BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 1-54 (supplément spécial)

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__v1_0>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1920 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. ANDOYER. APPELL. DEMOULIN. DERUYTS. GOURSAT. HADAMARD. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. KŒNIGS. JORDAN. LECORNU. MITTAG-LEFFLER. NEUBERG. PAINLEVÉ. PICARD. VALLÉE POUSSIN (DE LA) VOLTERRA.
Président........................	MM. DRACH.
Vice-Présidents..................	BOULANGER. CAHEN. P. LÉVY. SERVANT.
Secrétaires......................	GALBRUN. MONTEL.
Vice-Secrétaires.................	THYBAUT. TRESSE.
Archiviste.......................	FATOU.
Trésorier........................	MALUSKI.
Membres du Conseil (2)...........	AURIC, 1922. BIOCHE, 1921. BOREL, 1921. BRICARD, 1922. FONTENÉ, 1921. FOURET, 1921. GRÉVY, 1923. LEBESGUE, 1923. LÉVY (A.), 1922. MAILLET, 1922. D'OCAGNE, 1923. VESSIOT, 1923.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Dans la séance du 14 janvier 1920, l'Assemblée générale de la Société mathématique de France, considérant que les relations de la Société avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies ont été suspendues pendant la guerre, a décidé que ces relations ne pourraient être reprises qu'à la suite d'une demande formelle des membres susvisés, demande qui serait soumise au vote du Conseil; en conséquence, les noms de ces membres ne figurent pas sur la liste ci-dessous (1) :

Date
de
l'admission.

1920. **ABELIN**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Paris, 1, Versailles (Scine-et-Oise).
1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17e).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert D'), place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
1920. **ALBO**, professeur au lycée Jules-Ferry, rue de Berne, 7, à Paris (8e).
1919. **ALMÉRAS**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6e).
1896. **ANDOYER**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5e).
1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Villars, 3, à Besançon.
1918. **ANGELESCO**, professeur à l'Université de Chij (Roumanie).
1919. **ANTOINE**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, quai Zorn, 15, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1920. **ANZEMBERGER**, professeur au lycée, à Besançon (Doubs).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, recteur de l'Université de Paris, à la Sorbonne, à Paris (5e).
1910. **ARCHIBALD** (C.-R.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).
1919. **ARNOU**, ingénieur, rue de Provence, 126, à Paris (9e).
1920. **ARVENGAS**, ingénieur à la poudrerie de Sevran-Livry, rue Jadin, 14 *bis*, à Paris (17e).
1920. **AUBERT**, professeur au lycée Henri IV, à Paris (5e).
1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue du Val-de-Grâce, 2, à Paris (5e).
1920. **AUTERBE**, Cie d'assurances *L'Union*, place Vendôme, à Paris (1er).
1919. **BACHELIER**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Besançon (Doubs).
1919. **BAILLAUD**, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris.
1900. **BAIRE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Dijon.
1896. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1917. **BARRAU** (J.-A.), professeur à l'Université, à Groningen (Hollande).
1905. **BARRÉ**, chef de bataillon du génie, docteur ès sciences mathématiques, rue Lhomond, 10, à Paris (5e).
1918. **BARRIOL** (A.), directeur des Services de la comptabilité aux chemins de fer du P.-L.-M., rue Saint-Lazare, 88, à Paris (9e). S. P. (2).
1920. **BAUDET**, professeur à l'Académie technique de Delft, van Bœtzelaerlaan, 3, à La Haye (Hollande).
1919. **BÉGHIN**, professeur à l'École Navale, boulevard Gambetta, 36, à Brest (Finistère).
1919. **BÉNÉZÉ**, professeur au lycée, à Cahors (Lot).
1920. **BERNHEIM**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue de Siam, 15, à Paris (16e).
1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, avenue de Wagram, 167, à Paris (17e). S. P.

---

(1) La liste qui suit donne les noms des membres de la Société à la fin de l'année 1920.
(2) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels

Date
de
l'admission.

1910. **BERTRAND** (G.), astronome à l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées).
1913. **BILIMOVITCH**, privat-dozent à l'Université de Kiew, rue Stanislas, 14, à Paris (6e).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6e). S. P.
1920. **BLOCH** (Eug.), professeur au lycée Saint-Louis, rue Rataud, 11, à Paris (5e).
1919. **BLONDEL** (Ch.), professeur de philosophie à l'Université, quai des Pêcheurs, 7, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1891. **BLUTEL**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14e).
1902. **BOBERIL** (comte Roger DU), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.
1907. **BOITEL DE DIENVAL**, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.
1892. **BONAPARTE** (prince), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16e).
1920. **BONCENNE**, professeur au lycée Voltaire, place de la République, 4, à Levallois-Perret (Seine).
1895. **BOREL** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Bac, 32, à Paris (7e). S. P.
1913. **BORTOLOTTI** (E.), professeur à l'Université de Modène, via Maggiore, 18, à Bologne (Italie).
1919. **BOSLER**, docteur ès sciences, à l'Observatoire de Meudon (Seine).
1909. **BOULAD** (F.), ingénieur au service des ponts des chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).
1896. **BOULANGER**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 30, à Paris (5e).
1913. **BOULIGAND**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Rennes (Ille-et-Vilaine).
1896. **BOURGET** (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.
1903. **BOUTIN**, rue Lavieuville, 26, à Paris (18e).
1904. **BOUTROUX** (P.), professeur au Collège de France, à Paris. S. P.
1920. **BRANTUT**, ingénieur en chef d'artillerie navale, rue Théophile-Gautier, 34, à Paris (16e).
1911. **BRATU**, professeur à l'Université stradela Goliei, 8, à Jassy (Roumanie).
1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14e).
1919. **BRILLOUIN** (M.), professeur au Collège de France, boulevard Port-Royal, 31, à Paris (13e).
1920. **BRILLOUIN** (Léon), agrégé de Physique, rue Boissonnade, 16, à Paris (16e).
1919. **BRICE**, président de la Chambre syndicale des constructeurs en ciment armé, place Paul-Verlaine, 3, à Paris (13e).
1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1920. **BROGLIE** (DE), square de Messine, 9, à Paris (8e).
1912. **BROWNE**, Grange Mockler, à Carrick-on-Suir (comté de Tipperary, Irlande).
1920. **BRUNSCHWICG**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Lettres, rue Schæffer, 53, à Paris (16e).
1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1894. **CAHEN** (E.), rue Cortambert, 46, à Paris (16e).
1920. **CAHEN** (Armand), professeur au lycée Charlemagne, rue Legendre, 151, à Paris (17e).
1920. **CAMBEFORT**, professeur au lycée, rue de Liége, 42, à Pau (Basses-Pyrénées).

Date de l'admission.

1917. **CANDÈZE**, lieutenant-colonel, place du Square, 13, à Aurillac (Cantal).

1885. **CARON**, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5ᵉ).

1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, avenue Niel, 15, à Paris (17ᵉ).

1919. **CARPENTIER**, membre de l'Institut, rue Guynemer, 34, à Paris (6ᵉ).

1919. **CARRUS**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Michelet, 66, à Alger.

1896. **CARTAN**, professeur à la Faculté des Sciences, avenue de Montespan, 4, au Chesnay (Seine-et-Oise).

1887. **CARVALLO**, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5ᵉ). S. P.

1919. **CASABONNE**, professeur au lycée Henry IV, rue Censier, 26, à Paris (5ᵉ).

1920. **CAUSSE**, professeur au lycée, rue Saint-Antoine, 12, à Toulouse (Haute-Garonne).

1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).

1919. **CERF**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du Nord, à Dijon (Côte-d'Or).

1911. **CHALORY**, professeur au lycée Carnot, 38, rue de Vaugirard, à Paris (6ᵉ).

1919. **CHANDON** (Mᵐᵉ), aide-astronome à l'Observatoire, avenue de l'Observatoire, à Paris (14ᵉ).

1919. **CHAPELON**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Morland, 2, à Paris (4ᵉ).

1919. **CHARBONNIER**, ingénieur-général d'artillerie navale, avenue Octave-Gréard, 3, à Paris (7ᵉ).

1920. **CHARPY**, membre de l'Institut, place de la Poterie, 13, à Montluçon (Allier).

1896. **CHARVE**, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, villa Gambie, 23, rue Va-à-la-Mer, à Marseille.

1911. **CHATELET**, proféssseur à la Faculté des Sciences, rue Caumartin, 78, à Lille (Nord).

1907. **CHAZY**, professeur à la Faculté des Sciences de Lille (Nord).

1920. **CHERONNET**, ingénieur aux établissements Gaumont, rue d'Uzès, 10, à Paris (2ᵉ).

1919. **CHILOWSKY**, rue du Lunain, 15, à Paris (14ᵉ).

1913. **COBLYN**, capitaine du génie, rue des Vignes, 34, à Paris (16ᵉ).

1920. **COISSART**, professeur au lycée Voltaire, avenue Gambetta, 17, à Paris (11ᵉ).

1919. **COLLIN**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, 51, à Paris (5ᵉ).

1920. **COMBET**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Lagarde, 5, à Paris (5ᵉ).

1920. **COMMISSAIRE**, professeur au lycée Charlemagne, quai des Célestins, 2, à Paris (4ᵉ).

1915. **CONSTANTINIDÈS**, professeur au Gymnase de Phodos (Grèce).

1920. **COPPEL**, licencié ès sciences, avenue d'Orléans, 109, à Paris (14ᵉ).

1896. **COSSERAT** (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.

1900. **COTTON** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.

1919. **COUSIN**, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux (Gironde).

1914. **CRELIER**, professeur à l'Université de Berne, à Bienne (Suisse).

1904. **CURTISS**, professeur à l'Université Northwestern, Stermann Avenue, 2023, à Evanston (Illinois, États-Unis).

1919. **DAIN**, ingénieur, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17ᵉ).

1920. **DANELLE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, à Paris (5ᵉ).

1919. **DANJOY**, ingénieur des constructions civiles, rue de Villersexel, 9, à Paris (7ᵉ).

1919. **DARMOIS**, chargé de cours à la Faculté des Sciences de Nancy (Meurthe-et-Moselle).

1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27 *bis*, à Montpellier.

1919. **DAUTRY**, ingénieur en chef à la Compagnie des chemins de fer du Nord, rue Jacob, 4, à Paris (6ᵉ).

Date de l'admission.

1920. **DEDRON**, professeur au Prytanée militaire, à La Flèche (Sarthe).
1920. **DEFOURNEAUX**, professeur au lycée Condorcet, rue Damrémont, 72, à Paris (18e).
1920. **DELARUE**, professeur au lycée Charlemagne, quai de Béthune, 30, à Paris (4e).
1901. **DELASSUS**, professeur de mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1920. **DELENS**, professeur au lycée, rue de Sainte-Adresse, 35, Le Havre (Seine-Inférieure).
1919. **DELTHEIL**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Montaudran, 48, à Toulouse (Haute-Garonne).
1913. **DELVILLE** (L.), ingénieur, rue de Tournon, 14, à Paris (6e).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1905. **DENJOY**, professeur à l'Université Stationstraat, 12 *bis*, à Utrecht (Hollande).
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue Louvrex, 37, à Liége (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17e).
1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1914. **DONDER** (J. DE), rue Forestière, 11, à Bruxelles (Belgique).
1920. **DOUCET**, Ker Marguerite, rue Pornichet, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1899. **DRACH**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, 53, à Paris (5e).
1909. **DRURY**, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1920. **DUCROT**, gérant de la librairie Gauthier-Villars et Cie.
1920. **DUFOUR**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Monge, 21, à Paris (5e).
1907. **DULAC**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, professeur à l'Université, Cabrières, avenue Mont-Charmant, à Béthusy-Lausanne (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1902 **EGOROFF** (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaÿa, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1915. **ESCLANGON**, directeur de l'Observatoire de Strasbourg (Bas-Rhin).
1912. **EISENHARDT** (L.-P.), professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 22, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1916. **ELCUS**, banquier, rue du Colisée, 36, à Paris (8e). S. P.
1919. **EMERY**, colonel d'artillerie, président de la Commission des poudres de guerre et de la Commission d'expériences de Versailles, rue de Rémusat, 23, à Paris (16e).
1920. **ERRERA**, chaussée de Waterloo, 1039, Uccle (Belgique).
1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **ETZEL**, professeur de mathématiques et d'astronomie au collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7e).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, traverse Magnan à Mazargues, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1906. **FARAGGI**, professeur au lycée, avenue Mirabeau, 7, à Nice (Alpes-Maritimes).
1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome adjoint à l'Observatoire, boulevard du Montparnasse, 172, à Paris (14e).
1891. **FAUQUEMBERGUE**, rue de Honga, 14, à Mont-de-Marsan (Landes).
1892. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).

Date de l'admission.

1920. **FETTER**, général commandant l'artillerie, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1885. **FIELDS** (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1919. **FLAMANT**, agrégé de mathématiques, rue d'Ulm, 45, à Paris (5e).
1920. **FLAVIEN**, professeur au lycée Henri IV, rue de la Glacière, 11, à Paris (13e).
1920. **FLEUCHOT**, professeur au lycée, à Dijon (Côte d'Or).
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. **FONTENÉ**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, rue Le Goff, 7, à Paris (5e).
1903. **FORD** (Walter B.), professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1919. **FORGERON**, actuaire de la Compagnie le Soleil, rue Maublan, 18, à Paris (15e).
1920. **FORT**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Rataud, 9, à Paris (5e).
1889. **FOUCHÉ**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5e).
1905. **FOUËT**, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6e).
1872. **FOURET**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17e). S. P.
1903. **FRAISSÉ**, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1920. **FRANCESCHINI**, professeur au Prytanée militaire, La Flèche (Sarthe).
1911. **FRÉCHET**, professeur à la Faculté des Sciences, 2, quai Jacoutot, Robertsau, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1911. **GALBRUN**, docteur ès sciences, avenue Émile-Deschanel, 14, à Paris (7e).
1900. **GALDEANO** (Z.-G. de), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1919. **GAMBIER**, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes, 10, rue Oudinot, à Paris (7e).
1906. **GARGAM DE MONCETZ**, licencié ès sciences, rue de Villiers, 42, à Levallois-Perret (Seine).
1872. **GARIEL**, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17e).
1908. **GARNIER**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1919. **GARNIER**, ingénieur en chef d'artillerie navale, rue Valentin-Haüy, 10, à Paris (15e).
1911. **GAU**, doyen et professeur à la Faculté des Sciences, cours Saint-André, 116, à Grenoble.
1920. **GAY**, professeur au lycée, à Grenoble (Isère).
1919. **GEARY** (R.-C.), maître ès sciences de l'Université nationale d'Irlande, rue du Renard, 37, à Paris (4e).
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1920. **GEHORGHINE**, rue de l'Abbé-de-l'Épée, 6, à Paris (5e).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1920. **GEVREY**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, à Dijon (Côte-d'Or).
1913. **GIRAUD**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Clermond-Ferrand, La Terrasse-Fontmaure, à Chamalières (Puy-de-Dôme).
17. **GLOBA-MIKHAÏLENKO**, docteur ès sciences, avenue des Gobelins, 10 *bis*, à Paris (5e).
13. **GODEAUX**, répétiteur à l'École Militaire de Belgique, avenue de l'Opale, 109, à Bruxelles (Belgique).

