.

3.2. *Sous-groupes de* $\mathbf{GL}_N(\mathbf{F}_\ell)$ *engendrés par leurs éléments d'ordre* ℓ

Supposons $\ell \geqslant N$. Soit G un sous-groupe de $\mathbf{GL}_N(\mathbf{F}_\ell)$, soit G_u l'ensemble des éléments de G d'ordre ℓ, et soit G^+ le sous-groupe de G engendré par G_u (ou, ce qui revient au même, le plus petit sous-groupe normal de G d'indice premier à ℓ). Si $x \in G_u$, on peut écrire x sous la forme $\exp(X)$, avec $X^\ell = 0$; les $\exp(tX)$ forment un sous-groupe algébrique $\mathbf{G}_a(x)$ de $\mathbf{GL}_N$, défini sur $\mathbf{F}_\ell$, et isomorphe au groupe additif $\mathbf{G}_a$. Soit G^{alg} le sous-groupe algébrique de $\mathbf{GL}_N$ engendré par les $\mathbf{G}_a(x)$, pour $x \in G_u$. Le groupe $G^{alg}(\mathbf{F}_\ell)$ des $\mathbf{F}_\ell$-points de G^{alg} contient évidemment G^+ ; *d'après un théorème de V. Nori, on a* :

$$G^+ = G^{alg}(\mathbf{F}_\ell)^+ \quad \textit{si } \ell \geqslant c_2(N)$$

où $c_2(N)$ ne dépend que de N. Ce résultat est particulièrement utile lorsque G agit de façon semi-simple sur $\mathbf{F}_\ell^N$, car le groupe G^{alg} est alors semi-simple, et peut se relever en caractéristique 0 si $c_2(N)$ est bien choisi.

On applique ceci avec $N = 2n$, le groupe G étant le groupe de Galois $G_K(\ell)$. D'après un théorème de Faltings, l'action de ce groupe sur $\mathbf{F}_\ell^N$ est semi-simple si ℓ est assez grand, d'où d'après (3.2) un groupe semi-simple $G_K(\ell)^{alg}$. D'autre part, la théorie abélienne permet de définir un certain sous-tore de $\mathbf{GL}_N$ qui commute à $G_K(\ell)^{alg}$; le groupe réductif connexe H_ℓ engendré par ce tore et par $G_K(\ell)^{alg}$ est celui qui intervient dans (2.5). Une fois le groupe H_ℓ défini, il faut prouver qu'il a les propriétés (2.5.1) à (2.5.4). En fait, c'est (2.5.1) qui est le point essentiel ; on le traite en utilisant les théorèmes de Jordan et de Nori cités ci-dessus, ainsi que le théorème de structure des groupes d'inertie en les places de K divisant ℓ dû à Raynaud. De là, on passe aux théorèmes 1, 2, 3 et 4.

Groupes linéaires modulo p

et

Points d'ordre fini des variétés abéliennes

Jean-Pierre SERRE

Cours au Collège de France, janvier-mars 1986

notes de Eva BAYER

Table des Matières

Contenu du cours 6/1/86

1ère partie

$G \subset GL_n(\mathbb{F}_p)$, n fixe, p variable $\to \infty$

$GL_n(\mathbb{F}_p)$ contient : — sous-groupes abéliens

— sous-groupes indépendants de p (provenant de $GL_n(\mathbb{Z})$: ce sont les plus difficiles à classer)

— sous-groupes "algébriques" $SL_n(\mathbb{F}_p)$, $Sp_n(\mathbb{F}_p)$

Thm "de Jordan" (1878)

G sous-groupe de $GL_n(k)$, k corps.

Si l'ordre de G est premier à $p = car(k)$, alors G contient un sous-groupe abélien normal A tel que $|G/A| \leq c(n)$, où $c(n)$ dépend seulement de n.

(e.g. $c(2) = 60$)

Thm (Nori ; versions plus faibles de Matthews, Vaserstein, Weisfeiler)

G engendré par ses éléments d'ordre p (engendré par ses p-Sylow : équiv.)

Alors, il existe $c_2(n)$ tel que si $p > c_2(n)$, on a $[G^{alg}(\mathbb{F}_p) : G] \leq c_3(n)$

G^{alg} : sous-groupe algébrique engendré par g^t, $g \in G$ d'ordre p, t indéterminée

($g = 1+u$, $u^p = 0$, $g^t = 1 + tu + \binom{t}{2} u^2 + \dots$)

$G \subset G^{alg}$, $G = G^{alg}(\mathbb{F}_p)^+$: sous-groupe engendré par les p-éléments.

Le théorème de Nori a d'autres applications que celles données dans ce cours :

① Il existe $c_3(n)$ tel que si $p > c_3(n)$ et si $G \subset GL(V)$, V ev. / $\mathbb{F}_p$ de dim n, action de G sur V semi-simple, alors $H^1(G, V) = 0$.

② Soit Γ un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{Z})$, Γ Zariski-dense dans SL_n.
Alors, l'adhérence de Γ dans $SL_n(\hat{\mathbb{Z}})$ est ouverte. En particulier, $\Gamma \longrightarrow SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est surjectif pour presque tout p.

2ème partie du cours :

Groupes de Galois des points d'ordre fini de variétés abéliennes.

A variété abélienne, $\dim A = n \geq 1$.
K corps de nombres (corps de fct, corps fini)
A défini sur K. Soit m entier ≥ 1, et
A_m : points de division par m, i.e.
$A_m = \mathrm{Ker}\,(m : A(\overline{K}) \longrightarrow A(\overline{K}))$, où
$\overline{K}$: clôture algébrique de K.
G_m = image de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dans $\mathrm{Aut}(A_m) = GL_{2n}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

G_m est "gros", "presque égal au groupe des points d'un certain groupe algébrique"

- $m = \ell, \ell^2, \ldots$ G_{ℓ^∞} : "fait" $\longrightarrow$ on combine.
- G_ℓ, ℓ variable

Résultats

Après extension finie de k, pour ℓ assez grand, on définira un tore $T_\ell \subset GL_{2n}/\mathbb{F}_\ell$, et un groupe semi-simple $S_\ell \subset GL_{2n}$ qui commutent entre eux, $H_\ell = T_\ell \cdot S_\ell$ groupe réductif.

(1) $G_\ell \subset H_\ell(\mathbb{F}_\ell)$ avec indice borné $\leq c(A,k)$ (indépendant de ℓ).

$G_\ell \supset S_\ell(\mathbb{F}_\ell)^+$

"image $(\tilde{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell) \to S_\ell(\mathbb{F}_\ell))$

(2) T_ℓ est indépendant de ℓ (le même que le tore ℓ-adique de G_{ℓ^∞})

$T_\ell \subset [\text{centre}\,(\text{End}(A) \otimes \mathbb{F}_\ell)]^*$

(3) rang S_ℓ indépendant de ℓ (et égal au rang ℓ-adique).

Cas particulier :

Si $\text{End}_{\bar{k}} A = \mathbb{Z}$, et si $\dim A$ est impair, ou 2, ou 6, alors $T = \mathbb{G}_m$, $S_\ell = Sp_{2n}$, $H_\ell = CSp_{2n}$ (similitudes symplectiques) ($= GSp_{2n}$ not. standard) et $G_\ell = H_\ell(\mathbb{F}_\ell)$ si ℓ est grand.

$\Rightarrow$ Image de $Gal(\bar{k}/k)$ dans

$\prod_\ell CSp_{2n}(\mathbb{Q}_\ell)$ est ouverte pour la topologie adélique.

Si la polarisation est de degré 1, ouverte dans $\prod_\ell CSp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$.

Thm:

Il y a équivalence entre:

(1) $S_\ell = 1$ pour une infinité de ℓ

(2) $|G_\ell|$ est premier à ℓ pour une infinité de ℓ

(3) A est de type CM.

Faltings: Commutant de H_ℓ dans $End(A_\ell)$ est $End(A) \otimes \mathbb{F}_\ell$ (ℓ grand)

Si x est un point d'ordre ℓ premier, l'ordre de l'orbite de x dans $Gal(\bar{K}/K)$ est $\geq$ cte. ℓ^2 (si A ss facteur de type CM).

Corollaire:

$G_\ell \cap$ (homothéties de A_ℓ) $= G_\ell \cap G_m(\mathbb{F}_\ell)$

$G_m \hookrightarrow GL_{2n}$

T_ℓ contient G_m

Donc l'indice de $G_\ell \cap G_m(\mathbb{F}_\ell)$ dans $\mathbb{F}_\ell^*$ est borné (quand ℓ varie)

Question: Est-ce que G_ℓ contient $G_m(\mathbb{F}_\ell)$ pour ℓ assez grand ?

Pour tout $i \geq 1$, on a $H^i(G_\ell, A_\ell) = 0$ si: $\ell \geq c(A, K, i)$

(ste spectrale) $H^i(G_\ell, \tilde{\otimes} A_\ell \tilde{\otimes}^s \hat{A}_\ell) = 0$ ℓ gd, $r \neq s$.

1ère partie : Sous-groupes de $GL_n(\mathbb{F}_p)$

① Le théorème de Jordan

Thm :

$G \subset GL_n(\mathbb{C})$, G fini :

Il existe $A \subset G$ abélien normal tel que $[G:A] \leq c(n)$, où $c(n)$ ne dépend que de n.

("normal" n'est pas sérieux : $A' \subset G$

$[G:A'] \leq c'(n)$, A' abélien

$A = \bigcap g A' g^{-1}$, g él. de G opérant trivialement sur G/A'

$[G:A] \leq c'(n)!$, A abélien normal.)

Le théorème s'étend à tout corps k, $|G|$ non divisible par $car(k)$:

a.) Si $car(k)=0$, on peut supposer k de type fini sur $\mathbb{Q}$, donc plongeable dans $\mathbb{C}$.

b.) Si $car(k)=p$, on peut le supposer parfait, k corps résiduel de $\Lambda = W(k)$: anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k.

$$\begin{array}{ccc} G & \subset & GL_n(k) \\ & & \uparrow \text{ réd. mod } p \\ & & GL_n(\Lambda) \end{array}$$

G peut se remonter dans $GL_n(\Lambda)$

$k = \Lambda/p\Lambda$, on remonte dans $\Lambda/p^2\Lambda$

$$0 \to M_n(k) \to GL_n(\Lambda/p^2\Lambda) \to GL_n(\Lambda/p\Lambda) \to 0$$

obstruction dans $H^2(G, M_n(k)) = 0$.

Comme le corps des fractions de Λ est de car. 0, on applique a.).

Reformulation:

Pour chaque n, il n'y a qu'un nombre fini (à conj. près) de sous-groupes finis de $PGL_n(\mathbb{C})$ qui sont irréductibles et primitifs.

$\tilde{G}$: image réciproque de G dans $SL_n(\mathbb{C})$
repr. de $\tilde{G}$ dans $\mathbb{C}$ n'est pas l'induite d'une représentation de $d^\circ < n$.

Jordan usuel $\Rightarrow$ reformulation:

Soit G un tel groupe, $\tilde{G}$ comme ci-dessus.
Par Jordan, $\exists A \subset \tilde{G}$ abélien normal, $[\tilde{G} : A] \leq c(n)$.
On décompose $\mathbb{C}^n$ en sous-espaces propres pour A, et $\tilde{G}$ les permute transitivement
$\Rightarrow$ un seul tel sous-espace propre
$\Leftrightarrow$ $A \subset$ homothéties.

$$\tilde{G}/A \twoheadrightarrow G \quad \Rightarrow \quad |G| \leq c(n).$$

"Jordan constructif" :

Liste des sous-groupes irréductibles primitifs de $PGL_n(\mathbb{C})$

$n = 1$ 1

$n = 2$ A_4, S_4, A_5 $c(2) = 60$

. . .

$n = 7$ voir Feit, Congrès de Nice 1970.

Meilleur $c(n)$ connu donné par Weisfeiler, en utilisant la classification des groupes finis simples.

Sous-groupes primitifs irréductibles de PGL_n sont en nombre fini.

Thm Feit-Thompson : Si p divise l'ordre d'un tel groupe, alors $p \leq 2n+1$.
($G_{168} \subset PGL_3$: borne optimale).

1ère démonstration
(Zassenhaus, Kazdan-Margulis).

Thm :
G groupe de Lie réel, il existe un voisinage U de l'élément neutre tel que pour tout sous-groupe discret Γ de G, le sous-groupe de Γ engendré par $\Gamma \cap U$ est nilpotent.

(Forme plus forte : Raghunathan, Discrete subgroups ...

(Même énoncé excepté que $\Gamma \cap U$ est contenu dans $\exp(\underline{n})$, où $\underline{n} \subset \mathrm{Lie}\, G$, $\underline{n}$ nilpotente.

Démonstration:

$$(x,y) \longmapsto [x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$$
$$G \times G \longrightarrow G$$

au voisinage de l'élément neutre.

x_i, y_i coord. centrés à l'origine

$$(x,y)_j = \sum a_{\alpha\beta}\, x^\alpha y^\beta$$

α, β multindices $|\alpha| \geq 1$, $|\beta| \geq 1$

$$|x| = \mathrm{Sup}\, |x_i|$$

$$|[x,y]| \leq c\,|x| \cdot |y| \quad \text{avec } c \text{ convenable.}$$

Quitte à changer de coordonnées, on peut supposer que $|[x,y]| \leq |x| \cdot |y|$ dans un voisinage U convenable, U relativement compact, $|x| \leq 1$ dans U.

$\Gamma \cap U$ fini $= 1 = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N$

$$|\gamma_i| \leq |\gamma_j| \quad \text{si } i < j$$

$$[\gamma_i, \gamma_j] = \gamma_{k(i,j)} \qquad i,j \geq 1.$$

Γ_i sous-groupe engendré par $\{1, \dots, \gamma_i\}$ opère trivialement sur Γ_j / Γ_{j-1}

$\Rightarrow$ le groupe engendré par $\Gamma \cap U$ est nilpotent.

Il suffit de démontrer le thm de Jordan avec $GL_n(\mathbb{C})$ remplacé par $U_n(\mathbb{C})$, groupe unitaire.

On applique à $U_n(\mathbb{C})$ le thm précédent, V vg. de 1, tel que si $G \subset U_n(\mathbb{C})$ fini, le sous-groupe H engendré par $V \cap G$ est nilpotent.

$$[G : H] \leq \mathrm{vol}(U_n(\mathbb{C}))/\mathrm{vol}(W),$$

où $W.W \subset V$, W symétrique, car si $g \in G$, $g' \in G$ sont des repr. distincts mod H, alors $gW \cap g'W = \emptyset$.

$N \subset G$ d'indice $\leq c_1(n)$, N nilpotent

Thm (Blichfeld)

Tout sous-groupe nilpotent de $GL_n(\mathbb{C})$ est "monomial" : l'espace est somme directe de droites stables (permutées) par le groupe

$\Leftrightarrow$ il existe dans le groupe unitaire un tore normalisé par le groupe.

$$[N : \underbrace{N \cap T}_{\text{abélien}}] \leq n!$$

2ème démonstration du thm de Jordan

Frobenius (1911) Vol 3, inspirée par Bieberbach (1911), voir aussi Schur (1911).

$E = \mathbb{C}^n$ métrique usuelle
espace de Hilbert / $\mathbb{C}$ de dim finie $= n$.

A opérateur, $A \in End(E)$, A^* son adjoint. On pose :

$$n(A) = Tr(AA^*) = \sum |a_{ij}|^2$$

(a_{ij}) : matrice de A p.r. base orthonormale e_i

$$= \sum_{i=1}^{n} \|A e_i\|^2$$

Si A est normal (i.e. $AA^* = A^*A$),
on peut choisir e_i : vecteurs propres de A
valeurs propres a_i, alors

$$n(A) = \sum |a_i|^2 .$$

On a $n(UA) = n(AU) = n(A)$ si U est unitaire

A normal de valeurs propres a_i,

$$\operatorname{Sup}_{i<j} |a_i - a_j|^2 \leq 2n(A)$$

$$|a_i - a_j|^2 \leq 2|a_i|^2 + 2|a_j|^2 \leq 2n(A)$$

B un autre opérateur

$$n(AB - BA) \leq \operatorname{Sup} |a_i - a_j|^2 \, n(B)$$
$$\leq 2n(A)n(B)$$

$$\| \sum |(a_i - a_j) b_{ij}|^2$$

Si U et V unitaires,

$$n(1 - UVU^{-1}V^{-1}) \leq 2n(1-U)n(1-V) \quad :$$

$$\| \quad n(VU - UV) = n\left(-(1-U)(1-V) + (1-V)(1-U)\right)$$

$$\leq 2n(1-U)n(1-V)$$

Lemme :

Soient U et V unitaires, avec

$$C = UVU^{-1}V^{-1}.$$

On suppose

① U et C commutent

② $n(1-V) < 4$

Alors $C = 1$.

① $\Longleftrightarrow$ ①' : U et VUV^{-1} commutent.

Supposons $U \neq VUV^{-1}$, et montrons

$$n(1-V) \geq 4.$$

Exemple : $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$VUV^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n(1-V) = n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 4 .$$

Soit Λ = Spectre de U (= celui de VUV^{-1})

$$E_{\lambda,\mu} = \{ x \text{ t.q. } Ux = \lambda x,\ VUV^{-1}x = \mu x \}$$

$$E = \bigoplus_{\substack{\text{orth} \\ (\lambda,\mu) \\ \lambda,\mu \in \Lambda}} E_{\lambda,\mu}$$

Il y a au moins 2 couples (λ,μ), $\lambda\neq\mu$, tels que $E_{\lambda,\mu}\neq 0$.

Il y a au moins un tel couple. S'il n'y en avait qu'un, la multiplicité de λ ne serait pas la même dans U et dans VUV^{-1} : celle de λ dans U serait égale à celle de VUV^{-1} augmenté de $\dim E_{\lambda,\mu}$.

Soient (λ_1,μ_1), (λ_2,μ_2) deux tels couples.

Choisissons e_1 unitaire $\in E_{\lambda_1,\mu_1}$

e_2 " E_{λ_2,μ_2}

e_1 vecteur propre de U pour λ_1

Ve_1 VUV^{-1} λ_1

$$\Rightarrow Ve_1 \in \bigoplus_{\nu,\lambda_1} E_{\nu,\lambda_1} \perp E_{\lambda_1,\mu_1}$$

donc $Ve_1 \perp e_1$, $Ve_2 \perp e_2$

$$n(1-V) \geq \|(1-V)e_1\|^2 + \|(1-V)e_2\|^2$$
$$\geq 2+2 = 4.$$

Lemme :

Si G fini $\subset U_n(\mathbb{C})$, si $U,V\in G$ tels que $n(1-U)<\frac{1}{2}$, $n(1-V)<4$, alors U et V commutent.

On en déduit que le sous-groupe engendré par les U t.q. $n(1-U)<\frac{1}{2}$ est commutatif et normal, et on verra que son indice est

$$\leq c(n) = \left(\sqrt{8n}+1\right)^{2n^2} + \left(\sqrt{8n}-1\right)^{2n^2}$$

13/1/86

Démonstration du thm de Jordan :

Si n entier ≥ 1, $\exists\, c(n)$ t.q. si : $G \subset GL_n(k)$ G fini, k corps, ordre de G premier à $\mathrm{car}(k)$, alors G contient un sous-groupe abélien normal d'indice $\leq c(n)$.

Il suffit de la prouver pour $k = \mathbb{C}$, la même constante vaut pour tout k.

Preuve de Bieberbach – Frobenius,

$G \subset U_n(\mathbb{C})$, $n(A) = \mathrm{Tr}(AA^*) = \sum |a_{ij}|^2$.

