ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BENOÎT BEN MOUSSA

Analyticité semi-globale pour le $\bar{\partial}$-Neumann dans des domaines pseudoconvexes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 29, nº 1 (2000), p. 51-100

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_2000_4_29_1_51_0>

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)
Vol. XXIX (2000), pp. 51-100

Analyticité semi-globale pour le $\bar{\partial}$-Neumann dans des domaines pseudoconvexes

BENOÎT BEN MOUSSA

Abstract. Under some conditions on an open $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ bounded, smooth, and pseudo-convex, we show that the solution of the $\bar{\partial}$-Neumann problem is real analytic near a component of the degenerating set of the Levi form.

Mathematics Subject Classification (1991): 32F20 (primary), 32F25, 32F30 (secondary).

1. - Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert régulier, borné, de classe C^∞ et pseudoconvexe. Soient $\Delta \subset \partial\Omega$ l'ensemble des points de dégénérescence de la forme de Levi $\mathcal{L}$ de Ω, D une composante connexe de Δ, et $V(D)$ un voisinage ouvert de D dans $\mathbb{C}^n$ séparant D des autres composantes connexes de Δ. Supposons que $\partial\Omega$ soit analytique réelle sur $V(D)$.

Soit $q \in \{1, ..., n-1\}$ et f une $(0, q)$ forme à coefficients dans $L^2(\Omega)$ et analytiques réels sur $\bar{\Omega} \cap V(D)$.

Si u est la solution du problème du $\bar{\partial}$-Neumann sur $\bar{\Omega}$ avec f pour second membre, existe-t-il un voisinage $V'(D)$ de D dans $\mathbb{C}^n$ tel que u soit analytique réelle sur $\bar{\Omega} \cap V'(D)$?

Nous dirons que l'opérateur $\bar{\partial}$-Neumann est hypoelliptique analytique semi-global sur D lorsque la réponse sera affirmative.

Dans le cadre de $\mathbb{C}^2$ pour la solution canonique du $\bar{\partial}_b$, M. Derridj & D. S. Tartakoff [D.T.2] ont en 97, sous certaines conditions, répondu positivement à cette question.

Ici nous donnons une première réponse affirmative pour le $\bar{\partial}$-Neumann dans $\mathbb{C}^n$, conditionnée par le fait que l'ouvert Ω vérifie sur $V(D)$ une inégalité dite “de type maximal”, puis moyennant une hypothèse de commutation exacte, nous

Pervenuto alla Redazione il 7 luglio 1999.

donnons une deuxième réponse affirmative en nous affranchissant de l'inégalité "de type maximal". Pour finir, nous donnons une troisième réponse affirmative dans un cas qui, en quelque sorte, est intermédiaire entre les deux précédents, conditionné par le fait que Ω vérifie une inégalité dite "de type semi-maximal sur $V(D)$".

Nous caractérisons algébriquement les ouverts pseudoconvexes vérifiant une inégalité de type maximal sur les $(0, q)$ formes pour le $\bar{\partial}$-Neumann, par une condition portant sur les valeurs propres de la matrice de Levi de l'ouvert, qui de manière parlante s'énonce :

"Les sommes de paquets d'ordre q de valeurs propres de la matrice de Levi, majorent à un facteur constant près, la trace de la matrice de Levi."

Cette condition algébrique fut initialement introduite par M.Derridj dans [Der] pour les $(0, 1)$ formes, puis A.Grigis & L.P.Rothschild ont montré dans [G.R] que cette condition est nécessaire pour avoir une inégalité maximale pour le $\Box_b$ sur des ouverts pseudoconvexes et que dans certains cas elle est aussi suffisante. Nous caractérisons également algébriquement les ouverts pseudoconvexes vérifiant une inégalité semi-maximale pour les $(0, 1)$ formes, et nous montrons sur un exemple le caractère non-intrinsèque de cette notion.

REMERCIEMENTS. Je remercie vivement le professeur M. Derridj pour l'attention qu'il a bien voulu accorder à ce travail, et pour les nombreuses remarques et suggestions qu'il m'a faites.

2. – Préliminaires et notations

Considérons pour $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, un ouvert, régulier, borné, de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note $\mathcal{L}$ la forme de Levi de Ω et D une composante connexe de l'ensemble de dégénérescence de $\mathcal{L}$.

On suppose qu'il existe un voisinage ouvert $V(D)$ de D dans $\mathbb{C}^n$ sur lequel il existe $L_1, ..., L_n$ une base de $(1, 0)$ champs de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que $L_1, ..., L_{n-1}$ soient tangents à $\partial\Omega$ sur $V(D)$.

On notera $\omega_1, ..., \omega_n$ la base de $(1, 0)$ formes duale de la base $(L_j)_{j=1}^n$ sur $V(D)$.

Pour ce qui suit, on prend les notations de G. B. Folland & J. J. Kohn [F.K].

On écrira les $(0, q)$ formes différentielles u définies sur un sous-ouvert $\mathcal{X}$ de $V(D)$ sous la forme $u = \sum_{|J|=q} u_J \bar{\omega}_J$ où $\bar{\omega}_J = \bar{\omega}_{j_1} \wedge \bar{\omega}_{j_2} \wedge .... \wedge \bar{\omega}_{j_q}$ avec $j_1 < j_2 < .... < j_q$ et $j_i \in \{1, ..., n\}$.

On considèrera le produit scalaire usuel sur les $(0,q)$ formes relatif à la base $(\bar{\omega}_j)_{j=1}^n$ défini par :

si $u=\sum_{|J|=q} u_J\bar{\omega}_J$ et $v=\sum_{|K|=q} v_K\bar{\omega}_K$ sont dans $L^2_q(\mathcal{X})$ alors $(u,v)=\sum_{|J|=q}\int_{\mathcal{X}} u_J\bar{v}_J d\lambda$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{X}$, on notera $\sum_{|J|=q}|u_J|^2$ par $|u|^2$, et $\bar{\partial}^*$ l'adjoint de $\bar{\partial}$ pour ce produit scalaire.

Si Y est un champ de vecteurs sur $\mathcal{X}$ et u un élément de $\mathcal{C}^1_q(\mathcal{X})$ nous considèrerons l'action de Y sur u relatif à la base (ω_j) notée Yu et définie par :

$$\text{si} \quad u=\sum_{|J|=q} u_J\bar{\omega}_J \quad \text{alors} \quad Yu=\sum_{|J|=q} Y(u_J)\bar{\omega}_J$$

Si $v\in\mathcal{C}^\infty_q(\bar{\Omega})$ est écrit sous sa forme canonique $v=\sum_{|I|=q} v_I\bar{\omega}_I$ sur $V(D)\cap\bar{\Omega}$ dans la base $\omega_1,\dots,\omega_n$, alors on a sur $V(D)\cap\bar{\Omega}$:

$$\bar{\partial}v=\sum_{|J|=q+1}\left(\sum_{I,j}\varepsilon_J^{jI}\bar{L}_j v_I+s_{JI}v_I\right)\bar{\omega}_J \tag{2.0.1}$$

Les s_{JI} étant définis par $\bar{\partial}\bar{\omega}_I=\sum_{|J|=q+1} s_{JI}\bar{\omega}_J$.

On notera $\mathcal{D}_q(\mathcal{X})$ l'ensemble $\mathcal{C}^\infty_q(\mathcal{X})\cap Dom\bar{\partial}^*$, pour $v\in\mathcal{D}_q(\bar{\Omega})$ écrit sous sa forme canonique $v=\sum_{|I|=q} v_I\bar{\omega}_I$ sur $V(D)\cap\bar{\Omega}$ dans la base $\bar{\omega}_1,\dots,\bar{\omega}_n$, on a sur $V(D)\cap\bar{\Omega}$:

$$\bar{\partial}^*v=\sum_{|J|=q-1}\left(\sum_{I,j}\varepsilon_I^{jJ}\bar{L}_j^* v_I+\bar{s}_{JI}v_I\right)\bar{\omega}_J \tag{2.0.2}$$

$Q(v,v)$ désignera la forme quadratique définie sur $\mathcal{D}_q(\bar{\Omega}\cap V(D))$ par : $Q(v,v)=\|\bar{\partial}v\|^2+\|\bar{\partial}^*v\|^2$.

Enfin pour clore ces préliminaires nous donnons les définitions suivantes :

DÉFINITION 2.1 (Inégalité de type maximal). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ régulier, V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\partial\Omega\cap V\neq\emptyset$, et $q\in\{1,\dots,n-1\}$.

On dira que Ω satisfait sur V une inégalité de type maximal pour les $(0,q)$ formes relativement au problème $\bar{\partial}$-Neumann si, il existe une base de $(1,0)$ champs $(L_j)_{j=1}^n$ sur V de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que $L_1,\dots,L_{n-1}$ soient tangents à $\partial\Omega$ sur V, vérifiant :

$$\exists C>0 \quad / \quad \forall v\in\mathcal{D}_q(\bar{\Omega}\cap V) \qquad \text{vérifiant supp } v\subset\subset V$$

$$(2.0.3)\qquad \sum_{j=1}^{n} \| \bar{L}_j v \|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \| L_k v \|^2 \leq C\left(Q(v,v) + \| v \|^2\right)$$

REMARQUE. Sous ces conditions la notion d'inégalité de type maximal est intrinsèque, i.e. elle ne dépend pas de la base de (1,0) champs choisie. On peut démontrer cela de façon directe à partir de l'inégalité (2.0.3), de façon plus élégante, cela découlera directement du théorème 3.7 qui suit.

DÉFINITION 2.2 (Inégalité de sous-ellipticité). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ régulier, V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\partial\Omega \cap V \neq \emptyset$, et $q \in \{1, ..., n-1\}$.