Date
de
l'admission.

1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16e).
1914. **GOLOUBEFF** (W.), agrégé de l'Université, rue Stanislas, 14, à Paris (6e).
1907. **GOT** (Th.), docteur ès sciences, directeur technique de la Maison Niclausse, rue du Dragon, 3, à Paris (6e).
1881. **GOURSAT**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Navarre, 11 *bis*, à Paris (5e). S. P.
1920. **GRAMONT** (DE), duc DE GUICHE, docteur ès sciences, avenue Henri-Martin, 42 *bis*, à Paris (16e).
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).
1919. **GROS**, ingénieur, rue Cambon, 37, à Paris (1er).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7e).
1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6e). S. P.
1919. **GUÉRIN**, administrateur délégué de l'Électro-entreprise, rue de la Bienfaisance, 43, à Paris (8e).
1900. **GUICHARD** (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Fontaine, 19, à Paris (16e).
1907. **GUICHARD** (L.), professeur de mathématiques au collège de Barbezieux (Charente).
1919. **GUILLAUME**, ingénieur à la Compagnie des chemins de fer du Nord, à Valenciennes (Nord).
1920. **GUITTON**, professeur au lycée Henri IV, rue de Bagneux, 41, à Sceaux (Seine).
1919. **HAAG**, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1896. **HADAMARD**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14e). S. P.
1894. **HALSTED** (G.-B.), Colorado State Teachere College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1920. **HAMY**, astronome à l'Observatoire, rue de Rennes, 108, à Paris (6e).
1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6e). S. P.
1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, Hicks Avenue, 304, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1919. **HELBRONNER**, docteur ès scienses, avenue Kléber, 46, à Paris (16e).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5e).
1911. **HIERHOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, à Upsal (Suède).
1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École Ste-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 *bis*, à Paris (17e). S. P.
1918. **HUBER** (M.), sous-directeur de la Statistique générale de la France au Ministère du Travail et de la Prévoyance sociale, quai d'Orsay, 97, à Paris (7e).
1880. **HUMBERT** (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Bonaparte, 30, à Paris (6e).
1918. **HUMBERT** (P.), maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Isabey, 107 *bis*, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).

Date de l'admission.

1919. **ILIOVICI**, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 225, à Paris (15e).
1920. **ISCH-WALL**, ingénieur, rue de l'Arcade, 23, à Paris (8e).
1896. **JACQUET** (E.), professeur au lycée Henri IV, rue Notre-Dame-des-Champs, 76, à Paris (6e).
1914. **JAGER** (F.), docteur ès sciences et en droit à Elvange, près Faulquemont (Moselle).
1919. **JANET** (M.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue du Lycée, 5, à Grenoble (Isère).
1920. **JANSSON**, docteur de l'Université d'Upsal, rue de la Sorbonne, 12, à Paris (5e).
1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des téléphones, Amicisvej, 16, à Copenhague V. (Danemark).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur honoraire à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 46, à Paris (7e). S. P.
1919. **JOUGUET**, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique.
1919. **JULIA**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de Courcelles, 22, à Paris (17e).
1919. **JUVET**, licencié ès sciences, avenue du 1er-Mars, 10, à Neuchâtel (Suisse).
1916. **KAMPÉ DE FÉRIET**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille (Nord).
1913. **KASNER** (E.), professeur à l'Université Columbia, à New-York (États-Unis).
1913. **KIVELIOVITCH**, licencié ès sciences, rue Laromiguière, 6, à Paris (5e).
1880. **KŒNIGS**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jacques, 77, à Paris (14e).
1913. **KOSTITZIN** (V.), avenue Villemin, 32, à Paris.
1907. **KRYLOFF**, ingénieur des mines, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines de Petrograd, à Ouezd-Radomysl, Gitomirska Chaussée, Station Nebylitza, village Kolganowka, gouvernement de Kiew (Russie).
1919. **LABROUSSE**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6e).
1920. **LACAZE**, nouvelle école Sainte-Geneviève, rue de la Vieille-Église, à Versailles (Seine-et-Oise).
1920. **LAGARDE**, astronome à l'Observatoire, à Paris (14e).
1920. **LAGARSSE**, professeur au Prytanée militaire, La Flèche (Sarthe).
1906. **LALESCO**, professeur à l'Université, str. Seaune, 19, à Bucarest.
1919. **LAMBERT**, astronome adjoint à l'Observatoire, boulevard Arago, 99, à Paris (14e).
1893. **LANCELIN**, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14e).
1919. **LANGEVIN**, professeur au Collège de France, rue Larrey, 11, à Paris (5e)
1919. **LAPOINTE**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Sophie-Germain, 3, Paris (14e).
1896. **LAROZE**, ingénieur des télégraphes, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Froidevaux, 8, à Paris (14e).
1920. **LAUBEUF**, rue François-Ponsard, Paris (16e).
1896. **LEAU**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Montesquieu, 8, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1896. **LEBEL**, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. **LEBESGUE**, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, rue Saint-Sabin, 35 *bis*, à Paris (11e).
1903. **LEBEUF**, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1919. **LEBLANC** (M.), membre de l'Institut, ingénieur, boulevard de Montmorency, 1, à Paris (16e).
1919. **LECONTE**, inspecteur de l'Académie de Paris, boulevard Saint-Germain, 78, à Paris (6e).

Date de l'admission.

1920. **LE CORBEILLER**, ingénieur des télégraphes, rue de Grenelle, 81, à Paris (7e).
1893. **LECORNU**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5e).
1919. **LEFEBVRE** (Ch.), ingénieur des constructions civiles, boulevard Haussmann, 157, à Paris (8e).
1920. **LEFEBVRE**, directeur de l'enseignement primaire de la Seine, Hôtel de Ville, place Lobau, à Paris (4e).
1918. **LEFSCHETZ**, ingénieur E. C. P., professeur assistant de mathématiques à l'Université de Kansas, Missouri St. 937, à Lawrence (Kansas, Etats-Unis).
1895. **LÉMERAY** (E.-M.), professeur libre à la Faculté des Sciences de Marseille, villa Véza, avenue Meissonier, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1920. **LERNER**, professeur au lycée de Buzen (Roumanie); en congé, rue Cujas, 20, à Paris (5e).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. **LE ROY**, membre de l'Institut, professeur au lycée Saint-Louis, rue Cassette, 27, à Paris (6e).
1920. **LE VAVASSEUR**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Corneille, 125, à Lyon (Rhône).
1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. **LESCOURGUES**, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6e).
1909. **LÉVY** (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6e).
1907. **LÉVY** (Paul), ingénieur des mines, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, rue Chernoviz, 9, à Paris (16e). S. P.
1920. **LHERMITTE**, professeur au lycée Janson-de-Sailly, rue de Lubeck, 32, à Paris (16e).
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1886. **LIOUVILLE**, ingénieur en chef des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, à Maure (Ille-et-Vilaine).
1919. **LOISEAU**, ingénieur à la Compagnie des chemins de fer du Nord, à Cambrai (Nord).
1912. **LOVETT** (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.
1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7e).
1913. **LUSIN**, professeur adjoint à l'Université de Moscou (Russie).
1895. **MAILLET**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1905. **MALUSKI**, proviseur du lycée Lakanal, rue Houdan, 3, à Sceaux (Seine).
1919. **MARCHAUD**, professeur au lycée, rue Henri-René, 3, à Montpellier (Hérault).
1906. **MARCUS**, agrégé de l'Université, rue Frédéric-Passy, 15, à Neuilly (Seine).
1919. **MARIJON**, inspecteur général de l'Instruction publique, avenue Félix-Faure, 37, à Paris (15e).
1920. **MARMION**, chef de bataillon du génie, avenue de Suffren, 164, à Paris (7e).
1919. **MAROGER**, professeur au lycée de Marseille (Bouches-du-Rhône).
1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12e).
1884. **MARTIN** (Artemas), Columbia Street 1352, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1920. **MARTY**, professeur au lycée Henri-Poincaré, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1920. **MASCART**, directeur de l'Observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).
1919. **MASSON** (Mlle), docteur ès sciences, rue de la Tour, 123, à Paris (16e).
1919. **MATANOVITCH**, ingénieur E. C. P., rue Damrémont, 8, à Paris (18e).
1920. **MAYER**, secrétaire général du Bureau d'Organisation économique, rue de Provence, à Paris (9e).

Date de l'admission.

1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7e). S. P.
1919. **MÉRIEUX**, professeur au lycée Condorcet, rue Caumartin, à Paris (8e).
1902. **MERLIN** (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1919. **MESNAGER**, membre de l'Institut, professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées, rue de Rivoli, 182, à Paris (4e). S. P.
1919. **MÉTRAL**, professeur au lycée de Brest (Finistère).
1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1919. **MEYER** (F.), professeur au lycée Rollin, avenue Trudaine, 16, à Paris (9e).
1909. **MICHEL** (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14e).
1893. **MICHEL** (François), ingénieur en chef des services électriques de la Compagnie du chemin de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10e).
1920. **MILHAUD**, professeur au collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8e).
1920. **MINEUR**, professeur au lycée Rollin, aveuue Trudaine, 16, à Paris (9e).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1907. **MONTEL**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15e).
1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigo-Danel, 15, à Lille (Nord).
1911. **MOORE** (Ch.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1920. **MOREL**, professeur au lycée, rue Nantaise, 10, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1920. **MOUTHON**, professeur au lycée Lakanal, rue Alphonse-Daudet, 15, à Paris (14e).
1920. **MUIR** (Thomas), Elmoste Sandown Road, Rondebasch (Sud-Africain).
1919. **MUXART**, professeur au lycée Montaigne, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5e).
1918. **NÉCULCÉA**. professeur à l'Université de Jassy (Roumanie).
1909. **NEOVIUS**, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr Vinthersvei 3I, à Copenhague (Danemark).
1920. **NEPVEU**, professeur au lycée, boulevard de la Cité, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liége (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, La Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).
1920. **NIELSEN** (Frederik Lange), rue de Ponthieu, 25, à Paris (8e).
1919. **NÖRLUND** (E), professeur à l'Université de Lund (Suède).
1920. **OBRIOT**, professeur au lycée Buffon, boulevard de Port-Royal, 82, à Paris (5e).
1882. **OCAGNE** (M. D'), inspecteur général des ponts et-chaussées, professeur à l'École Polytechnique et à l'Ecole des Ponts et Chaussées, rue La Boëtie, 30, à Paris (8e). S. P.
1905. **OUIVET**, professeur au lycée du Parc, à Lyon (Rhône).
1873. **OVIDIO** (E. D'), sénateur, professeur à l'Université, via Sebastiano Valfré, 14, à Turin (Italie).
1920. **PAGÈS**, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris (6e).
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6e).
1912. **PANGE** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François Ier, 32, à Paris (8e). S. P.
1888. **PAPELIER**, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Recouvrance, 29, à Orléans.

Date
de
l'admission

1920. **PARENTY**, directeur des Manufactures de l'État, avenue Malakoff, 11, à Paris (16e).

1919. **PARODI** (H.), ingénieur en chef à la Compagnie des chemins de fer d'Orléans, quai d'Orsay, 141, à Paris (15e).

1917. **PASQUIER** (DU), professeur à l'Université, rue de la Côte, 106A, à Neuchâtel (Suisse).

1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.

1914. **PÉRÈS**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du Maréchal-Pétain, 11, à Strasbourg (Bas-Rhin).

1920. **PERONNET**, astronome à l'Observatoire de Strasbourg (Bas-Rhin).

1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.

1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques à l'École J.-B. Say, rue de la Convention, 85, à Paris (15e).

1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kasancié-Venac, 26. à Belgrade (Serbie).

1902. **PETROVITCH** (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Pétrograde (Russie).

1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Domenico Maggiore, 9, à Naples (Italie).

1905. **PFEIFFER**, professeur à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log II. à Kiew (Russie).

1879. **PICARD** (Émile), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, quai Conti, 25, à Paris (6e).

1919. **PICART** (L.), directeur de l'Observatoire de Bordeaux, à Floirac (Gironde).

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie en retraite, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).

1920. **PIERRA**, directeur de la Société des appareils de transmission Hale Shan, rue de Provence, à Paris (9e).

1913. **PODTIAGUINE** (N.), rue Stanislas, 14, à Paris (6e).

1920. **POMEY** (J.-B.), ingénieur en chef des postes et télégraphes, boulevard Raspail, 120, à Paris (6e).

1920. **POMEY** (Etienne), professeur à l'École de Physique et de Chimie, boulevard Saint-Marcel, 70, à Paris (5e).

1920. **POMEY** (Léon), ingénieur des Manufactures de l'État, rue Rosa-Bonheur, 10, à Paris.

1918. **POMPEIU**, professeur à l'Université de Bucarest (Roumanie).

1920. **PONS**, professeur au lycée, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier (Hérault).

1906. **POPOVICI**, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).

1894. **POTRON** (M.), docteur ès sciences, nouvelle école Sainte-Geneviève, rue de la Vieille-Eglise, 2, à Versailles (Seine-et-Oise).

1920. **PORTALIER**, professeur au lycée Henri IV, à Paris (5e).

1914. **POWALO-SCHWEIKOWSKI**, licencié ès sciences, rue Gazan, 5 *bis*, à Paris (14e).

1919. **PRADEL**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6e).

1919. **PRÉVOST**, ingénieur civil des mines, rue Huysmans, 6, à Paris (6e).

1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5e).