On a montré ① et ② :

① Si U, V unitaires, $n(1 - UVU^{-1}V^{-1}) \leq 2\, n(1-U)\, n(1-V)$.

② Si A, B unitaires, $C = ABA^{-1}B^{-1}$ si A et B commutent et si : $n(1-B) < 4$, alors $C = 1$.

③ Si : $A, B \in G$, G sous-groupe fini de $U_n(\mathbb{C})$, et si $n(1-A) < \frac{1}{2}$ et $n(1-B) < 4$, alors A et B commutent.

Démonstration de ③ :

Soit $k = 2n(1-A)$, $k < 1$, $C_0 = B$

$C_1 = ABA^{-1}B^{-1}$, $C_2 = AC_1A^{-1}C_1^{-1}$, …,

$C_m = AC_{m-1}A^{-1}C_{m-1}^{-1}$, …

$n(1-B) < 4$, $n(1-C_1) < 4k$, …

$n(1-C_m) < 4k^m$, d'où $n(1-C_n) \to 0$,

donc $C_m = 1$ pour un m.

On applique ② à A et C_{n-2} ; le C correspondant est C_{n-1}. Le fait que $C_n = 1$ signifie que A et C_{n-1} commutent.
On a $n(1 - C_{n-2}) < 4$, donc $C_{n-1} = 1$.
On continue : $C_1 = 1$.

④ Soit A le sous-groupe de G engendré par les $u \in G$ tels que $n(1-u) < \frac{1}{2}$.
Alors A est abélien et normal dans G.

⑤ On a $[G:A] \leq (\sqrt{8n}+1)^{2n^2} - (\sqrt{8n}-1)^{2n^2}$.

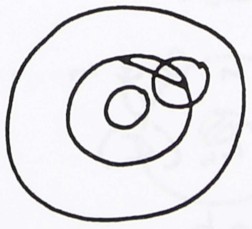
Soient $P_1, \dots, P_N$ des représentants des classes de G/A.

$n(P_i - P_j) \geq \frac{1}{2}$ si $i \neq j$

$\| $

$n(1 - P_i^{-1} P_j)$

$P_1 \cdot \underset{\geq \frac{1}{2}}{\text{———}} \cdot P_2$



$n(U) = n(1) = n$

grand rayon : $R = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$r = \sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Volume couronne : $S_n (R^{2n^2} - r^{2n^2})$

Vol. boule de rayon $\frac{1}{2\sqrt{2}}$:

$$S_n \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{n^2}$$

$$N \leq \frac{\left(\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2n^2} - \left(\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2n^2}}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2n^2}}$$

$$N \leq \left(\sqrt{8n}+1\right)^{2n^2} - \left(\sqrt{8n}-1\right)^{2n^2}.$$

$c(n)$ = plus petit entier $N \geq 1$ tel que tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ contient un sous-groupe abélien normal d'indice $\leq N$.

e.g. $c(1)=1$, $c(2)=60$, ... $c(7)$ connu.

$\log c(n) << n^2 \log n$

Blichfeld : $\log c(n) << n^2/\log n$

Weisfeiler (preprint) en utilisant la classification des groupes finis simples :

$$\log c(n) << n \log n$$

optimal : $S_n \subset GL_n(\mathbb{C})$.

$$c(n) \leq n!\, n^{a \log n + b}$$ a, b const. univ.

(il ne donne pas la valeur de a, b, qui doivent être difficiles à déterminer).

Compléments

a_i : valeurs propres de A unitaire

$$n(1-A) = \sum |1-a_i|^2$$

$\operatorname{arp}(A)$ = longueur du plus petit arc de cercle contenant toutes les valeurs propres de A.

A, B unitaires, $\operatorname{amp}(A) \le \delta_A$

$\operatorname{amp}(B) \le \delta_B$

Alors, $\operatorname{amp}(AB) \le \delta_A + \delta_B$

A, B unitaires, $\operatorname{amp}(A) \le \delta < \pi$

alors $\operatorname{amp}(ABA^{-1}B^{-1}) \le 2\delta_A$

A, B unitaires, $\operatorname{amp}(A) = \delta < \frac{\pi}{3}$,

$n(1 - ABA^{-1}B^{-1}) < k\, n(1-B)$

où $k = 4\sin^2 \delta/2 < 1$

($\sup |a_i - a_j|$: )

A, B unitaires, A commute à $ABA^{-1}B^{-1} \neq 1$,

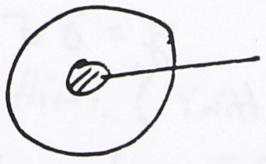
alors $\operatorname{amp}(B) \ge \pi$

(i.e. $0 \in$ env. convexe du spectre de B).

Si $A, B \in G$ fini, $\operatorname{amp}(A) < \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{amp}(B) < \pi$,

alors A et B commutent.

(même dém,



$$c(n) \le \frac{\text{vol } U_n}{\text{vol boule}}$$

<u>Variante</u> du thm de Jordan

(se démontre en se ramenant à Jordan)

G fini $\subset GL_n(k)$, $\operatorname{car}(k) = p > 0$

Soit G^+ le s/g de G engendré par les p-Sylow de G

Thm :

Il existe dans G/G^+ un sous-groupe abélien normal d'indice $\leq c(n)$.

Lemme :

Il existe un s/g H de G d'ordre premier à p, tel que $H \twoheadrightarrow G/G^+$.

Démonstration du Lemme :

Soit P un p sous-groupe de Sylow de G. On a $P \subset G^+$. Soit $N = N_G(P)$ le normalisateur de P dans G. Alors $N \to G/G^+$ est surjectif.

Soit $g \in G$, gPg^{-1} est un p-Sylow de G^+, donc de la forme $\gamma P \gamma^{-1}$, $\gamma \in G^+$.

$gPg^{-1} = \gamma P \gamma^{-1} \iff \gamma^{-1} g \in N$.

$\delta = \gamma^{-1} g$, on a $g = \gamma\delta$ avec $\gamma \in G^+$, $\delta \in N$ (lemme de Frattini).

On a $1 \longrightarrow \underbrace{P}_{p\text{-groupe}} \longrightarrow N \longrightarrow \underbrace{N/P}_{\text{d'ordre premier à } p} \longrightarrow 1$

se scinde.

On peut écrire $N = PH$ avec $H \simeq N/P$ d'ordre premier à p.

Comme $P \to G/G^+$ est trivial, on a $H \twoheadrightarrow G/G^+$

Le lemme entraîne le thm.

(Tits : variante de Brauer et Feit.
n, α exp. de p dans l'ordre de G $= \alpha$.
Il existe A d'indice $c(n,\alpha) = c(n,\alpha,p)$
Utilise Jordan)

Autre variante de Jordan : /$\mathbb{C}$
Soit L un s/g alg. de GL_n /$\mathbb{C}$
Soit L° sa composante neutre.
Alors le g. fini L/L° possède un s/g. abélien normal d'indice $\leq c(n)$.
Contient Jordan, mais sa démonstration utilise Jordan.

Thm :
Il existe un s/g fini H de L tel que $H \to L/L^\circ$ soit surjectif
(Borel – Serre CMH 64, 1964)

Lemme "à la Frattini" :
Si C est un s/g de Cartan de L° et N son normalisateur dans L, alors $N \twoheadrightarrow L/L^\circ$.

$g \in L$, gCg^{-1} Cartan de L°
$\gamma C \gamma^{-1}$ $\gamma \in L^\circ$ etc.

$N^\circ = C$ $N/N^\circ \twoheadrightarrow L/L^\circ$
N° nilpotent, on se ramène au cas commutatif.
(marche sur un corps alg. clos quelconque)
Ordre de H divisible par les mêmes nombres

premiers que L/L°.

Supposons $L^\circ = T$ tore, $G = L/L^\circ$

$$1 \to T \to L \to G \to 1$$

$d = |G|$, $u \in H^2(G,T)$ corr. à L, $du = 0$.

$$1 \to T_d \to T \xrightarrow{d} T \to 1$$

$$\begin{array}{ccccc} H^2(G,T_d) & \to & H^2(G,T) & \xrightarrow{d} & H^2(G,T) \\ \cup & & \cup & & \\ v & \longrightarrow & u & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & T_d & \to & H & \to & G \to 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \to & T & \to & L & \to & G \to 1 \end{array}$$

(On ne peut pas borner $|H|$)

Marche aussi sur un corps non alg. clos:
e.g. k parfait, L/L° k-groupe fini:
on veut relever en H fini stable par Galois:
c'est possible.

(2) Inertie modérée (rigidité de Raynaud)

K corps local, car. résiduelle $p>0$.
k : corps résiduel, supposé parfait
(fini dans toutes les applications)
$\overline{K}$: clôture alg. de K
$\overline{k}$: corps résiduel de $\overline{K}$.

$$1 \longrightarrow \underbrace{I}_{\text{g. d'inertie}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow 1$$

I_w : plus gd pro-p s/g de I
inertie "sauvage"
$I/I_w = I_t$: g. d'inertie modérée, d'ordre premier à p
($I = I_w \cdot I_t$ semi-direct, non canonique)

Structure de I_t

$$I_t = \varprojlim_{\substack{n \\ (n,p)=1}} \mu_n(\overline{k})$$

$\mu_n(\overline{k})$: gp. des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 ds $\overline{k}$

π : uniformisante

K'/K finie, galoisienne, $G(K'/K)$
On a $I(K'/K) \longrightarrow \mu_n$, définie ainsi :

Si : π' : unif. de K', $s \in I$
$s\pi'/\pi'$ entier de K'
$\equiv$ racine de 1 mod π'

cette racine de 1 est indép. du choix de π'.

q puissance de p, $\mathbb{F}_q \subset \overline{k}$

$n = q-1$, $\mu_n(\overline{k}) = \mathbb{F}_q^*$

$$I_t = \varprojlim_{p^n} \mathbb{F}_{p^n}^\times$$

homomorphisme de transition: normes.

Soit $\rho : Gal(\overline{k}/k) \longrightarrow GL(V)$

V: ev. sur $\overline{k}$

repr. continue à image finie

Soit $\rho|I$ sa restriction à I.

I_w pro-p-gp, agit par matrices unipotentes, trivialement sur les facteurs simples, d'où il existe une suite de composition de V (p.r. $\rho|I$) telle que I_w opère trivialement sur les facteurs simples.

Si $\rho|I$ est semi-simple, alors I_w opère trivialement.

D'où une repr. $\rho|I_t : I_t \longrightarrow GL(V)$.
C'est une somme directe de repr. de degré 1 donnée par les caractères

$$\chi_\alpha : I_t \longrightarrow \overline{k}^\times$$

associés à la représentation.

Ecriture d'un caractère

$$\chi : \mathbb{F}_{p^m}^\times \longrightarrow \bar{k}^\times$$

On a $\chi(x) = x^{i(\chi)}$

où $i(\chi) \in \mathbb{Z}/(p^m-1)\mathbb{Z}$

$$i(\chi) = i_0 + i_1 p + \cdots + i_{m-1} p^{m-1}$$

avec $0 \leq i_j \leq p-1$

et $(i_0, \cdots, i_{m-1}) \neq (p-1, \cdots, p-1)$.

$\mathbb{F}_{p^m} \longrightarrow \bar{k}$

$x \longmapsto x$ $\quad (1, 0, \cdots, 0)$

$x \longmapsto x^p$ $\quad (0, 1, \cdots, 0)$

$\cdots$

$x \longmapsto x^{p^{m-1}}$ $\quad (0, \cdots, 1)$

$\operatorname{amp}(\chi) = \sup(i_0, \cdots, i_{m-1}) \geq 0$

$\leq p-1$.

$\mathbb{F}_{p^2}^\times \xrightarrow{\text{norme}} \mathbb{F}_p^\times \xrightarrow{\chi} \bar{k}^\times$

$x \longmapsto x^i$

$x \longmapsto x^{p+1} \longmapsto x^{i+pi}$

(i, i), $\operatorname{amp} = i$

Théorème de rigidité

Supposons ρ triviale sur I_w, et supposons que tous les caractères de I_t définis par ρ soient d'amplitude $\leq \delta$, où δ est un entier $< p-1$.
(On dit alors que ρ est une représentation d'amplitude $\leq \delta$)
Soit $A \in GL(V)$. Supposons que les $s \in I_t$ tels que $\rho(s)$ commute à A forment un s/g d'indice $< \frac{p-1}{\delta}$ dans I_t.
Alors les $\rho(s)$, $s \in I_t$, commutent à A.

Même énoncé avec "commute à A" remplacé par "fixe un vecteur donné de V".

Démonstration:

On se ramène à une représentation $\rho : \mathbb{F}_{p^m}^\times \longrightarrow GL(V)$ dont tous les caractères sont d'amplitude $\leq \delta$.
Mise sous forme diagonale, elle fait intervenir des caractères $\chi_1, \dots, \chi_d$ $d = \dim(V)$.
Si (a_{ij}) = matrice de A
$s \in \mathbb{F}_{p^m}^\times$, $\rho(s)$ commute à A
$a_{ij}(\chi_i(s) - \chi_j(s)) = 0$

1er cas:

pour tout i, j t.q. $a_{ij} \neq 0$, on a $\chi_i = \chi_j$. Alors tous les $\rho(s)$ commutent à A.

2e cas :

Il existe i, j avec $a_{ij} \neq 0$, $\chi_i \neq \chi_j$.

Alors l'ensemble des s t.q. $\rho(s)$ commute à A est contenu dans l'ensemble des solutions de l'équation $\chi_i(s) = \chi_j(s)$.

Soit $\chi = \chi_i$, $\chi' = \chi_j$.

$\chi(s) = \chi'(s)$

$\chi(s) = s^{i_0 + p i_1 + \dots + p^{n-1} i_{n-1}}$ $\qquad i_\alpha, i'_\alpha \leq \delta$.

$\chi'(s) = s^{i'_0 + p i'_1 + \dots + p^{n-1} i'_{n-1}}$

$s \in \mathbb{F}_{p^n}^\times$, équation en s de degré

$\leq \delta(1 + p + \dots + p^{n-1})$

donc l'ordre du centralisateur de A est $\leq \delta \dfrac{p^{n-1}}{p-1}$

Donc l'indice est $\geq \dfrac{p-1}{\delta}$ — contradiction

Application aux variétés abéliennes

Soit A une variété abélienne sur K ayant bonne réduction.

Supposons $\mathrm{car}(K) = 0$, et soit $e = v(p)$ l'indice de ramification absolu de K.

Soit $V = \mathrm{Ker}(p : A(\bar{K}) \longrightarrow A(\bar{K}))$ ev. sur $\mathbb{F}_p$ de dim $2g$, où $g = \dim(A)$.

Thm (Raynaud)
L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur le semi-simplifié de V p.r. à l'action de I est d'amplitude $\leq e$.

(Corriger définition de l'amplitude :
ev. V sur $k' \subset \bar{k}$ ss-corps,
on regarde $V \otimes \bar{k}$).

$A[p]$ schéma des points de division par p,
schéma en groupes fini, tué par p, plat
(Bull. SMF ~ 1974).

$\underline{e=1}$ et $\dim(A)=1$

cas ordinaire : action d'inertie $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{F}_p^\times \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{caractères} \to \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

supersingulière :

$$\mathbb{F}_{p^2}^\times \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^p \end{pmatrix} \qquad \text{caractères} \to \begin{matrix} (1\ 0) \\ (0\ 1) \end{matrix}$$

On travaille dans H_1

$\underline{\text{Conjecture :}}$
Si on est dans H_r, l'amplitude est $\leq r.e$
(Fontaine – Messing : vrai pour p assez grand (?)).

20/1/86

Inertie modérée

$\mathbb{F}_{p^n}^* \longrightarrow \bar{k}^*$ $\quad x \mapsto x^{i_0 + p i_1 + \cdots + i_{n-1} p^{n-1}}$

caractères $\quad 0 \leq i_j \leq p-1$

$(i_0, \ldots, i_{n-1}) \neq (p-1, \ldots, p-1)$

$\mathrm{amp}(x) = \sup(i_j)$

K corps local, O_K anneau des entiers de K
car $K = 0$, G schéma en groupes sur O_K
$G(\bar{K})$: espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ de dim. n
$G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ opère sur $G(\bar{K})$, et donne
$G_K \longrightarrow GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Thm (Raynaud) :
$e = v(p)$: indice de ramification absolue de K
Les caractères de l'inertie modérée intervenant dans une telle représentation ont une amplitude $\leq e$.

Cas utile ensuite : $e = 1$.

Complément :
On suppose de plus $e = 1$, $p \geq 3$. Soit I l'image dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ du groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Alors I n'a pas de quotient d'ordre p.

$$1 \longrightarrow I_w \longrightarrow I \longrightarrow I_t \longrightarrow 1$$

sauvage $\qquad$ modérée

(produit semi-direct)

I^u : higher ram. gps , u réel ≥ 0.

Thm (Fontaine) : $I^{\frac{1}{p-1}} = \{1\}$.

Si J est un groupe d'inertie cyclique d'ordre p, alors $J^2 \neq \{1\}$. D'où contradiction avec le Th. de Fontaine.

Corollaire :
I est engendré par ses s/g modérés.

Tores d'inertie

$\mathbb{F}_{p^n}^*$: gp de $\mathbb{F}_p$-points du tore $T_n/\mathbb{F}_p$
"repr. de gp. mult. de $\mathbb{F}_{p^n}^*$" $= T_n(\mathbb{F}_p)$
où $T_n = \mathrm{Res}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}(\mathbb{G}_m)$

(i.e. $T_n(A) = (\mathbb{F}_{p^n} \otimes A)^\times$)

Donnée $\mathbb{F}_{p^n}^\times \longrightarrow GL(V)$, on veut prolonger à $T_n \to GL(V)$
(de groupes alg.)
1ère étape : $k > \mathbb{F}_{p^n}$ et $\dim V = 1$.

$T_n/\mathbb{F}_p$, caract. $\cong \underset{w_1}{\mathbb{Z}} \times \cdots \times \underset{w_n}{\mathbb{Z}}$ (n fois)

base de prolongements $\mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow k$
(action naturelle de Gal).

Théorème de rigidité

Représentation ρ de $\mathbb{F}_{p^n}^\times$ d'amplitude $\leq \delta$ dans $GL(V)$. Soit A un élément de $End(V)$. Alors les $x \in \mathbb{F}_{p^n}^\times$ tels que $\rho(x)$ commute à A forment un s/g qui est soit $\mathbb{F}_{p^n}^\times$, soit d'indice $\geq \frac{p-1}{\delta}$.

Situation de tout à l'heure:

$e=1$, $p \geq 3$, $\rho : I \to GL(V)$

Chaque $I = I_w \cdot I_t \to$ tore env. de I_t

Gp. alg. engendré résoluble, U. tore

($p \geq n$, n ds GL_n) U : prendre exp $\to \mathbb{F}_p$.

(3) Variété abélienne /K : corps de nombres.

$n = \dim(A) \geq 1$, ℓ premier.

$A_\ell = Ker(A(\bar{K}) \to A(\bar{K})) \simeq \mathbb{F}_\ell^{2n}$

G_ℓ = image de $Gal(\bar{K}/K)$ dans $Aut(A_\ell)$

Théorème:

S'il existe une infinité de ℓ tels que $|G_\ell|$ soit premier à ℓ, alors A est de type CM.

(Il est bien connu que si A est de type CM, alors $|G_\ell|$ est premier à ℓ sauf éventuellement pour un nombre fini de ℓ).