On dira que l'on a une inégalité de sous-ellipticité pour le $\bar{\partial}$-Neumann, pour les $(0, q)$ formes, sur $\bar{\Omega} \cap V$ si : $\exists\, \varepsilon \in]0, 1],\ \exists\, C > 0\ /\ \forall\, v \in \mathcal{D}_q(V \cap \bar{\Omega})$ vérifiant supp $v \subset\subset V$

$$(2.0.4)\qquad \| v \|_\varepsilon \leq C\left(\| \bar{\partial} v \| + \| \bar{\partial}^* v \| + \| v \| \right)$$

DÉFINITION 2.3 (Inégalité de type semi-maximal). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ régulier, V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\partial\Omega \cap V \neq \emptyset$, et $(L_j)_{j=1}^n$ une base de $(1, 0)$ champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur V telle que $(L_j)_{j=1}^{n-1}$ soient tangents à $\partial\Omega$ sur V, notons $(\omega_j)_j^n$ sa base duale de $(1, 0)$ formes.

Soit $S = \{\mathbb{I}_l\}_{l=1}^s$ une subdivision de l'intervalle d'entiers $[1, n-1]$, de la forme : $\mathbb{I}_1 = [1, l_1]$, $\mathbb{I}_2 = [l_1 + 1, l_2]$,...,$\mathbb{I}_s = [l_{s-1} + 1, n-1]$ où $1 < l_1 < l_2 < \ldots < l_{s-1} < n-1$.

Nous appellerons une telle subdivision, une subdivision strictement croissante de $[1, n-1]$.

Nous dirons que Ω satisfait sur V à une inégalité semi-maximale pour les $(0, 1)$ formes relativement à $(L_j)_{j=1}^n$ et S si :

$\exists C > 0\ /\ \forall u \in \mathcal{D}_1(\bar{\Omega} \cap V)$ vérifiant supp $u \subset\subset V$ on a $\left(\text{si } u = \sum_{k=1}^{n} u_k \bar{\omega}_k\right)$

$$(2.0.5)\qquad \sum_{l=1}^{s} \sum_{j,k \in \mathbb{I}_l} \| L_j u_k \|^2 + \sum_{j=1}^{n} \| \bar{L}_j u \|^2 \leq C\left(Q(u,u) + \| u \|^2\right)$$

REMARQUE. La définition d'inégalité semi-maximale pour le $\bar{\partial}$-Neumann fut initialement introduite en 1991 par M.Derridj dans [Der2], voir aussi [D.T.1]. Nous montrerons sur un exemple le caractère non-intrinsèque de cette notion, (voir exemple 6 qui suit).

3. – Énoncés des résultats

THÉORÈME 3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, un ouvert régulier, borné, pseudoconvexe, de classe $\mathcal{C}^\infty$, D une composante connexe de l'ensemble de dégénérescence Δ de la forme de Levi $\mathcal{L}$ de Ω, et $V(D)$ un voisinage de D dans $\mathbb{C}^n$ ouvert et borné séparant D des autres composantes connexes de Δ.*

Soit $q \in \{1, ..., n-1\}$, on suppose que :

a) *$\bar\Omega$ est $\mathcal{C}^\omega$ sur $V(D)$.*

b) *Il existe une base $L_1, ..., L_n$ de $(1,0)$ champs sur $V(D)$ de classe $\mathcal{C}^\omega$ tels que $L_1, ..., L_{n-1}$ soient tangents à $\partial\Omega$ sur $V(D)$.*

c) *Il existe un champ T sur $V(D)$, imaginaire pur, de classe $\mathcal{C}^\omega$ tel que :*
c$_1$) *$(L_1, ..., L_{n-1}, \bar L_1, ..., \bar L_{n-1}, T)$ est une base de $\mathbb{C}T\partial\Omega \cap V(D)$.*
c$_2$) *$[T, L_j]_{/\partial\Omega\cap V(D)} \in \mathbb{L} \oplus \bar{\mathbb{L}} \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$.*
où $\mathbb{L} \oplus \bar{\mathbb{L}}$ est le module sur $\mathcal{C}^\omega(V(D))$ engendré par la famille $(L_j, \bar L_j)_{j=1}^{n-1}$.

d) *Il existe $\alpha > 0$ tel que chacun des $\binom{n-1}{q}$ “paquets” $\sum_{s=1}^{q} \lambda_{j_s}$, $1 \le j_1 < ... < j_q \le n-1$, de valeurs propres λ_{j_s} de $\mathcal{L}$ vérifie $\sum_{s=1}^{q} \lambda_{j_s} \ge \alpha \operatorname{Tr}(\mathcal{L})$ sur $\partial\Omega \cap V(D)$.*

Alors la solution du problème $\bar\partial$-Neumann $\begin{cases} \square u = f \\ f \in L^2_q(\Omega) \cap \mathcal{C}^\omega_q(\bar\Omega \cap V(D)) \end{cases}$ est dans $\mathcal{C}^\omega_q(\bar\Omega \cap V(D))$.

COMMENTAIRES. Dans le cadre de $\mathbb{C}^2$, l'hypothèse d) du théorème 3.1 est toujours vraie pour $q = 1$; en fait, de façon générale, on va montrer qu'elle est équivalente à supposer que Ω vérifie une inégalité de type maximal pour les $(0, q)$ formes sur $V(D)$ (voir le théorème 3.7).

Concernant les inégalités maximales pour les opérateurs, de nombreux travaux ont été consacrés à ce sujet, voir par exemple M. Derridj pour le $\bar\partial$-Neumann pour les $(0, 1)$ formes dans [Der], A. Grigis & L. P. Rothschild pour le $\square_b$ dans [G.R], et B. Helffer & J. Nourigat pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs dans [H.N].

Dans [G.R], A. Grigis & L. P. Rothschild ont montré entre autre que pour un ouvert, le fait d'avoir une inégalité maximale pour le $\square_b$ est intimement lié à la géométrie de son bord, et ils ont montré que la condition d) ci-dessus est nécessaire pour que l'ouvert puisse vérifier une inégalité maximale pour le $\square_b$. On ne sait pas encore si elle est en général suffisante.

Le premier résultat en la matière fut de M.Derridj qui, en 78, montrait le théorème 3.7 ci-dessous, dans le cadre global, pour les $(0, 1)$ formes, voir [Der].

COROLLAIRE 3.2. *Si dans le théorème 3.1 on remplace l'hypothèse de commutation c$_2$) par l'hypothèse suivante :*

$[T, L_j]_{/\partial\Omega\cap V(D)} \in \mathbb{L} \oplus \bar{\mathbb{L}}$ *pour* $j \in \{1, ..., n-1\}$
$[T, L_n]_{/\partial\Omega\cap V(D)} = \alpha_n L_{n/\partial\Omega\cap V(D)} + M_{/\partial\Omega\cap V(D)}$ *où* $M \in \mathbb{L} \oplus \bar{\mathbb{L}}$, *et* α_n *est dans* $\mathcal{C}^\omega(\partial\Omega \cap V(D))$.

alors on a la même conclusion.

Remarque. M. Derridj a montré dans [Der1] que sous les hypothèses b), c_1, c_2 et d) du théorème 3.1 pour les (0, 1) formes, il y a une propagation du type au sens de Kohn [Koh], Bloom-Graham [B.G], le long des courbes intégrales de T. De ce fait, dans $\mathbb{C}^2$ il ne peut exister un point de dégénérescence isolé au voisinage duquel les conditions du théorème 3.1 soient vérifiées, i.e. ces hypothèses ne nous permettent pas de montrer l'analyticité locale ici.

Corollaire 3.3. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ *un domaine de Reinhardt, borné, régulier, de classe* $\mathcal{C}^\omega$ *et pseudoconvexe. Soit D une composante connexe de* Δ *l'ensemble de dégénérescence de la forme de Levi de* Ω.
Soit $V(D)$ *un voisinage ouvert, borné, de D dans* $\mathbb{C}^2$, *séparant D des autres composantes connexes de* Δ. *Supposons que le champ* $L = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}$ *soit transverse à la frontière* $\partial\Omega$ *sur* $V(D)$.
Alors la solution du problème $\bar\partial$*-Neumann* $\begin{cases} \Box u = f \\ f \in L^2_1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\omega_1(\bar\Omega \cap V(D)) \end{cases}$ *est dans* $\mathcal{C}^\omega_1(\bar\Omega \cap V(D))$.

Commentaires. Les domaines de Reinhardt complets vérifient la condition de transversalité ci-dessus, voir [Che2].

S. C. Chen a montré dans [Che] que les domaines de Reinhardt de $\mathbb{C}^n$, réguliers, bornés, de classe $\mathcal{C}^\omega$ et pseudoconvexes, vérifient l'analyticité globale pour le $\bar\partial$-Neumann.

M. Christ a montré en 94 dans [Chr1] & [Chr2] que sur un même domaine de Reinhardt de $\mathbb{C}^2$, de classe $\mathcal{C}^\omega$, pseudoconvexe et borné, il est possible que la régularité analytique globale du $\bar\partial_b$ soit vérifiée bien que la régularité analytique locale, elle, ne le soit pas ! Dès lors il nous est permis de penser qu'il est probable que le même phénomène puisse se produire pour le $\bar\partial$-Neumann.

Notons que celui-ci n'est pas dû à un cas de dégénérescence isolé ! D'ailleurs, en joignant les résultats de S.C.Chen, [che], et de M.Derridj, [Der1], on peut remarquer qu'un domaine de Reinhardt de $\mathbb{C}^2$, borné, régulier, $\mathcal{C}^\infty$, et pseudoconvexe, n'a jamais dans sa frontière de point de faible pseudoconvexité isolé.