1919. **RATEAU**, membre de l'Institut, avenue Elysée-Reclus, 10 *bis*, à Paris (7e).

1903. **RÉMOUNDOS**, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion-Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).

1919. **RENAUD**, professeur au Lycée, rue Dacier, 7, Angers (Maine-et-Loire).

Date
de
admission.

1919. **RÉVEILLE**, répétiteur à l'Ecole Polytechnique, à Saint-Tropez (Var).
1903. **RICHARD**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Strasbourg, 100, à Châteauroux.
1919. **RICHARD** (E.), professeur au lycée Michelet, boulevard Lefebvre, 45, à Paris (15e).
1908. **RICHARD D'ABONCOURT** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.
1920. **RIQUIER**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Malfilâtre, 14, à Caen (Calvados).
1908. **RISSER**, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7e).
1919. **ROBERT**, professeur au lycée de Montpellier (Hérault).
1916. **ROBINSON** (L.-B.), 22nd street 306 E, à Baltimore (Maryland, États-Unis).
1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, docteur ès sciences, rue d'Assas, 76, à Paris (6e).
1896. **ROUGIER**, professeur au Lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14e).
1920. **ROUYER**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jean-Rameau, 3, à Alger.
1885. **ROY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Fizac, 9, à Toulouse (Hte-Garonne).
1911. **RUDNICKI**, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (14e).
1920. **SAINTE LAGUE**, professeur au lycée Carnot, rue Barye, 12, à Paris (7e).
1919. **SAKELLARION**, professeur à l'Université, rue Asklépion, 96, à Athènes (Grèce).
1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1919. **SARTRE**, agrégé de l'Université, rue d'Ulm, 45, à Paris (5e).
1897. **SCHOU** (Erik), ingénieur, Thorvaldsinsi, 193, à Copenhague (Danemark).
1920. **SCHUH**, professeur à l'Académie technique de Delft, Frenckenolag, La Haye (Hollande).
1901. **SÉE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7e).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Pétrograde (Russie). S. P.
1920. **SERGESCO**, professeur au lycée de Fupnn (Roumanie); en congé, boulevard Saint-Germain, 46, à Paris (5e).
1920. **SERRIER**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Bouchard, 38, à Paris (14e).
1900. **SERVANT**, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. **SHAW** (J.-B.), professeur à l'Université, Box 143, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1919. **SIMONIN**, astronome à l'Observatoire, avenue du Parc-de-Montsouris, 30, à Paris (14e).
1912. **SIRE**, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon (Rhône).
1916. **SOULA**, agrégé de l'Université, rue de la Bienfaisance, 1, Nîmes (Gard).
1900. **SPARRE** (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. **SPEISER** (Andreas), membre de la Société mathématique suisse, privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1912. **STECKER** (H.-F.), professeur de mathématiques, à Pensylvania State College, Miles St. 306 (Pensylvanie, États-Unis).
1918. **STOÏLOW** (S.), docteur ès sciences, maître de conférences à l'Université de Jassy (Roumanie).
1898. **STÖRMER**, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).

Date de l'admission.

1904. **SUDRIA**, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'Électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14^e).
1904. **SUNDMAN**, professeur à l'Université, Observatoire astronomique, à Helsingfors (Finlande).
1913. **TAMARKINE**, répétiteur à l'École impériale des Ponts et Chaussées, rue Liteinaia, 45, App. 33, à Pétrograde (Russie).
1920. **THIRY**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue de l'Université, 36, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1919. **THOISY** (DE), ingénieur. rue Vineuse, 29, à Paris (16^e).
1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5^e).
1910. **TIMOCHENKO**, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. **TINO** (O.), via Lagrange, 2, à Turin (Italie).
1919. **TISSIER**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Alger.
1912. **TOUCHARD**, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 150, à Paris (8^e).
1910. **TRAYNARD**, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, à la Violette, Sommières (Gard). S. P.
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. **TRESSE**, professeur au lycée Buffon, rue Mizon, 6, à Paris (15^e).
1919. **TRIMBACH**, ingénieur, avenue du Roule, 97, à Neuilly (Seine).
1907. **TRIPIER** (H.), sous-directeur des études à l'École Centrale, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17^e).
1920. **TROUSSET**, aide astronome à l'Observatoire de Floirac (Gironde).
1919. **TURMEL**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6^e).
1911. **TURRIÈRE**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1920. **VACQUANT**, professeur au lycée Janson-de-Sailly, rue de Siam, 28, à Paris (16^e).
1913. **VALIRON**, docteur ès sciences, professeur à la Faculté des Sciences, allée de la Robertsau, 52, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1893. **VALLÉE POUSSIN** (Ch.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, avenue des Alliés, 149, à Louvain (Belgique).
1904. **VANDEUREN**, professeur à l'École militaire, avenue Macau, 16, à Bruxelles.
1905. **VAN VLECK**, professeur de mathématiques, à l'Université, N. Pincknay St, 519, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1920. **VAROPOULOS**, docteur ès sciences de l'Université d'Athènes, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).
1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Epicure, 13, à Athènes (Grèce).
1898. **VASSILIEF**, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrowligne 12, m$^\cdot$ 19, à Pétrograde (Russie).
1920. **VAULOT**, rue Barbet-de-Jouy, 42, à Paris (7^e).
1920. **VAZILESCU**, avenue Carnot, 5, à Paris (17^e).
1913. **VEBLEN** (O.), professeur à l'Université de Princeton (États-Unis).
1920. **VERDIÉR**, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris (6^e).
1920. **VERGNE**, rue Aubert, 8, à Paris (9^e).
1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).

Date de l'admission.	
1920.	**VIEILLEFOND**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Garibaldi, 45, à Paris (15^e).
1911.	**VILLAT**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Maréchal-Pétain, 11, Strasbourg (Bas-Rhin).
1919.	**VIMEUX**, agrégé de mathématiques, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).
1920.	**VINTEJOUX**, professeur au lycée Carnot, rue Cernuschi, 12, à Paris (17^e).
1919.	**VOGT**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Grand-Verger, 33, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1888.	**VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900.	**VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5^e).
1919.	**WAVRE**, licencié ès sciences, rue Corneille, 5, à Paris (6^e).
1880.	**WALCKENAER**, inspecteur général en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7^e).
1920.	**WEBER**, professeur au lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (15^e).
1879.	**WEILL**, directeur honoraire du collège Chaptal, boulevard Delessert, 23, à Paris (16^e).
1919.	**WEILL**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6^e).
1906.	**WILSON** (E.-B.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911.	**WINTER**, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16^e).
1909.	**WOODS** (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878.	**WORMS DE ROMILLY**, inspecteur général des mines, en retraite, rue du Général-Langlois, 5, à Paris (16^e).
1920.	**XAVIER-LÉON**, directeur de la *Revue de Métaphysique et de Morale*, rue des Mathurins, 39, à Paris (8^e).
1912.	**YOUNG** (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, villa Collonge, La Conversion, à Vaud (Suisse).
1903.	**ZERVOS**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Sozopoleos, 88, à Athènes (Grèce).
1898.	**ZIWET**, professeur de mathématiques à l'Université Tappanavi, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1909.	**ZORETTI**, professeur de mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1919 ou 1920 : MM. **CALDARERA**, **FLOQUET**, **LAISANT**, **SAUVAGE**, **ZEUTHEN**.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — BOURLET. — CANET. — CHASLES. — CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE. HIRST. — LAFON DE LADÉBAT. — LÉAUTÉ. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — POINCARÉ. — DE POLIGNAC. — RAFFY. — SYLOW. — TANNERY (PAUL). — TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

	MM.		MM.
1873	CHASLES.	1897	PICARD.
1874	LAFON DE LADÉBAT.	1898	LECORNU.
1875	BIENAYMÉ.	1899	GUYOU.
1876	DE LA GOURNERIE.	1900	POINCARÉ.
1877	MANNHEIM.	1901	D'OCAGNE.
1878	DARBOUX.	1902	RAFFY.
1879	O. BONNET.	1903	PAINLEVÉ.
1880	JORDAN.	1904	CARVALLO.
1881	LAGUERRE.	1905	BOREL.
1882	HALPHEN.	1906	HADAMARD.
1883	ROUCHÉ.	1907	BLUTEL.
1884	PICARD.	1908	PERRIN (R.).
1885	APPELL.	1909	BIOCHE.
1886	POINCARÉ.	1910	BRICARD.
1887	FOURET.	1911	LÉVY (L.).
1888	LAISANT.	1912	ANDOYER.
1889	ANDRÉ (D.).	1913	COSSERAT (F.).
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.	1914	VESSIOT.
1891	COLLIGNON.	1915	CARTAN.
1892	VICAIRE.	1916	FOUCHÉ.
1893	HUMBERT.	1917	GUICHARD.
1894	PICQUET.	1918	MAILLET.
1895	GOURSAT	1919	LEBESGUE.
1896	KŒNIGS	1920	DRACH.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.......	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.......	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.......	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle.............	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore........	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin............	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin............	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin............	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne..........	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.........	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles.........	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.........	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta..........	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.......	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre.	*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague.	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Copenhague......	*Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.*	Danemark.
Cracovie..........	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft..............	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.......	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.......	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand............	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen........	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax....	Nova Scotian Institute of Science.	Nlle-Écosse(Canada)
Hambourg........	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem...........	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.......	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas............	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan............	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.........	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.........	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig...........	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig...........	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig...........	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.
Liége.............	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.........	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres..........	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne
Londres..........	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Mexico	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris	Institut des Actuaires français.	France.
Paris	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pétrograde	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Bohême.	
Prague	*Jednota českých mathematiců a fysiků.*	Tchéco-Slovaquie.
Prague	Société mathématique de Bohême.	
Princeton	*Annals of Mathematics.*	New-Jersey, États-Unis.
Rennes	*Travaux de l'Université.*	France.
Rome	Académie Royale des *Lincei.*	Italie.
Rome	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Sophia	*Annuaire de l'Université de Sophia.*	Bulgarie.
Stockholm	*Acta mathematica.*	Suède.
Stockholm	*Archiv for Mathematik.*	Suède.
Stockholm	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Turin	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie	Prace Matematyczno Fizyczne.	Pologne.
Venise	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Washington	National Academy of Sciences.	États-Unis.
Zagreb (Agram)	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Yougo-Slavie.
Zurich	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 14 JANVIER 1920.

PRÉSIDENCE DE M. LEBESGUE.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil.

Elle adopte la motion suivante : « La Société mathématique de France, considérant que les relations avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies ont été suspendues, décide que ces relations ne pourront être reprises qu'à la suite d'une demande formelle des membres visés, demande qui, après examen, sera soumise au vote du Conseil. »

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. M. Marty, présenté par MM. Borel et Lebesgue; L. Fort, présenté par MM. Muxart et Montel; Parenty, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Charpy, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Delens, présenté par MM. Cartan et Lebesgue; M. Gevrey, présenté par MM. Lebesgue et Picard; Sainte-Laguë, présenté par MM. Borel et Lebesgue; Nepveu, présenté par MM. Guichard et Lebesgue; P. Mineur, présenté par MM. Lebesgue et Montel; G. Cambefort, présenté par MM. Lebesgue et Montel; Lagarde, présenté par MM. Fatou et Lebesgue; Mascart, présenté par MM. Drach et Lebesgue; Rouyer, présenté par MM. Cotton et Lebesgue; E. Boncenne, présenté par MM. Fouché et Lebesgue; Ch. Riquier, présenté par MM. Appell et Lebesgue; R. Le Vavasseur, présenté par MM. Lebesgue et Vessiot; G. Milhaud, présenté par MM Lebesgue et Montel; E. Combet, présenté par MM. Bioche et Lesgourgues; Coissard, présenté par MM. Guichard et Vessiot; J. Lhermitte, présenté par MM. Fatou et Lebesgue; H. Vergne, présenté par MM. Appell et Picard; L. Pomey, présenté par MM. Bricard et Hadamard; G. Dufour, présenté par MM. Bioche et Lebesgue; L. Brunschwicg, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; E. Serrier, présenté par MM. Bioche et Lesgourgues; Baudet, présenté par MM. Barrau et Bioche; Schuh, présenté par MM. Barrau et Bioche; R. Thiry, présenté par MM. Antoine et Villat; Vaulot, présenté par MM. d'Ocagne et Lebesgue; E. Bloch, présenté par MM. Langevin et Montel; Brantut, présenté par MM. Charbonnier et Lebesgue; Delarue, présenté par MM. Grévy et Lesgourgues; Albo, présenté par MM. Labrousse et Lebesgue; P. Aubert, présenté par MM. Bioche et Lebesgue; Vintéjoux, présenté par MM. Cartan et Leau; G. Arvengas, présenté par MM. Bouligand et Montel; E. Pomey, présenté par MM. Bricard et Hadamard; J.-B. Pomey, présenté par MM. Bricard et Hadamard; Lacaze, présenté par MM. Boulanger et Fouët; Ducrot, présenté par MM. Maluski et Montel; Le Corbeiller, présenté par MM. Hadamard et J.-B. Pomey; de Broglie, présenté par MM. Lebesgue et de Pange; A. Lerner, présenté par MM. Lebesgue et Montel.

Réunie en Assemblée générale extraordinaire, la Société adopte les conclusions du rapport sur les modifications aux Statuts, présentées par une Commission de sept de ses membres [1], nommés par le Conseil d'administration. Ces conclusions seront soumises à l'approbation du Conseil d'État.

SÉANCE DU 28 JANVIER 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société: MM. A. Bernheim, présenté par MM. Lebesgue et Thybaut; Cheronnet, présenté par MM. Dain et Dautry; Pierra, présenté par MM. Dain et Dautry; Mayer, présenté par MM. Dain et Dautry; Vacquant, présenté par MM. Boulanger et Maillet; Weber, présenté par MM. Lebel et Lebesgue; Lefebvre, présenté par MM. Bioche et Painlevé; Fleuchot, présenté par MM. Cerf et Lebesgue; Léon Brillouin, présenté par MM. Marcel Brillouin et Langevin; Jansson, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Coppel, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Danelle, présenté par MM. Bioche et Combet; Abelin, présenté par MM. Drach et Lebesgue; Pons, présenté par MM. Lebesgue et Marchaud; H. Commissaire, présenté par MM. Lebesgue et Vessiot; L. Roy, présenté par MM Blutel et Boulanger; Guitton, présenté par MM. Jacquet et Lebesgue; Caussé, présenté par MM. Blutel et Lebesgue; Xavier-Léon, présenté par MM. Hadamard et Winter;

---

[1] MM. Andoyer, Auric, Boulanger, Cahen, Drach, Lebesgue, Vessiot.