Démonstration utilisera :

- Jordan
- Rigidité de l'inertie modérée
- thm de Faltings :
  pour ℓ assez grand, le commutant de G_ℓ dans $End(A_\ell)$ est $End_K(A) \otimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

Type CM : "Suffisamment d'endomorphismes".

Soit $\Lambda = \mathbb{Q} \otimes End_{\bar{K}}(A)$: semi-simple

rang := dimension d'une sous-algèbre commutative semi-simple qui est son propre commutant

= rang du groupe multiplicatif de Λ comme groupe algébrique.

$rg\ M_n = n$

Le rang est invariant par extension des scalaires.

CM $\iff$ $rg\ \Lambda = 2n$

$\iff$ il y a une algèbre commutative semi-simple (étale) $M \subset \Lambda$ telle que V_ℓ soit un $\mathbb{Q}_\ell \otimes M$-module libre de rang 1 (pour un ℓ, ou pour tout ℓ).

$\iff$ le groupe de Mumford-Tate de A est un tore

$\Longleftrightarrow$ $A/\overline{K}$ est produit de variétés abéliennes simples qui sont de type CM au sens de Shimura – Taniyama.

Si on savait que G_ℓ est commutatif, on aurait fini par Faltings.

Soit L l'ensemble des ℓ tels que $|G_\ell|$ est premier à ℓ.

Jordan $\Longrightarrow$ $\exists c$ tel que $\forall \ell \in L$, il existe un sous-groupe abélien normal H_ℓ de G_ℓ d'indice $\leq c$

Pour tout $\ell \in L$, choisissons H_ℓ abélien normal d'indice minimum.

$[G_\ell : H_\ell] \leq c$

$\phi_\ell := G_\ell / H_\ell$.

$$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow G_\ell \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \phi_\ell$$

Donc $\phi_\ell = \mathrm{Gal}(K'_\ell/K)$, K'_ℓ/K gal.

$[K'_\ell : K] \leq c$

Théorème (Hermite)

Les extensions d'un corps de nombres d'un degré donné et non ramifiées en dehors d'un nombre fini de places sont en nombre fini.

K'_ℓ/K ne peut être ramifié qu'en

a.) les places de K où A a mauvaise réduction

b.) les places de K au-dessus de ℓ.

a.) est un ensemble fini fixe

(en fait, quitte à étendre les scalaires par une extension finie de K, A a bonne réduction partout : En effet, par une telle extension on peut supposer A semi-stable. Par un théorème de Grothendieck, l'inertie agit par des unipotents. v place de K, I_v agit sur A_ℓ. Cette action est triviale Serre-Tate (Néron) s'il existe une infinité de ℓ tels que l'action soit triviale, alors on a bonne réduction.

b.) pour ℓ assez grand, on verra que ces places n'existent pas.

Lemme :

Si $\ell \in L$ est assez grand, l'extension K'/K est non ramifié aux places de K divisant ℓ

(vrai si $\ell > c+1$

ℓ non ramifié dans K)

Soit v place de K au-dessus de ℓ

$\bar{v}$ " $\overline{K}$ "

On suppose $e_v = 1$.

Soit $I_{\bar{v}}$ le groupe d'inertie associé ds G_ℓ.

Lemme $\Longleftrightarrow$ $I_{\bar{v}} \subset H_\ell$

Montrons que $I_{\bar{v}}$ commute à H_ℓ si $\ell > c$.

D'abord, $I_{\bar{v}} \cap H_\ell$ commute à H_ℓ.

L'indice dans $I_{\bar{v}}$ de $I_{\bar{v}} \cap H_\ell$ est $\leq c$.

Soit $M \in H_\ell$.

Le sous-groupe de $I_{\bar{v}}$ formé des éléments commutant à M est d'indice $\leq c < \ell - 1$.

Par rigidité (et $\delta = 1$) tout $I_{\bar{v}}$ commute à M. Donc $I_{\bar{v}}$ commute à H_ℓ.

H_ℓ abélien normal

$I_{\bar{v}}$ cyclique, commute à H_ℓ.

Deux conjugués quelconques de $I_{\bar{v}}$ commutent entre eux.

Démonstration:

Soient I_1, I_2 deux tels s/g.

Soit $M \in I_2$. Soit I_1' le s/g des $x \in I_1$ qui commutent à M.

On a $H_\ell \cap I_1 \subset I_1'$, car H_ℓ commute à I_2.

Or, l'indice de $H_\ell \cap I_1$ dans I_1 est $\leq c$.

Par rigidité, tous les éléments de I_1 commutent à M

Le s/g engendré par H_ℓ et les I_v est abélien normal, et contient H_ℓ, il est donc égal à H_ℓ (par minimalité de l'indice)

Bornons-nous aux $\ell > c+1$, $\ell \nmid \mathrm{disc}(K)$.
L'extension K_ℓ'/K est ramifiée au plus en des places de mauvaise réduction, et son degré est $\leq c$.
Ces extensions sont en nombre fini. On peut donc trouver K'/K fini qui contient tous les K'_ℓ.
Par changement de base de K à K', les G_ℓ sont remplacés par des s/g G_ℓ' et l'on a $G_\ell' \subset H_\ell$.
En particulier les G_ℓ' sont abéliens.

Donc : quitte à remplacer K par K', les G_ℓ sont abéliens.
Le commutant d'un groupe abélien est une algèbre semi-simple de rang $2n$.
Donc par Faltings, A est de type CM.

Analogue sur les corps de fonctions

(pas besoin de Raynaud).

K corps des fonctions rationnelles d'une courbe/$\mathbb{F}_q$

A variété abélienne /K.

$CM = ?$

Variété abélienne de type CM en car $p>0$:

(1) $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}_{\bar{K}} A$ de rang $2n$, $n = \dim A$

(2) (Oort, Grothendieek)

A provient "presque" d'une variété sur $\mathbb{F}_q$

Quitte à faire une extension finie des scalaires, et une isogénie (radicielle), A est définissable sur un corps fini.

(Ce n'est pas toujours vrai sans faire d'isogénie :

E courbe elliptique supersingulière

$\longrightarrow E \times E \longrightarrow A \longrightarrow 0$

rad. de $d^\circ p$ appl. tangente

noyau droite donnée.

droite de pente transcendante

$\longrightarrow A_t$. Pas défini sur un corps fini:).

réf. : Oort, J. pure appl. Algebra (1973), t.3, 399-408.

[Il n'y a pas de définition du groupe de Mumford-Tate en caract. $p>0$ mais il devrait y en avoir une : problème "cristallin" !]

Théorème :

Si les G_ℓ sont d'ordre premier à ℓ pour une infinité de ℓ, alors A est de type CM.

$H_\ell \subset G_\ell$ s/g abélien normal d'indice minimum $[G_\ell : H_\ell] \leq c$, $\phi_\ell = G_\ell / H_\ell$.

L'extension K'/K corr. à ϕ_ℓ ne peut être ramifiée qu'aux places de mauvaise réduction ($\ell \neq \mathrm{car}\, k = p$).

En fait (comme avant) on montre que quitte à agrandir K, il y a bonne réduction partout.

Si K est donné, S ensemble fini de places de K, et m un entier premier à p, il n'y a qu'un nombre fini d'extensions galoisiennes de K de degré m non ramifiées en dehors de S :

$$\pi_{1\,\mathrm{geom}} \longrightarrow \pi_1 \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 0 \,, \quad k = \mathbb{F}_q$$

Même argument : quitte à agrandir K, tous les G_ℓ ($\ell \in L$) deviennent abéliens.

De là, CM :

(1) Analogue en car p du thm de Faltings sur le commutant :

$$\mathrm{End}_k A \otimes \mathbb{F}_\ell = \mathrm{comm}(G_\ell) \qquad \ell \gg d$$

$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\varphi_\ell} G_\ell$ $\qquad (k = \mathbb{F}_q)$

les repr. φ_ℓ sont les mêmes que celles données par la variété abélienne $/\mathbb{F}_q$ donnée par une fibre.

repr. φ_ℓ triviales sur le groupe fondamental géométrique : Oort "K/k-trace".

On peut supposer $=0$.

Néron-Lang : gp. des points rat. sur $K\bar{k}$ de A est de type fini.

Or, les A_ℓ sont faits de points rationnels sur $K\bar{k}$ — contradiction.

Sous-groupes de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ engendrés par leurs p-éléments (p-Sylow)

- M. Nori (en préparation)
- Matthiews – Vaserstein – Weisfeiler
- Weisfeiler

On suppose $p \geq n$ (et même $p \geq 2n$).
Si $x \in GL_n(k)$, car $k = p$, est d'ordre une puissance de p, alors $x = 1$ ou x est d'ordre p, et $x = \exp(y)$, $y^p = 0$ (forme de Jordan).

A un tel x on attachera

$$\varphi_x : \mathbb{G}_a \longrightarrow GL_n$$
$$\varphi_x(t) = \exp(ty)$$

Si G est un groupe fini, p fixé, G^+ le s/g de G engendré par les p-Sylow (p-élé). G/G^+ plus grand quotient de G d'ordre premier à p.

Si $G = G^+$, le groupe algébrique engendré par les $\varphi_x(\mathbb{G}_a)$, $x \in G$ d'ordre p, est noté G^{alg}.

Théorème (Nori) $k = \mathbb{F}_p$
Il existe une constante $c_1(n)$ dépendant de n mais non de p, telle que

$$G^{alg}(\mathbb{F}_p)^+ = G \quad \text{si} \quad p \geq c_1(n)$$

Cas où l'action de G est semi-simple est plus facile, et donne $c'(n)$ effectif.

Exponentielles

Soit p un nombre premier, et A une algèbre associative sur $\mathbb{F}_p$. Soit $x \in A$ nilpotent, $x^r = 0$ avec $r \leq p$ (i.e. $x^p = 0$)

Alors $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}$

est défini, inversible d'inverse e^{-x}.

Si $x, y \in A$ et si $x^i y^j = 0$ dès que $i + j \geq p$, et si $xy = yx$, alors $(x+y)^p = 0$, $x^p = y^p = 0$, et $e^{x+y} = e^x e^y$

Corollaire :

Si $x_i \in A$, $i = 1, \ldots, m$ commutent et si $x_i^{r_i} = 0$ $r_i \geq 1$, $\sum_i (r_i - 1) + 1 \leq p$, alors $\left(\sum x_i\right)^p = 0$, et $e^{\sum x_i} = e^{x_1} \cdots e^{x_n}$

($x_1^i x_2^j \neq 0 \Rightarrow r_1 \geq i+1$, $r_2 \geq j+1$, donc $i + j + 2 - 1 > p$ — contradiction)

Si $x^r = y^r = 0$, $p > 2r - 1$, x et y commutent, alors $e^x e^y = e^{x+y}$.

$A = End(V) \simeq M_n(k)$

V ev. sur k, $car(k) = p$, $\dim(V) = n$

Si x est nilpotent dans A, on a $x^n = 0$.

Si $p \geq n$, e^x est défini. C'est un élément

unipotent de $GL_n(k)$.

$Exp : x \mapsto e^x$ et $u \mapsto \log u$ donnent des bijections réciproques des nilpotents et unipotents

Lemme :

Si $p \geq 2n-1$, *et si* $x \in M_n(k)$ *est nilpotent, alors*

$$ad(x) : y \longmapsto [x,y] = xy - yx$$

(endom. de $M_n(k)$)

est tel que $ad(x)^p = 0$, *et l'on a*

$$e^x y e^{-x} = e^{ad(x)} y$$

pour tout $y \in M_n(k)$.

$ad(x) : End(V) \to End(V)$, $ad(x) = L_x - R_x$

où $L_x y = xy$, $R_x y = yx$

L_x et R_x commutent, $L_x^n = 0$, $R_x^n = 0$

("nilpotés" par n) comme $p \geq 2n-1$,

$(L_x - R_x)^p = 0$, et

$$e^{ad(x)} = e^{L_x} e^{-R_x}, \text{ donc}$$

$$e^{ad(x)} y = e^{L_x}\left(y - yx + y\frac{x^2}{2} - \cdots\right)$$

$$= (1 + x + \cdots) y (1 - x + \cdots)$$

$$= e^x y e^{-x}.$$

Autre point de vue :

remarquons que $End(V) = V \otimes V^*$

$V_1, \cdots, V_k$ $\quad x_i \in End(V_i)$ nilpotents

Supposons $\quad \sum (\dim(V_i) - 1) + 1 \leq p$

alors $\quad x = \sum x_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \in End(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$

est "nilpotent" par p. On a $e^x = e^{x_1} \otimes \cdots \otimes e^{x_k}$.

Lemme :

Supposons $p \geq 2n-1$. Soit $x \in End(V)$ nilpotent, et soient $W_2 \subset W_1 \subset End(V)$ des s/esp. vect. tels que $[x, W_1] \subset W_2$, i.e. $ad(x) W_1 \subset W_2$.

Alors W_1, W_2 sont stables par

$$y \longmapsto e^x y e^{-x}$$

et $e^x y e^{-x} \equiv y \mod W_2 \quad \forall y \in W_1$

$$e^x y e^{-x} = e^{ad(x)} y = y + ad(x)y + \frac{1}{2} ad(x)^2 y + \cdots$$

Si $y \in W_1$, $\equiv y \mod W_2$

Exemple : $p=2$, $n=2$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad W_1 = W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in k \right\}$$

$[x, W_1] \subset W_1$, mais $e^x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et W_1 n'est pas stable par conjugaison par e^x

$$e^x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} * & \\ & \end{pmatrix} \notin W_1$$

La construction de G^{alg}

V ev. de dim n sur k, k de car p

Hyp : $p \geq 2n-1$

Soit G un s/g de $GL(V)$ eng. par ses élts unipotents (i.e. $x^p = 1$).

Soit G_u l'ensemble des éléments unipotents de G.

Si $x \in G_u$, on a $x = \exp(X)$, $\log x = X$ nilpotent dans $End(V)$.

$\exp(tX) = 1 + tX + \dots$ $\quad t$ "indéterminée"

D'où un homomorphisme

$$S_x : G_a \longrightarrow GL(V)$$

vu comme groupe algébrique sur k.

Par définition, G^{alg} est le plus petit s/g algébrique de $GL(V)$ contenant les images de S_x (i.e. engendré par les "s/g à un paramètre" $\operatorname{Im} S_x$.

Problème :

Comparer G et $G^{alg}(k)$ = pts rationnels, en supposant que G est k-stable.

(G est "k-stable" $\Longleftrightarrow \forall x \in G_u \ \forall \lambda \in k$ on a $x^\lambda \in G$).

L'algèbre de Lie de G^{alg}

Soit $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G^{alg}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \subset End(V)$

Soit $\mathfrak{a}$ le k s/esp. vect. de $End(V)$ engendré par les $\log(x)$, $x \in G_u$.

Lemme :

On a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, *et* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

Remarque : Pas d'exemple connu où $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$.

$$\frac{d}{dt}(e^{tX})_{t=0} = X \qquad X = \log x$$

Théorème :

On a $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_f$ dans chacun des cas suivants :

① $G = G_u$ (tout élément de G est unipotent)

② **L'action de G sur V est semi-simple**

Principe de ① :

G est contenu à conj. près dans le groupe unipotent triangulaire supérieur.

$p \geq n$: exp et log donnent des isomorphismes réciproques : unipotents $\longleftrightarrow$ alg. de Lie correspondante,

s/g $\longleftrightarrow$ $\mathbb{F}_p$ s/alg de Lie

$\mathfrak{a} = \mathfrak{k}.\log(G)$ $\qquad G^{alg} = \exp(\mathfrak{a})$

② $\Longrightarrow$ ②' : G^{alg} est un groupe algébrique semi-simple.

Propriétés de G^{alg} :

- G^{alg} est connexe
- n'a aucun quotient (même sur $\overline{\mathbb{k}}$) qui soit G_m

Le radical de G^{alg} est unipotent

G^{alg}/rad = semi-simple

L'action de G^{alg} est semi-simple $\Longrightarrow$ ②'

Lemme :

Si la car. du corps est $> \text{rang} + 1$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}_f$ d'un groupe semi-simple est telle que $[\mathfrak{o}_f, \mathfrak{o}_f] = \mathfrak{o}_f$.

Classification: les contre exemples sont PSL_n, $p \mid n$. Centre de SL_m est μ_m. SL_p de rg $p-1$

Contre-ex minimal: PSL_2 en car 2 (rg 1)

$G^{alg} \subset SL_n$

semi-simple

$rg\, G^{alg} \leq n-1$ $\quad p > n$, car $p \geq 2n-1$

Etude des alg. de Lie en car p:

- Dieudonné Vol II
- Jacobson

De ce lemme résulte: $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$

$\Rightarrow \mathfrak{a} \supset \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{g}$.

Tits: $G = \tilde{G}/C$ $\quad C$ étale $\Rightarrow$ alg. de Lie = non étale — liste.

Question: Est-il vrai que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$? (si $p > 2n-1$)

Théorème:

Il existe une constante $c_2(n) \geq 2n-1$ telle que si $k = \mathbb{F}_p$, $p \geq c_2(n)$, et si $G \subset GL_n(\mathbb{F}_p)$ est semi-simple et engendré par ses p-éléments, alors

$$G = G^{alg}(\mathbb{F}_p)^+$$

s/g de $G^{alg}(\mathbb{F}_p)$ engendré par ses p-éléments

(semi-simple: représentation semi-simple).

On trouvera $c_2(n)$ effectif (mais pas bon).

Lemme

① Soit $F \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_N]$, $F \neq 0$

Soit $d = \deg F$

Alors le nombre de $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{F}_q^N$ tels que $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ est $\leq d \cdot q^{N-1}$.

Démonstration:

par récurrence sur $N+d$

Si $N+d=1$, $N=1$ et $d=0$: OK

Sinon, 2 cas: ou bien F est divisible par un facteur linéaire $X_1 - a$, $a \in \mathbb{F}_q$

$F = (X-a)\, G(X_1, \dots, X_N)$, $\deg G = d-1$

nombre de solutions: $\leq q^{N-1} + (d-1)$

Sinon, $\forall a \in \mathbb{F}_q$, $F(a, X_2, \dots, X_N) \neq 0$ et de degré $\leq d$.

Pour chaque a, il y a au plus $d q^{N-2}$ solutions en $X_2, \dots, X_N$.

② Variante du thm de Bézout

Dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N$, soient $V_1, \dots, V_N$ des hypersurfaces de degrés $m_1, \dots, m_N$

Alors le nombre de points d'intersection isolés des V_i est $\leq m_1 \cdots m_N$

Famille à un paramètre de V_i^t t.q. $V_i^0 = V_i$;

t générique : intersections isolés

Fulton: Intersection theory

Théorème :

Soient $S_1, \dots, S_d$ des hypersurfaces de $\mathbb{P}_N$ de degrés $m_1, \dots, m_d$ et soient V_α les composantes irréductibles de $S_1 \cap \dots \cap S_d$.

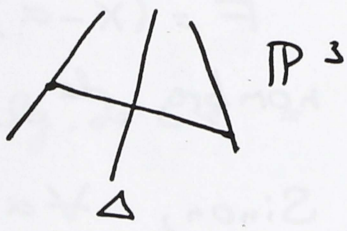
Alors
$$\sum \deg(V_\alpha) \leq m_1 \cdots m_d$$

On se ramène à variétés linéaires, sauf une.

$S_1 \cap S_2 \qquad (S_1 \times S_2) \cap \Delta \quad$ (diagonale)

$\mathbb{P}_N * \mathbb{P}_N = \mathbb{P}_{2N+1}$ "joint"

$(S_1 * S_2) \cdot \Delta = S_1 \cap S_2$



Théorème :

Soit $f : \mathrm{Aff}^N \to \mathrm{Aff}^M$ déf. sur $\mathbb{F}_q$ donné par M polynômes $f_1, \dots, f_M$ de degrés $\leq d$.