Voici maintenant un cadre où la conclusion du théorème 3.1 reste vraie, bien que l'on se soit affranchi de l'inégalité de type maximal.

Théorème 3.4. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, *un ouvert régulier, borné, pseudoconvexe, de classe* $\mathcal{C}^\infty$, *D une composante connexe de l'ensemble de dégénérescence* Δ *de la forme de Levi* $\mathcal{L}$ *de* Ω, *et* $V(D)$ *un voisinage de D dans* $\mathbb{C}^n$ *ouvert et borné séparant D des autres composantes connexes de* Δ.

On suppose que :

a) $\bar{\Omega}$ *est* $\mathcal{C}^\omega$ *sur* $V(D)$.

b) *Il existe une base* $L_1, ..., L_n$ *de* $(1,0)$ *champs sur* $V(D)$ *de classe* $\mathcal{C}^\omega$ *tels que* $L_1, ..., L_{n-1}$ *sont tangents à* $\partial\Omega$ *sur* $V(D)$.

c) *Il existe un champ* T *sur* $V(D)$, *imaginaire pur, de classe* $\mathcal{C}^\omega$ *tel que :*
c$_1$) $(L_1, ..., L_{n-1}, \bar{L}_1, ..., \bar{L}_{n-1}, T)$ *est une base de* $\mathbb{C}T\partial\Omega \cap V(D)$.
c$_2$) $[T, L_j] = L_j \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}$.

d) *Il existe* $q \in \{1, ..., n-1\}$, *et il existe* $V'(D) \subset V(D)$ *voisinage ouvert de* D *dans* $\mathbb{C}^n$ *pour lequel on a sur* $\bar{\Omega} \cap V'(D)$ *une inégalité de sous-ellipticité pour le* $\bar{\partial}$*-Neumann pour les* $(0, q)$ *formes.*

Alors la solution du problème $\bar{\partial}$*-Neumann* $\begin{cases} \Box u = f \\ f \in L^2_q(\Omega) \cap \mathcal{C}^\omega_q(\bar{\Omega} \cap V(D)) \end{cases}$ *est dans* $\mathcal{C}^\omega_q(\bar{\Omega} \cap V(D))$.

COMMENTAIRES. Dans le théorème 3.1 nous avons le même résultat avec une hypothèse de commutation plus générale ; cependant, pour compenser, il nous faut imposer à l'ouvert de vérifier une hypothèse de type maximal pour le $\bar{\partial}$-Neumann, ce qui est très restrictif dans $\mathbb{C}^n$ pour $n \geq 3$; par exemple nous donnons dans ce qui suit une classe d'ouverts de $\mathbb{C}^3$ qui ne vérifie pas l'inégalité maximale sur $\bar{\Omega} \cap V(D)$, mais qui vérifie les hypothèses du théorème 3.4.

D'autre part, J.J.Kohn a montré en 79 dans [Koh1] - en conjonction avec des travaux de K. Diederich & J. E. Fornaess [D.F] - que tout ouvert de $\mathbb{C}^n$, borné, pseudoconvexe, de classe $\mathcal{C}^\omega$ vérifie la condition d) de sous-ellipticité ci-dessus, et, dans tout une série de travaux publiés entre 83 et 87, D. Catlin a caractérisé géométriquement cette condition de sous-ellipticité, voir [Cat1] et ses références.

COROLLAIRE 3.5. *Sous les hypothèses du théorème* 3.1 *(ou du corollaire* 3.2, *ou du théorème* 3.4*) pour les* $(0, 1)$ *formes, le projecteur de Bergman* $P_0 = Id - \bar{\partial}^* \Box_1^{-1} \bar{\partial}$ *envoie* $L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^\omega(\bar{\Omega} \cap V(D))$ *dans* $L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^\omega(\bar{\Omega} \cap V(D)) \cap \mathcal{H}(\Omega)$.

Voici maintenant un corollaire et trois exemples rendant les théorèmes 3.1 et 3.4 plus concrets.

COROLLAIRE 3.6. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, *un ouvert régulier, pseudoconvexe, borné, de classe* $\mathcal{C}^\infty$, *donné sous la forme :* $\Omega = \{z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \;/\; r(z) = \rho(z', |z_n|^2) < 0\}$ *où* ρ *est une fonction à valeurs réelles.*

Soit D *une composante connexe de l'ensemble de dégénérescence* Δ *de la forme de Levi de* Ω, $V(D)$ *un voisinage ouvert borné de* D *dans* $\mathbb{C}^n$ *séparant* D *des autres composantes connexes de* Δ. *On suppose que :*

a′) $\bar{\Omega}$ *est* $\mathcal{C}^\omega$ *sur* $V(D)$.

b′) $V(D) \subset \{z_n \neq 0\}$.

c′) $\dfrac{\partial r}{\partial z_n}$ *ne s'annule pas sur* $V(D)$.

d′) *Il existe $q \in \{1, ..., n-1\}$, et il existe $V'(D) \subset V(D)$ voisinage ouvert de D dans $\mathbb{C}^n$ pour lequel le $\bar\partial$-Neumann vérifie une inégalité de sous-ellipticité pour les $(0, q)$ formes sur $\Omega \cap V'(D)$.*

Alors la solution du problème $\bar\partial$-Neumann $\begin{cases} \square u = f \\ f \in L^2_q(\Omega) \cap \mathcal{C}^\omega_q(\bar\Omega \cap V(D)) \end{cases}$ *est dans* $\mathcal{C}^\omega_q(\bar\Omega \cap V(D))$.

Exemple 1. Soit $\Omega = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 / |z_3|^2 + |z_1|^2(1+|z_2|^2) + |z_2|^{2p} - 1 < 0\}$ où $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.
On a : Ω ouvert, borné, régulier, $\mathcal{C}^\omega$ et pseudoconvexe.

L'ensemble Δ des points frontière de dégénérescence de la forme de Levi est connexe et c'est :

$$\Delta = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \ / \ |z_3|^2 = 1 \ , \ z_1 = z_2 = 0\}$$

Il n'existe pas de $V(\Delta)$ voisinage ouvert dans $\mathbb{C}^3$ de Δ, sur lequel Ω vérifie l'inégalité maximale pour les $(0, 1)$ formes, au sens défini par M. Derridj dans [Der] i.e. au sens de la définition 2.1 ; cependant Ω vérifie les conditions du corollaire 3.6 pour les $(0, 1)$ formes, sur tout voisinage borné $V(\Delta)$ de Δ qui n'intersecte pas l'hyperplan $\{z_3 = 0\}$. Donc la conclusion du corollaire 3.6 s'applique sur $V(\Delta)$ pour les $(0, 1)$ formes.

Exemple 2. Soit $\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_2|^2 + x^6 y^4 \theta(x) + (x-\alpha)^4 (y-\beta)^2 - \gamma < 0\}$ où θ est définie par : $\theta(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$, et $\theta(0) = 0$, avec $z_1 = x + iy$, et α, β ,γ des réels > 0.

Si l'on fixe α et β arbitrairement, et que l'on prend γ un majorant strict de la fonction $x^6 y^4 e^{-\frac{1}{x^2}} + (x-\alpha)^4 (y-\beta)^2$ sur l'ouvert borné $]0, \alpha[\times]0, \beta[$, on a alors :

Ω ouvert, borné, régulier, $\mathcal{C}^\infty$ et pseudoconvexe ; $\partial\Omega$ n'est pas $\mathcal{C}^\omega$ au voisinage de l'hyperplan réel $\{x = 0\}$ de $\mathbb{C}^2_{z_1, z_2}$. La forme de Levi de Ω a des points de dégénérescence qui ne sont pas sur l'hyperplan $\{x = 0\}$, et aux voisinages de ces points de dégénérescence, le bord $\partial\Omega$ est analytique réel. L'ensemble de dégénérescence Δ de la forme de Levi est connexe, et est égal au cercle Γ défini par : $\Gamma = \{\big((\alpha, 0), z_2\big) \in \mathbb{C}^2 \ / \ |z_2|^2 = \gamma\}$. Le corollaire 3.6 s'applique à Ω pour les $(0, 1)$ formes sur tout voisinage borné de Δ qui n'intersecte pas la droite $\{x = 0\} \cap \{|z_2|^2 = 0\}$.

Exemple 3. Soit $\Omega = \left\{ (z_1, ..., z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{C}^n \ / |z_n|^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 \right)^p - 1 < 0 \right\}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Ces ouverts sont réguliers, bornés, pseudoconvexes, de classes $\mathcal{C}^\omega$ et sont strictement pseudoconvexes aux points du bord vérifiant $z_n = 0$. M. Derridj a montré dans [Der] que les valeurs propres λ_j de la forme de Levi $\mathcal{L}$ de Ω vérifient $\lambda_j \geq \alpha \operatorname{Tr}(\mathcal{L})$ au voisinage de l'ensemble des points frontière de dégénérescence de $\mathcal{L}$. Donc le corollaire 3.6 s'applique à Ω pour les $(0,q)$ formes, $q \in \{1, ..., n-1\}$.