A. Cahen, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; G. Obriot, présenté par MM. Lebesgue et Leconte; Portalier, présenté par MM. Casabonne et Thybaut; Peronnet, présenté par MM. Appell et Esclangon; Marmion, présenté par MM. Barré et Hadamard; Auterle, présenté par MM. Galbrun et Montel; Laubeuf, présenté par MM. Drach et Hadamard.

Communication :

M. Fatou : *Sur les propriétés d'une classe de fonctions uniformes analogues aux fonctions fuchsiennes.*

La substitution rationnelle $z_1 = R(z)$, ayant un point double dont le multiplicateur s est compris, en module, entre zéro et un, l'équation fonctionnelle de Schröder

$$f[R(z)] = sf(z)$$

admet une solution holomorphe et uniforme dans le domaine du point double. L'étude de cette fonction au voisinage des points frontières de son domaine d'existence conduit à des propriétés curieuses, entièrement différentes de celles que possèdent les fonctions déjà connues ayant des ensembles parfaits de points singuliers.

$f(z)$ est un invariant relatif d'un certain groupe discontinu de substitutions algébriques; les invariants absolus de ce même groupe, ne prenant qu'un nombre fini de fois chaque valeur dans un domaine fondamental, s'obtiennent en posant

$$I(z) = \psi[\log f(z)],$$

en désignant par $\psi(u)$ une fonction elliptique de périodes $2i\pi$ et $\log s$. Les fonctions $I(z)$ ainsi obtenues ont une infinité dénombrable de points singuliers essentiels isolés qui sont les zéros de $f(z)$. Les fonctions inverses $z(I)$ n'ont comme singularités qu'un nombre fini de points critiques algébriques; dans certains cas particuliers, ce nombre peut être égal à 3; la fonction $I(z)$ offre alors de très grandes analogies avec les fonctions de Schwarz.

SÉANCE DU 11 FÉVRIER 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Mouthon présenté par MM. Leconte et Maluski; A. Vieillefond, présenté par

MM. Lebesgue et Montel; de Gramont de Guiche, présenté par MM. Appell et Picard; Defourneaux, présenté par MM. Appell et Lebesgue; F.-L. Nielsen, présenté par MM. Borel et Strömer.

Conférence de M. Langevin sur la théorie de la relativité ([1]).

Communication :

M. Drach : *Sur les formes quadratiques de différentielles et les surfaces de translation.*

Soit $dS^2 = \Sigma_{r,s} a_{rs} dx_r dx_s$ une forme quadratique de différentielles à n variables $x_1, \ldots, x_n$; il existe un symbole de variation δ bien déterminé portant à la fois sur les x et sur les dx, et permutable avec le symbole d quels que soient les dx_i et les δx_i, qui n'altère pas la forme quadratique dS^2. Cette variation δ est définie par les équations

$$\delta\, dx_i + \sum_{r,s} A_{rs,i}\, dx_r\, \delta x_s = 0,$$

$$A_{rs,i} = \sum a_{rs,j} A_{j,i} = \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\},$$

$$a_{rs,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{sj}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_j} \right) = \left[\begin{matrix} rs \\ j \end{matrix} \right],$$

où $A_{j,i}$ est l'élément $\dfrac{1}{\Delta} \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{j,i}}$, Δ désignant le discriminant de la forme.

Au point de vue géométrique, les quatre points x, $x + dx$, $x + \delta x$, $x + dx + \delta x + \delta\, dx$ forment, dans l'espace E_n qui a pour carré de l'élément linéaire dS^2, un quadrilatère dont les côtés opposés sont égaux.

Si l'on considère les équations

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\, \partial \theta} + \sum A_{rs,i} \frac{\partial x_r}{\partial t} \frac{\partial x_s}{\partial \theta} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

elles définissent des variétés à deux dimensions entièrement déterminées par deux courbes arbitraires qui se coupent : $t = t_0$, $\theta = \theta_0$; les courbes $t = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ partagent ces variétés en quadrila-

([1]) La conférence de M. Langevin, étant parvenue trop tard, ne pourra être insérée que dans les *Comptes rendus* de 1921.

tères à côtés opposés égaux. L'ensemble de ces variétés est lié de manière invariante au dS^2 de l'espace, comme l'ensemble des géodésiques. Pour l'espace euclidien, elles se réduisent aux surfaces de translation et les quadrilatères à côtés opposés égaux sont des parallélogrammes; on les désignera sous le nom de *surfaces de translation* de E_n.

Analytiquement, la variation δ appliquée à une forme linéaire invariante $F = \Sigma X_i \delta x_i$ donne une forme bilinéaire invariante δF; appliquée à une forme m-linéaire invariante, elle donne une forme $(m+1)$-linéaire invariante, etc.

Des remarques équivalentes au point de vue du calcul ont été faites par Christoffel; développées systématiquement, mais sans l'introduction de la variation δ, elles constituent le calcul différentiel absolu de Ricci dont M. T. Levi-Civita a montré les avantages. Les résultats précédents font partie d'un Mémoire adressé à l'Institut en 1899, dont un résumé seul a paru [*Notice sur mes travaux scientifiques*, Privat, Toulouse 1909].

Ils prennent une importance nouvelle du fait des études récentes sur la *Relativité :* on voit en effet que dans un espace E_n quelconque, n'admettant pas de transformation en lui-même, c'est-à-dire ne permettant pas le mouvement des figures, des déplacements sont possibles pour des corps infiniment petits en négligeant seulement des déformations d'ordre supérieur. On peut choisir, à partir d'un point x, n éléments différentiels d_1x, d_2x, ..., d_nx formant un n-èdre et ensuite la direction δx de la translation infiniment petite.

Si l'on se reporte à l'espace ordinaire, l'ensemble des surfaces de translation est attaché de manière invariante à l'élément linéaire

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

On est ainsi conduit à étudier de près la relation, *au voisinage d'un point*, entre une surface quelconque et les surfaces de translation. J'ai reconnu que l'on peut remplacer une surface quelconque, par une surface de translation, de deux manières différentes, en négligeant seulement des infiniment petits du *cinquième ordre*. Les relations établies par là entre une surface quelconque et les deux surfaces de translation sont relatives à des propriétés très cachées des surfaces. On sait d'ailleurs que les surfaces de translation sont définies par deux équations aux dérivées partielles du cinquième ordre.

SÉANCE DU 25 FÉVRIER 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Gay, présenté par MM. Cotton et Got; Doucet, présenté par MM. Bouligand et Montel; Morel, présenté par MM. Bouligand et Le Roux; Anzemberger, présenté par MM. Montel et Vessiot; S. Gheorghiu, présenté par MM. Drach et Pompeiu; P. Sergesco, présenté par MM. Drach et Pompeiu; Pagès, présenté par MM. Drach et A. Lévy; L. Flavien, présenté par MM. Borel et Lebesgue; G. Trousset, présenté par MM. Andoyer et Lebesgue.

Communications :

M. A. Lévy : *Sur l'itération des polynomes.*

M. Fatou : *Remarque au sujet du théorème de M. Picard sur les fonctions entières.*

I. Soit $f(z)$ une fonction entière telle que les trois équations

$$f(z)=e_1, \qquad f(z)=e_2, \qquad f(z)=e_3,$$

où e_1, e_2, e_3, désignant les constantes finies distinctes, n'aient que les racines d'ordre pair de multiplicité; e_1, e_2, e_3 sont pour $f(z)$ des valeurs *semi-exceptionnelles*, ou des valeurs exceptionnelles de poids $\frac{1}{2}$, tandis que l'infini est une valeur exceptionnelle au sens ordinaire. On peut supposer sans diminuer la généralité

$$e_1+e_2+e_3=0.$$

Considérons l'intégrale elliptique de première espèce

$$u=\int_\infty^Z \frac{dZ}{\sqrt{4(Z-e_1)(Z-e_2)(Z-e_3)}}. \tag{1}$$

Si, dans l'une des déterminations de $u(Z)$, on remplace Z par $f(z)$, on obtient une fonction analytique $\psi(z)$. Je dis que $\psi(z)$ est une fonction entière; en effet, en vertu de

$$\psi'(z)=\frac{f'(z)}{2\sqrt{[f(z)-e_1][f(z)-e_2][f(z)-e_3)}}, \tag{2}$$

les seuls points singuliers possibles de $\psi'(z)$ à distance finie sont les racines ξ des équations $f(z) = e_i$. Si $2p$ est l'ordre de multiplicité d'une telle racine, on aura d'après (2) au voisinage de ξ :

$$(3) \qquad \psi'(z) = \frac{(z-\xi)^{2p-1}}{(z-\xi)^p}\,\mathfrak{P}(z-\xi) = (z-\xi)^{p-1}\,\mathfrak{P}(z-\xi).$$

Comme $p-1$ est $\geqq 0$, ξ est un point ordinaire pour $\psi'(z)$ et $\psi(z)$.

C. Q. F. D.

L'inversion de l'intégrale elliptique donne ensuite la relation

$$(4) \qquad f(z) = p[f(z) \mid \omega_1, \omega_2],$$

p désignant la fonction elliptique de Weierstrass. $f(z)$ n'ayant pas de pôles, $\psi(z)$ ne prend jamais les valeurs congrues à zéro (mod $2\omega_1$, $2\omega_2$); $\psi(z)$ est donc une constante d'après le théorème de M. Picard, et il en est de même de $f(z)$.

Le même raisonnement montre que les fonctions $f(z)$ satisfaisant aux conditions précédentes non plus dans tout le plan, mais dans un domaine où elles sont holomorphes et uniformes, y forment une famille normale.

II. Supposons ensuite que l'infini soit pour $f(z)$ une valeur semi-exceptionnelle comme e_1, e_2, e_3, c'est-à-dire que $f(z)$ soit une fonction méromorphe n'ayant que des pôles d'ordre pair. Je dis que $\psi(z)$ définie comme précédemment est encore une fonction entière; les points racines de $f(z) = e_i$ étant des points ordinaires pour $\psi(z)$, il suffit de prouver qu'il en est de même pour les pôles de $f(z)$. Or $\dfrac{du}{dZ}$ étant le produit de $Z^{-\frac{3}{2}}$ par une fonction de Z régulière à l'infini, on aura d'après (2) autour d'un pôle ξ d'ordre $2p$ de $f(z)$:

$$\psi'(z) = \frac{1}{(z-\xi)^{2p+1}}\,(z-\xi)^{3p}\,\mathfrak{P}(z-\xi) = (z-\xi)^{p-1}\,\mathfrak{P}(z-\xi)$$

avec $p - 1 \geqq 0$, ce qui prouve notre assertion.

La réciproque a lieu, c'est-à-dire que toutes les fonctions méromorphes admettant les quatre valeurs semi-exceptionnelles (e_1, e_2, e_3, ∞) s'obtiennent en remplaçant dans $p(u, \omega_1, \omega_2)$ l'argument u par une fonction entière arbitraire de z.

Supposons qu'il existe une cinquième valeur semi-exceptionnelle $a \neq e_1, e_2, e_3, \infty$. L'équation $f(z) = a$ équivaut à

$$\psi(z) = \pm u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

u_0 distinct de o, ω_1, ω_2, ω_3 (mod $2\omega_1$, $2\omega_2$).

Comme $\wp'(+u_0)$ a une valeur finie non nulle, les valeurs considérées de z sont du même ordre (pair) de multiplicité en tant que racines de la première ou de la seconde équation. Les valeurs

$$\pm u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

en nombre infini, sont donc les valeurs semi-exceptionnelles de la fonction entière $\psi(z)$, qui d'après I est, par suite, une constante; il en est de même de $f(z)$.

Le même raisonnement permet d'établir que les fonctions méromorphes dans un domaine où elles possèdent cinq valeurs semi-exceptionnelles y forment une famille normale.

III. Supposons que $Z = f(z)$ admette les deux valeurs exceptionnelles ordinaires 0 et ∞ et la valeur semi-exceptionnelle $Z = 1$, et considérons l'intégrale de troisième espèce

$$(5) \qquad u = \int_1^Z \frac{dZ}{2Z\sqrt{Z-1}} = \operatorname{arc\,tang} \sqrt{Z-1}$$

qui admet les points critiques algébriques $Z = 1$, $Z = \infty$ et le point critique logarithmique $Z = 0$. En remplaçant Z par la fonction entière $f(z)$ dans $u(Z)$, on obtient encore une fonction entière $\psi(z)$ et l'on a, d'après (5),

$$(6) \qquad f(z) = 1 + \operatorname{tang}^2 \psi(z).$$

$f(z)$ n'ayant pas de pôles, $\psi(z)$ ne prend jamais les valeurs en nombre infini de la forme $n\pi + \frac{\pi}{2}$; $\psi(z)$ est donc une constante en vertu du théorème de M. Picard; il en est de même de $f(z)$. On verra encore que les fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine, avec deux valeurs exceptionnelles et une valeur semi-exceptionnelle, y forment une famille normale.

IV. Il résulte de cette discussion que deux valeurs semi-exceptionnelles remplacent une valeur exceptionnelle dans les énoncés du théorème de M. Picard et de ses diverses généralisations. En particulier, si une fonction uniforme dans un domaine y possède au plus un point singulier essentiel, le nombre pondéré des valeurs exceptionnelles de cette fonction ne peut être égal ou supérieur à $\frac{5}{2}$ à moins qu'elle ne se réduise à une constante.

SÉANCE DU 10 MARS 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Dedron, présenté par MM. Borel et Lebesgue; Franceschini, présenté par MM. Dedron et Lebesgue; Lagorsse, présenté par MM. Dedron et Lebesgue; Vazilescu, présenté par MM. Lalesco et Pompeiu.

Communications :

M. Pompeiu : *Sur les fonctions harmoniques.*

M. Lebesgue : *Sur le théorème de la moyenne et le problème de Dirichlet.*

A l'occasion de l'intéressante Communication de M. Pompeiu, on peut signaler que le théorème qui affirme que les fonctions harmoniques V sont caractérisées par le fait d'être en tout point P égal à la moyenne des valeurs qu'elles prennent dans un cercle C décrit du point P comme centre, a été considéré sous deux aspects différents.