On suppose que l'application tangente à f en $(0, \dots, 0)$ est injective.

Alors,
$$|\mathrm{Im}(f : \mathbb{F}_q^N \to \mathbb{F}_q^M)| \geq$$
$$\geq q^N \left(1 - \frac{(d-1)N}{q}\right) \Big/ d^N$$

Corollaire :

Si q est grand par rapport à d, N image $\geq c \cdot q^N$ avec $c = c(d, N)$.

Démonstration:

On se ramène à $M = N$.

En effet, on peut choisir les coordonnées pour que

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,\dots,0) \neq 0 \qquad \begin{matrix} i = 1,\dots,N \\ j = 1,\dots,N \end{matrix}.$$

$$\mathrm{Aff}^N \to \mathrm{Aff}^M \xrightarrow[\text{proj}]{} \mathrm{Aff}^N$$

Soit $J = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ le polynôme Jacobien de f.

Soit $\Omega \subset \mathbb{F}_{q^N}$ l'ensemble des x avec $J(x) \neq 0$.

$\deg(J) \leq N(d-1)$.

D'après le 1er lemme,

$$|\mathbb{F}_{q^N} - \Omega| \leq N(d-1)\, q^{N-1}$$

Donc $$|\Omega| \geq q^N - N(d-1)\, q^{N-1}$$
$$= q^N\left(1 - \frac{N(d-1)}{q}\right)$$

Les fibres de $f : \Omega \to \mathbb{F}_{q^N}$ ont au plus d^N éléments.

$(a_1,\dots,a_N) \in \mathbb{F}_{q^N}$

$f_1(x_1,\dots,x_N) = a_1$

$\dots$

$f_N(x_1,\dots,x_N) = a_N$

$$|f(\Omega)| \geq |\Omega| / d^N$$

Lemme:

Soit G un groupe algébrique linéaire connexe / $\mathbb{F}_q$ dont aucun quotient $\neq 1$ n'est un tore

$\Leftrightarrow$ rad est unipotent

$\Leftrightarrow$ ext. d'un groupe semi-simple par un groupe unipotent

Alors $\boxed{|G(\mathbb{F}_q)| \leq q^{\dim G}}$

On se ramène au cas semi-simple.

$|G(\mathbb{F}_q)|$ ne change pas pas isogénie.

On se ramène à G simplement connexe, simple.

Chevalley déployé:

$$G(\mathbb{F}_q) = q^N \prod_{i=1}^{\text{rg } G} \left(1 - \frac{1}{q^{a_i}}\right) \qquad N = \dim G$$

non déployé: formule similaire avec "1" remplacé par racine de 1.

Par exemple, G spécial unitaire:

$$|G(\mathbb{F}_q)| = q^N \underbrace{\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\left(1 + \frac{1}{q^3}\right)\cdots}_{<1}$$

orth: facile, 1 seul + compensé par $1 - \frac{1}{q^2}$

D

orth trialitaire

E_6

Variante plus facile:

$$q^N \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)^{\text{rg}} \leq |G(\mathbb{F}_q)| \leq q^N \left(1 + \frac{1}{q^2}\right)^{\text{rang}}$$

Idée de la démonstration de Nori :

$\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_f$ donc il ex. base X_α de $\mathfrak{o}_f$ formée de $\log x_\alpha$, $x_\alpha \in G_n$ $N = \dim \mathfrak{o}_f$,

$$|G^{alg}(\mathbb{F}_p)| \leq p^N .$$

Théorème (= Lemme p. 41)

Soit $G \subset GL_n(\mathbb{F}_p)$ engendré par des éléments x tels que $x^p = 1$.

Soient $\mathfrak{a}$ le sous-espace de $M_n(\mathbb{F}_p)$ engendré par les $\log(x)$, $x \in G$, $x^p = 1$, et

$\mathfrak{o}_f = Lie(G^{alg})$.

On suppose $p \geq 2n-1$.

Alors $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{o}_f]$.

Corollaire :

Si G agit de façon semi-simple sur $\mathbb{F}_p^n$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_f$.

Démonstration :

$V = \mathbb{F}_p^n$. Si $W \subset V$, il y a équivalence entre : (sans supposer $p \geq 2n-1$)

(i) $GW = W$

(ii) $\mathfrak{a} W \subset W$

(iii) $G^{alg} W = W$

(iv) $\mathfrak{o}_f W \subset W$

Si $W_2 \subset W_1$, il y a équivalence entre :

G agit trivialement sur W_1/W_2 $\mathfrak{a} W_1 \subset W_2$

G^{alg} " " $\mathfrak{o}_f W_1 \subset W_2$

$End(V) = V \otimes V^*$. Action sur $End(V)$ est du type précédent si: $p \geq 2n-1$.

s/ espace de $End(V)$ $\quad W_2 \subset W_1 \subset End(V)$

① $\mathfrak{a} \subset End(V)$ est stable par G (tr. de str.)
$\Rightarrow$ stable par G^{alg} et $[\mathfrak{o}_f, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$

② Puisque $ad(\mathfrak{a})$ applique $\mathfrak{a}$ dans $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, $ad(\mathfrak{o}_f)$ fait de même: $[\mathfrak{a}, \mathfrak{o}_f] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$.

③ Puisque $ad(\mathfrak{o}_f)$ applique $\mathfrak{a}$ dans $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, on a $[\mathfrak{o}_f, \mathfrak{o}_f] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$
D'où égalité.

($X \in End(V)$, prendre X' avec même inv. tens. que X)

Théorème:

Soit $G \subset GL_n(\mathbb{F}_p)$ engendré par ses p-éléments.
Supposons $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_f$ (avec les notations précédentes)
alors l'indice de G dans $G^{alg}(\mathbb{F}_p)$ est $\leq n^{6n^2}$.

Corollaire:

Si: $p > n^{6n^2}$, on a $G = G^{alg}(\mathbb{F}_p)^+$.

Démonstration:

1.) Si $p \leq 2n^5$, l'énoncé est trivial car
$|G^{alg}(\mathbb{F}_p)| \leq p^{n^2}$.
$n = 1$ ok, $n \geq 2$: $p < n^6$ ok.

2.) On peut donc supposer $p > 2n^5$.
Soit $N = \dim \mathfrak{o}_f$, on a $N \leq n^2$.
Soit $X_1, \ldots, X_N$ une base de $\mathfrak{o}_f = \mathfrak{a}$,
formée d'éléments $\log x_i$, $x_i \in G_u$.

On a $|G^{alg}(\mathbb{F}_p)| \leq p^N$.

G contient $\{x_1^{n_1} \cdots x_N^{n_N}, \ 0 \leq n_i \leq p-1\}$

$\|$

$\exp(n_1 X_1) \cdots \exp(n_N X_N)$

$f : Aff^N \longrightarrow M_n = Aff^{n^2}$

$f(t_1, \ldots, t_N) = \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_N X_N)$

On a $|G| \geq |\mathrm{Im}\, f|$

Application tangente à l'origine:

$df(1, 0, \ldots, 0) = X_1$

$\ldots$ donc injective.

$df(0, \ldots 1) = X_N$

Degrés des composantes de f:

$\leq N(n-1) < n^3 = d$

Borne de la semaine dernière :

$$|\mathrm{Im}\, f| \geq p^N \left(1 - \frac{N(d-1)}{p}\right) / d^N$$

$$|\mathrm{Im}\, f| \geq p^N \left(1 - \frac{n^5}{p}\right) / n^{3n^2}$$

$p \geq 2n^5$ $\geq p^N / 2n^{3n^2}$

Donc l'indice de G est $\leq 2n^{3n^2} \leq n^{6n^2}$

Démonstration du corollaire:

$p \geq n^{6n^2}$. Posons $H = G^{alg}(\mathbb{F}_p)^+$

à voir : $G = H$. $G \subset H$ est clair.

D'après le thm, $[H : G] \leq n^{6n^2}$

Lemme :

Si $H \geq G$ avec indice $< p$, p premier, et si H est engendré par ses p-éléments, alors $H = G$.

H/G, tout p-élément de H opère trivialement, donc $\in G \Rightarrow H = G$.

Si $p \geq n^{6n^2} \Rightarrow p > n^{6n^2}$!

Si G^{alg} est semi-simple, le revêtement universel $\tilde{G}^{alg}$ est défini, et $G^{alg}(\mathbb{F}_p)^+$ est l'image de $\tilde{G}^{alg}(\mathbb{F}_p) \to G^{alg}(\mathbb{F}_p)$.

$\tilde{G}^{alg}(\mathbb{F}_p)$ est engendré par ses p-éléments (bien connu, voir notes de Steinberg : Lectures on Chevalley groups, Yale.

On se ramène aux groupes de rang 1, puis on regarde SL_2 et SU_3 à la main).

$$1 \to \underbrace{C}_{\text{de dim} > 0 \text{ c centre, de type multiplicatif}} \to \tilde{G}^{alg} \to G^{alg} \to 1$$

$$1 \to \mu_n \to SL_n \to PSL_n = PGL_n \to 1$$

$$1 \to C(\mathbb{F}_p) \to \tilde{G}^{alg}(\mathbb{F}_p) \to G^{alg}(\mathbb{F}_p) \to \underbrace{H^1(\mathbb{F}_p, C)}_{\text{divise l'ordre de } C, \text{ donc est premier à } p}$$

Exemples numériques:

$n = 2 \Longrightarrow G = (1)$, $G^{alg} = 1$

$G = SL_2(\mathbb{F}_p) \Rightarrow G^{alg} = SL_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent SL_2.

Exemples où $G^{alg}(\mathbb{F}_p)^+ \neq G$

1.) J_1 1er groupe de Janko, ordre 175560.

Contenu dans $G_2(\mathbb{F}_{11}) < GL_7(\mathbb{F}_{11})$

$p = 11$. J_1 est engendré par ses 11-éléments.

$J_1^{alg} \stackrel{?}{=} G_2$: automorphismes des octaves de Cayley, dim 14.

Ordre de $G_2(\mathbb{F}_{11}) = 11^6 \cdot (11^2-1)(11^6-1)$

$= 3{,}766\ldots\ 10^{14}$

Indice $\sim 2 \cdot 10^9$

2.) A_7 repr. naturelle de d° 7, laisse fixe $(1, \ldots, 1) \rightarrow$ on obtient repr. de d°6 mod 7: $k = \mathbb{F}_7 \rightsquigarrow$ d°5

$D \subset H = \{ \Sigma x_i = 0 \}$

engendré par $(1, \ldots, 1)$	H/D de dim 5

Forme quadratique invariante Σx_i^2

$SO_5(\mathbb{F}_7)$

$B_2 = C_2$: $SO_5 = Sp_4$.

$2A_7 = \tilde{A}_7 \subset Sp_4(\mathbb{F}_7) \subset GL_4$, $\tilde{A}_7^{alg} \stackrel{?}{=} Sp_4$

indice 54880

Groupes semi-simples en caractéristique p

On va s'intéresser aux s/g alg. G de GL_n en car p, sous les hypothèses:

1.) G est un groupe semi-simple, et son action est semi-simple.

2.) G est engendré par des s/g à 1 paramètre de type exp, i.e. de la forme

$$t \mapsto \exp(tX)$$

où X nilpotente, $X^p = 0$.

On va démontrer l'existence d'une constante c_3 telle que si $p > c_3(n)$, un tel G est "comme en car. 0".

Supposons corps de base <u>algébriquement clos</u> de car p.

<u>Contre-exemple</u> si 2.) n'est pas vérifié:

$n = 4$, p quelconque.

Si m entier ≥ 1, s/g G de SL_4 formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} a^{p^m} & b^{p^m} \\ c^{p^m} & d^{p^m} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2$ $\qquad$ $G = SL_2$

Il y a une infinité de tels groupes non isom. On ne peut pas relever en car 0.

exp : $\begin{pmatrix} 1 & t & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & t^{p^n} \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{G}_a \subset G \xrightarrow{\rho} GL_n$$
$$t \longmapsto \exp(tX_0)\exp(t^pX_1)\cdots\exp(t^{p^n}X_n)$$

$X_i^{p^n} = 0$ $\quad$ X_i commutent entre eux

2.) $X_i = 0$ si $i \geq 1$ $\iff$ $p(t)$ pol. de $d^\circ < p$

Sur les pts rationnels, le gpe précédent donne

$$\begin{pmatrix} a & b & & \\ c & d & & \\ & & a & b \\ & & c & d \end{pmatrix}$$

s/g semi-simple de GL_n, en car 0

On va montrer que si $p \geq c_3(n)$, la "réduction mod p" d'un tel gpe vérifie (1) et (2), et irréductible $\to$ irréductible, et on obtient ainsi tous les gp. satisfaisant à (1) et (2) à conjugaison près.

Remarque :

L'ensemble des tels G (à conj. près) est fini.

Problème :

Peut-on prendre $c_3(n) = n$?

rep. irréd /$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ N convenable
ou réduit mod p, $p > N$.
Simplement connexe associé → forme sur $\mathbb{Z}$
"réseau admissible" $\mathbb{Z}$-structure
$S : G_{\mathbb{Z}} \longrightarrow GL_n /\mathbb{Z}$.

Remarque 1:

Si une repr. en car 0 est irréductible, elle le reste mod p pour p assez grand :
$G(\mathbb{Q})$ irréductible. Im $G(\mathbb{Q})$ dans $M_n(\mathbb{Q})$ engendre $M_n(\mathbb{Q})$. Donc $\exists\, g_i \in G(\mathbb{Q})$, $1 \leq i \leq n^2$ tels que $s(g_i)$ forment une base de $M_n(\mathbb{Q})$. Resk vrai mod p pour p assez grand.

Remarque 2:

$G \subset GL_n$ semi-simples en car. 0 sont en nombre fini.

1.) rg $G \leq n-1$, car $G \subset SL_n$.
par classification, nombre fini de G possibles.

2.) Réduction au cas G simple, et représentation irréductible.
Classification des irréductibles par leur plus haut poids (poids dominant).

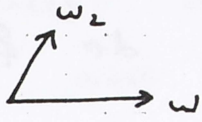
$$P_+ = \left\{ \lambda = \sum_{i=1}^{\ell} m_i w_i \;,\; m_i \geq 0 \;,\; w_1, \dots, w_\ell \text{ poids fond.} \;,\; \ell = \text{rang} \right.$$

V_λ irréd. $\longleftrightarrow \lambda$

$\dim(V_\lambda)$: polynôme en m :

$\longrightarrow \infty$ sur le monoïde des λ.

Exemple : SL_3 (duale)



$$\dim V_\lambda = \frac{(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)}{2}$$

3 racines.

Représentations irréductibles en car p des groupes semi-simples

Classées par les mêmes $\lambda \in P_+$

à chaque $\lambda \longrightarrow V_\lambda$ irréd. ($V_{\lambda,p}$ irréd)

$G > B$ (= $T \cdot U$) Borel T tore, U unipotent.

Si V repr. irréd. de G, il y a une unique droite de V stable par B, et l'action de B sur cette droite se fait par un caractère

$$B \longrightarrow T \xrightarrow{\lambda} \mathbb{G}_m$$

(en toute car.)

En général, $V_{\lambda,p}$ est "plus petite" que V_λ mod p. Plus précisément,

$V_\lambda \bmod p = V_{\lambda,p} + ?$

(ste J- H)

Définition:

λ est <u>p-restreinte</u> si les coefficients m_i sont $\leq p-1$:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{l} m_i w_i \qquad m_i \text{ entiers} \geq 0$$

Tout λ s'écrit de façon unique

$$\lambda = \sum_{\alpha=0}^{\infty} p^\alpha \lambda_\alpha$$

où les λ_α sont p-restreintes, et 0 pour α grand.

Remarque:

$$V_{p^\alpha \lambda} = (V_\lambda)^{(p^\alpha)}$$

$$S: G \longrightarrow GL_n \xrightarrow{\text{Frob}p^\alpha} GL_n$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a^{p^\alpha} & b^{p^\alpha} \\ c^{p^\alpha} & d^{p^\alpha} \end{pmatrix}$$

Théorème (Steinberg):

<u>Si</u> $\lambda = \sum p^\alpha \lambda_\alpha$ λ_α <u>p-restreint</u> <u>alors</u>

$$V_\lambda = \bigotimes_\alpha (V_{\lambda\alpha})^{(p^\alpha)}$$

Repr. de G sera dite <u>restreinte</u>, si elle est somme directe de V_λ avec λ p-restreint.

(Les repr. en nombre infini en car p proviennent de cette construction).

Lemme :

Si $p \geq n$, tout G satisfaisant à (1) et (2) est du type p-restreint

Tout V_λ intervenant dans la repr. est

$\lambda = \sum m_i w_i$ avec $0 \leq m_i \leq p-1$

On a aussi $m_i \leq n-1$:

Lemme :

Si $\lambda = \sum m_i w_i$ est p-restreint, on a

$m_i + 1 \leq \dim V_{\lambda, p}$ pour tout i.

On se ramène au cas de SL_2.

$$SL_2 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(V_{\lambda,p})$$

G_1 : s. connexe

Restr. à SL_2 contient un vecteur propre pour le s/g de Borel de SL_2 avec exp m_i :

$T_{SL_2} \to T_G$

un seul poids fondamental.

Si m est tel que $0 \leq m \leq p-1$, la repr. de SL_2 (en car p) de poids dominant $m w_1$ (w_1 pds f. de SL_2) est la repr. $\mathrm{Sym}^m(V_{w_1})$

V_{w_1} = repr. de d°2 naturelle de SL_2)

d'où $\dim V_{m w_1} = m+1$.

x, y $\quad \{x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n\} = Sym^n$

à voir : elle est irréductible si $n \leq p-1$

(si $n = p$: $\{x^p, x^{p-1}y, \dots, y^p\}$, et $\{x^p, y^p\}$ est stable $\to$ pas irréd.)

On passe d'un même à l'autre par $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dérivée non nulle grâce à l'hypothèse.

Soit repr. irréd. λ $\quad m_i \leq p-1$, $m_i \leq n-1$

En car 0 : Soit S_n l'ensemble fini des (G, ρ), G semi-simple, irréd. à poids dominant coeff. $\leq n-1$

Si $p > c_4(n)$, les réductions mod p de ces repr. sont irréductibles.

Si λ int. G mod p, la repr. en car 0 a la même réduction mod p $\to$ c'est elle.

Effectivité :

Critère d'irréductibilité pour la réduction mod p de V_λ (Verma, Humphreys, Jantzen)

Si $\quad \sum (m_i + 1) c_i \leq p$

c_i : coeff. de la plus grande racine du dual (G simple)

$\Rightarrow$ $V_{\lambda, p}$ est la réduction mod p de V_λ.

Représentation de Steinberg :

$(p-1)(w_1 + \dots + w_\ell) \to$ irréd. deg p

On peut améliorer $c_3(n)$, $\sim n^2$ (probablement n).

17/2/86

Rappels :

$G \subset GL_n / k$ car p, $p \geq n$, alg. clos tel que

① G semi-simple (en part. connexe) agissant de façon semi-simple.

② G engendré par des $s/g \simeq \mathbb{G}_a$ donnés par $t \mapsto \exp(tX)$, X nilpotente.

Nous avons vu qu'il existe une constante $c_3(n)$ telle que si $p \geq c_3(n)$ et si G satisfait à ①, ②, alors G provient par réduction mod p d'un groupe analogue en car 0.