Voici maintenant la caractérisation algébrique annoncée en introduction :

THÉORÈME 3.7. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ régulier $\mathcal{C}^\infty$, V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $V \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, et $q \in \{1, ..., n-1\}$.*

Supposons que $\partial\Omega$ est pseudoconvexe sur V, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *Ω vérifie sur V une inégalité de type maximal pour les $(0,q)$ formes.*

ii) *Il existe $\alpha > 0$ tel que chacun des $\binom{n-1}{q}$ "paquets" $\sum_{s=1}^{q} \lambda_{j_s}$, $1 \leq j_1 < ... < j_q \leq n-1$ de valeurs propres λ_{j_s} de la matrice de Levi $\mathcal{L}$ de Ω vérifie :*

$$\sum_{s=1}^{q} \lambda_{j_s} \geq \alpha \operatorname{Tr}(\mathcal{L}) \text{ sur } \partial\Omega \cap V \tag{3.0.6}$$

et il existe une base de $(1,0)$ champs $\mathcal{C}^\infty$ sur V tels que $n-1$ parmis eux soient tangents à $\partial\Omega$ sur V.

COROLLAIRE 3.8. *Sous les hypothèses du théorème 3.7, Ω vérifie toujours une inégalité de type maximal pour les $(0, n-1)$ formes sur tout ouvert V borné de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition $V \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.*

PROPOSITION 3.9 (Inégalité de sous-ellipticité). *Sous les hypothèses* a), b) *et* d) *du théorème* 3.1, *il existe $V'(D) \subset V(D)$ voisinage ouvert de D dans $\mathbb{C}^n$ pour lequel :*

$$\exists\, \varepsilon \in]0,1],\ \exists\, C > 0 \ \ / \ \ \forall\, v \in \mathcal{D}_q\big(V(D) \cap \bar{\Omega}\big) \ \ \textit{vérifiant} \ \operatorname{supp} v \subset\subset V'(D)$$

$$\| v \|_\varepsilon \leq C\big(\| \bar{\partial} v \| + \| \bar{\partial}^* v \| + \| v \| \big)$$

Nous allons maintenant considérer le cas où l'ouvert Ω vérifie une estimation de type semi-maximal sur $V(D)$. Commençons par cette proposition :

PROPOSITION 3.10 (Inégalité semi-maximale). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ régulier, V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\partial\Omega \cap V \neq \emptyset$, et $(L_j)_{j=1}^n$ une base de $(1,0)$ champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur V telle que $(L_j)_{j=1}^{n-1}$ soient tangents à $\partial\Omega$ sur V, notons $(\omega_j)_j^n$ sa base duale de $(1,0)$ formes.*

Soit $S = \{\mathbb{I}_l\}_{l=1}^s$ une subdivision de l'intervalle d'entiers $[1, n-1]$, de la forme : $\mathbb{I}_1 = [1, l_1]$, $\mathbb{I}_2 = [l_1+1, l_2]$,...,$\mathbb{I}_s = [l_{s-1}+1, n-1]$ *où* $1 < l_1 < l_2 < ... < l_{s-1} < n-1$.

Soit $\mathcal{L} = (c_{jk})$ la matrice de Levi de Ω dans la base $(L_j)_{j=1}^{n-1}$, pour chaque $l \in \{1, ..., s\}$ notons $T_l = \sum\limits_{j \in \mathbb{I}_l} c_{jj}$, et considérons la matrice diagonale

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix}
T_1 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 \\
0 & \ddots & \cdot & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \cdot & T_1 & \cdot & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \cdot & T_2 & \cdot & & & & & \vdots \\
\vdots & & & \cdot & \ddots & \cdot & & & & \vdots \\
\vdots & & & & \cdot & T_2 & \cdot & & & \vdots \\
\vdots & & & & & \cdot & \ddots & \cdot & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \cdot & T_s & \cdot & \vdots \\
\vdots & & & & & & & \cdot & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & 0 & T_s
\end{pmatrix}$$

où pour chaque $l \in \{1, ..., s\}$, T_l apparaît avec une occurence de cardinal $\mathbb{I}_l$.

Supposons que $\partial\Omega$ soit pseudoconvexe sur V ; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\exists \sigma > 0 \,/\, \mathcal{L} - \sigma\mathcal{D} \geq 0$ *sur* $\partial\Omega \cap V$.

2) $\exists C > 0 \,/\, \forall u \in \mathcal{D}_1(\bar{\Omega} \cap V)$ *vérifiant* supp $u \subset\subset V$ *on a* $\left(si\ u = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \bar{\omega}_k\right)$

$$\sum_{l=1}^{s} \sum_{j,k \in \mathbb{I}_l} \| L_j u_k \|^2 + \sum_{j=1}^{n} \| \bar{L}_j u \|^2 \leq C \left(Q(u,u) + \| u \|^2 \right).$$

3) $\exists C > 0 \,/\, \forall u \in \mathcal{D}_1(\bar{\Omega} \cap V)$ *vérifiant* supp $u \subset\subset V$ *on a* $\left(si\ u = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \bar{\omega}_k\right)$

$$\| u_n \|_1^2 + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j,k \in \mathbb{I}_l} \| L_j u_k \|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ k \in \mathbb{I}_l}}^{n-1} \| \sqrt{T_l} L_j u_k \|^2 \right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \| \bar{L}_j u \|^2 \leq C \left(Q(u,u) + \| u \|^2 \right).$$

COMMENTAIRES. Cette notion d'inégalité semi-maximale n'est pas intrinsèque, i.e. pour une partition S donnée, elle dépend de la base (L_j) choisie sur V ; nous donnons un exemple explicite de ce phénomène ci-dessous (voir exemple 6, page 62). D'autre part, l'implication 1) $\Longrightarrow$ 3) fut donnée par M. Derridj en 1991 dans [Der2].

THÉORÈME 3.11. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, un ouvert régulier, borné, pseudoconvexe, de classe $\mathcal{C}^\infty$, D une composante connexe de l'ensemble de dégénérescence Δ de la forme de Levi $\mathcal{L}$ de Ω, et $V(D)$ un voisinage de D dans $\mathbb{C}^n$ ouvert et borné séparant D des autres composantes connexes de Δ.*

Soit $S = (\mathbb{I}_l)_{l=1}^s$ une subdivision strictement croissante de l'intervalle d'entiers $\mathbb{I} = [1, n-1]$.

On suppose que :

a) *$\bar\Omega$ est $\mathcal{C}^\omega$ sur $V(D)$.*

b) *Il existe une base $L_1, ..., L_n$ de $(1,0)$ champs sur $V(D)$ de classe $\mathcal{C}^\omega$ tels que $L_1, ..., L_{n-1}$ sont tangents à $\partial\Omega$ sur $V(D)$, et tels que Ω satisfait à une inégalité semi-maximale pour les $(0,1)$ formes relativement à $V(D)$, $(L_j)_{j=1}^n$ et S.*

c) *Il existe un champ T sur $V(D)$, imaginaire pur, de classe $\mathcal{C}^\omega$ tel que :*
c₁) *$(L_1, ..., L_{n-1}, \bar L_1, ..., \bar L_{n-1}, T)$ est une base de $\mathbb{C}T\partial\Omega \cap V(D)$.*
c₂) $\forall l \in \{1, ..., s\}$, $\forall j \in \mathbb{I}_l$, $[T, L_j]_{/\partial\Omega\cap V(D)} \in \mathbb{L}_{\mathbb{I}_l}$.
c₃) $[T, L_n]_{/\partial\Omega\cap V(D)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_{j\,/\partial\Omega\cap V(D)}$ *où les α_j sont dans $\mathcal{C}^\omega\big(\partial\Omega \cap V(D)\big)$.*
Où $\mathbb{L}_K$ est le module sur $\mathcal{C}^\omega(V(D))$ engendré par la famille $(L_j)_{j\in K}$.

d) *Il existe $V'(D) \subset V(D)$ voisinage ouvert de D dans $\mathbb{C}^n$ pour lequel on a sur $\bar\Omega \cap V'(D)$ une inégalité de sous-ellipticité pour le $\bar\partial$-Neumann pour les $(0,1)$ formes.*

Alors la solution du problème $\bar\partial$-Neumann $\begin{cases} \square u = f \\ f \in L_1^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_1^\omega(\bar\Omega \cap V(D)) \end{cases}$ *est dans* $\mathcal{C}_1^\omega\big(\bar\Omega \cap V(D)\big)$.

COMMENTAIRES. M. Derridj a montré dans [Der2], que si l'ouvert Ω vérifie une inégalité semi-maximale pour les $(0,1)$ formes relativement à V, (L_j) et S ; et que s'il satisfait à une notion de type fini elle aussi relative à V, (L_j) et S, alors, Ω vérifie une inégalité sous-elliptique pour les $(0,1)$ formes sur V pour le $\bar\partial$-Neumann. (Plus généralement voir D. Catlin [Cat1])

EXEMPLE 4. Soit $\Omega = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 / x_1^6 y_1^4 + (x_1-\alpha)^4(y_1-\beta)^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - \gamma < 0\}$. Avec $z_1 = x_1 + iy_1$, et α, β ,γ des réels > 0.