Ordinairement, on entend par là que l'égalité

$$\text{(1)} \qquad V(P) = \iint_C \frac{V(M)\, dM}{\text{aire de C}}$$

est supposée vérifiée par tout cercle C de centre P. Mais on peut aussi entendre que l'égalité précédente est remplie en chaque point pour *un* certain cercle C de centre P. Sous des conditions de continuité très larges, ceci suffit encore pour que l'on puisse affirmer que V(P) est harmonique; mais, jusqu'ici, ce résultat n'a été obtenu que d'une manière très indirecte : partant d'une fonction continue $\varphi(M)$ égale à V(P) sur la frontière du domaine considéré que l'on substitue à V(M) dans le second membre de (1), on a une fonction $V_1(P)$ qui, substituée dans le second membre, donne $V_2(P)$, etc.

Ces itérations successives définissent une fonction limite V(P) satisfaisant à (1) et qui est l'unique solution possible de (1). Si donc, par ailleurs, on a démontré la possibilité de résoudre le problème de Dirichlet pour le domaine étudié, il est bien prouvé que V(P) est harmonique.

Sur les polygones de Poncelet.

Lorsqu'il existe un polygone de m côtés inscrit dans une ellipse et circonscrit à une ellipse homofocale, il en existe une infinité, d'après le théorème de Poncelet, et ils ont tous même périmètre, d'après un théorème de Chasles. Cette dernière propriété ne s'étend pas facilement aux polygones inscrits et circonscrits dans deux coniques quelconques, parce que la longueur est une notion non projective ; on obtient au contraire un énoncé projectif, et par suite applicable dans tous les cas, en considérant le théorème de Chasles comme un cas particulier d'un théorème plus général.

S'il existe des polygones de m côtés circonscrits à une conique C et dont les sommets décrivent m coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ faisant partie avec C d'un même faisceau tangentiel F, tous ces polygones ont même longueur cayleyenne quand on prend pour absolue une conique du faisceau tangentiel F.

Corrélativement : s'il existe des polygones de m côtés inscrits dans une conique C et dont les côtés enveloppes m coniques $T_1, T_2, \ldots, T_m$ faisant partie avec C d'un même faisceau ponctuel F, tous ces polygones ont une somme d'angles constante, donc sont de même aire cayleyenne, quand on prend pour absolue une conique du faisceau ponctuel F.

Il faut avoir bien soin de se rappeler que les longueurs, angles et aires ont plusieurs déterminations possibles, c'est l'une d'elles qui est constante. On peut prouver de plus que ces longueurs ou aires de polygones satisfont, quand il s'agit d'éléments réels et que $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ sont confondues, aux mêmes propriétés de maximum et de minimum que dans le cas classique envisagé par Chasles.

SÉANCE DU 24 MARS 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communication :

M. A. Lévy : *Sur une interprétation des réduites d'une fraction continue périodique.*

SÉANCE DU 14 AVRIL 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Thomas Muir, présenté par MM. Drach et Galbrun.

Communications :

M. Fouché : *Sur la double génération de l'épicycloïde et le calcul de la longueur de l'arc et le calcul de l'aire.*

M. Lebesgue : *Sur les ombilics d'une quadrique.*

Se donner un ombilic d'une quadrique c'est se donner trois conditions simples; peut-on déterminer une quadrique en l'assujettissant à avoir trois points donnés pour ombilics ?

Partant des propriétés données des ombilics (les ombilics sont les intersections des plans principaux avec les génératrices isotropes de la quadrique; les quatre ombilics situés dans un même plan principal forment un rectangle de côtés parallèles à deux des axes), on voit de suite que si l'on se donne deux ombilics, qui doivent être situés dans un même plan principal, les autres ombilics ont un lieu formé de plans et de sphères. Donc si l'on se donne arbitrairement trois points A, B, C comme ombilics d'une quadrique, ces trois points devront être respectivement dans chacun des trois plans principaux. Il résulte de là que les deux génératrices qui passent par A ne peuvent pas être parallèles à celles de B, sans quoi A et B seraient diamétralement opposés; les génératrices de A et B ne peuvent pas être non plus toutes quatre de directions différentes, sans quoi les plans tangents en A et B seraient parallèles à deux plans de sections circulaires associés et AB serait parallèle à l'un des axes. Donc une et une seule génératrice de A est parallèle à une des génératrices de B; la génératrice du cône asymptote de la quadrique, qui est parallèle à ces génératrices parallèles passant par A et B, passe donc par le milieu c de AB. Et comme les génératrices dont nous parlons sont isotropes, le centre de la quadrique cherché est l'un des deux centres des sphères de rayon nul contenant le cercle des neuf points du triangle ABC. Ayant choisi le centre de la quadrique en O, dans l'une des deux positions possibles, on a Oc, puis, en menant par A et B des parallèles à Oc, deux génératrices de la quadrique. En opérant de même avec les milieux b et a de CA et BC, on détermine la quadrique par six génératrices.

Le problème admet donc deux solutions qui s'obtiennent très simplement. Ce résultat paraît en contradiction avec la remarque suivante : une sphère quelconque passant par A, B, C répond à la question.

La contradiction n'est qu'apparente; si l'on écrivait les relations analytiques, qui expriment que A, B, C sont des ombilics, on aurait un système d'équations se décomposant et qui conduirait, d'une part à la famille des sphères, d'autre part aux deux quadriques trouvées.

Il en est de même en ce qui concerne le lieu des ombilics des quadriques, dont deux ombilics situés dans un même plan principal occupent des positions données A et B; nous avons trouvé des sphères et des plans, mais il y a, en plus, un lieu singulier provenant des sphères passant par A et B. Ce lieu comprend tout l'espace.

On est peu habitué à signaler les lieux singuliers qui embrassent tous les points de l'espace ou du plan; on les rencontre cependant fréquemment. On aura par exemple un lieu singulier comprenant tout le plan en cherchant le lieu des sommets des coniques admettant deux points donnés A et B pour sommets.

SÉANCE DU 28 AVRIL 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Election :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. C. Isch-Wall, présenté par MM. Julia et Paul Lévy.

Communication :

M. P. Lévy : *Sur les fonctions abéliennes singulières de trois variables.*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de fonctions abéliennes de périodes

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0. & G, & H'', & H', \\ 0, & 1, & 0, & H'', & G', & H, \\ 0, & 0, & 1, & H', & H, & G'' \end{matrix}$$

admette des transformations, dites *singulières*, autres que celles d'Hermite, est qu'il existe entre les périodes *un système de relations singulières*, à coefficients entiers, de la forme

$$\lambda \mathcal{G} + \lambda' \mathcal{H}'' + \lambda'' \mathcal{H}' + \gamma' G'' - \beta'' G' + (\beta' - \gamma'') H + \alpha' H' - \alpha'' H'' + \mu = 0,$$
$$\lambda \mathcal{H}'' + \lambda' \mathcal{G}' + \lambda'' \mathcal{H} + \alpha'' G - \gamma G'' + (\gamma'' - \alpha) H' + \beta'' H'' - \beta H + \mu' = 0,$$
$$\lambda \mathcal{H}' + \lambda' \mathcal{H} + \lambda'' \mathcal{G}'' + \beta G' - \alpha' G + (\alpha - \beta') H'' + \gamma H - \gamma' H' + \mu'' = 0,$$

$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}''$, ..., $\mathcal{G}''$ désignant les mineurs correspondant à G, H'', ..., G'' dans le déterminant formé par ces quantités.

M. Humbert a découvert que ce système de relations entraîne l'existence d'un système analogue, de coefficients

$$\alpha_1 = \lambda\mu - (\alpha), \qquad \beta_1 = \lambda\mu' - (\alpha'), \qquad \gamma_1 = \lambda\mu'' - (\alpha''),$$
$$\lambda_1 = \lambda\alpha + \lambda'\beta + \lambda''\gamma, \qquad \mu_1 = \mu\alpha + \mu'\alpha' + \mu''\alpha'',$$

les autres coefficients étant donnés par des formules analogues, obtenues par permutation. (α), (α'), ..., (γ'') désignent les mineurs correspondant à α, α', ..., γ'' dans le déterminant formé par ces quantités.

Les coefficients α, β', γ'' n'intervenant que par leurs différences, un système de relations singulières peut être représenté en coordonnées homogènes par un point M d'un espace à treize dimensions. Si des périodes vérifient le système de relations représentées par ce point, elles vérifient celui représenté par le point M′ qui s'en déduit par l'opération de M. Humbert, et par suite tous ceux représentés par des points de la droite MM′. Nous appellerons une telle droite *droite* D.

Il peut d'ailleurs arriver que le système obtenu par M. Humbert soit nul, ou identique au système initial. Ce système, et le point M, sont dits dans ce cas *exceptionnels*. Le lieu des points exceptionnels est une variété V à huit dimensions.

Une droite D coupe cette variété en trois points, en général distincts. Elle est bien définie par la donnée d'un point autre que ces trois points exceptionnels, et s'en déduit comme en partant du point M. Mais par chaque point exceptionnel passent une quadruple infinité de droites D.

L'ensemble des points représentant les systèmes de relations singulières vérifiés par des systèmes de périodes donnés constitue ce que nous appellerons *une variété* L (linéaire). Outre la propriété évidente d'être linéaire, on remarque qu'une telle variété est, ou un lieu de points exceptionnels, ou un lieu de droites D. Nous allons étudier les deux cas.

1° *Plans* Π, *ou plans situés sur la variété* V. — Il existe des plans Π_4, à quatre dimensions, situés sur la variété V. Ils dépendent de cinq paramètres ; deux de ces plans se coupent en un point et un seul.

En dehors des droites Δ, plans Π_2 et Π_3 situés sur ces plans Π_4, il existe sur la variété V des plans π_2, dépendant de neuf paramètres.

Le lieu des droites Δ passant par un point peut être considéré comme décrit, soit par une triple infinité de plans π_2, soit par une simple infinité de plans Π_4.

2° *Variétés* L *lieux de droites* D. — Sur chaque droite D sont situés trois points exceptionnels. Il y a donc trois nappes de tels points. Si n_1, n_2, n_3 et n sont les nombres de dimensions de ces nappes et de la variété L, on a

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2n - 2.$$

Il y a trois cas à distinguer :

Premier cas : plans $\mathfrak{P}$. — Ces plans comprennent des droites D passant par un point fixe B de la variété V. Donc

$$n_1 = 0, \qquad n_2 = n_3 = n - 1.$$

Le lieu des droites D passant par un même point est un plan $\mathfrak{P}_5$, à cinq dimensions. On en déduit l'existence de plans $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$.

Dans un plan $\mathfrak{P}_5$, le lieu des deux points exceptionnels autres que B situés sur chaque droite D est une quadrique Q à discriminant non nul.

Si cette quadrique passe par B, ce point exceptionnel est double pour toutes les droites D passant par B, et triple sur celles qui touchent Q. Si elle ne passe pas par B, ce point est simple pour toutes les droites D passant par ce point. Le fait, pour un point exceptionnel B, de compter pour plus que 1 dans la recherche des points exceptionnels d'une droite D, ne dépend donc que de ce point et non de la droite D.

La quadrique Q contient deux séries triplement infinies de plans à deux dimensions. Ils sont des deux espèces différentes (π_2 et Π_2), définies ci-dessus.

Deuxième cas : plans $\mathfrak{L}$. — Un seul des nombres n_1, n_2, n_3 a la valeur $n - 1$. Donc $n_1 + n_2 = n_3 = n - 1$. Les deux premières nappes sont des surfaces planes (donc nécessairement des plans situés sur la variété V), et telles qu'en joignant un point quelconque de l'une à un point quelconque de l'autre on ait une droite D. On ne peut pas obtenir de telles variétés en prenant pour ces nappes des plans Π_4, Π_3 ou Π_2. Mais les plans π_2 peuvent s'associer deux à deux de manière à vérifier cette condition. On a alors des variétés $\mathcal{L}_5$, dépendant de neuf paramètres. Dans ces variétés, la troisième nappe du lieu de points exceptionnel est un plan Π_4, dit *plan de base de la variété* $\mathcal{L}_5$.

Il existe des variétés $\mathcal{L}_5$ (spéciales) pour lesquelles les plans π_2 et π'_2 constituant les deux premières nappes sont confondues.

De ces variétés, on déduit évidemment l'existence de variétés $\mathcal{L}_4$ et $\mathcal{L}_3$, obtenues en remplaçant un ou deux des plans π_2 et π'_2 par des droites de ces plans.

Troisième cas : plans $\mathfrak{M}$. — Ce sont ceux pour lesquels les nombres n_1, n_2, n_3 sont tous inférieurs à $n-1$. Leur énumération complète est plus longue que pour les cas précédents. Une catégorie particulièrement intéressante est celle des variétés $\mathfrak{M}_9$, lieux des variétés $\mathcal{L}_5$ ayant un plan de base donné.

SÉANCE DU 12 MAI 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. A. Lévy : *Sur une généralisation des fractions continues et sur leur application à la représentation des nombres par des formes du deuxième degré.*

M. Drach : *Sur la précession dans le mouvement d'un solide pesant de révolution fixé par un point de son axe.*

Le mouvement de l'axe d'un solide homogène pesant de révolution qui a un point fixe, O, sur cet axe (cas de Lagrange) est représenté géométriquement par le déplacement du point P où cet axe Oz, dirigé vers le centre de gravité G, rencontre une sphère de centre O et de rayon 1. On sait que la courbe décrite par P est comprise entre deux parallèles, correspondant aux valeurs u_1, u_2 de $\cos\theta$ où l'on désigne par θ la *distance zénithale* (angle de Oz avec la verticale Oz_1); l'orientation du plan z_1Oz est fixée par l'*azimut* ϖ et la *précession* est l'angle $\varpi + \frac{\pi}{2}$.

L'étude *complète* de l'arc de trajectoire compris entre les parallèles extrêmes, parcouru dans une demi-période de temps, se fait de la manière la plus simple quand on choisit comme paramètres du mouvement, avec u_1, u_2, la constante u_0 qui, lorsqu'elle se trouve entre u_1 et u_2, définit la position de P où la variation de l'azimut (ou de la précession) change de sens. Ayant fixé u_1 et u_2, la variation de u_0 donnera une suite continue de trajectoires, dont les extrêmes sont des circonférences tangentes aux parallèles extrêmes, qui correspondent à des mouvements de Poinsot. Les valeurs remarquables de u_0 sont les valeurs u'_1, u'_2 données par l'intersection des plans de ces circonférences avec la verticale et la demi-somme $\sigma = \frac{u'_1 + u'_2}{2}$; les conclusions dépendent du signe de $u_1 + u_2$.