Groupes de Chevalley / $\mathbb{Z}$, simplement connexe
Les repr. lin. sont aussi définies sur $\mathbb{Q}$ et même sur $\mathbb{Z}$.
$c_3(n)$ choisi tel que les réductions mod p des repr. irréd. de G de degré $\leq n$ sont irréductibles.
Engendrés par $t \in \mathbb{G}_a$, $s(t) = \sum a_m t^m$, deg $\leq n$.

G de rang $< n$ simplement connexe / k
$\rho : G \to GL_n$.

Théorème : Si $p \geq c_3(n)$, ρ se relève.

$V(\lambda)$, avec λ poids dominant p-restreint.
(i.e. $\lambda = \sum c_i w_i$ avec $0 \leq c_i \leq p-1$)

②: p-restreint $\Rightarrow$ $c_i \leq n-1$.

$\dim V(\lambda)_p = \dim V(\lambda)_0$: se relève.

En fait, on a $c_3(n) = n$, mais ce ne sera pas démontré dans le cours: de toutes façons, on n'arrivera pas à estimer toutes les constantes.

Finitude (à conj. près) indépendante de p, géométrique (on met ensemble les formes) des G

Définition:

Soit $G \subset GL(V)$, et N entier ≥ 0.

Soit $T^i V = \otimes^i V$, $T_N = \bigoplus_{i=N} T^i V$

et soit T_N^G le sous-espace de T_N fixé par G. Soit G_N le sous-groupe alg. de $GL(V)$ fixant T_N^G.

On dit que G est <u>défini par ses invariants tensoriels de poids</u> $\leq N$ si: $G_N = G$.

Théorème:

<u>Pour tout</u> n, <u>il existe</u> $c_4(n)$ <u>et</u> $c_5(n)$ <u>telles que</u>, <u>si</u>: $G \subset GL_n / k$, car $k = p$, $p \geq c_4(n)$ <u>et satisfaisant</u> ① <u>et</u> ② (sur la clôture algébrique), <u>alors</u> G <u>est défini par ses invariants tensoriels de degré</u> $\leq c_5(n)$.

Chevalley: Tout groupe alg. lin. est le stabilisateur d'une droite dans une somme directe d'espaces tensoriels $\otimes^i V \otimes^j V^*$ (cf. Demazure – Gabriel)

Gp. semi-simple: $\subset SL$. Alors on peut éliminer V

On a $V^* \simeq \Lambda^{n-1} V$, $n = \dim V$

Gp semi-simple stabilise une droite $\Rightarrow$ il la fixe.

En car 0, pour chaque G semi-simple il existe un N correspondant. Fixons $G \hookrightarrow Gl_n$, car 0. ($/\mathbb{Q}$). Fixons une base e_α des tenseurs invariants de poids $\leq N$.

Pour presque tout p, la réduction mod p de G est le fixateur des $e_\alpha \pmod p$.

$\tilde{G}/\mathbb{Z}$ fixateur des e_α : schéma en groupes de type fini. Par EGA IV : la réduction mod p de $\tilde{G}$ est le fixateur des $e_\alpha \bmod p$ pour p assez grand. Mais $\tilde{G}/\mathbb{Q} = G/\mathbb{Q}$. Donc $\tilde{G} = G \bmod p$, p assez grand ($\geq c_4(n)$) $c_5(n)$ constant choisie en car 0.

Soit Norm_G le normalisateur de G dans GL_n.

$\mathrm{Norm}_G/G \hookrightarrow GL_M$, M borné en fct de n:

$$M \leq c_6(n).$$

Sous-espace des tenseurs invariants de poids $\leq c_5(n)$: $W = T^G_{c_5(n)}$

Norm_G opère sur W, G opère trivialement

On a donc une représentation fidèle

$$\mathrm{Norm}_G/G \longrightarrow GL_W.$$

Théorème analogue:

Il existe $c_7(n)$, $c_8(n)$ tels que si $p \geq c_7(n)$

et G vérifie ①, ②, alors l'idéal des pol. $f(a_{ij})$ définissant $G \subset M_{n^2}$ est engendré par ses éléments de degré $\leq c_8(n)$.

On avait $G \subset GL_n(\mathbb{F}_p)$ engendré par ses p-éléments, semi-simple. On lui a associé G^{alg} semi-simple. Alors G^{alg} est aussi le groupe des élé de GL_n qui fixe les invariants tensoriels de degré borné de G.

Il existe un nombre fini de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en les a_{ij} tels que G soit géométriquement conjugué à un groupe définissable par une partie de ces polynômes.

Semi-simplicité et nullité de H^1.

(pas utilisé dans la suite du cours)

car $p > 0$.

Théorème 1 :

Soit G semi-simple de rang $\leq n-1$, et soit

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

$\dim(V) \leq n$, une repr. lin. de G satisfaisant à ① et ②.

Alors si $c \geq c_9(n)$, $H^1(G, V) = 0$.

Démonstration :

On peut supposer ρ absolument irréductible. Le cas $\rho = \underline{1}$ est trivial : $H^1(G, \underline{1}) = \mathrm{Hom}(G, G_a) = 0$.

Supposons $\rho \neq \underline{1}$, ρ irréductible, réduction mod p d'une représentation de car 0.

$H^1(G, V) = 0$ en car 0 (bien connu, car semi-simple) $\not\Longrightarrow$ idem en car. p assez grand ? On le fait un peu autrement :

$\alpha \in H^1(G, V) \rightsquigarrow 0 \to V \to E_\alpha \to \underline{1} \to 0$,

(car $\mathrm{Ext}^1_G(V_1, V_2) = H^1(G, \mathrm{Hom}(V_1, V_2))$)

Lie G opère sur la situation.

En car 0, on a un élément de Casimir :

$$C = \sum \alpha_{ij} X_i X_j$$

forme quadratique en les élé de l'algèbre de Lie ($\in$ centre de l'alg. env. $U_{\mathfrak{g}}$).

On montre que C agit sur toute repr. irréd. V_λ ($\lambda \to$ casimir) par un scalaire $\neq 0$.

Pour p assez grand, C donne sur V un scalaire non nul mod p.

Le noyau de C dans E_α est un supplémentaire de $\underline{1}$ stable par G.

(remarque de Raynaud : $V \rtimes G \twoheadrightarrow G$, $H^1(G, V) = 0 \iff$ tous conjugués)

Question : $c_g(n) = n+1$?

On en déduit la semi-simplicité des représentations :

Théorème 2 :

Si $p \geq c_{10}(n)$, G semi-simple de rang $< n$, toute représentation linéaire

$$\rho : G \to GL_n$$

en car p dont les poids sont p-restreints (dans les quotients de Jordan – Hölder) est semi-simple.

Question : peut-on supprimer l'hypothèse sur les poids ?

A voir : Si V_1 et V_2 sont des repr. irréd. de G p-restreintes, $\dim V_1 + \dim V_2 \leq n$, $p \geq c_{10}(n)$, alors $Ext^1_G(V_1, V_2) = 0$

$Ext^1_G(V_1, V_2) = H^1(G, Hom(V_1, V_2))$, et $\dim(Hom(V_1, V_2)) \leq n^2$: on applique le théorème précédent avec $c_{10}(n) = c_9(n^2)$.

Théorème 3 (Nori) :

Il existe $c_{11}(n)$ tel que si $p > c_{11}(n)$ et si $G \subset GL(V)$, V espace vectoriel $/\mathbb{F}_p$, $\dim V = n$, V un G-module semi-simple, alors

$$\boxed{H^1(G, V) = 0}.$$

Supposons $p \geq n$.

Soit G^t le sous-groupe de G engendré par les p-Sylow de G.

Alors:

1.) G^+ est un s/g normal de G d'indice premier à p

2.) G^+ opère de façon semi-simple sur V.

Fait général:

Si G opère de façon semi-simple sur V de dim finie, alors tout s/g normal H de G opère de façon semi-simple.

V simple, W sous H-module simple

$$\sum_{\substack{W\ H\text{-mod} \\ \text{simple}}} W \subset V$$ stable par G

on en extrait une somme directe.

3.) $H^1(G,V) \longrightarrow H^1(G^+,V)$ est injectif (résulte de ce que l'indice est premier à p).

Conclusion: On peut remplacer G par G^+: on peut donc supposer G engendré par ses p-éléments.

On a attaché à G une "enveloppe algébrique" G^{alg} qui est un groupe semi-simple (au sens algébrique) contenu dans GL_n, vu comme groupe algébrique $/\mathbb{F}_p$.

1.) Par définition, G^{alg} est engendré par les groupes à 1 paramètre $t \mapsto \exp(tX)$, où X parcourt les log des p-élé de G.

2.) G^{alg} est semi-simple, et à action semi-simple

3.) $[G^{alg}(\mathbb{F}_p) : G] \leq c_i(n)$.

si $p \geq c_j(n)$, on sait que $H^1(G^{alg}, V) = 0$.

Soit $\alpha \in H^1(G, V)$. Soit

$$0 \to V \to E_\alpha \to \mathbb{F}_p \to 0$$

l'extension correspondante.

(Si on savait que E_α est un G^{alg}-module, on aurait fini).

On peut supposer que V ne contient pas la représentation $\underline{1}$. En effet,

$$H^1(G, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

Si p est grand, $G = G^{alg}(\mathbb{F}_p)^+$: quotient de $\tilde{G}(\mathbb{F}_p)$. Mais si $p \geq 5$, $\tilde{G}(\mathbb{F}_p)$ est égal à son groupe dérivé, donc n'a pas d'homomorphisme dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: donc $H^1(G, \mathbb{F}_p) = 0$.

Soit $\tilde{G}^{alg}$ l'enveloppe algébrique de G vu comme s/g de $GL(E_\alpha)$.

Soient $\mathfrak{g}$ ($\tilde{\mathfrak{g}}$) l'alg. de Lie de G^{alg} ($\tilde{G}^{alg}$)

$\mathfrak{a}$ ($\tilde{\mathfrak{a}}$) le $\mathbb{F}_p$-ev. engendré par les $\log$ dans $\mathrm{End}(V)$ (resp. dans $\mathrm{End}(E_\alpha)$) des p-éléments de G.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} & \subset & \mathfrak{g} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{\mathfrak{a}} & \subset & \tilde{\mathfrak{g}} \end{array}$$

On a vu: si p est assez grand, $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{g}}$

($[\mathfrak{o}_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{g}}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ si $p \geq 2n-1$,

$\mathfrak{o}_{\mathfrak{g}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{g}}]$ si $p \geq 3$, donc $\mathfrak{o}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a}$).

Le même argument montre que $[\tilde{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{g}}] \subset \tilde{\mathfrak{a}}$.

Montrons que $\tilde{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{g}} = [\tilde{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{g}}]$:

$$0 \to W \to \tilde{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{o}_{\mathfrak{g}} \to 0$$

On a $W = [\mathfrak{o}_{\mathfrak{g}}, W]$

W est semi-simple, p-restreinte, et ne contient pas $\underline{1}$.

Thm : *En car p, si $V(\lambda)$ est repr. irréd. p-restreinte $V(\lambda)$ est un module irréd. sur l'algèbre de Lie du groupe.*

D'où $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{g}}$.

Par ce qu'on a déjà vu (appliqué à $n+1$ au lieu de n) l'indice de G dans $G^{alg}(\mathbb{F}_p)$ est $\leq c_{12}(n)$.

Soit $w = \dim(W)$

$$1 \longrightarrow W \longrightarrow \tilde{G}^{alg} \xrightarrow{proj} G^{alg} \longrightarrow 1$$

$$|\tilde{G}^{alg}(\mathbb{F}_p)| = p^w \, |G^{alg}(\mathbb{F}_p)|$$

$N = \dim G^{alg} = \dim \mathfrak{o}_{\mathfrak{g}} \geq p^w p^N \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^n >> p^{N+w}$

(au choix : $\geq \frac{1}{2} p^{N+w}$ si p assez grand

$$|G| \leq |G^{alg}(\mathbb{F}_p)| \leq p^N$$

Si p assez grand, $c_{12}(n)\, p^N \geq \frac{1}{2} p^{N+w}$

$\Rightarrow w = 0$ si p assez grand.

Donc $\tilde{G}^{alg} \to G^{alg} \to 1$ est une isogénie

Mais il n'y a pas d'isogénie inséparable car $p > n$, donc $\tilde{G}^{alg}$ est semi-simple.

On a déjà vu que ceci entraîne

$$H^1(\tilde{G}^{alg}, V) = 0$$

donc E_λ est scindée sur $\tilde{G}^{alg}$, donc aussi sur G.

Références

Théorème de Jordan

G.F.FROBENIUS, Ges.Abh., Springer-Verlag, 1968, III, 403-506.

C.CURTIS et I.REINER, Representation theory ...,1ere éd.,258-262.

R.BRAUER et W.FEIT, An analog of Jordan's theorem ..., Ann.of Math. 84 (1966), 119-131.

H.BASS, Theorems of Jordan and Burnside ...,J.of Algebra 82 (1983), 245-254.

Inertie et groupes de type $(p,\ldots,p)$

J-P.SERRE, Propriétés galoisiennes ..., Inv.Math.15 (1972),259-331.

M.RAYNAUD, Schémas en groupes de type $(p,\ldots,p)$, Bull.SMF. 102 (1974), 241-280.

J-M.FONTAINE, Il n'y a pas de variété abélienne sur $\underset{\sim}{Z}$, Inv.Math. 81 (1985), 515-538.

Théorème de Bézout

W.FULTON, Intersection Theory, Springer-Verlag, 1984 (p.148 et 223)

Enveloppes algébriques des sous-groupes de $GL_n(\underset{\sim}{F}_p)$

M.V.NORI, On subgroups of $SL_n(\underset{\sim}{Z})$ and $SL_n(\underset{\sim}{F}_p)$, 1983, non publié (une nouvelle version est en cours de rédaction).

C.MATTHEWS, L.VASERSTEIN et B.WEISFEILER, Congruence properties of Zariski-dense subgroups, Proc.LMS 48 (1984), 514-532.

B.WEISFEILER, Strong approximation for Zariski-dense subgroups, Ann.of Math. 120 (1984), 271-315.

B.WEISFEILER, On the size and structure of finite linear groups, 1984, non encore publié.

Représentations linéaires des groupes semi-simples en caract. p

A.BOREL et al, Seminar on Algebraic Groups..., Lect.Notes 131, Springer-Verlag, 1970.

J.E.HUMPHREYS, Ordinary and Modular Representations of Chevalley Groups, Lect.Notes 528, Springer-Verlag, 1976.

C.W.CURTIS et al, Representation Theory of Groups of Lie-type, Santa Cruz Conf., AMS Proc.Symp.Pure M. 37 (1980), Part IV.

24/2/86 — 2e partie – Variétés abéliennes

K corps de nombres, A variété ab. $/K$, $\dim A = n$.

$A_\ell = A[\ell] = \ker(\ell : A(\bar{K}) \to A(\bar{K})) \cong (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2n}$.

$G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, G_K opère sur A_ℓ.

$G_\ell = \mathrm{Im}(G_K \to \mathrm{Aut}(A_\ell) \cong GL_{2n}(\mathbb{F}_\ell))$

"Pour tout n assez grand" signifie : A et K sont fixés.

On va définir, pour ℓ assez grand, un s/g alg. réductif connexe $\underline{H}_\ell \subset GL_{2n}/\mathbb{F}_\ell$.

Un groupe réductif connexe est : tore. semi-simple qui commutent entre eux, et dont l'intersection est un groupe fini contenu dans le centre du semi-simple.

Tore : composante neutre du centre

Semi-simple : groupe dérivé

(e.g. $GL_n = \mathbb{G}_m \cdot SL_n$, $GSp_{2n} = \mathbb{G}_m \cdot Sp_{2n}$

$\underline{H}_\ell = \underline{C}_\ell \cdot \underline{S}_\ell$

Définition de $\underline{S}_\ell$:

Rappelons d'abord un théorème de Faltings :

Thm (Faltings) :

Si ℓ est assez grand, on a :

① G agit de façon semi-simple sur A_ℓ.

② Le commutant de cette représentation est $\mathbb{F}_\ell \otimes End(A)$

Soit $\ell \geq 2n$, et ℓ assez grand pour ①

Soit G_ℓ^t le s/g de G_ℓ engendré par les ℓ-éléments

On définit $\underline{S}_\ell$ par :

$\underline{S}_\ell = (G_\ell^+)^{alg}$ = [g. engendré par e^{tx}, $x \in \log$ (ℓ-élé de G_ℓ)].

G_ℓ^+ opère de façon semi-simple. $\underline{S}_\ell$ aussi.

Donc $\underline{S}_\ell$ est semi-simple, et agit de façon semi-simple, et est engendré par des exponentielles.

Remarque: La borne du thm de Faltings n'est pas effective.

Extension finie K' de K : remplace G_ℓ par $G_\ell' \subset G_\ell$ d'indice $\leq [K' : K]$.

D'où $G_\ell'^+ = G_\ell^+$ si $\ell > [K' : K]$, $\underline{S}_\ell' = \underline{S}_\ell$.

Étendre les scalaires ne modifie qu'un nombre fini de $\underline{S}_\ell$.

Le tore $\underline{C}_\ell$

Cas particulier: Si $End_{\bar{K}} A = \mathbb{Z}$, alors $\underline{C}_\ell$: homothéties G_m.

Choisissons K assez grand pour que

$$End_{\bar{K}} A = End_K A.$$

Centre $(\mathbb{Q} \otimes End\, A) = L = \prod L_j$

L est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative étale.

T_L = "tore des éléments invariants de L" $= \prod T_{L_j}$ tore sur $\mathbb{Q}$.

On définira un sous-tore C de T_L défini sur $\mathbb{Q}$.

$V_{\ell\infty} A$ = (module de Tate de A en ℓ) $\otimes \mathbb{Q}_\ell$.

$L_\ell = L \otimes \mathbb{Q}_\ell$ opère sur $V_{\ell\infty} A$.

$V_{\ell\infty} A$ est un module projectif de type fini sur L_ℓ. D'où un module libre de rang 1 sur L_ℓ, $\det_{V_\ell}(V_{\ell\infty} A)$. On en déduit un homomorphisme

$$G_K \longrightarrow L_\ell^*$$

donnant l'action de G_K sur ce module.
On obtient ainsi une famille (ℓ variable) de repr. ab. de G_K, elles sont "compatibles" (Frob. $\in L$, indép. de ℓ).
Propriété de "Hodge-Tate"
Donc cette famille peut être décrite comme dans Mc Gill "Abelian ℓ-adic representations".
Taniyama-Weil :

$$\begin{array}{ccc} & & Sm \text{ attaché à } K \\ & & \cup \\ T_K & \longrightarrow & T_m \text{ tore} \end{array}$$

$G_K \longrightarrow L_\ell^*$ sont "associés" (Mc Gill) à un homomorphisme $T_K \xrightarrow{\varphi} T_L$.
D'où un sous-tore $\varphi(T_K)$ de T_L

$$\pi : T_L \longrightarrow T_L \quad \text{isogénie}$$

(action sur le dér)
Si L est un corps, $\pi(x) = x^d$
$\pi(x) = x^{"d"}$, où $d = \text{rang}_{L_\ell} V_{\ell\infty} A$.

Définition de C : sous-tore de T_L tel que son image par π soit $\varphi(T_K)$

Exemple:

Courbe elliptique à mult. compl. par $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
$L \subset K$. Identification par l'action sur espace tgt.
Dans ce cas, $\varphi : T_K \to T_L$ est $N_{K/L}$ = norme : $K^* \to$
et $\pi = id$, $C = T_L$.