Si l'on fixe α et β arbitrairement, et que l'on prend γ un majorant strict de la fonction $x^6y^4 + (x-\alpha)^4(y-\beta)^2$ sur l'ouvert borné $]0,\alpha[\times]0,\beta[$, on a alors :

Ω ouvert, borné, régulier, $\mathcal{C}^\omega$ et pseudoconvexe ; L'ensemble de dégénérescence Δ de la forme de Levi est connexe, et est égal à : $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \ / \ z_1 = \alpha \text{ et } \ |z_2|^2 + |z_3|^2 = \gamma\}$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma - \varepsilon > 0$ et $\alpha - \varepsilon > 0$, alors Ω vérifie les hypothèses du théorème 3.11 sur l'ouvert

$$V_\varepsilon(\Delta) = \Big\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 / \alpha - \varepsilon < x_1 < \alpha + \varepsilon, \ -\varepsilon < y_1 < \varepsilon, \ \gamma - \varepsilon < |z_2|^2 + |z_3|^2 < \gamma + \varepsilon\Big\}$$

avec pour base de $(1,0)$ champs sur $V_\varepsilon(\Delta)$:

$$L_1 = (|z_2|^2+|z_3|^2)\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\,\frac{\partial r}{\partial z_1}\,\frac{\partial}{\partial z_2} - z_3\,\frac{\partial r}{\partial z_1}\,\frac{\partial}{\partial z_3},$$
$$L_2 = \bar z_3\frac{\partial}{\partial z_2} - \bar z_2\,\frac{\partial}{\partial z_3}, \qquad L_3 = z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + z_3\,\frac{\partial}{\partial z_3}$$

où $r = x_1^6y_1^4 + (x_1-\alpha)^4(y_1-\beta)^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - \gamma$ est une fonction définissante de Ω ; le champ T étant défini par $T = L_3 - \bar L_3$, et la subdivision S par $S = \{1\}\cup\{2\}$. Cependant, il ne vérifie pas l'inégalité maximale pour les $(0,1)$ formes sur $V_\varepsilon(\Delta)$.

Exemple 5. Soit

$$\Omega = \left\{(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{C}^n \ / \ |z_{n-1}|^2 + |z_n|^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-2}|z_j|^2\right)^p - 1 < 0\right\},$$

avec $p\in\mathbb{N}$, $p \geq 2$. Cet ouvert est régulier, borné, pseudoconvexe, de classe $\mathcal{C}^\omega$, l' ensemble de dégénérescence de sa forme de Levi $\mathcal{L}$ est connexe et c'est :

$$\Delta = \left\{(z_1, .., z_{n-2}, z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{C}^n / \ |z_{n-1}|^2 + |z_n|^2 = 1, \ \text{et } z_1 = z_2 = \ldots = z_{n-2} = 0\right\}$$

Si $V(\Delta)$ est un voisinage borné de Δ dans $\mathbb{C}^n$ inclus dans $\{|z_{n-1}|^2+|z_n|^2 \neq 0\}$, alors Ω vérifie sur $V(\Delta)$ les hypothèses du théorème 3.11, avec pour base de $(1,0)$ champs sur $V(\Delta)$:

$$L_j = (|z_{n-1}|^2+|z_n|^2)\frac{\partial}{\partial z_j} - z_{n-1}\frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} - z_n\frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_n} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-2$$

$$L_{n-1} = \bar z_n\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} - \bar z_{n-1}\frac{\partial}{\partial z_n} \qquad \text{et} \qquad L_n = \frac{z_{n-1}}{2}\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} + \frac{z_n}{2}\frac{\partial}{\partial z_n}$$

où $r(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n) = |z_{n-1}|^2 + |z_n|^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-2}|z_j|^2\right)^p$ est une fonction définissante de Ω ; le champs T étant défini par $T = L_n - \bar L_n$ et la subdivision S par $S = \{1, \ldots, n-2\}\cup\{n-1\}$.

Cependant, il n'existe pas de $q \in \{1, \ldots, n-2\}$ pour lequel Ω vérifie sur $V(\Delta)$ une inégalité maximale pour les $(0,q)$ formes.

Exemple 6. Soit

$$\Omega = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \ / \ |z_4|^2 + |z_1|^2 + \left(|z_2|^2+|z_3|^2\right)^2 - 1 < 0\}.$$

Cet ouvert est régulier, borné, pseudoconvexe, de classe $\mathcal{C}^\omega$.

Soit $S = \{1, 2\} \cup \{3\}$ et V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\partial\Omega \cap V \neq \emptyset$, et tel que $V \cap \{z_4 = 0\} = \emptyset$.

Alors, en prenant $(V_j)_{j=1}^3$ pour base de $(1, 0)$ champs tangents à $\partial\Omega$ sur $\{z_4 \neq 0\}$, définie par $V_j = \bar{z}_4 \dfrac{\partial}{\partial z_j} - \dfrac{\partial \rho}{\partial z_j} \dfrac{\partial}{\partial z_4}$ (où $\rho(z_1, z_2, z_3) = |z_1|^2 + (|z_2|^2 + |z_3|^2)^2$) ; Ω ne vérifie pas l'inégalité semi-maximale relativement à S, $(V_j)_{j=1}^3$, et V. Cependant, l'exemple 5 donne une base explicite $(L_j)_{j=1}^3$ de $(1, 0)$ champs tangents à $\partial\Omega$, pour laquelle, Ω vérifie une inégalité semi- maximale relativement à S, $(L_j)_{j=1}^3$, et V. Ce qui prouve le caractère non intrinsèque de cette notion.

4. – Démonstrations

4.1. – Démonstration du corollaire 3.2

Soit $(L_j)_{j=1}^n$ une base de (1,0) champs analytiques réels sur $V(D)$, vérifiant les hypothèses du corollaire 3.2. On a $T = \sum_{j=1}^n a_j L_j + b_j \bar{L}_j$, comme $(L_j, \bar{L}_j, T)_{j=1}^{n-1}$ est une base de $\mathbb{C}T\partial\Omega \cap V(D)$, et T est imaginaire pur, le coefficient a_n ne s'annule jamais sur $\partial\Omega \cap V(D)$. Donc, il existe un ouvert $V'(D)$ de $\mathbb{C}^n$ contenant D, tel que $V'(D) \subset\subset V(D)$, sur lequel a_n ne s'annule jamais. De plus, on peut supposer que $\partial\Omega \cap V(D) = \partial\Omega \cap V'(D)$.

En prenant $\widetilde{L_n} = a_n L_n$, alors, $(L_1, ..., L_{n-1}, \widetilde{L_n})$ est une base de $(1, 0)$ champs sur $V'(D)$ de classe $\mathcal{C}^\omega$, et l'on a :

$$(4.1.1) \qquad [T, \widetilde{L_n}]_{/\partial\Omega\cap V'(D)} \equiv 0 \mod\{L_1, ..., L_{n-1}, \bar{L}_1, ..., \bar{L}_{n-1}\}.$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que les crochets $[T, \widetilde{L_n}]_{/\partial\Omega\cap V'(D)}$ et $[T, T]_{/\partial\Omega\cap V'(D)}$ ont les mêmes coefficients devant L_n lorsqu'on les écrit dans la base $(L_j, \bar{L}_j)_{j=1}^n$ sur $V'(D)$.

Ainsi, les hypothèses du théorème 3.1 sont vérifiées en prenant $V'(D)$ à la place de $V(D)$ avec $(L_1, ..., L_{n-1}, \widetilde{L_n})$ pour base de $(1, 0)$ champs ; donc, d'après le théorème 3.1, la solution u du problème du $\bar{\partial}$-Neumann posé avec $V'(D)$ à la place de $V(D)$ est analytique réelle sur $\bar{\Omega} \cap V'(D)$. Or, sur $V(D) \setminus V'(D)$, il y a stricte pseudoconvexité de la frontière $\partial\Omega$, donc, compte tenu des résultats de D. S. Tartakoff & F. Trèves (voir [Tar1],[Tar2] & [Trè]) on en déduit que u est analytique réelle sur $\bar{\Omega} \cap V(D)$. D'où le résultat.

4.2. – Démonstration du corollaire 3.3

Soit $T = L - \bar{L}$ alors, T est un champ imaginaire pur, de classe $\mathcal{C}^\omega$, et tangent à $\partial\Omega$ sur $V(D)$.

Prenons alors $L_1 = \frac{\partial r}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial r}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}$ et $L_2 = \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_1}\frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_2}\frac{\partial}{\partial z_1}$, où r est une fonction définissante globale de Ω. Quitte à diminuer $V(D)$ sur l'extérieur de Ω, on peut supposer que r est définie sur $V(D)$ tout entier.
On a alors : b) (L_1, L_2) est une base sur V(D), de (1,0) champs de classe $\mathcal{C}^\omega$.
c$_1$) $(T, L_1, \bar{L}_1)$ est une base de $\mathbb{C}T\partial\Omega \cap V(D)$.
c$_2$) $[T, L_1] = -2L_1$, et $[T, L_2] = 0$.

D'où Ω vérifie sur $V(D)$ les hypothèses du théorème 3.1 pour les $(0, 1)$ formes.

4.3. – Démonstration du corollaire 3.6

On considère les champs $L_1, ..., L_{n-1}$ définis par : $L_j = \frac{\partial r}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial z_n}$.

On choisit pour champ transverse le champ L_n défini par : $L_n = \frac{\partial}{\partial z_n}$.

Pour finir, on prend le champ T défini par : $T = z_n\frac{\partial}{\partial z_n} - \bar{z}_n\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}$.

Alors ces champs vérifient les conditions b), c), c$_1$) et c$_2$) du théorème 3.4, la condition *d*) étant supposée en hypothèse, on a le résultat.

4.4. – Démonstration du théorème 3.7

Commençons par une inégalité, dite de base, dont on pourra trouver une preuve dans [Koh].

LEMME 4.4.1 (Inégalité de base). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ régulier $\mathcal{C}^\infty$, V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $V \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, et soit $(L_j)_{j=1}^n$ une base de $(1,0)$ champs sur V de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $L_1, ..., L_{n-1}$ soient tangents à $\partial\Omega$. Notons $\omega_1, ..., \omega_n$ la base duale de $(1,0)$ formes de la base $(L_j)_{j=1}^n$, et notons $\mathcal{L} = (c_{jk})$ la matrice de Levi de Ω dans cette base $(L_1, ...L_{n-1})$ alors :*

$$\exists C > 0 \ \textit{tel que} \ \forall\, v = \sum_{|J|=q} v_J\bar{\omega}_J \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap V) \quad \textit{vérifiant} \ \operatorname{supp} v \subset\subset V$$

$$\sum_{j=1}^n \| \bar{L}_j v \|^2 + \sum_{|I|=q-1} \sum_{\substack{j,J\\k,K}} \int_{\partial\Omega\cap V} c_{jk}\varepsilon_J^{jI} v_J \varepsilon_K^{kI} \bar{v}_K d\sigma \leq C(\| \bar{\partial} v \|^2 + \| \bar{\partial}^* v \|^2 + \| v \|^2)$$

Montrons maintenant le théorème 3.7. Le cheminement de cette preuve est similaire à celui qui a été fait par M. Derridj dans [Der].