On trouve, en particulier, que *la variation totale de l'azimut* (ou de la précession) *dans une demi-période de temps est positive* (elle s'annule pour l'un des mouvements de Poinsot). On sait que cette proposition a été établie par M. Hadamard (*Bulletin des Sciences math.*, 1895) à l'aide du théorème de Cauchy pour les fonctions de variables complexes.

SÉANCE DU 26 MAI 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communication :

M. le commandant Barré : *Sur les courbes dont les normales principales rencontrent deux droites fixes.*

1. Généralités et mise en équation du problème. — La seule étude qui à notre connaissance fasse mention des courbes dont les normales principales rencontrent deux droites fixes, et encore indirectement, et sans mentionner cette propriété, est le Mémoire d'Hazzidakis sur les courbes indéformables qui engendrent une surface dont elles forment une famille de géodésiques (*Journal de Crelle*, t. 95, 1883, p. 120 et suiv.) [1]. Nous en avons nous-même rencontré une variété

---

[1] Notre camarade et confrère, M. le commandant Marmion, nous a signalé la curieuse remarque suivante : Paul Serret dans sa *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure* (p. 96) parle bien explicitement de ces courbes, mais il y met en doute leur existence.

dans notre Mémoire *Application de la fonction cinématique à la théorie des surfaces engendrées par une courbe variable*, celle des hélices dont la normale principale rencontre une droite fixe. Ces hélices particulières avaient d'ailleurs déjà été l'objet de quelques études signalées dans le Mémoire précité.

Prenons les axes suivants : Oz perpendiculaire commune aux droites Δ et Δ' que rencontrent les normales principales, O milieu de la plus courte distance, Ox et Oy dans un plan parallèle à Δ et à Δ' et bissectrices de leurs directions. Soient $2a$ la plus courte distance de Δ et de Δ', 2θ leur angle aigu ; on traite sans aucune difficulté les deux équations différentielles du second ordre définissant ces courbes et dont immédiatement on a les intégrales premières :

$$(1)\quad x\frac{dz}{ds} - z\frac{dx}{ds} - a\cot\theta\frac{dy}{ds} = c_1, \qquad y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds} - a\tang\theta\frac{dx}{ds} = c_2$$

$$(c_1,\ c_2,\ \text{const.}).$$

En combinant ces équations avec les équations du second ordre initiales et celle que l'on obtient en différentiant la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

on obtient

$$(2)\qquad \frac{dx}{ds} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{\Delta_3}{\Delta_0},$$

où les Δ sont des polynomes en x, y, z. On en conclut que la courbe étudiée se trouve sur la surface d'équation

$$(3)\qquad \Delta_0^2 - (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) = 0.$$

Cette équation contient de fait Δ_0 en facteur. Cette solution parasite est constituée par la surface réglée s'appuyant sur Δ, Δ', et l'ombilicale. En l'éloignant on voit que les courbes Γ étudiées se trouvent sur une surface du quatrième degré Σ.

2. Intégration des équations du problème. — En employant une très intéressante méthode due à M. Hazzidakis, on trouve

$$(4)\quad 2\frac{x}{a} = e^{\int_{\zeta_1}^{z}\theta_1\,dz} - \frac{\delta_1}{a^2}e^{-\int_{\zeta_1}^{z}\theta_1\,dz}, \qquad 2\frac{y}{a} = e^{\int_{\zeta_2}^{z}\theta_2\,dz} - \frac{\delta_2}{a^2}e^{-\int_{\zeta_2}^{z}\theta_2\,dz}$$

$$(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \text{const.})$$

en posant

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\delta_1 = z^2 + a^2\cot^2\theta - c_1^2, \qquad \delta_2 = z^2 + a^2\operatorname{tang}^2\theta - c_2^2,\\
&\Delta = \sqrt{-P_4(z)},\\
&\theta_1 = \frac{1}{\Delta}\left[a\operatorname{tang}\theta - \frac{\delta_2 z}{L+\Delta}\right], \qquad \theta_2 = \frac{1}{\Delta}\left[a\cot\theta - \frac{\delta_1 z}{L+\Delta}\right],\\
&L = \frac{a}{\sin\theta\cos\theta}\,z - c_1c_2, \qquad P_4 = \delta_1\delta_2 - L^2.
\end{aligned}
\right.
$$

La présence de ζ_1 et ζ_2 montre que c_1 et c_2 étant données, la courbe dépend encore de deux constantes arbitraires, ce qui s'explique très bien eu égard à ce que la courbe se trouve sur une surface Σ définie par c_1 et c_2. Des relations (5) on peut d'ailleurs trouver l'équation de Σ sous la forme

$$
(6)\qquad \delta_1 y^2 - 2Lxy + \delta_2 x^2 + P_4(z) = 0.
$$

Dans la discussion de ces courbes la réalité des racines de P_4 joue un rôle capital. Deux racines sont toujours réelles. Les quatre le sont si

$$
\begin{aligned}
(7)\quad &\frac{a^2c_1^4c_2^4}{\sin^4\theta\cos^4\theta} - \frac{1}{3}\,\frac{c_1^2c_2^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\,(2a^2 + c_1^2 + c_2^2)\\
&\quad\times\left[4a^2(c_1^2\operatorname{tang}^2\theta + c_2^2\cot^2\theta - a^2) + \frac{1}{9}(2a^2 + c_1^2 + c_2^2)^2\right]\\
&\quad + \frac{16}{27}(c_1^2\operatorname{tang}^2\theta + c_2^2\cot^2\theta - a^2)\\
&\qquad\qquad\times\left[a^2\left(\frac{c_1^2}{\cos^2\theta} + \frac{c_2^2}{\sin^2\theta}\right) + \frac{1}{4}(c_1^2 + c_2^2)^2\right]^2 \leqq 0,
\end{aligned}
$$

l'égalité correspondant à une racine double. Le premier membre contient le facteur double $\left(\dfrac{c_1^2}{\cos^2\theta} - \dfrac{c_2^2}{\sin^2\theta}\right)^2$ qui ne forme pas séparatrice, mais qui, lorsqu'il est nul, correspond aux cercles solutions évidentes de la question. La véritable séparatrice (S) se réduit à une sextixte à quatre rebroussements, symétrique par rapport aux axes de coordonnées (axes auxiliaires c_1, c_2) et qui peut être étudiée avec précision. Bornons-nous à signaler qu'elle touche les droites du facteur double symétriques par rapport aux axes et à l'origine. A l'extérieur de la séparatrice, P_4 a deux racines réelles; à l'intérieur, quatre racines. Le théorème de Budan permet de voir que $+a$ est toujours compris entre les deux plus grandes racines, $-a$ entre les plus petites sauf dans les quatre régions très fines déterminées dans les angles de S par les droites $c_2 = \pm c_1\operatorname{tang}\theta$.

3. Propriétés diverses des surfaces Σ et des courbes T :

1° *Les surfaces* Σ *sont des quartiques contenant l'ombilicale, cas particulier des surfaces de Kummer, ayant à l'infini une droite double, la droite de jonction des points à l'infini de* Δ *et de* Δ'. *Les sections par des plans parallèles à* Δ *et à* Δ' *sont des coniques : hyperboles lorsque* $P_4(z) < 0$, *ellipses imaginaires lorsque* $P_4(z) > 0$, *droites doubles pour* $P_4(z) = 0$. *Ces courbes ont leur centre sur la perpendiculaire commune à* Δ *et à* Δ'.

2° *Parmi les courbes* Γ *il existe deux familles de cercles;* elles correspondent à la relation $c_2 = \pm c_1 \operatorname{tang} \theta$.

3° *Un plan passant par* Δ *(ou par* Δ'*) et par un point de la courbe tourne toujours dans le même sens lorsque le point décrit la courbe d'une façon continue.*

4° *Le moment par rapport à* Δ *(ou à* Δ'*) d'un segment unité porté par la tangente à la courbe est constant.*

5° Sauf dans un cas particulier qui sera signalé ci après :

Les courbes T *n'ont aucun point réel à l'infini dans une direction déterminée. Elles n'ont aucun point singulier et sont formées d'une infinité de spires de grandeur variable dont chacune se raccorde à la précédente dans les plans parallèles à* Δ *et à* Δ' *correspondant aux racines de* P_4 *et que nous désignerons sous le nom de* Plafonds.

4. Classification des courbes Γ. — Deux grandes classes :

1° *Courbes générales* (correspondant à un polynome P_4 à racines distinctes). — Si P_4 a deux racines réelles, ces courbes sont tout entières entre les deux plafonds correspondants. Si P_4 a quatre racines, les quatre plafonds déterminent deux régions, comprise chacune entre un plafond externe et son voisin, dans chacune desquelles on trouve des courbes répondant à la question.

2° *Courbes spéciales* (correspondant au cas d'une racine multiple de P_4). — Les cercles appartiennent à ce groupe; il n'en sera plus question ci-après.

a. Cas d'une racine double. — On signale seulement que les intégrales des formules (5) sont pseudo-elliptiques : on trouve des courbes particulièrement intéressantes correspondant aux sommets (sur les axes) de la séparatrice. Aspect d'une courbe à deux plafonds.

b. Cas d'une racine triple. — Elles sont à deux plafonds. L'un d'eux est d'ailleurs un plan asymptote. La courbe a un aspect nettement différent des autres : Partant asymptotiquement de l'un des plafonds arrive à toucher le second, puis continue en se dirigeant asymptotiquement vers l'autre plafond : *il n'y a plus de spires.* Ces courbes correspondent aux rebroussements de la séparatrice.

Remarque. — En se bornant aux éléments réels on ne peut avoir ni une racine quadruple, ni deux racines doubles.

SÉANCE DU 9 JUIN 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. A. Lévy : *Sur l'itération des polynomes et ses rapports avec les fractions continues généralisées.*

M. Drach : *Sur l'intégration par quadratures de l'équation différentielle de la balistique extérieure.*

L'équation de la balistique extérieure, dite aussi *équation de l'hodographe*

$$\frac{dV\cos\alpha}{d\alpha} = \frac{cV\,F(V)}{g},$$

où V désigne la vitesse du projectile, α l'angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizon, prend, lorsque l'on pose

$$\sin\alpha = v, \qquad V = u, \qquad \frac{e}{g}F(V) = \rho(u),$$

la forme

$$\frac{dv}{du} = \frac{1-v^2}{u(v+\rho)}.$$

Elle fait donc partie des équations $\frac{dv}{du} = \frac{P_3(v)}{P_1(v)}$, où P_1 et P_3 sont des polynomes en v de degré marqué par l'indice, qui ont donné lieu à de nombreux travaux (Z. Elliot, R. Liouville, P. Appell, etc.); j'ai observé qu'elle peut être prise comme *forme canonique* de ces équations, forme qu'on obtient en transformant respectivement trois solutions particulières en 1, -1, ∞ et en modifiant la variable indépendante.

Un changement de variable u, immédiat, permet aussi de l'écrire

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \rho}. \tag{1}$$

Sous cette forme, j'ai déterminé comment l'on doit choisir la fonction $\rho(u)$, pour que l'équation (1) présente un des cas de réduction indiqué par ma théorie générale d'*intégration logique* et permettant l'intégration de (1) *par quadratures*. Ces cas sont ceux où, pour l'équation aux dérivées partielles correspondante

$$U(z) = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1 - v^2}{v + \rho}\right) = 0,$$

il existe pour l'un des éléments z, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^n$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} : \frac{\partial z}{\partial v}$ une expression *rationnelle* en v; cette expression est unique sauf lorsque z est rationnel (cf. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 mars 1914).

Dans ces différents cas, les coefficients de l'*invariant* rationnel sont, ainsi que ρ, définis par un système d'équations dont les premiers membres sont, *dans le cas le plus général*, des *périodes* d'intégrales de la forme $\int \sqrt[n]{K}\, dv$, où K est rationnel en v, ou des quotients de *périodes* d'intégrales de la forme

$$\int M(v) e^{N(v)}\, dv,$$

où M et N sont rationnels en v et dont les seconds membres sont des constantes. Les périodes en question peuvent être des *intégrales de double contour* (Jordan) relatives à deux points singuliers de la fonction à intégrer.

Il y a, bien entendu, de nombreux cas de réduction que l'on peut caractériser.

J'ai examiné en détail les différents cas d'intégrabilité de l'équation de l'hodographe signalés antérieurement [cas de d'Alembert, de Legendre et ceux très nombreux indiqués par M. François Siacci (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1901)] et montré comment ils se placent dans l'ensemble des cas de réduction : on trouve ainsi les raisons du succès des calculs ingénieux de ces géomètres et de la difficulté qu'il y a à les généraliser, mais l'on possède aussi la méthode qui permet de le faire régulièrement.

SÉANCE DU 23 JUIN 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. Risser : *Sur le problème des tables de mortalité par âges à l'entrée des rentiers et une application de l'équation de Volterra.*

En tenant compte de ce que la formule de Makeham,

$$(1) \qquad v_x = \frac{K_1}{d_1^x} g_1^{q_1^x},$$

interpole les différentes tables de mortalité avec une approximation suffisante, M. Poterin du Motel a été conduit à en faire une application aux tables des rentiers par âges à l'entrée.

Il a adopté pour valeur du taux de mortalité

$$(2) \qquad t_x = a + \frac{bq^x}{c^y}$$

[voir *Usage et ajustement des tables de mortalité par âges à l'entrée* (*Bulletin des Actuaires*, 1893)] et par suite pour $v_{(x,y)}$

$$v_{(x,y)} = \frac{K}{d^x} s^{q^{x-\mu y}},$$

où x est l'âge actuel, y l'âge à l'entrée.