Définition directe de φ:

Soit Lie (A) l'algèbre de Lie de A sur K.
C'est un $K-L$ bimodule. $\det_L$ Lie A est un module de rang 1 sur L. Tout $\alpha \in K^*$ définit un automorphisme de $\det_L$ Lie A
$\alpha \to \det_L (\alpha : \text{Lie } A \to \text{Lie } A)$ c'est φ.
$K^* \to L^*$

$T_{L,\ell}$ est défini: (tore associé à l'action de $\mathbb{F}_\ell \otimes \mathcal{O}_L$ sur A_ℓ, (où $\mathcal{O}_L = L \cap \text{End } A$: ordre de L)

$\underline{C}_\ell \subset T_{L,\ell}$. Donc $\underline{C}_\ell$ commute à G_ℓ
donc à G_ℓ^+, donc à $\underline{S}_\ell$.
Donc on peut définir le groupe réductif connexe $\underline{H}_\ell = \underline{C}_\ell \cdot \underline{S}_\ell$.

Théorème:

Pour ℓ assez grand, H_ℓ est engendré par $\underline{S}_\ell$ et par les différents tores d'inertie modérée en

Supposons ℓ assez grand pour que:

1.) A a bonne réduction en ℓ
2.) ℓ non ramifié dans K.

Soit w une place de $\overline{K}$ divisant ℓ.

$w \longmapsto I_w \subset G_\ell$

$\|$

produit semi-direct de "modéré" et "sauvage".

On a défini un tore /$\mathbb{F}_\ell$ contenant l'inertie modérée et qui est son "enveloppe".

($\underline{H}_\ell / \underline{S}_\ell$ tore engendré par les tores d'inertie).

Exemple:

Courbe elliptique à mult. compl. par $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$

$\underline{H}_\ell = T_{L,\ell}$ ℓ décomposé dans L:

tores d'inertie : $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Conjecture:

$\underline{H}_\ell$ est engendré par les tores d'inertie (ℓ grand).

Théorème 1:

Pour ℓ assez grand, G_ℓ normalise H_ℓ et l'ordre de $G_\ell / G_\ell \cap H_\ell(\mathbb{F}_\ell)$ est borné quand ℓ varie.

1': Si K est assez grand, alors pour tout ℓ assez grand on a:

$G_\ell \subset \underline{H}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$ avec indice borné pour ℓ variable.

Démonstration:

Que G_ℓ normalise $\underline{H}_\ell$ est clair.

G_ℓ normalise $\underline{C}_\ell$, et G_ℓ normalise G_ℓ^+ donc $\underline{S}_\ell$.

Dès que tous les end. de A sont /K, G_ℓ centralise $\underline{S}_\ell$

Supposons K assez grand pour que tous les end. soient définis sur K. Soit $\underline{N}_\ell$ le normalisateur de $\underline{S}_\ell$ dans $GL_{2n}/\mathbb{F}_\ell$. $G_\ell \subset N_\ell(\mathbb{F}_\ell)$.

$G_\ell \to \underline{N}_\ell/\underline{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$. Soit G_ℓ' l'image.

$G_\ell' = G_\ell / G_\ell \cap \underline{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$, $|G_\ell'|$ est premier à ℓ.

Il existe un entier k ne dépendant que de n tel que, si W est le sous-espace de

$$\bigoplus_{i=1}^{k} T^i(A_\ell)$$

formé des éléments invariants par $\underline{S}_\ell$, alors $\underline{S}_\ell$ est le fixateur de W, et $\underline{N}_\ell/\underline{S}_\ell \hookrightarrow GL_W$. En particulier, $\dim W$ est borné par une constante ne dépendant que de n.

D'où $G_\ell' \hookrightarrow GL_W(\mathbb{F}_\ell) = Aut(W)$.

Soit J_ℓ un s/g abélien normal de G_ℓ' d'indice minimum. Par Jordan, on a $[G_\ell' : J_\ell] \leq c$ (ne dépendant que de n).

On va montrer que si ℓ est assez grand, les groupes d'inertie dans G_ℓ' des places au-dessus de ℓ sont contenues dans J_ℓ.

Soit I un tel groupe d'inertie. On va montrer que I commute à J_ℓ. Soit $x \in J_\ell$. Le s/g I_x des éléments de I commutant à x est d'indice au plus c (car I_x contient $I \cap J_\ell$). Le groupe I est un groupe d'inertie modérée d'amplitude $\leq k$ (thm de Raynaud). Par le thm de

rigidité de l'inertie, si l'indice est $< \frac{\ell-1}{k}$, alors I commute à x. Donc I commute à J_ℓ.

On utilise le même argument pour prouver que si I et I' sont deux groupes d'inertie différents, I et I' commutent (car s/g d'indice $< c$ de I : $I \cap J$ commute à I').

Alors J_ℓ et les I engendrent un s/g abélien normal, donc égal à J_ℓ.

Considérons l'extension K_ℓ/K de groupe de Galois G'_ℓ/J_ℓ

$$G_K \to G_\ell \to G'_\ell \to G'_\ell/J_\ell$$

cette extension est de degré $\leq c$ borné, et est ramifiée au plus aux places de mauvaise réduction de A. (pas ramifié en ℓ par l'argument précédent). Par Hermite, il n'y a qu'un nombre fini de tels corps. On étend K de telle sorte que le nouveau K contienne les K_ℓ. Ceci fait (pour ℓ grand) on a G_ℓ' abélien.

A montrer (quitte à étendre K) : G_ℓ' est contenu dans le s/g alg. de $\underline{N}_\ell/\underline{S}_\ell$ engendré par les tores d'inertie en ℓ, qui est un tore. A vérifier : les tores d'inertie normalisent $\underline{S}_\ell$ (si ℓ assez grand). Il suffit de voir qu'un tel tore normalise W.

Le groupe d'inertie le fait. Amplitude $\leq k$, $\ell - 1 > k \Rightarrow$ le tore d'inertie stabilise les mêmes sous-espaces que le groupe d'inertie. Les tores en quot. sont $\subset \underline{N}_\ell$. Leurs images dans $\underline{N}_\ell / \underline{S}_\ell$ sont des tores qui commutent entre eux. En effet, c'est vrai pour les s/g d'inertie et ampl. $\leq k$ suffit ($\ell - 1 > k$). Soit $\underline{X}_\ell$ le sous-tore de $\underline{N}_\ell / \underline{S}_\ell$ engendré par les tores d'inertie.

A montrer : quitte à faire une extension finie de K, on a : $G'_\ell \subset \underline{X}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$.

On peut supposer K assez grand pour que A ait réduction semi-stable sur K. En les places de mauvaise réduction de A, l'action de l'inertie est unipotente.

v place à mauvaise réduction de A, $\ell \neq p_v$

Action de l'inertie en v sur $V_{\ell^\infty} A$ ou sur A_ℓ se fait par des éléments de valeur propre 1.

$\Rightarrow$ pas d'inertie dans G'_ℓ pour les places de mauvaise réduction $\nmid \ell$. Celle en ℓ est contenue dans $G'_\ell \cap \underline{X}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$. Donc l'extension abélienne de K de groupe de Galois

$$G'_\ell / (G'_\ell \cap \underline{X}_\ell(\mathbb{F}_\ell))$$

est non ramifiée partout, donc contenue dans le corps de classes absolu de K.

Quitte à étendre K, on a :

$$G_\ell' \subset \underline{X}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$$

$$1 \longrightarrow \underline{S}_\ell \longrightarrow \underline{N}_\ell \longrightarrow \underline{N}_\ell/\underline{S}_\ell \longrightarrow 1$$

$$\cup$$

$$\underline{X}_\ell \quad \text{eg. par les images des tores d'inertie}$$

Soit $\underline{H}'_\ell$ l'image réciproque de $\underline{X}_\ell$ dans $\underline{N}_\ell$.

$$1 \to \underline{S}_\ell \to \underline{H}'_\ell \to \underline{X}_\ell \to 1$$

donc H'_ℓ est réductif connexe de groupe dérivé $\underline{S}_\ell$.

$\underline{H}'_\ell = \underline{C}'_\ell \cdot S_\ell$, $\underline{C}'_\ell$ comp. neutre du centre.

La projection $H'_\ell \to \underline{X}_\ell$ donne une isogénie $\underline{C}'_\ell \to \underline{X}_\ell$.

A montrer : $\underline{C}'_\ell = \underline{C}_\ell$ pour ℓ assez grand, et donc, $\underline{H}'_\ell = \underline{H}_\ell$.

D'abord, C'_ℓ est un sous-tore du tore $T_{L,\ell}$.

1.) $\underline{C}'_\ell$ commute à G_ℓ, car $C'_\ell \subset$ centre de H'_ℓ.
$C'_\ell \subset$ "groupe multiplicatif" de $\mathbb{F}_\ell \otimes \mathrm{End}\, A$.

2.) C'_ℓ commute à $\mathrm{End}\, A$, car les tores d'inertie, $\underline{S}_\ell$, ... commutent à $\mathbb{F}_\ell \otimes \mathrm{End}\, A$.

1.) et 2.) $\Longrightarrow$ $C'_\ell \subset T_{L,\ell}$

$$\begin{matrix} C_\ell \\ C'_\ell \end{matrix} \subset T_{L,\ell} \xrightarrow[\pi(x)=x^d]{\pi} T_{L,\ell}$$

Il suffit de prouver $\pi(C_\ell) = \pi(C'_\ell)$.
C'est vrai par la "théorie abélienne".

$\pi(C_\ell) = \varphi(T_K)_\ell$

$\pi(C'_\ell)$: engendré par les tores d'inertie (système de repr. abélienne ℓ-adique, deux tores mod ℓ suivants coïncident : $\varphi : T_K \to \cdots$ et celui engendré par les tores d'inertie en les places $|\ell$).

[Si on n'est pas convaincu, on peut définir H comme H']

$$1 \to \underline{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell) \to \underline{H}_\ell(\mathbb{F}_\ell) \to (\underline{H}_\ell/\underline{S}_\ell)(\mathbb{F}_\ell) \to 1$$

$$\cup \text{ indice borné} \qquad \cup \text{ indice borné ?} \qquad \underline{X}''_\ell(\mathbb{F}_\ell)$$

$$G_\ell^+ \subset G_\ell$$

(exacte : Lang)

Il suffit de voir que l'indice de G'_ℓ dans $\underline{X}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$ est borné.

$\det_L : \underline{X}_\ell \to \pi(C_\ell) \subset I_{L,\ell}$

isogénie de degré borné.

$$\underbrace{\underline{S}_\ell \to \underline{X}_\ell \to \pi(C_\ell)}_{\text{borné}}$$

image de Galois est d'indice borné dans les points rationnels du tore image.

Remarque :

En fait, il y a $c(n)$ tel que

$$|G_\ell / G_\ell \cap \underline{H}_\ell(\mathbb{F}_\ell)| \leq c(n)$$

pour tout ℓ assez grand (dépendant de A, K).

$[\underline{H}_\ell(\mathbb{F}_\ell) : G_\ell] \leq c(n)$ pour ℓ grand

$n = 1$ (courbe elliptique) $|G_\ell / G_\ell \cap H_\ell(\mathbb{F}_\ell)| < 2$

ℓ grand, $H_\ell(\mathbb{F}_\ell) = G_\ell$.

Rappel :

$\underline{H}_\ell = \underline{C}_\ell \cdot \underline{S}_\ell \subset GL_{2n}/\mathbb{F}_\ell$

Th : pour k assez grand, on a : $G_\ell \subset \underline{H}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$ avec indice borné (pour ℓ assez grand dép. de k).

G_ℓ^+ = image de $\underline{\tilde{S}}_\ell(\mathbb{F}_\ell) \to \underline{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell) = \underline{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell)^+$

où $\tilde{S}_\ell$: rev. univ. de $\underline{S}_\ell$

pour ℓ assez grand

$\underline{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell)^+$: son groupe dérivé, et c'est le groupe dérivé de $\underline{H}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$

$H = C \cdot S \ /\mathbb{F}_\ell \qquad \ell \geq 5$

groupe dérivé de $H(\mathbb{F}_\ell)$ = groupe dérivé de $S(\mathbb{F}_\ell)$ =

= image de $\tilde{S}(\mathbb{F}_\ell) \to S(\mathbb{F}_\ell)$

à montrer : le groupe dérivé de $H(\mathbb{F}_\ell)$ est contenu dans l'image de $\tilde{S}(\mathbb{F}_\ell) \to S(\mathbb{F}_\ell)$

$\tilde{H} = C \times \tilde{S} \to H$ isogénie centrale, $x, y \in H(\mathbb{F}_\ell)$

$\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{H}(\bar{\mathbb{F}}_\ell) \to x, y$

$[\tilde{x}, \tilde{y}] \in \tilde{H}(\mathbb{F}_\ell)$, en fait dans $\tilde{H}(\mathbb{F}_\ell)$

— " — $\tilde{S}(\mathbb{F}_\ell)$

$H \times H \to H$

$(x, y) \mapsto [x, y]$

se factorise par $H \times H \to \tilde{S} \to H$

$\underline{G}_\ell^+ = \underline{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell)^+$ est le groupe dérivé de $\underline{G}_\ell$

Tore de Hodge V dim $2n$ $V = V_1 \oplus V_2$

$\dim V_i = n$, $G_m \times G_m$ opère par :

(λ, μ) λ sur V_1, μ sur V_2.

$$\begin{pmatrix} \lambda \cdots \lambda & 0 \\ 0 & r \cdots r \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$-tore de Hodge : $\mathbb{G}_m$ λ sur V_1
1 sur V_2

$$\begin{pmatrix} \lambda \cdots \lambda & 0 \\ 0 & 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

Un s/g alg. H de GL_{2n} "contient géométriquement" un tore de Hodge si après extension des scalaires il en contient un. Même définition pour les $\frac{1}{2}$-tores.

Th :
Si l est assez grand, tout tore d'inertie en l contient géométriquement un $\frac{1}{2}$-tore de Hodge, et est engendré par des $\frac{1}{2}$-tores de Hodge.

Th :
Le groupe $\subseteq_l$ contient les homothéties $\mathbb{G}_m$

Th :
Le groupe H_l contient géométriquement un tore de Hodge.

Il suffit de démontrer le 1er thm (Bogomolov a montré que $\subseteq$ contient $\mathbb{G}_m$).

Conditions sur l : l non ramifié dans K,
A a bonne réduction en l,
$l \geq 3$, l premier au degré d'une polarisation que l'on a choisie sur A.

$\mathbb{F}_{\ell^N}^* \rightrightarrows$ caractères dans $\mathbb{F}_{\ell^N}^*$

$\chi_1, \dots, \chi_N \qquad x \mapsto x^{\ell^i}$

les caractères qui interviennent sont du type

$\prod \chi_i^{e_i} \qquad e_i = 0$ ou 1.

$$A_\ell \times A_\ell \longrightarrow \mu_\ell \qquad (\simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$$

De l'existence de cette forme symplectique sur A_ℓ il résulte que les $2n$ caractères $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ donnant l'action de $\mathbb{F}_{\ell^n}^*$ sur A_ℓ peuvent être indexés de telle sorte que $\varphi_1\varphi_2 = \chi = \varphi_3\varphi_4 = \dots$ $= \varphi_{n-1}\varphi_n$ où χ = caractère cyclotonique $= \chi_1 \cdots \chi_N$.

On a associé à ces données un tore de dim N

$G_m \times \cdots \times G_m$ $\quad N$ fois

$\underline{\chi}_1, \dots, \underline{\chi}_n$ base de ses caractères.

Autre propriété de $\underline{H}_\ell$:

Le commutant de $\underline{H}_\ell$ (dans sa représentation sur A_ℓ) est $\mathbb{F}_\ell \otimes \mathrm{End}\, A$ (ℓ grand)

Pour G_ℓ, l'énoncé analogue est un thm de Faltings.

Le commutant de $\underline{H}_\ell \subset \mathbb{F}_\ell \otimes \mathrm{End}(A)$.

Mais on a vu que $\mathrm{End}(A)$ commute à $\underline{H}_\ell$

Exercice: Il y a équivalence entre :

① A est de type CM

② $S_\ell = (1)$ pour ℓ assez grand

$S_\ell = (1)$ pour une infinité de ℓ.

Théorème :

Il existe une constante $c \geq 1$ (dép. A, K) telle que G_ℓ contienne les puissances c-ièmes des homothéties.

G_ℓ d'indice borné dans $\pm\mu_\ell(\mathbb{F}_\ell) \cdot \mathbb{F}_\ell^*$

Théorème :

Si A n'a pas de facteur (à isogénie près) de type CM ($\neq (1)$), il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout point de A d'ordre premier ℓ, on ait

$$|G_\ell \cdot x| \geq c\ell^2.$$

On peut supposer que A soit simple, et non de type CM.

Lemme : ℓ grand.

La représentation de S_ℓ dans A_ℓ ne contient pas la représentation unité.

Admettons ce lemme. Alors le sous-espace de A_ℓ fixé par G_ℓ^t est réduit à 0.

Donc pour tout $x \in A_\ell$, $x \neq 0$, il existe un élément s d'ordre ℓ de G_ℓ^t qui ne fixe pas x.

$G_\ell \cdot x$ contient tous les transformés du type

$\lambda s^i x$, $\lambda \in (\mathbb{F}_\ell^*)^c$, $0 \leq i \leq \ell - 1$

tous distincts :

$\lambda s^i x = \lambda' s^{i'} x \qquad s^{i-i'} x = (\lambda'/\lambda) x$

$s^{i-i'}$ unipotent $\Leftrightarrow$ valeurs propres $= 1$, donc

$\lambda' = \lambda$. $s^{i-i'} x = x \Rightarrow i = i'$.

Démonstration du lemme :

$Q \otimes \mathrm{End}\, A = D$, corps gauche de centre L.

$[D:L] = d^2$, $[L:Q] = \lambda$, $n = \dim A$

$D_\ell \simeq M_d(L_\ell)$ (réduction mod ℓ d'un ordre de D)

Commutant de $\underline{\#}_\ell = \underline{C}_\ell \cdot \underline{S}_\ell$

On montre que V_ℓ est un $Q_\ell \otimes L$-module libre de rang $2n/\lambda$, et que A_ℓ est un L_ℓ-module libre de rang $2n/\lambda$.

Sur $\mathbb{F}_\ell$, L_ℓ devient $\underbrace{\overline{\mathbb{F}}_\ell \times \cdots \times \overline{\mathbb{F}}_\ell}_{\lambda \text{ fois}}$

$$\overline{A}_\ell = A_\ell \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell = \bigoplus_{i=1}^{\lambda} V_i \qquad \dim V_i = \frac{2n}{\lambda}$$

V_i stables par $\underline{C}_\ell$ (qui agit par homothéties) et par $\underline{S}_\ell$.

De plus, le commutant (dans V_i) de $\underline{S}_\ell$ est $\simeq M_d$. Donc la repr. de $\underline{S}_\ell$ ds V_i est somme de d repr. irréd. isomorphes entre elles. Supposons qu'il existe i t.q. cette représentation irréductible soit 1. Alors $\dim V_i = d$, d'où $2n = \lambda d$.

Mais ceci entraîne que A est de type CM: Soit F un s/corps commutatif maximal de D contenant L. $[F:L] = d$, donc $[F:Q] = \lambda d = 2n$, ce qui entraîne CM.

Lemme : Si K est assez grand, le groupe G_ℓ est engendré par $G_\ell^+ = [G_\ell : G_\ell]$ et par les s/g d'inertie en ℓ.

Soit G_ℓ' le s/g engendré par les groupes d'inertie en ℓ et $G_\ell^{ab} : G_\ell \to G_\ell/G_\ell'$ abélien, et correspond à une extension de K non ramifiée, abélienne.