Soient V un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, tel que $V \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, $(L_j)_{j=1}^n$ une base de $(1, 0)$ champs sur V de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $(L_j)_{j=1}^{n-1}$ soient tangents à $\partial\Omega$, et soit $(\omega_j)_{j=1}^n$ sa base duale de $(1, 0)$ formes.

Soit r une fonction définissante de Ω sur V de classe $\mathcal{C}^\infty$, les coefficients de la matrice de Levi $\mathcal{L} = (c_{jk})$ de Ω dans la base $L_1, ..., L_{n-1}$ de $T^{1,0}(\partial\Omega \cap V)$ s'écrivent : $c_{jk} = \langle \partial r, [L_j, \bar{L}_k] \rangle$.

Soit $v = \sum_{|J|=q} v_J \bar{\omega}_J \in \mathcal{C}_q^\infty(\bar{\Omega} \cap V)$ vérifiant supp $v \subset\subset V$, alors pour $k \leq n-1$ on a :

$$\| L_k v \|^2 = \int_{\partial\Omega \cap V} c_{kk} |v|^2 d\sigma + \mathcal{O}\left(\| v \|^2 + \sum_{i=1}^{n} \| \bar{L}_i v \|^2 \right) \tag{4.4.1}$$

Avant de continuer cette preuve, pour des raisons de clarté de lecture nous poserons $\binom{n-1}{q} = \hat{q}$, et on notera $\mathcal{J}_q$ l'ensemble de tous les q-upplets, J, constitués de q éléments distincts de $\{1, ..., n-1\}$ ordonnés de manière strictement croissante, on munira $\mathcal{J}_q$ d'une relation d'ordre total de façon à numéroter ses éléments via cet ordre de 1 à $\hat{q}$, i.e. $\mathcal{J}_q = \{J_r / r \in \{1, ..., \hat{q}\}\}$.

Soit maintenant $v = \sum_{|J|=q} v_J \bar{\omega}_J \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap V)$, considérons sur $\mathcal{J}_q$ l'ordre lexicographique et posons $W = (v_{J_1}, ..., v_{J_{\hat{q}}})$, alors, on a $W\, {}^t\overline{W} = |v|^2$ sur $\partial\Omega \cap V$, car $v \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap V)$ ssi $v \in \mathcal{C}_q^\infty(\bar{\Omega} \cap V)$ et $v_J = 0$ sur $\partial\Omega \cap V$ dès que $n \in J$.

Pour cet ordre, considérons la matrice hermitienne $(a_{r,s}) = \left(\sum_{j,k,I} \varepsilon_{J_r}^{jI} \varepsilon_{J_s}^{kI} c_{jk} \right)_{r,s \in \{1,...,\hat{q}\}}$.

On va montrer plus loin que ses valeurs propres ne dépendent pas de la relation d'ordre fixée sur $\mathcal{J}_q$ et qu'elles sont égales aux $\hat{q}$ "paquets" $\sum_{s=1}^{q} \lambda_{j_s}$, $j_1 < j_2 < ... < j_q$ où les λ_{j_s} sont les valeurs propres de la matrice de Levi sur V.

Supposons l'hypothèse ii) du théorème 3.7 vraie ; alors cette matrice $(a_{r,s})$ vérifie :

$$\exists \alpha > 0 \ / \ (a_{r,s}) - \alpha \operatorname{Tr}(\mathcal{L}) I_{\hat{q}} \geq 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \cap V$$

et donc on a pour tout $v = \sum_{|J|=q} v_J \bar{\omega}_J \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap V)$ vérifiant supp $v \subset\subset V$:

$$\operatorname{Tr}(\mathcal{L}) W\, {}^t\overline{W} \leq \alpha^{-1} W (a_{r,s})\, {}^t\overline{W} \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \cap V$$

$$\text{i.e.} \quad \operatorname{Tr}(\mathcal{L}) |v|^2 \leq \alpha^{-1} \sum_{r,s}^{\hat{q}} \sum_{j,k,I} c_{jk} \varepsilon_{J_r}^{jI} v_{J_r} \varepsilon_{J_s}^{kI} \bar{v}_{J_s} \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \cap V$$

$$\text{i.e.} \quad \operatorname{Tr}(\mathcal{L}) |v|^2 \leq \alpha^{-1} \sum_{\substack{j,J \\ k,K}} \sum_{I} c_{jk} \varepsilon_{J}^{jI} v_J \varepsilon_{K}^{kI} \bar{v}_K \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \cap V$$

d'où, Ω étant pseudoconvexe, on a :

$$\int_{\partial\Omega \cap V} c_{kk} |v|^2 d\sigma \leq \int_{\partial\Omega \cap V} \operatorname{Tr}(\mathcal{L}) |v|^2 d\sigma \leq \alpha^{-1} \sum_{\substack{j,J \\ k,K}} \sum_{I} \int_{\partial\Omega \cap V} c_{jk} \varepsilon_{J}^{jI} v_J \varepsilon_{K}^{kI} \bar{v}_K d\sigma$$

et compte tenu de l'inégalité de base, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall v \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap V)$ vérifiant supp $v \subset\subset V$ on a :

$$\int_{\partial\Omega \cap V} c_{kk}|v|^2 d\sigma \leq C \left(Q(v, v) + \parallel v \parallel^2\right) \tag{4.4.2}$$

D'où, en utilisant encore l'inégalité de base, on obtient cette fois :

$$\exists C > 0 \quad / \quad \forall v \in \mathcal{D}_q\left(\bar{\Omega} \cap V\right) \qquad \text{vérifiant} \quad \text{supp } v \subset\subset V$$

$$\sum_{j=1}^{n} \parallel \bar{L}_j v \parallel^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \parallel L_k v \parallel^2 \leq C \left(Q(v, v) + \parallel v \parallel^2\right)$$

Ainsi, on a montré l'implication ii) $\Longrightarrow$ i) de la propositon 3.7.

Avant de montrer l'implication inverse, nous énonçons un lemme algébrique qui explicite les propriétés annoncées sur la matrice $\left(\sum_{j,k,I} \varepsilon^{jI}_{J_r} \varepsilon^{kI}_{J_s} c_{jk}\right)_{r,s}$. Pour commencer, nous allons poser quelques notations d'algèbre linéaire qui nous serons utiles pour l'énoncé du lemme.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n - 1 \geq 1$ sur un corps commutatif K de caractéristique différente de 2. On considère le produit extérieur classique sur E noté $\wedge$ et on note $\wedge^0 E = K$, $\wedge^1 E = E$, ...,$\wedge^p E$ les puissances extérieures de E.

Soit $(e_1, ..., e_{n-1})$ une base de E, $\mathcal{L}$ un endomorphisme de E et $(c_{jk})_{j,k}$ sa matrice dans cette base.

On définit pour $q \in \{1, ..., n-1\}$ l'application $\mathcal{L}_q : \wedge^q E \longrightarrow \wedge^q E$ par :

$$\forall\ u = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_q \leq n-1} u_{j_1 \cdots j_q} e_{j_1} \wedge .... \wedge e_{j_q} \quad \in \ \wedge^q E$$

$$\mathcal{L}_q(u) = \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_q \leq n-1} u_{j_1 \cdots j_q} \sum_{i=1}^{q} e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{i-1}} \wedge \mathcal{L}(e_{j_i}) \wedge e_{j_{i+1}} \cdots \wedge e_{j_q}$$

Alors, on peut énoncer le lemme algébrique précité :

LEMME 4.4.2. *$\mathcal{L}_q$ est un endomorphisme de $\wedge^q E$ dont la matrice écrite dans la base $(e_{j_1} \wedge .... \wedge e_{j_q})$ $1 \leq j_1 < .... < j_q \leq n-1$ ordonnée lexicographiquement est :*

$$\left(a_{rs}\right)_{r,s} = \left(\sum_{j,k,I} \varepsilon^{jI}_{J_r} \varepsilon^{kI}_{J_s} c_{jk}\right)_{r,s}$$

où les J_r et J_s sont les q-upplets de $\mathcal{J}_q$, ce dernier étant ordonné lexicographiquement.

Si $\mathcal{L}$ a $n-1$ valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ (non nécessairement distinctes deux à deux) alors $\mathcal{L}_q$ a $\hat{q}$ valeurs propres (elles aussi non nécessairement distinctes deux à deux) qui sont "les paquets" $\sum_{s=1}^{q} \lambda_{j_s} \quad 1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n-1$.

Finalement si $(a_{rs})_{r,s} = \left(\sum_{j,k,I} \varepsilon^{jI}_{J_r} \varepsilon^{kI}_{J_s} c_{jk}\right)_{r,s}$ *et* $(\tilde{a}_{rs})_{r,s} = \left(\sum_{j,k,I} \varepsilon^{jI}_{\tilde{J}_r} \varepsilon^{kI}_{\tilde{J}_s} c_{jk}\right)_{r,s}$

sont issues de deux ordres différents sur $\mathcal{J}_q$, alors elles ont les mêmes valeurs propres.