Or, si l'on suppose que K_1, g_1 de la formule (1) sont des fonctions de y, et si l'on veut remplacer n têtes d'âges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par n têtes de même âge x_m, on est amené à étudier l'équation

$$nq_1^{x_m} \operatorname{Log} g_{1,n} = \sum_1^n q_1^{x_i} \operatorname{Log} g_{1,i}$$

et si l'on admet que toutes les têtes sont entrées ensemble, on voit que l'on est conduit à prendre

$$g_1 = s^{q_1^{-y\mu}}.$$

L'expression représentative du taux de mortalité $a + bq^{x-\mu y}$, que l'on déduit de la loi de survie, peut être généralisée; en effet, l'expression

$$(3)\quad a+bq^{x-\mu y}\left[1+\frac{x-y}{\omega}\alpha_1+\ldots+\left(\frac{x-y}{\omega}\right)^n\alpha_n\right]=a+bq^{x-\mu y}\varphi(x-y)$$

[dans laquelle ω est au moins égale à la plus grande valeur que peut prendre $(x-y)$ et au plus égale à l'âge limite du groupe] jouit de la propriété classique que l'on peut substituer aux têtes $x_1, x_2, \ldots x_n$, entrées aux âges $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n têtes d'âge X, introduites à l'âge Y, à condition de prendre

$$x_i - y_i = \mathrm{X} - \mathrm{Y} \qquad \text{avec} \qquad i = (1, 2, \ldots, n).$$

De là, par intégration de l'équation $-\frac{v'_x}{v_x} = a + bq^{x-\mu y}\varphi(x-y)$, on déduit le nombre des assurés $v(x, y)$.

Deuxième méthode. — On peut écrire

$$\int_{x_0}^{x} v(x,y)\,dy = \mathrm{F}(x),$$

où $\mathrm{F}(x)$ est le nombre des rentiers d'âge x, quel que soit leur âge à l'entrée et x_0 l'âge limite inférieur à l'admission. $\mathrm{F}(x)$ est finie et déterminée dans l'intervalle (x_0, x) et nulle pour $x = x_0$; sa dérivée est déterminée, car on suppose que x est inférieur à l'âge limite du groupe.

$v(x, y)$ peut être remplacée par $\frac{\mathrm{K}}{dx} s q^{x-\mu y} f(x-y)$, où f est la fonction inconnue. Si l'on pose $x - y = z$, on est ramené à

$$\int_0^{x-x_0} \frac{\mathrm{K}}{dx} s q^{x(1-\mu)-\mu z} f(z)\,dz = \mathrm{F}(x)$$

qui est une équation de Volterra de première espèce, avec noyau borné dans l'intervalle d'intégration, que l'on résout par le procédé classique de M. Volterra, ou mieux encore ici par la méthode des approximations successives de M. Picard, qui permet de calculer les éléments $f_0, f_1, \ldots, f_n$, de $f(z)$.

Sur le problème de la répartition par âges dans les milieux à effectif constant et l'équation de Volterra.

Si $l(\mathrm{X})$ est la loi de survie, $\varphi(x)$ la loi caractéristique des entrées à l'âge x, on est conduit à écrire l'équation

$$l(X)+\int_0^X \varphi(x)l(X-x)\,dx=1, \tag{1}$$

si l'on veut exprimer que le milieu est à effectif constant, à condition de prendre

$$l(0)=1,$$

et l'origine des âges égale à o au lieu de x.

De (1), on déduit les équations

$$l(X)+\int_0^X \varphi(X-x)l(x)\,dx=1, \tag{2}$$

$$\varphi(X)+\int_0^X \varphi(x)\frac{\partial l(X-x)}{\partial X}\,dx=-l'(X), \tag{3}$$

dont l'utilisation se comprend instantanément.

Il est évident que toutes les fois que l'on a pour forme de survie $\Sigma P_i(x)e^{\alpha_i x}$, P_i étant un polynome de degré $(i-1)$, et α_i une racine d'ordre i d'une certaine équation caractéristique

$$a_0\gamma^n+a_1\gamma^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

on peut dire que $\Sigma P_i(x)e^{\alpha_i x}$ peut être considérée comme l'intégrale de l'équation différentielle

$$a_0\frac{d^n l}{dx^n}+\ldots+a_n l=0, \tag{4}$$

caractéristique de la loi de survie.

Des dérivées d'ordre 1, 2, ..., n du premier membre de l'équation (1) par rapport à X, on tire en tenant compte de (4)

$$A_{n-1}\varphi(X)+\ldots+A_0\varphi^{(n-1)}(X)=0,$$

dont l'intégrale est

$$\varphi(X)=\frac{a_n}{A_{n-1}}+\Sigma Q_j(x)e^{\beta_j x}. \tag{5}$$

On peut encore, en employant la méthode des approximations successives de M. Picard, trouver la forme de φ quand la fonction de survie

$$e^{A+Bx+\Sigma e^{r_i x}-f(x)} \tag{6}$$

est du type généralisé de M. Quiquet.

On peut remplacer cette forme généralisée par une série d'exponentielles, et arrêter le développement au terme d'ordre n (n étant choisi de telle façon que la différence entre la fonction et la série soit plus petite que ε dans le champ choisi), φ est alors de la forme (5).

Si l'on fait croître n indéfiniment, et si l'on substitue à $l(X)$ une série qui soit uniformément convergente dans l'intervalle d'âges considéré, on est ramené à une équation de Volterra, qui correspond dans le cas envisagé à une équation différentielle à coefficients constants d'ordre infini pour la représentation de φ.

Si donc $l(X)$ est du type (5), la loi φ sera aussi de ce type.

SÉANCE DU 7 JUILLET 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. L. Bachelier : *Sur la théorie des corrélations.*

Deux quantités peuvent dépendre l'une de l'autre sans que leur liaison soit de nature fonctionnelle ; la taille du fils dépend de la taille de son père, mais si l'on connaît la taille du père on ne peut en déduire que des probabilités pour la taille du fils.

Pour se faire une idée de la liaison qui existe entre deux quantités H et K, on fait ordinairement usage du coefficient de corrélation de M. Karl Pearson. On rapporte les deux quantités à leurs moyennes respectives, ce sont donc les écarts y et x relativement à cette moyenne que l'on étudie. Par exemple, ce que l'on considère comme étant les tailles y et x du père et de son fils, ce sont les écarts relativement à la taille moyenne

Le coefficient de corrélation de Pearson est la quantité r définie par l'égalité

$$r = \frac{\mathrm{VM}xy}{\sqrt{\mathrm{VM}x^2}\sqrt{\mathrm{VM}y^2}},$$

où le signe VM désigne la valeur moyenne. Le coefficient de corrélation est toujours compris entre -1 et $+1$, il est égal à ± 1 si chaque valeur de y impose pour x une valeur proportionnelle. Si les quantités x et y sont indépendantes, le coefficient de corrélation est nul, mais il peut être nul sans qu'il y ait indépendance.

Pratiquement, pour obtenir le coefficient de corrélation, on remplace les valeurs moyennes théoriques par leurs valeurs observées. Par exemple, si $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ sont les tailles des pères, et $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ les tailles de leurs fils respectifs obtenues par μ couples de mesures, on calcule le coefficient de corrélation par la formule

$$r = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_\mu y_\mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\mu^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_\mu^2}}.$$

On commet ainsi une certaine erreur. M. Pearson a obtenu une formule faisant connaître la probabilité pour que cette erreur ait une valeur donnée. Cette formule, dont M. Lucien March a donné une démonstration très simplifiée, suppose que le nombre μ des observations est très grand et que la loi de distribution des valeurs de x et de y est normale, c'est-à-dire qu'elle admet que la probabilité des valeurs simultanées x et y de H et de K est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{Ax^2 - 2Bxy + Cy^2}{2(AC - B^2)}}}{2\pi\sqrt{AC - B^2}}\, dx\, dy,$$

où A, B, C sont des constantes, le coefficient de corrélation est alors $r = \frac{B}{\sqrt{A}\sqrt{C}}$.

Le cas où la loi de répartition est normale est spécialement intéressant; il s'applique, par exemple, quand les quantités x et y varient d'après l'hypothèse des causes infinitésimales; il s'appliquerait dans le cas de la taille du père et de son fils, mais il est cependant particulier et il importe d'obtenir la loi de l'erreur commise sur r dans le cas général.

Soit $\varphi(x, y)\, dx\, dy$ la probabilité des valeurs simultanées x et y des quantités H et K. La somme des probabilités de tous les cas possibles ayant pour valeur un et les valeurs moyennes de x et de y étant nulles. on a

$$\iint \varphi(x, y)\, dx\, dy = 1,$$

$$\iint x\varphi(x, y)\, dx\, dy = 0, \qquad \iint y\varphi(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Le coefficient de corrélation r est

$$r = \frac{\iint xy\varphi(x, y)\, dx\, dy}{\left(\iint x^2\varphi(x, y)\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint y^2\varphi(x, y)\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour obtenir l'erreur commise sur r, on pose

$$A = \int\int y^2 \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

$$B = \int\int xy \varphi(x, \theta)\, dx\, dy, \qquad C = \int\int x^2 \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

$$L = \int\int x^4 \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

$$R = \int\int x^2 y^2 \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad Q = \int\int y^4 \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

$$N = \int\int x^3 y\, \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad P = \int\int x y^3 \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

La probabilité pour que la valeur obtenue pour r soit erronée de la quantité ε est alors

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu}\, AC \sqrt{AC}\, e^{-\frac{2\mu A^2 C^2 \varepsilon^2}{LB^2A^2 + QB^2C^2 + 2ACR(2AC + B^2) - 4NA^2BC - 4PC^2BA}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{LB^2A^2 + QB^2C^2 + 2ACR(2AC + B^2) - 4NA^2BC - 4PC^2BA}}\, d\varepsilon.$$

L'erreur varie en raison inverse de la racine carrée du nombre μ des observations.

La démonstration de ce résultat est assez compliquée, elle repose sur la formule donnée au n° 565 de mon *Traité du calcul des probabilités*, modifiée d'après les remarques exposées au n° 563 du même Ouvrage.

Pratiquement, les constantes se déterminent par les valeurs observées; on a, par exemple,

$$R = \frac{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + \ldots + x_\mu^2 y_\mu^2}{\mu}, \qquad N = \frac{x_1^3 y_1 + x_2^3 y_2 + \ldots + x_\mu^3 y_\mu}{\mu}.$$

Sur les décimales du nombre π.

Un nombre étant donné, écrit dans le système de numération de base n (c'est-à-dire de n chiffres), on peut se demander si la succession de ses chiffres présente le caractère de la fortuité, si ces chiffres se suivent comme si le hasard seul en avait régi l'apparition.

Par exemple, on peut se demander si les 707 premières décimales du nombre π, calculées par Shanks, peuvent être considérées comme se suivant au hasard.

Le calcul des probabilités ne peut permettre, en aucun cas, d'affirmer la fortuité, mais il peut faire connaître une sorte de critérium permettant de rejeter l'hypothèse de la fortuité quand elle est inadmissible.

Si les n chiffres A_1, A_2, ..., A_n se succèdent au hasard, la probabilité de l'apparition de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$, et la probabilité pour que, sur un grand nombre μ de chiffres, il y ait $\frac{\mu}{n}+x_1$ chiffres A_1, $\frac{\mu}{n}+x_2$ chiffres A_2, ..., $\frac{\mu}{n}+x_{n-1}$ chiffres A_{n-1} est donnée par la formule du n° 573 de mon *Traité du calcul des probabilités,* cette probabilité est

$$\frac{e^{-\frac{n}{\mu}[x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_1x_2+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}]}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^n}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}.$$

Les systèmes de valeurs de x_1, x_2, ..., x_{n-1} qui ont même probabilité vérifient la relation

$$(1)\qquad x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_1x_2+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}=r,$$

r étant un paramètre. En d'autres termes, les surfaces d'égale probabilité dans l'espace à $(n-1)$ dimensions sont des ellipsoïdes ayant pour équation (1).

La probabilité pour que la quantité

$$x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_1x_2+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}$$

ait pour valeur ρ^2 est

$$2\left(\frac{n}{\mu}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\rho^{n-2}e^{-\frac{n}{\mu}\rho^2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,d\rho,$$

T désignant l'intégrale eulérienne. La probabilité pour que ρ soit compris entre o et R s'obtient en intégrant l'expression précédente entre o et R; des intégrations successives donnent pour cette probabilité

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}}\int_0^R e^{-\frac{n}{\mu}\rho^2}\,d\rho-\frac{e^{-\frac{n}{\mu}R^2}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2^{\frac{n}{2}-1}\left(\sqrt{\frac{n}{\mu}}R\right)^{n-3}}{1.3.5.7\ldots(n-3)}+\frac{2^{\frac{n}{2}-2}\left(\sqrt{\frac{n}{\mu}}R\right)^{n-5}}{1.3.5\ldots(n-5)}+\ldots+2\sqrt{\frac{n}{\mu}}R\right]$$

quand n est pair, et

$$1 - e^{-\frac{n}{\mu}R^2}\left[\frac{\left(\sqrt{\frac{n}{\mu}}R\right)^{n-3}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}+\frac{\left(\sqrt{\frac{n}{\mu}}R\right)^{n-5}}{\left(\frac{n-5}{2}\right)!}+\ldots+\frac{n}{\mu}R^2+1\right]$$

quand n est impair. Ces probabilités peuvent toujours se calculer avec les tables de logarithmes et les tables de la fonction Θ. La valeur moyenne quadratique de ρ est $\sqrt{\frac{\mu}{n}}\sqrt{\frac{n-1}{2}}$; la valeur la plus probable de ρ est $\sqrt{\frac{\mu}{n}}\sqrt{\frac{n-2}{2}}$; la valeur moyenne de ρ a une expression différente suivant que n est pair ou impair.

Pour reconnaître s'il est possible d'admettre que la suite des chiffres exprimant un nombre donné dans le système de base n présente le caractère de la fortuité, on calcule d'abord les écarts $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, puis la quantité

$$(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_1x_2+\ldots+x_{n-2}x_{n-1})^{\frac{1}{2}},$$

qui est la valeur observée de ρ, soit a. Si la probabilité, donnée par les formules ci-dessus, pour que ρ soit supérieur à a est très petite ou, au contraire, très voisine de un, il faut en conclure que les chiffres ne se succèdent pas fortuitement, car il est alors inadmissible que le hasard ait produit des écarts aussi grands ou aussi petits.

Dans le cas des décimales de π, $n=10$, $\mu=707$; la valeur moyenne de ρ est 17,34, la moyenne quadratique est 17,84, la valeur la plus probable est 16,82 et la valeur probable est 17,5. Il n'y a pas 3 chances sur 100 pour que ρ soit inférieur à 10, ni 3 chances sur 1000 pour que ρ soit supérieur à 30. La valeur a calculée est 16. Ce résultat est très satisfaisant; autant que l'expérience permet de l'affirmer, les décimales du nombre π se succèdent au hasard.