On remplace K par une extension contenant le corps de classes absolu de K.

Propriété (*): Pour tout ℓ assez grand, la conclusion du lemme est vrai.

Si (*) est vraie, et si K' est une extension finie de K, on a $G_\ell' = G_\ell$ pour ℓ grand.

Théorème:

Si (*) est vérifiée, l'image de $G_K = Gal(\bar{K}/K)$ dans $\prod_\ell G_\ell$ est ouverte.

Cette image décrit l'action de $Gal(\bar{K}/K)$ sur les points de A d'ordre sans facteur carré.

"Presque indépendant" de G_ℓ.

Corollaire:

Si A n'a pas de facteur de type CM, et si x est un point de A d'ordre N sans facteur carré, on a:

$$|G_K x| \geq c_\varepsilon N^{2-\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

où $c_\varepsilon > 0$ ne dépend que de ε, A, K

(peut être remplacé par $c N^{2 - c'/\log\log N}$).

$N = \ell_1 \cdots \ell_k$ $\quad |G_K x| \geq \frac{1}{cte} \prod |G_K x_i|$

$x = x_1 + \cdots + x_k$

$k = \omega(N)$: nbre de facteurs premiers

$$\geq \prod \ell_i^2 / c^k$$

$$>> N^2 / c^{\omega(N)}$$

$c^{\omega(N)} \ll N^{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$

$\ll N^{c/\log\log N}$

A démontrer :

Il existe l_0 (dép. de A, k) tel que si $l_1, \dots, l_k$ sont distincts, et $> l_0$, alors l'homomorphisme

$$G_K \longrightarrow G_{l_1} \times \cdots \times G_{l_k}$$

est surjectif.

Ceci entraîne que $G_K \xrightarrow{\varphi} \prod G_l$ est surjectif.

Lemme de Goursat :

$H \subset G_1 \times G_2$ tel que $pr_1 H = G_1$, $pr_2 = G_2$

(N_1, N_2, φ) N_1 s/g distingué de G_1

N_2 " " " G_2

$\varphi : G_1/N_1 \xrightarrow{\sim} G_2/N_2$

$\rightsquigarrow H = H(N_1, N_2, \varphi)$: l'ensemble des couples (g_1, g_2) tels que $\varphi(\bar{g}_1) = \overline{g_2}$ où

$\bar{g}_i$: image de g_i mod N_i

Assertion : tout H ayant cette propriété est obtenue de façon unique à partir d'un triplet (N_1, N_2, φ),

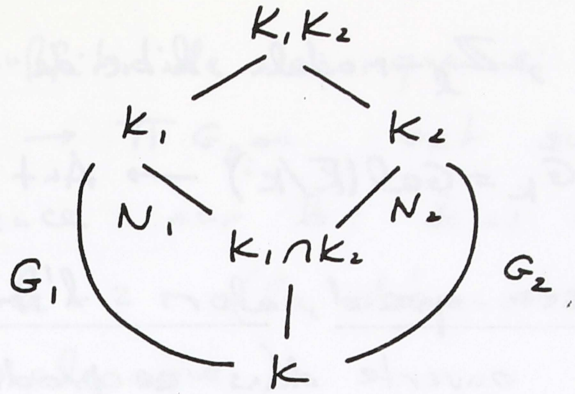
à savoir : $N_1 = H \cap G_1$ $\quad G_1 = G \times \{1\}$

$N_2 = H \cap G_2$.

Par récurrence sur k :

Prenons $k = 2$

$G_{l_1} \times G_{l_2} \supset H$ = image de G_K.



$N_1 = H \cap G_{\ell_1}$, $N_2 = H \cap G_{\ell_2}$

$G_K \to G_\ell / N_1 \xrightarrow{\sim} G_\ell / N_2 = \Phi$

à montrer : $\Phi = (1)$.

Choisissons un quotient simple Σ de Φ.

G_{ℓ_1} est engendré par le groupe d'inertie en ℓ_1 et $G_{\ell_1}^+$ = dérivé.

Un groupe d'inertie en ℓ_1 a une image triviale dans Φ.

ℓ_0 tel que tout $\ell \geq \ell_0$ est non ramifié dans K et A a bonne réduction en ℓ.

Alors, Σ est non abélien, quotient de G_{ℓ_1} et de G_{ℓ_2}. Montrons que ce n'est pas possible:

$\tilde{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell) \to G_{\ell_1}^+ \xrightarrow[\text{sur.}]{} \Sigma \qquad \ell \geq 5$

donc Σ est "de Lie en car ℓ"

= (simple, simpl. connexe / $\mathbb{F}_{\ell^N}$) / centre

Si: $\ell, \ell' \geq 5$, $\ell \neq \ell'$: aucun gp simple de Lie de car ℓ n'est isom. à .... de car ℓ' (Artin)

Exceptions: $SL_2(\mathbb{F}_4) = A_5 = PSL_2(\mathbb{F}_5)$,

$SL_3(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_7)$, et 1 ou 2 autres)

Le même argument marche quand il y a plus de 2 facteurs.

$T_\ell = T_\ell A = \varprojlim A_{\ell^m}$, $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $2n$.

G_{ℓ^∞} = image de $G_K = Gal(\bar{K}/K) \longrightarrow Aut(T_\ell)$.

Th 1 : Si K est assez grand, alors l'image de $G_K \longrightarrow \prod_\ell G_{\ell^\infty}$ est ouverte dans ce produit.

Th 1' : Il existe une suite croissante de corps K_i, de réunion $\bar{K}$, telle que pour chacun d'eux $G_{K_i} \longrightarrow \prod_\ell G_{\ell^\infty}$ soit surjectif.

Les extensions de K données par les points de ℓ^∞-division sont "presque" disjointes, quand ℓ varie.

(contre-exemple au Th 1 lorsque K n'est pas assez grand : A = courbe elliptique à m.c. par $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \not\subset K$)

Rappel :

Si K est assez grand, alors pour presque tout ℓ le groupe G_ℓ est engendré par les groupes d'inertie en les places de $\bar{K}$ divisant ℓ, et G_ℓ^+ (s/g engendré par les ℓ-éléments). (*$_\ell$)

1ère étape de la démonstration :

Soit K comme ci-dessus. Montrons qu'il existe $\ell_0 = \ell(A, K)$ tel que

$$G_K \longrightarrow \prod_{\ell \geq \ell_0} G_{\ell^\infty} \quad \text{est surjectif.}$$

Il suffit de voir que si $l_0 \leq l_1 < \cdots < l_k$,

$G_k \to \prod G_{l_i}^{\infty}$ est surjectif.

Récurrence sur k : $k=1$ est trivial. Faisons-le pour $k=2$ (la démonstration est la même pour k quelconque).

Propriétés de l_0 : assez grand pour que si $l \geq l_0$, on ait

- A a bonne réduction en l
- $(*_l)$ est vraie
- $G_l^+ = \underline{S}_l(\mathbb{F}_l)^+$
- $l_0 \geq 5$.

Alors, $G_k \to G_{l_1}^{\infty} \times G_{l_2}^{\infty}$ est surjectif.

Par le lemme de Goursat il suffit de démontrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme $G_k \to \phi$, $\phi \neq \{1\}$, qui se factorise à la fois par $G_{l_1}^{\infty}$ et par $G_{l_2}^{\infty}$. On peut supposer ϕ fini, simple.

Trois cas :

a.) $\phi = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, $l \neq l_1$

$$1 \to \underbrace{G(l_1)}_{\text{pro } l\text{-groupe}} \longrightarrow G_{l_1}^{\infty} \longrightarrow G_{l_1} \longrightarrow 1$$

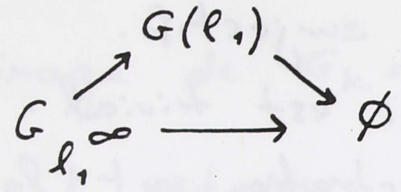
$$\begin{array}{ccc} & & G_{l_1} \\ & \nearrow & \searrow \\ G_{l_1}^{\infty} & \xrightarrow[\text{surj.}]{} & \phi \end{array}$$

groupe d'inertie en $l_1 \to 1$ en $G_{l_2}^{\infty}$, donc en ϕ.

le groupe $G_l^+ = [G_l^+, G_l^+]$, donc $\to 1$.

b.) $\ell \neq \ell_2$, même preuve

c.) ϕ simple non abélien



ϕ est du type Lie de car. ℓ_1

— " — ℓ_2

impossible si $\ell_1, \ell_2 \geq 5$

2ème étape

Soit $\mathcal{A}$ l'image de G_k dans $\prod_{\ell<\ell_0} G_{\ell^\infty}$

$\mathcal{A}$ est ouvert dans $\prod_{\ell<\ell_0} G_{\ell^\infty}$

$\mathcal{B} = \prod_{\ell \geq \ell_0} G_{\ell^\infty}$

$G_k \longrightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ proj. surjectives

Par Goursat, il suffit de prouver que si $G_k \to \Phi$, Φ profini, se factorise par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, alors Φ est fini.

$|\mathcal{A}|$ n'est divisible que par un nombre fini de nombres premiers, donc idem pour Φ

$$|\Phi| = \prod_{\ell \leq M} \ell^{\varphi(\ell)}$$

$\varphi(\ell) \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$.

A montrer: $\varphi(\ell) \neq \infty$ pour tout ℓ.

Lemme :

Si $l > M$, l'image dans Φ de G_{l^∞}, un comme s/g de $\mathcal{B} = \prod_{l \geq l_0} G_{l^\infty}$, est triviale.

$G(l) \subset G_{l^\infty} \longrightarrow \Phi$

pro l-gpe : image triviale ds Φ $\quad \searrow \quad \nearrow$ G_l

inertie en $l \to 1$ dans Φ

$G_l^+ \to 1$, car engendré par l-éléments

Φ est quotient de $\mathfrak{A} \subset \prod_{l < l_0} G_{l^\infty}$, donc " " " $\prod_{l < l_0 < M} G_{l^\infty}$.

Si $l < l_0$, l'exposant de l dans $\prod_{l_0 \leq l \leq M} G_{l^\infty}$ est fini.

Si $l > l_0$, l'exposant de l dans $\mathfrak{A}$ est fini.

Donc l'exposant de l dans Φ est fini.

G_{l^∞} contient "beaucoup" d'homothéties :

$G_{l^\infty} \cap \mathbb{Z}_l^*$ (homothéties de $T_l A$) est ouvert dans $\mathbb{Z}_l^*$

Soit $e(l)$ l'indice de $G_{l^\infty} \cap \mathbb{Z}_l^*$ dans $\mathbb{Z}_l^*$.

Conjecture : $e(l) = 1$ *pour l assez grand.*

Théorème 2 : *$e(l)$ est borné quand l varie.*

Equivalent : il existe une constante $c \geq 1$ telle que toute homothétie qui est une puissance $c$ième appartient à G_{l^∞}, et même :

Corollaire :

Tout élément de $\hat{\mathbb{Z}}^* = \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell^*$ qui est une puissance c-ième, appartient à G_∞ (où G_∞ est l'image de G_K dans $\prod G_{\ell\infty}$).

(suffit à echaiuer, par un argument bien connu de Lang, que toute courbe de genre ≥ 2 sur une variété abélienne ne contient qu'un nombre fini de points de torsion. Ceci a été démontré par Raynaud d'une autre façon.)

Th :

Si A n'a pas de facteur ($\neq 0$) de type CM, on a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$|G_K x| \geq c \cdot N(x)^{2-\varepsilon}$$

pour tout $x \in A(\bar{K})$ d'ordre fini $N(x)$, où $c = c(A, K, \varepsilon) > 0$.

On peut le remplacer par $c' N(x)^{2 - c''/\log\log N(x)}$ (même démonstration que la dernière fois).

$G_{\ell\infty}$ ouvert d'un $\underline{H}_{\ell\infty}(\mathbb{Q}_\ell)$, où $\underline{H}$ est un groupe réductif connexe,

$$\underline{H} = \underline{C}_{\ell\infty} \cdot \underline{S}_{\ell\infty},$$

$\underline{C}$ est un tore qui provient par extension des scalaires $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Q}$ d'un tore $\underline{C}$ sur $\mathbb{Q}$.

$C \subset T_L$, où L = centre de $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}\, A$

(e.g. $\mathrm{End}\, A = \mathbb{Z}$, $L = \mathbb{Q}$, $T_L = \mathbb{G}_m$, $C = \mathbb{G}_m$.

$C(\mathbb{Z}_\ell)$ a un sens pour presque tout ℓ.

$c(\ell)$ = indice de $G_{\ell\infty} \cap C(\mathbb{Z}_\ell)$ dans $C(\mathbb{Z}_\ell)$

$< \infty$.

Th 2* : $c(\ell)$ est borné quand ℓ varie

$\Rightarrow$ Th 2, car $C \supset G_m$, et $C(\mathbb{Z}_\ell) \supset \mathbb{Z}_\ell^*$.

(Il est faux que $c(\ell) = 1$ pour ℓ grand.

e.g. considérer 4 courbes elliptiques à m.c. par $\mathbb{Q}(\sqrt{-a})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-b})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-c})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-abc})$, a, b, c premiers 2 à 2

A = produit de ces 4 courbes : alors $c(\ell) \geq 2$.

Démonstration des Th 2 (2^*) en supposant $\mathrm{End}\, A = \mathbb{Z}$.

Choisissons une polarisation sur A, et supposons ℓ premier au degré de cette polarisation.

Donne une forme alternée sur $T_\ell A$ non dégénéré sur $\mathbb{Z}_\ell$.

$s \in G_k$, $sx \cdot sy = \chi_{\ell\infty}(s)\, x \cdot y$

$G_{\ell\infty} \subset GSp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$.

Définition : $Y \subset Sp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$. Un élé $y \in Sp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$ appartient à Y si et seulement si il existe $u \in \mathbb{Z}_\ell^*$ tel que $u \cdot y \in G_{\ell\infty}$.

$U = \mathbb{Z}_\ell^* \cap G_{\ell\infty}$ d'indice $e(\ell)$ dans $\mathbb{Z}_\ell^*$.

y donné, "son u" est bien déterminé mod U.

$y \mapsto u$ d'où un hom. $\lambda : Y \to \mathbb{Z}_\ell^*/U$.

Cet homomorphisme est surjectif si ℓ est grand.
En effet, si $u \in \mathbb{Z}_\ell^*$,

$$\chi_{\ell\infty} : G_K \to \mathbb{Z}_\ell^* \quad \text{est surjectif}$$

donc il existe un $s \in G_K$ avec $\chi_{\ell\infty}(s) = u^2$
Un tel $s \to x \in G_{\ell\infty}$.

$$G\,Sp_{2n} \xrightarrow{N} G_m \quad \text{fact. de similitude}$$

On a $N(x) = u^2$

Si $y = u^{-1}x$, $N(y) = u^{-2}\cdot u^2 = 1$, donc
$y \in Sp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$, $y \in Y$, et $y \mapsto u$.

Je suis donc ramené à montrer:
(1) $Y^{(ab)}$ est d'ordre borné quand ℓ varie.

Soit Y_ℓ l'image de Y par l'homomorphisme
$Sp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell) \to Sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$, réduction mod ℓ.

(2) Supposons $\ell \geq 3$. Pour qu'un élément $z \in Sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$ appartienne à Y_ℓ, il faut et il suffit qu'il existe $v \in \mathbb{F}_\ell^*$ avec $vz \in G_\ell$.
Notons $y \mapsto \bar{y}$ la réduction mod ℓ. Si
$z = \bar{y}$, $u\cdot y = x \in G_{\ell\infty}$, $\bar{u}\cdot\bar{y} = \bar{x} \in G_\ell$.
Inversement, supposons qu'on ait $v \in \mathbb{F}_\ell^*$, $vz \in G_\ell$.
$N(vz) = v^2 \in \mathbb{F}_\ell^{*2}$. Il existe un $x \in G_{\ell\infty}$
avec $\bar{x} = vz$, $Nx = \lambda$, $\bar{\lambda} = v^2$. Donc
$\lambda = u^2$, avec $\bar{u} = v$. $y = u^{-1}x$, $Ny = 1$
$\bar{y} = v^{-1}vz = z$.

(3) Y_ℓ contient G_ℓ^+
car G_ℓ^+ étant engendré par les ℓ-éléments,

et étant son groupe dérivé, est contenu dans $Sp_{2n}(F_\ell)$.

ℓ gd, $G_\ell^+ = \underline{S}(F_\ell)^+$ = image de $\tilde{\underline{S}}(F_\ell) \to \underline{S}(F_\ell)$,

$\tilde{\underline{S}}$: revêtement universel de $\underline{S}$.

$\underline{S} \subset Sp_{2n}/F_\ell$ (facile)

$G_\ell \subset \underline{H}_\ell(F_\ell)$, $\underline{H}_\ell = G_m \cdot \underline{S}_\ell$ (car $End = \mathbb{Z}$)

$\Gamma_\ell \subset H_\ell(F_\ell) \cap Sp_{2n}(F_\ell)$

Soit $\underline{S}' = \underline{H}_\ell \cap Sp_{2n}/F_\ell$

(4) On a $S_\ell' = \{\pm 1\} \cdot S_\ell$

$\lambda \cdot x$, $N(\lambda x) = 1$, $N\lambda = \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

$\Gamma_\ell^\circ = \Gamma_\ell \cap \underline{S}_\ell(F_\ell)$

(5) Γ_ℓ° est d'indice ≤ 2 dans Γ_ℓ.

$G_\ell^+ \subset \Gamma_\ell^\circ \subset \underline{S}_\ell(F_\ell)$

l'indice de G_ℓ^+ dans $\underline{S}_\ell(F_\ell)$ est borné.

($\leq 2^{rg}$, donc $\leq 2^n$).

(6) L'indice de G_ℓ^+ dans Γ_ℓ est borné

Si ℓ est grand, $(G_\ell^+)^{ab} = 1$

(7) Γ_ℓ^{ab} est d'ordre borné.

$1 \to \underbrace{\Gamma(\ell)}_{\text{noyau de la réduction mod } \ell} \to \Gamma \to \Gamma_\ell \to 1$

$= $ pro ℓ-groupe

On veut prouver que si ℓ est assez grand, $\Gamma^{ab} \to \Gamma_\ell^{ab}$ est un isom.

(i.e. $\Gamma(\ell) \subset$ groupe dérivé de Γ).

Il suffit de prouver :

(8) il n'y a pas d'homomorphisme

$f : \Upsilon(\ell) \to \mathbb{Z}/\ell$ invariant par Υ, -dire $f(yzy^{-1}) = f(z) \quad \forall y \in \Upsilon$ ℓ).

$\Upsilon(\ell)$ en définissant :

$\{y \in \Upsilon \mid y \equiv 1 \pmod{\ell^N}\}_{N=1,2,\dots}$

$\Upsilon(\ell^2) \supset \cdots \supset \Upsilon(\ell^N) \supset \cdots$

$\Gamma_N = \Upsilon(\ell^N)/\Upsilon(\ell^{N+1}) \hookrightarrow Sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$

$\cap$

$u \mapsto u \bmod \ell \qquad Sl_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$

$sl_{2n}/\mathbb{F}_\ell$

niques, donc compatibles avec l'action

ramenés à prouver :

ℓ grand, il n'existe pas de sous-espace $\underline{V}$ de $sl_{2n}/\mathbb{F}_\ell$, et de forme non nulle $f : \underline{V} \to \mathbb{F}_\ell$ tels que :

est stable par conjugaison par Υ_ℓ.

$f(yzy^{-1}) = f(z) \quad y \in \Upsilon_\ell, z \in \underline{V}$.

est grand, l'action de G_ℓ^+ par gaison sur $sl_{2n}/\mathbb{F}_\ell$ est semi-simple ne contient pas la représentation unité.