La preuve de ce lemme est purement calculatoire, on procède par disjonction de cas, nous ne la rédigeons pas ici, de façon à ne pas obscurcir le raisonnement.

Notons que ce lemme est implicite dans l'article de Grigis & Rotchschild [G.R].

Revenons maintenant à la preuve du théorème 3.7 et montrons que l'on on a i) $\Longrightarrow$ ii).

Soit $v = \sum_{|J|=q} v_J \bar{\omega}_J \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap V)$ vérifiant supp $v \subset\subset V$, compte tenu des expressions de $\bar{\partial} v$ et $\bar{\partial}^* v$ données dans les préliminaires on a :

$$\| \bar{\partial} v \|^2 + \| \bar{\partial}^* v \|^2 = \sum_{\substack{j,J \\ k,K}} \sum_{I} \varepsilon^{jI}_{J} \varepsilon^{kI}_{K} \int_{\partial\Omega \cap V} c_{jk} v_J \bar{v}_K d\sigma + \mathcal{O}\Big(\sum_{k=1}^{n} \| \bar{L}_k v \|^2 + \| v \|^2\Big)$$

et donc puisque Ω vérifie une inégalité de type maximal pour les $(0, q)$ formes sur V, compte tenu de l'expression (4.4.1) trouvée pour les $\| L_k v \|^2$, nous savons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap V)$ vérifiant supp $v \subset\subset V$, on a :

$$\int_{\partial\Omega \cap V} v \left(\mathrm{Tr}(\mathcal{L}) I_{\hat{q}} - C \left(\sum_{r,s}^{\hat{q}} \sum_{j,k,I} \varepsilon^{jI}_{J_r} \varepsilon^{kI}_{J_s} c_{jk}\right)_{r,s}\right) {}^t\bar{v} d\sigma \leq C \left(\sum_{k=1}^{n} \| \bar{L}_k v \|^2 + \| v \|^2\right)$$

où a gauche, $v = (v_{J_1}, \ldots, v_{J_{\hat{q}}})$ est écrit suivant l'ordre lexicographique.

Maintenant, montrons que si M est une matrice $(\hat{q}, q)$, hermitienne, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{\Omega} \cap V$ telle qu'on a pour tout $v \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap V)$ vérifiant supp $v \subset\subset V$:

$$\int_{\partial\Omega \cap V} v \ M \ {}^t\bar{v} d\sigma \leq C \left(\sum_{k=1}^{n} \| \bar{L}_k v \|^2 + \| v \|^2\right)$$

alors cela implique que $M \leq 0$ sur $\partial\Omega \cap V$, et on aura le résultat.

Pour le voir, il suffit de reprendre la méthode introduite par M. Derridj dans [Der] et ses deux lemmes algébriques 3.2 & 3.3 pages 561. D'où le résultat.

4.5. - Démonstration de la proposition 3.10

Commençons par montrer que 2) $\Longrightarrow$ 3). Comme $u = \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{w}_j$ est dans $\mathcal{D}_1(\bar{\Omega} \cap V)$, on a, puisque $L_1, ..., L_{n-1}$ sont tangents, $u_{n/\partial\Omega\cap V} \equiv 0$; d'ou $\| u_n \|_1^2 \leq C(Q(u,u) + \| u \|^2)$.

En intégrant par parties, nous avons facilement que :
$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \cap V)$ tel que supp $\varphi \subset\subset V$ et $\forall a \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega} \cap V)$ tel que $|a|^2 \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \cap V)$, si $j \leq n-1$:

$$\| aL_j\varphi \|^2 = \int_{\partial\Omega\cap V} c_{jj}|a|^2|\varphi|^2 \, d\sigma + \mathcal{O}\Big(\| \varphi \|^2 + \sum_{k=1}^{n} \| \bar{L}_k\varphi \|^2 \Big).$$

Soit alors $u = \sum_{k=1}^{n} u_k \bar{\omega}_k \in \mathcal{D}_1(\bar{\Omega} \cap V)$ vérifiant supp $u \subset\subset V$ et soit $k \leq n-1$ fixé, et $\mathbb{I}_l$ l'intervalle de S contenant k ; pour $t \in \mathbb{I}_l$, et $j \leq n-1$ considérons $\| \sqrt{c_{tt}} L_j u_k \|^2$, puisque Ω est pseudoconvexe, on a :

$$\| \sqrt{c_{tt}} L_j u_k \|^2 = \int_{\partial\Omega\cap V} c_{jj} c_{tt} |u_k|^2 d\sigma + \mathcal{O}\Big(\| u_k \|^2 + \sum_{p=1}^{n} \| \bar{L}_p u_k \|^2 \Big)$$

$$\leq C\Big(Q(u,u) + \| u \|^2 \Big).$$

Ce qui prouve 2) $\Longrightarrow$ 3). Montrons maintenant que 2) $\Longrightarrow$ 1), (l'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) à été montrée par M.Derridj en 1991 dans [Der2], l'implication 3) $\Longrightarrow$ 2) est évidente.)
Pour $u = \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{\omega}_j \in \mathcal{D}_1(\bar{\Omega} \cap V)$ vérifiant supp $u \subset\subset V$ on a :

$$\| \bar{\partial} u \|^2 + \| \bar{\partial}^* u \|^2 = \sum_{j,k=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega\cap V} c_{jk} u_j \bar{u}_k \, d\sigma + \mathcal{O}\Big(\| u \|^2 + \sum_{p=1}^{n} \| \bar{L}_p u \|^2 \Big).$$

Soit $l \in \{1, ..., s\}$, on a :

$$\sum_{j,k\in\mathbb{I}_l} \| L_j u_k \|^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{I}_l} \int_{\partial\Omega\cap V} c_{jj} |u_k|^2 \, d\sigma + \mathcal{O}\Big(\| u \|^2 + \sum_{p=1}^{n} \| \bar{L}_p u \|^2 \Big).$$

Donc d'après la condition 2), il existe une constante $C > 0$ indépendante de u telle que :

$$\sum_{l=1}^{s} \sum_{j,k\in\mathbb{I}_l} \int_{\partial\Omega\cap V} c_{jj} |u_k|^2 \, d\sigma \leq C \left(\sum_{j,k=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega\cap V} c_{jk} u_j \bar{u}_k \, d\sigma + \| u \|^2 + \sum_{p=1}^{n} \| \bar{L}_p u \|^2 \right).$$

Où encore, en sommant sur j dans le membre de gauche de cette dernière inégalité, on obtient une nouvelle constante $\widetilde{C}$ indépendante de u telle que :

$$\sum_{l=1}^{s} \int_{\partial\Omega\cap V} T_l \sum_{k\in\mathbb{I}_l} |u_k|^2 \, d\sigma \leq \widetilde{C} \left(\sum_{j,k=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega\cap V} c_{jk} u_j \bar{u}_k \, d\sigma + \| u \|^2 + \sum_{p=1}^{n} \| \bar{L}_p u \|^2 \right).$$

i.e.

$$\int_{\partial\Omega\cap V} u(\mathcal{D} - \widetilde{C}\mathcal{L})^t \bar{u}\ d\sigma \leq \widetilde{C}\left(\| u \|^2 + \sum_{p=1}^{n} \| \bar{L}_p u \|^2\right)$$

ceci $\forall u \in \mathcal{D}_1(\bar\Omega \cap V)$ vérifiant supp $u \subset\subset V$.

Or lors de la démonstration de la caractérisation des ouverts vérifiant l'inégalité de type maximal, nous avons déjà rencontré une telle inégalité, et nous avons montré qu'elle n'est possible que si $\mathcal{D} - \widetilde{C}\mathcal{L}$ est une matrice négative sur $\partial\Omega \cap V$. (Voir la fin de la preuve du théorème 3.7). D'où, $\mathcal{D} - \widetilde{C}\mathcal{L} \leq 0$ sur $\partial\Omega \cap V$, i.e. $\exists \sigma > 0\ /\ \mathcal{L} - \sigma\mathcal{D} \geq 0$ sur $\partial\Omega \cap V$. D'où le résultat.

4.6. – Lemmes préparatoires à la démonstration du théorème 3.1 et démonstration de la proposition 3.9

LEMME 4.6.1 (Inégalité de sous-ellipticité). *Sous les hypothèses* a) *et* b) *du théorème* 3.1, *il existe $V'(D) \subset V(D)$ voisinage ouvert de D dans $\mathbb{C}^n$ pour lequel on a :*

$$\exists\, \varepsilon \in]0, 1],\ \exists\, C_\varepsilon > 0\ /\ \forall\, v \in \mathcal{D}_q\big(V(D) \cap \bar\Omega\big)\ \textit{vérifiant}\ \text{supp}\ v \subset\subset V'(D)$$

$$\| v \|_\varepsilon \leq C_\varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} \| \bar{L}_j v \| + \sum_{k=1}^{n-1} \| L_k v \| + \| v \|\right)$$

et de plus si Ω vérifie une inégalité de type maximal sur $V(D)$ pour les $(0, q)$ *formes (i.e. l'hypothèse d du théorème* 3.1*) alors :*

$$\exists\, \widetilde{C_\varepsilon} > 0\ /\ \forall v \in \mathcal{D}_q\big(V(D) \cap \bar\Omega\big)\ \textit{vérifiant}\ \text{supp}\ v \subset\subset V'(D)$$

$$\| v \|_\varepsilon \leq \widetilde{C_\varepsilon}\big(\ \| \bar\partial v \| + \| \bar\partial^* v \| + \| v \|\ \big)$$

PREUVE. On va montrer que tous les points de D sont de type fini au sens de Bloom-Graham voir [B.G], et on en déduira le résultat grâce aux travaux de J. J. Kohn & L. Hörmander sur la sous-ellipticité, voir [Koh], [Koh1], [Hör1] et [Hör2].