SÉANCE DU 27 OCTOBRE 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. le général Fetter, présenté par MM. Borel et Lebesgue; MM. A. Errera, présenté par MM. Lebesgue et Montel; Verdier, présenté par MM. Alméras et Grévy; Varopoulos, présenté par MM. Montel et Remoundos.

Communication :

M. A. Lévy : *L'application des fractions continues à la recherche des formes quadratiques de déterminant donné permet de trouver des substitutions linéaires qui transforment ces formes en formes équivalentes.*

SÉANCE DU 10 NOVEMBRE 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société: MM. Walsch, présenté par MM. Hadamard et Drach; Kumasuke Ogura, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Rowe, présenté par MM. Drach et Hadamard; Teiji Takagi, présenté par MM. Hadamard et A. Lévy.

Communications :

M. Gambier : *Sur la déformation des surfaces et un exemple déduit de la série de Fredholm.*

M. S.-N. Bose : *The horpolhode of Poinsot.*

The theorem that the horpolhode of Poinsot has no point of inflexion, has been variously proved by MM. de Sparre, Mannheim, Saint-Germain, Routh, Lecornu and others.

The earlier proofs sometimes used properties of elliptic function, and often a long calculation is necessary, so that a simple direct proof is very much to be desired. Recently in *Bull. de la Soc. math. de France* (t. XXXIV), M. Lecornu has given a simple proof by, considering the motion of the normal of the horpolhode cone. The following is a simple proof of the theorem based solely on the dynamical consideration of the Poinsot motion, hence I hope it will be found interesting.

Let A, B, C, be the three principal moments of inertia of a body fixed at a point O, and OI, and OI′, are the two successive positions of the instantaneous axis at time t, and $t+dt$. The ends I, I′, etc., on the invariable plane trace out the horpolhode, lengths OI, OI′, etc., being proportional to the resultant angular velocity at any instant. At a point of inflexion, the horpolhode will have a stationary tangent; i. e. the total change of the vector II′, will be along its own length.

Remembering that II′ has components proportional to $\dot\omega_1\,dt$, $\dot\omega_2\,dt$, $\dot\omega_3\,dt$, along the three principal moving axes, the condition notice above reduces analytically to

$$(1)\qquad \frac{\ddot\omega_1-\dot\omega_2\omega_3+\dot\omega_3\omega_2}{\dot\omega_1}=\frac{\ddot\omega_2-\dot\omega_3\omega_1+\dot\omega_1\omega_3}{\dot\omega_2}=\frac{\ddot\omega_3-\dot\omega_1\omega_2+\dot\omega_2\omega_1}{\dot\omega_3}=\lambda,$$

we have from Euler equations

$$\begin{aligned}A\dot\omega_1&=(B-C)\omega_2\omega_3,\\ B\dot\omega_2&=(C-A)\omega_3\omega_1,\\ C\dot\omega_3&=(A-B)\omega_1\omega_2,\end{aligned}$$

from which

$$\begin{aligned}A\ddot\omega_1&=(B-C)\left(\dot\omega_2\omega_3+\dot\omega_3\omega_2\right),\\ B\ddot\omega_2&=(C-A)\left(\dot\omega_3\omega_1+\dot\omega_1\omega_3\right),\\ C\ddot\omega_3&=(A-B)\left(\dot\omega_1\omega_2+\dot\omega_2\omega_1\right).\end{aligned}$$

Substituting in (1) we have

$$\begin{aligned}&\frac{\dot\omega_3}{\omega_3}(A+B-C)-\frac{\dot\omega_2}{\omega_2}(A+C-B)=\lambda(B-C),\\ &\frac{\dot\omega_1}{\omega_1}(B+C-A)-\frac{\dot\omega_3}{\omega_3}(A+B-C)=\lambda(C-A),\\ &\frac{\dot\omega_2}{\omega_2}(C+A-B)-\frac{\dot\omega_1}{\omega_1}(B+C-A)=\lambda(A-B),\end{aligned}$$

so that

$$(2)\qquad \frac{\dot\omega_1}{\omega_1}(B-C)(B+C-A)+\frac{\dot\omega_2}{\omega_2}(C-A)(C+A-B)+\frac{\dot\omega_3}{\omega_3}(A-B)(A+B-C)=0.$$

But remembering that

$$\begin{aligned}A\,\omega_1\dot\omega_1+B\,\omega_2\dot\omega_2+C\,\omega_3\dot\omega_3&=0,\\ A^2\omega_1\dot\omega_1+B^2\omega_2\dot\omega_2+C^2\omega_3\dot\omega_3&=0,\end{aligned}$$

we have

$$\frac{\omega_1\dot\omega_1}{BC(B-C)}=\frac{\omega_2\dot\omega_2}{CA(C-A)}=\frac{\omega_3\dot\omega_3}{AB(A-B)},$$

hence substituting in (2) we have a necessary condition for the point of inflexion.

$$\frac{BC(B-C)^2}{\omega_1^2}(B+C-A)+\frac{CA(C-A)^2}{\omega_2^2}(A+B-C)$$
$$+\frac{AB(A-B)^2}{\omega_3^2}(A+B-C)=0,$$

which is obviously impossible as $B+C-A$, $C+A-B$, $A+B-C$ are all positive, so that the left-hand side is an essentially positive quantity.

Hence there cannot be any point of inflexion on the horpolhode.

SÉANCE DU 24 NOVEMBRE 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Lhoste, présenté par MM. Drach et Paul Lévy.

Communications :

M. Gambier : *Sur la déformation des surfaces et un cas d'impossibilité.*

Darboux a établi au Tome III de la *Théorie des surfaces*, page 279, la proposition suivante :

On peut toujours déformer la surface S de telle manière qu'une de ses courbes Γ vienne coïncider avec une courbe quelconque D de l'espace, pourvu que la courbure en chaque point de D ne soit pas égale à la courbure géodésique de Γ au point correspondant.

J'ajouterai à la proposition de Darboux la remarque suivante : Si la courbure de D est différente de la courbure géodésique de Γ, S est recouverte *de part et d'autre de* Γ par la surface S_1 obtenue par la déformation, j'entends recouverte *physiquement.*

Si donc une surface S_1 réelle, applicable sur la surface S, ne recouvre S que d'un côté de Γ, il est *nécessaire* que la courbe D satisfasse à la condition exceptionnelle; or, d'après la conservation de la courbure géodésique, D aura en chaque point son plan osculateur tangent à la surface S_1. D'autre part, j'ai montré, au *Bul-*

letin des Sciences mathématiques, que S_1 admet D pour *arête de rebroussement* et possède une auto-application qui laisse chaque point de D invariant.

J'avais oublié de montrer qu'il résulte, précisément, de l'étude de Darboux, que, non seulement D est arête de rebroussement de S_1, mais que, en plus, le plan tangent à S_1 en chaque point de D est osculateur à D.

Je n'ai pas encore élucidé le fait de savoir si, réciproquement, *il suffit* que le rayon de courbure de D, courbe donnée à l'avance comme homologue de Γ, soit égal au rayon de courbure géodésique de Γ, pour qu'il soit possible de déterminer la surface S_1 qui recouvrira S d'un seul côté de Γ (et en double de ce côté). Il peut se faire que D doive, en outre, satisfaire à d'autres conditions pour que la surface S_1 puisse être obtenue.

En tout cas, sur S menons en chaque point de Γ la géodésique tangente en ce point à Γ, toutes ces géodésiques pénètrent, à l'exclusion de l'autre, sur l'une des deux régions déterminées sur S par Γ : c'est cette région de S qui sera recouverte deux fois par la surface inconnue S_1, l'autre région n'étant pas recouverte. On peut, vraisemblablement, se donner Γ arbitrairement, mais non la région limitée par Γ qui doit être recouverte.

Dans le cas des développables, ces propositions se vérifient immédiatement : la condition *nécessaire* trouvée plus haut est, alors, manifestement *suffisante*.

M. Ch. Michel : *Sur des polynomes qui généralisent, à la fois, les polynomes de Legendre et les polynomes* $\cos(n \arccos x)$.

1. On voit facilement, par identification, que l'équation différentielle

$$(x^2-1)y''+\alpha xy'-n(n+\alpha-1)y=0, \tag{1}$$

où α est une constante positive, admet comme intégrale un polynome V_n défini à un facteur numérique non nul arbitraire près. Ce polynome est de degré n, et les degrés de ses termes sont tous de même parité que n.

2. Les équations $V_1=0$ et $V_2=0$ sont, respectivement,

$$x=0, \qquad x^2-\frac{1}{\alpha+1}=0;$$

elles ont toutes leurs racines réelles et distinctes, comprises entre

-1 et $+1$. Cette propriété est, quel que soit $\alpha > 0$, applicable à l'équation $V_n = 0$. Pour l'établir, il suffira de raisonner par induction, en remarquant que V'_n est intégrale de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + (\alpha + 2)xy' - (n - 1)(n + \alpha)y = 0,$$

qui se déduit de l'équation (1) en remplaçant n par $n - 1$ et α par $\alpha + 2$, positif comme α.

3. D'après cela, $V_n(1)$ est différent de zéro, et, comme V_n est défini à un facteur numérique non nul arbitraire près, on peut supposer que l'on a choisi ce facteur numérique de façon que $V_n(1)$ soit égal à 1. Dans cette hypothèse, $V_n(x)$ est positif pour toute valeur de x supérieure ou égale à 1, du signe de $(-1)^n$ pour toute valeur de x inférieure ou égale à -1. En outre, $V_n(x)$ est identique, pour $\alpha = 2$, au polynome X_n de Legendre, et, pour $\alpha = 1$, au polynome qui a pour expression, dans l'intervalle $(-1, +1)$, $\cos(n \arccos x)$, et, pour toute valeur de x non intérieure à cet intervalle,

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}.$$

4. Comme les polynomes V_n sont de degrés tous différents, il est immédiat que tout polynome $f(x)$ peut être mis, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$AV_n + BV_p + \ldots + LV_t,$$

A, B, ..., L étant des constantes non nulles, $n, p, \ldots, t$ étant rangés dans l'ordre décroissant; n est le degré de $f(x)$.

On a, relativement aux polynomes V_n, et, notamment, relativement aux polynomes $\cos(n \arccos x)$, le théorème suivant, que Laguerre a énoncé et établi seulement dans le cas particulier des polynomes de Legendre (*Œuvres*, t. I, p. 144) :

Le nombre des racines réelles supérieures ou égales à 1 *de l'équation* $f(x) = 0$, *chaque racine comptant pour un nombre égal à son ordre de multiplicité, est au plus égal au nombre des variations de la suite* A, B, ..., L.

La démonstration de Laguerre s'applique au cas général, toutefois, avec quelques modifications, tenant à ce que $\frac{\alpha}{2}$ n'est pas nécessairement un nombre entier. Il faut utiliser la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'une équation dont le premier membre est une fonction quelconque développable suivant la formule de Taylor.

On a les conséquences suivantes, énoncées par Laguerre dans le cas des polynomes de Legendre :

1° *Le nombre des racines réelles inférieures ou égales à* -1 *de l'équation* $f(x)=0$ *est au plus égal au nombre des variations de la suite* $(-1)^n A$, $(-1)^p B$, ..., $(-1)^t L$.

2° *Si l'équation* $f(x)=0$ *a toutes ses racines réelles et non intérieures à l'intervalle* $(-1, +1)$, *le nombre des racines positives est égal au nombre des variations de la suite* A, B, ..., L *et le nombre des racines négatives est égal au nombre des variations de la suite* $(-1)^n A$, $(-1)^p B$, ... $(-1)^t L$.

3° *Si les nombres* μ *et* μ' *de variations des deux suites précédentes ont une somme plus petite que* n, *l'équation* $f(x)=0$ *admet des racines réelles comprises entre* -1 *et* $+1$ *ou des racines imaginaires, en nombre au moins égal à* $n-(\mu+\mu')$.

L'analogie avec la règle des signes de Descartes est évidente.

M. A. Lévy : *A tout nombre* n *on peut faire correspondre une infinité de nombres* n' *tels que* $\sqrt{nn'}$ *réduite en fraction continue ait une période de quatre termes.*

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Lhoste, présenté par MM. Drach et P. Lévy; Bays, présenté par MM. Montel et Vessiot; Sono, présenté par MM. Hadamard et Montel.

Communications :

M. Gambier : *Sur les mécanismes transformables et déformables.*

M. Wavre : *Sur les développements de Mittag-Leffler.*

Dans sa Note, insérée dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. Borel (p. 111), M. Painlevé pose la question suivante :

Étant donné un développement de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

existe-t-il un développement de Mittag-Leffler

$$\mathrm{M}[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_{0n} a_0 + \lambda_{1n} a_1 x + \ldots + \lambda_{nn} a_n x^n)$$

tel que la dérivée du développement de $f(x)$ soit identique au développement de la dérivée de $f(x)$; c'est-à-dire tel que

$$\mathrm{M}'[f(x)] \equiv \mathrm{M}[f'(x)]$$

et cela quel que soit $f(x)$?

On voit aisément, en identifiant les deux membres de l'identité précédente, que les coefficients λ_{pn} doivent satisfaire aux conditions

$$\lambda_{pn} = \lambda_{0(n-p)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{0n} = 1.$$

Le développement M doit donc être de la forme

$$\mathrm{M}[f(x)] \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_{0n} a_0 + \lambda_{0(n-1)} a_1 x + \ldots + \lambda_{00} a_n x^n).$$

Il est, dès lors, facile de montrer qu'un pareil développement appliqué à la fonction $\frac{1}{1-x}$ divergerait, au moins pour toute valeur de x, tel que $|x| > 1 + \frac{1}{|\lambda_{00}|}$, et ne saurait, par conséquent, être un développement M. La réponse à la question que posait M. Painlevé est donc négative.

SÉANCE DU 22 DÉCEMBRE 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. Fatou : *Sur un problème de la théorie générale des fonctions analytiques : en quel ensemble de points une fonction analytique devient-elle nulle sur une ligne singulière?* [1].

M. Wavre : *Sur l'équation de Fredholm* $\varphi(x) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(r)}{z-\psi(x)}dz$ *et son rapport avec l'intégrale de Cauchy* $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{z-x}dx$.

---

[1] Cette question a été traitée avec les développements qu'elle comporte au *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. XLV, mars 1921).