$= scal \oplus sl_{2n}$

(9) $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ (1).

à démontrer (10)

me énoncé avec $\underline{\tilde{S}}_\ell$ (ou $\underline{S}_\ell$, c'est pareil)

dans A_ℓ

semi-simple, et

tible.

el de repr.

d'une alg. de

t "ℓ-restreinte"

r. semi-simple

sauf pour

ablement

te', commuterait

ontredirait

à $\tilde{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$

tre × semi-sim

nothéties

ntant aux

et de $\det_L =$

ec $uy \in G_{\ell\infty}$.

Les pages 97 et 98 se superposent dans le document original.

① il suffit de prouver Γ^{ab} d'ordre borné

$$\Gamma^{ab} \longrightarrow C(\mathbb{Z}_\ell)/U \quad , \quad U = C(\mathbb{Z}_\ell) \cap G_{\ell^\infty}$$

avec indice borné (théorie abélienne).

<u>si</u> $\iff$ matrices commutant à $\mathrm{End}\, A$ et de trace $0/L$.

Aujourd'hui on va démontrer 2 énoncés:

l'an dernier, on a défini G_{ℓ^∞} et son enveloppe algébrique

$\underline{H}_{\ell^\infty}$, groupe réductif /$\mathbb{Q}_\ell$

cette année, G_ℓ et son enveloppe algébrique $\underline{H}_\ell$ /$\mathbb{F}_\ell$

1.) Les rangs de tous les $\underline{H}_{\ell^\infty}$ et $\underline{H}_\ell$ sont les mêmes (et sont indépendants de ℓ)

2.) Si: $\mathrm{End}\, A = \mathbb{Z}$ et si $\dim A = 2, 6$ ou impair, alors $G_{\ell^\infty} = GSp_{2n}$ pour ℓ grand, et $G_\ell \subset \prod G_{\ell^\infty}$ est ouvert dans le groupe adélique de GSp_{2n}.

Le rang de H_{ℓ^∞} est indépendant de ℓ.

$N = 2n$, $H \subset GL_N$, H réductif connexe

$GL_N \longrightarrow \mathrm{Aff}^N_*$

Aff^N_* : espace des polynômes unitoires $X^N + a_1 X^{N-1} + \cdots + a_N$ avec a_N inversible.

$cl : GL_N \longrightarrow \mathrm{Aff}^N_*$

$x \longmapsto$ polynôme caractéristique de x.

L'image de H par cl est une sous-variété fermée de Aff^N_* définie sur $\mathbb{Q}$, de dim = rang de H.

Si H est un tore, cl est un morphisme fini.

Si $T \subset H$ est un tore maximal, alors $cl(T) = cl(H)$.

Si $h_i \in H$ sont zariski-denses, alors $cl(H)$ est l'adhérence (de zariski) des $cl(h_i)$.

$\mathcal{A}(H_{\ell^\infty})$ = Zariski-adhérence des $\mathcal{A}(\mathrm{Frob}_v)$,
v bonne réd, $v \notin S$ fini.

Remarque:

$H_{\ell^\infty} = C \cdot S_{\ell^\infty}$, S semi-simple, C tore /$\mathbb{Q}$.
$C \subset GL_N$

Les groupes H réductifs connexes à tore central C fixé sont en nombre fini (à conjugaison géométrique près).

En particulier, les variétés $\mathcal{A}(H)$ possibles (pour C fixé) sont en nombre fini : $V_1, \dots, V_k$.
On suppose que $\mathcal{A}(H_{\ell^\infty}) = V_1$ pour tout ℓ.
$r = \dim V_1 = \mathrm{rang}$ (V_i irréd).

Supposons ℓ assez grand. $\underline{H}_\ell = \underline{C}_\ell \cdot \underline{S}_\ell$,
S_ℓ semi-simple commutant à $\underline{C}_\ell$ engendré par des exponentielles, et opérant de façon semi-simple.
En fait, si ℓ est assez grand, un tel $\underline{H}_\ell$ provient géométriquement par réduction mod ℓ d'un groupe analogue en car 0.
$V_{i,\ell}$ = réd. mod ℓ de V_i
Si ℓ est assez grand, $\mathcal{A}(\underline{H}_\ell) = V_{i_\ell, \ell}$
A montrer : $i_\ell = 1$ pour tout ℓ

1ère étape : $\mathcal{A}(\underline{H}_\ell) \supset V_{1,\ell}$ pour ℓ assez grand.

Soit J l'ensemble des i tels que $V_i \neq V_1$.
Si $i \in J$, $V_1 \cap V_i$ est une sous-variété de V_1 de dimension $\leq r-1$, $r = \dim V_1$.

On choisit une place v dont le Frobenius σ_v satisfait : $\mathrm{cl}(\sigma_v) \notin \bigcup_{i \in J} V_i(\mathbb{Q})$

(possible car les Frob. sont Zariski-denses).

Donc pour ℓ assez grand, $\sigma_v \bmod \ell \in H_\ell(\mathbb{F}_\ell)$ satisfait : $\mathrm{cl}(\sigma_v) \notin V_i(\mathbb{F}_\ell)$, $i \in J$.

donc $\mathrm{cl}(\underline{H}_\ell) \neq V_{i,\ell}$ $i \in J$,

donc $V_{1,\ell} \subset \mathrm{cl}(\underline{H}_\ell)$.

Ceci entraîne : $\mathrm{rang}\, \underline{H}_\ell \geq r = \dim V_1$ pour ℓ grand.

2ème étape : Montrer que $\mathrm{rang}\, \underline{H}_\ell \geq r+1$ est impossible.

Avec la 1ère étape, ça entraînera $\mathrm{cl}(\underline{H}_\ell) = V_{1,\ell}$.

Démonstration de la 2ème étape :

$G_\ell \underset{\text{borné}}{\subset} \underline{H}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$

$\mathrm{cl}(G_\ell) \subset \mathrm{Aff}^{2n}_*(\mathbb{F}_\ell)$.

On va estimer $|\mathrm{cl}(G_\ell)|$ de 2 façons différentes.

1ère estimation :

On choisit un tore maximal $\textcircled{H}$ de $\underline{H}_\ell$, défini / $\mathbb{F}_\ell$.

Lemme :

Si T est un tore / $\mathbb{F}_\ell$ de dimension s,

$$|T_\ell(\mathbb{F}_\ell)| \geq \ell^s \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^s = (\ell-1)^s.$$

$$\| \quad \prod (\ell - \varepsilon_i)$$

racines de 1

$$\left|\textcircled{H}(\mathbb{F}_\ell)\right| \geq c_n \ell^{r+1} \gg \ell^{r+1} \qquad (\text{e.g. } c_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n})$$

$s \leq 2n$, $\left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{2n} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. c_n ne dépend que de n

$|G_\ell \cap \textcircled{H}(\mathbb{F}_\ell)| \geq c' |\Theta(\mathbb{F}_\ell)| >> \ell^{r+1}$ $\ell \to \infty$

Si $T \subset GL_N$, l'application

$$d : T \to \mathrm{Aff}_n^N$$

est de degré au plus $N!$

$$|d(G_\ell)| \geq |d(G_\ell \cap \textcircled{H}(\mathbb{F}_\ell)| \geq \frac{1}{(2n)!} |G_\ell \cap \textcircled{H}(\mathbb{F}_\ell)|$$

$$>> \ell^{r+1}$$

(a) $|d(G_\ell)| >> \ell^{r+1}$

G_ℓ = réduction modulo ℓ de $G_{\ell\infty}$.

Si $x \in G_{\ell\infty}$, $d(x) \in V_1(\mathbb{Q})$

d'où $d(G_\ell) \subset V_1(\mathbb{F}_\ell)$ pour presque tout ℓ

$|V_\ell(\mathbb{F}_\ell)| \leq \ell^r$ car $\dim V_1 = r$.

d'où $|d(G_\ell)| \leq \ell^r$, contradiction.

2.) Supposons $\mathrm{End}\, A = \mathbb{Z}$. Soit $n = \dim A$

Appelons r le rang commun des groupes

$\underline{\underline{H}}_{\ell\infty}$, $\underline{\underline{H}}_\ell$.

$\underline{\underline{H}}_{\ell\infty} = G_m \cdot \underline{\underline{S}}_{\ell\infty}$, $\underline{\underline{H}}_\ell = G_m \cdot \underline{\underline{S}}_\ell$.

$\underline{\underline{H}}_{\ell\infty} \subset GSp_{2n}$, $\underline{\underline{S}}_{\ell\infty} \subset Sp_{2n}$

de même mod ℓ.

1.) $r \leq n+1$

On avait vu que si $r = n+1$, alors

$\underline{\underline{S}}_{\ell\infty} = Sp_{2n}$ pour tout ℓ

$\underline{\underline{H}}_{\ell\infty} = GSp_{2n}$

($S \subset Sp_{2n}$, $\mathrm{rg}\, S = \mathrm{rg}\, Sp_{2n}$

Faltings + $\mathrm{End}\, A = \mathbb{Z}$: S et Sp_{2n} ont le même commutant : les scalaires).

Borel - de Siebenthal (voir oeuvres de Borel vol. 1, et Bourbaki Lie 9).

Si $S_1 \subset S_2 \subset GL_N$ sont semi-simples de rang 0 et ont même rang, même commutant, alors $S_1 = S_2$. Borel et de Siebenthal donnent une description des groupes semi-simples de même rang.
Si $S_1 \neq S_2$, il existe un S_2 non central dans S qui commute à S_1.

2.) Si $r = n+1$, $S_{\ell\infty} = Sp_{2n}$ pour tout ℓ
$H_{\ell\infty} = GSp_{2n}$ pour tout ℓ
(corollaire : si $S_{\ell\infty} = Sp_{2n}$ pour un ℓ, alors c'est vrai pour tout ℓ.)

On a montré : si $n = 2, 6$ ou impair et si : $\mathrm{End}\, A = \mathbb{Z}$, alors $r = n+1$, $H_{\ell\infty} = GSp_{2n}$.

Reste à montrer :

Théorème :

Si : $\mathrm{End}\, A = \mathbb{Z}$ et $r = n+1$, alors

a.) $G_{\ell\infty} = GSp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$ ℓ grand

b.) Image de G_K dans $\Pi G_{\ell\infty}$ est ouverte dans le groupe adélique de GSp_{2n}

c.) $G_\ell = GSp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$ pour ℓ grand

d.) $\underline{H}_\ell = GSp_{2n}/\mathbb{F}_\ell$.

On prouve d'abord que $\underline{H}_\ell = GSp_{2n}/\mathbb{F}_\ell$ (ℓ grand). On en déduit que pour ℓ grand $G_\ell = GSp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$. D'où $G_{\ell\infty} = GSp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$. et b.) résulte du thm de la fois précédente.

On se donne une polarisation sur A. Elle fournit une forme symplectique qui n'est pas nécessairement non dégénérée mod ℓ pour tout ℓ. Il y a (au moins) deux façons de résoudre ce problème : on remplace A par une variété isogène, munie d'une polarisation principale, ou bien on prend ℓ assez grand pour que la forme soit non dégénérée mod ℓ.

A voir : $\underline{S}_\ell = Sp_{2n}/\mathbb{F}_\ell$, ℓ grand.

$\underline{S}_\ell \subset Sp_{2n}/\mathbb{F}_\ell$ ℓ grand

$(G_\ell^+ \subset Sp_{2n}/\mathbb{F}_\ell)$

$\underline{S}_\ell \subset Sp_{2n}/\mathbb{F}_\ell$ semi-simples, même commutant (Lonotlétiés) même rang.

Le théorème de Borel-(de)Siebenthal est vrai en car ≥ 5, mais il est faux en car. 2, 3.

Conte-exemple : en car 2

$SO_{2n} \subsetneq Sp_{2n}$ $n \geq 2$, SO_{2n} abs. irréd.

$\| C_n$ Sp_{2n} aussi : même rang

car 3 : $A_2 \subset G_2$ plongement bizarre.

G. M. Seitz "Maximal subgroups of classical algebraic groups".

$T \subset S$ S semi-simple, $T \subset S' \subset S$ à décrire.

Racines : R, $\alpha \in R$ U_α s/g à un paramètre

$S = \langle T, U_\alpha \rangle$

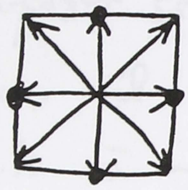
$S' = \langle T, U_\alpha, \alpha \in R' \rangle \quad R' \subset R$.

1.) $\alpha \in R' \Rightarrow -\alpha \in R'$

R' système de racines de S', $R' \subset R$.

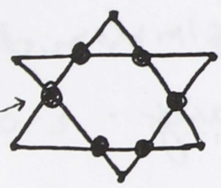
2.) En car ≥ 5, si $\alpha, \beta \in R'$ et $\alpha + \beta \in R$, alors $\alpha + \beta \in R'$.

Sp_4



racines courtes ne satisfont pas 2.).
Racines longues sat. 2.)
$Sp_2 \times Sp_2 \subset Sp_4$ donc racines longues

G_2



R' (racines courtes) ne vérifie pas 2.) et est impossible en car $\neq$.

$x_\alpha(t) \in U_\alpha$

$[x_\alpha(t), x_\beta(t')] = x_\beta(t) \cdot x_\alpha(t') \cdot x_{\alpha+\beta}(\ldots) x$

$\uparrow$
$t\,t' \cdot \gamma$

$\gamma = \pm 1, \pm 2, \pm 3$

Si car $\neq 2, 3$, on est obligé d'avoir $\alpha + \beta$.

Γ s/g de $\mathbb{Z}R$, $R'_\Gamma = \Gamma \cap R$

En faisant varier Γ, on trouve tous les systèmes satisfaisant 1.) et 2.)

On a donc $\underline{S}_\ell = Sp_{2n} / \mathbb{F}_\ell$.

Pour ℓ grand, on avait vu que G_ℓ contient l'image de $\tilde{\underline{S}}_\ell(\mathbb{F}_\ell) \to \underline{S}_\ell(\mathbb{F}_\ell)$

Ici $\underline{S}_\ell = \tilde{\underline{S}}_\ell = Sp_{2n}$. Donc $G_\ell \supset Sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$, ℓ grand.

$$1 \to Sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell) \to GSp_{2n}(\mathbb{F}_\ell) \xrightarrow{N} \mathbb{F}_\ell^* \to 1$$
$$\cup$$
$$G_\ell$$

$N : G_\ell \longrightarrow \mathbb{F}_\ell^*$ caractère cyclotomique surjectif.

Donc : $G_\ell = GSp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$.

Théorème :

Si $\ell \geq 5$, tout sous-groupe fermé de $Sp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$ ayant pour réduction mod ℓ le groupe $Sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$ est égal à $Sp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$.

(Serait faux pour $\ell = 2, 3$, $n = 1$. Voir McGill et correction).

Avant de démontrer ce théorème, montrons qu'il entraîne l'énoncé avec GSp.

On applique le théorème à l'adhérence H du groupe dérivé de G_{ℓ^∞}. Ce groupe est contenu dans $Sp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$, et son image mod ℓ est le groupe dérivé de G_ℓ, i.e. $Sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$. D'où $H = Sp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$. On conclut comme tout à l'heure : $N : G_{\ell^\infty} \to \mathbb{Z}_\ell^*$ est surjectif (caractère cyclotomique).

Démonstration du théorème :

$S = Sp_{2n}(\mathbb{Z}_\ell)$, $H \subset S$ donné.

$$S \supset S_1 \supset \cdots \supset S_m \supset \cdots$$

où $S_m = \{ s \in S \mid s \equiv 1 \bmod \ell^m \}$.

$S/S_1 = Sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$

S_i/S_{i+1} s'identifie à l'algèbre de Lie $sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$ de Sp_{2n} sur $\mathbb{F}_\ell$:

$s = 1 + \ell^i x$, $s \in S_i \longmapsto x \bmod \ell \in sp_{2n}$

A montrer : $H \to S/S_i$ est surjectif $\forall i$

Par récurrence sur i :

Il suffira de voir que H/S_{i+1} contient S_i/S_{i+1}

Fabriquer dans H $1+\ell^i x \bmod S_{i+1}$

pour x quelconque $\in sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$

(Tits : il suffit de le voir pour un seul x, car action irréductible.)

("avec Tits") a.T. Dans l'algèbre de Lie de Sp_{2n}, il y a au moins un $x \neq 0$, $x^2 = 0$.

("sans Tits") s.T. L'algèbre de Lie de Sp_{2n} est engendrée /$\mathbb{F}_\ell$ par des x, $x^2 = 0$ (vrai même si car $= 2$).

(a.T.) $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(s.T.) e.g. SL_2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\exp(x) = 1 + x \in Sp_{2n}(\mathbb{F}_\ell)$

Il existe $s = 1 + t \in H$ avec $t \equiv x \bmod \ell$

$$s^\ell = 1 + \ell t + \frac{\ell(\ell-1)}{2} t^2 + \cdots + \ell t^{\ell-1} + t^\ell$$

$t^2 \equiv 0 \bmod \ell$

$t^\ell \equiv 0 \bmod \ell^2$ si $\ell \geq 5$

$s^\ell \equiv 1 + \ell t \mod S_2$.

$s^{\ell^2} \equiv 1 + \ell^2 t \mod S_3$, etc.

Conjecture :

$\mathcal{H}_{\ell^\infty}$ = groupe de Mumford-Tate $/\mathbb{Q}_\ell$

$\mathcal{H}_\ell$ = réduction mod ℓ de M.T.

Démontrables (?) :

(1) G_{ℓ^∞} contient l'image de

$$\tilde{S}_{\ell^\infty}(\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow S_{\ell^\infty}(\mathbb{Z}_\ell) \qquad (\ell \text{ assez grand})$$

et S_ℓ est la réduction mod ℓ de S_{ℓ^∞}

$$\begin{array}{c} \tilde{S}_\ell^\infty(\mathbb{Z}_\ell) \\ \downarrow \\ G_{\ell^\infty} \cap S_{\ell^\infty}(\mathbb{Z}_\ell) \end{array}.$$

l'image inverse est ~~[illegible]~~ un compact maximal "superspécial" dans la terminologie de Bruhat-Tits.

(2) Extension des résultats aux corps de type fini sur $\mathbb{Q}$:

les résultats sont (très probablement exactement les mêmes que sur $\mathbb{Q}$.

On a utilisé :

- Hermite : il n'y a qu'un nombre fini d'extensions de degré donné, et non ramifiées en dehors d'un ensemble fini fixé.

- Théorème de finitude du corps de classes: extension abélienne maximale non ramifiée partout de degré fini (Katz-Lang).

③ Corps de fonctions d'une variable sur un corps fini.

($\ell \neq$ caractéristique)

On définit $\underline{H}_{\ell\infty}$: enveloppe algébrique de Galois.

Il n'est plus vrai en général que $G_{\ell^\infty} \subset \underline{H}_{\ell\infty}$ soit ouvert, à cause de la partie abélienne

$\underline{H}_{\ell\infty} = C \cdot \underline{S}$ proj. de $\underline{S}$ ouverte

proj. dans C : $\hat{\mathbb{Z}} \to C(\mathbb{Q}_\ell)$

$G_k \xrightarrow{\text{degré}} \hat{\mathbb{Z}}$ action sur $\overline{\mathbb{F}_q}$

(s/g de $\mathbb{Z}_\ell^*$ engendré par les puissances de p mod ℓ, on définit G_ℓ^+, C_ℓ

mais G_ℓ n'est pas d'indice borné dans $\underline{H}_\ell$ (

Fin du Cours