Soit x un point de D de type infini.

Puisque les champs $L_1, \ldots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_{n-1}$ sont à coefficients analytiques réels sur $V(D)$, d'après un théorème de Nagano (voir [Nag]), il existe une sous variété réelle M_x de $\partial\Omega \cap V(D)$ de dimension réelle $2n - 2$, ayant $L_1, \ldots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_{n-1}$ pour champs tangents en chacun de ses points.

Pour chaque x de type infini choisissons une telle variété M_x.

D'après un théorème de Levi-Civita, chacune de ces sous variétés M_x est en fait une sous variété complexe de $\mathbb{C}^n$ (car $(L_j)_{j=1}^{n-1}$ sont des champs holomorphes et donc $\forall m \in M_x$, $T_m^{\mathbb{C}} M_x = T_m M_x$).

Soit alors C une composante connexe de l'ensemble des points de type infini dans D, on peut supposer que les M_x ci-dessus sont connexes, et donc on a $C = \cup_{x \in C} M_x$.

Ainsi C est une variété complexe compacte de dimension complexe $n-1 \geq 1$, ce qui est impossible.

D'où tout point de D est de type fini.

Maintenant, grâce à un théorème bien connu dû à L. Hörmander, voir [Hör2], on obtient l'estimation sous-elliptique au bord suivante : $\forall p \in D, \quad \exists U_p$ voisinage ouvert de p dans $\mathbb{C}^n$ pour lequel :

$$\exists \varepsilon_p \in]0,1] \ , \ \exists C_p > 0 \quad / \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\partial\Omega \cap U_p)$$

$$\| v \|_{\varepsilon_p, \partial\Omega} \leq C_p \sum_{j=1}^{n-1} \| X_j v \|_{\partial\Omega} + \| Y_j v \|_{\partial\Omega} + \| v \|_{\partial\Omega}$$

où les X_j *et* Y_j sont les champs définis par $L_j = X_j + iY_j$.

En procédant comme dans [Koh] ou dans [Hör1] (i.e. en intégrant sur les surfaces de niveau proche de $\partial\Omega \cap U_p$), on déduit que : $\exists \varepsilon_p \in]0,1]$ $\exists C_p > 0$ / $\forall v \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap U_p)$ vérifiant supp $v \subset\subset U_p$

$$\| v \|_{\varepsilon_p} \leq C_p \left(\sum_{j=1}^{n} \| \bar{L}_j v \| + \sum_{k=1}^{n-1} \| L_k v \| + \| v \| \right) . \tag{4.6.1}$$

On peut supposer $U_p \subset V(D)$, ce que l'on fera.

Pour chaque $p \in D$ choisissons un voisinage U_p et un couple (ε_p, C_p) tels que l'inégalité (4.6.1) ci-dessus soit vérifiée. Alors D étant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de U_p, i.e. $D \subset \cup_{j=1}^m U_{p_j}$. Soit $V'(D) \subset\subset \cup_{j=1}^m U_{p_j}$ un voisinage ouvert de D dans $\mathbb{C}^n$, en prenant une partition de l'unité relative à $\overline{V'(D)}$ et subordonnée à $(U_{p_j})_{j=1}^m$, on a le résultat, avec $\varepsilon = min\{\varepsilon_j \ : \ j = 1, ..., m\}$ et $C = \max\{C_j \ : \ j = 1, ..., m\}$.

Si l'on suppose de plus que Ω vérifie une inégalité de type maximal sur $V(D)$ pour les $(0, q)$ formes, alors on a immédiatement l'inégalité de sous-ellipticité pour le $\bar{\partial}$-Neumann sur $\bar{\Omega} \cap V'(D)$ annoncée, ce qui termine la preuve de ce lemme et prouve la proposition 3.9.

REMARQUE. Il y a des résultats généraux sur la sous-ellipticité du problème $\bar{\partial}$-Neumann ; on pourra consulter à ce sujet D. Catlin dans [Cat1] et J. J. Kohn dans [Koh.1], liés au type de D'Angelo, voir [D'An1] et [D'An2].

Rappelons, maintenant, le lemme classique suivant.

LEMME 4.6.2 (Inégalité de compacité). *Soient $E \subset F \subset G$ trois $\mathbb{C}$-espaces vectoriels normés, tels que l'inclusion de F dans G soit continue et tels que l'inclusion de E dans F soit compacte.*

Alors : $\quad \forall \delta > 0 \ , \ \exists C_\delta > 0 \ / \ \forall v \in E$ on a : $\| v \|_F \leq \delta \| v \|_E + C_\delta \| v \|_G$

COROLLAIRE 4.6.3. *Sous les hypothèses* a) *et* b) *du théorème* 3.1, *il existe un voisinage ouvert* $V'(D) \subset V(D)$ *de* D *dans* $\mathbb{C}^n$ *pour lequel on a :*

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall \delta \in]0, 1[$, $\exists C_{\delta,p} > 0 \,/\, \forall v \in \mathcal{D}_q\big(\bar{\Omega} \cap V(D)\big)$ *vérifiant* $\operatorname{supp} v \subset\subset V'(D)$

$$\| v \| \leq \delta \left(\sum_{j=1}^{n} \| \bar{L}_j v \| + \sum_{k=1}^{n-1} \| L_k v \| \right) + C_{\delta,p} \| v \|_{-p} \tag{4.6.2}$$

De plus, si Ω *vérifie une inégalité de type maximal sur* $V(D)$ *pour les* $(0, q)$ *formes alors on a :*

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall \delta \in]0, 1[$, $\exists C_{\delta,p} > 0 \,/\, \forall v \in \mathcal{D}_q\big(\bar{\Omega} \cap V(D)\big)$ *vérifiant* $\operatorname{supp} v \subset\subset V'(D)$

$$\| v \| \leq \delta \left(\| \bar{\partial} v \| + \| \bar{\partial}^* v \| \right) + C_{\delta,p} \| v \|_{-p} \tag{4.6.3}$$

PREUVE. C'est une conséquence du théorème d'injection compacte de Rellich- Kondrashov sur les espaces de Sobolev et des lemmes 4.6.1 et 4.6.2.

4.7. – Démonstration du théorème 3.1

On pose $R_0 = T$, $R_1 = L_1, \ldots, R_{n-1} = L_{n-1}$, $R_n = \bar{L}_1, \ldots, R_{2n-2} = \bar{L}_{n-1}$, $R_{2n-1} = \bar{L}_n$ et $R_{2n} = L_n$.

Soit $r \in \mathbb{N}$ et $I = (i_1, \ldots, i_r) \in \{0, \ldots, 2n\}^r$, R_I désignera dans ce qui suit $R_{i_1} R_{i_2} \ldots R_{i_r}$ et $|I|$ sera la longueur de I, c'est à dire ici r. On notera $Op(s, r)$ comme dans [D.T] pour désigner un opérateur différentiel tangentiel d'ordre r, qui est une concaténation des champs tangents $\overset{(-)}{L}_j$, $j \leq n-1$ et T, contenant exactement s, $\overset{(-)}{L}_j$.

Le champ T s'écrivant $\sum_{j=1}^{n} a_j L_j + b_j \bar{L}_j$ sur $V(D)$, et T étant imaginaire pur, on a $\bar{a}_j = -b_j$. On en déduit alors, compte tenu de l'hypothèse c_1) que le coefficient a_n ne s'annule jamais sur $\partial\Omega \cap V(D)$. Par continuité, il existe $V'(D) \subset V(D)$ voisinage ouvert borné de D dans $\mathbb{C}^n$, sur lequel a_n ne s'annule jamais, et on peut suposer que $\partial\Omega \cap V(D) = \partial\Omega \cap V'(D)$.

On va montrer que u, la solution du problème $\bar{\partial}$-Neumann, est analytique réelle sur $V'(D) \cap \partial\Omega$. D'après le théorème de Morrey & Niremberg [M.N] cela suffira pour montrer que $u \in \mathcal{C}^\omega\big(\bar{\Omega} \cap V'(D)\big)$, car l'opérateur $\square$ est elliptique sur Ω. Comme sur $V(D) \setminus V'(D)$ il y a stricte pseudoconvexité de Ω, nous aurons compte tenu du théorème de D. S. Tartakoff & F. Trèves, $u \in \mathcal{C}^\omega\big(\bar{\Omega} \cap V(D)\big)$, (voir [Tar1], [Tar2] & [Trè]).

Considérons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V'(D))$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, avec $\varphi = 1$ sur un voisinage ouvert de D dans $\mathbb{C}^n$. Pour montrer que u est de classe $\mathcal{C}^\omega$

sur $V'(D)\cap\partial\Omega$, il est bien connu (voir [D.T]) qu'il suffit de montrer que : $\exists C>0\ /\ \forall s,r\ \in\mathbb{N},\ \ s\le r$

$$\| \varphi Op(s,r)u \| \le C^{r+1}r! \tag{4.7.1}$$

$$\| \varphi L_n Op(s,r)u \| \le C^{r+1}r! \tag{4.7.2}$$

où $\|\ .\ \|$ désigne $\|\ .\ \|_{L^2_q(\Omega)}$

Pour le faire, on va effectuer un raisonnement par récurrence sur r, en posant pour hypothèse de récurrence à l'ordre p : $\exists C_0\ge 1\ \exists C_1\ge 1/\forall s,r\in\mathbb{N}$, vérifiant $s\le r\le p$

$$\| \varphi Op(s,r)u \| \le C_1^{r+1}r! \tag{4.7.3}$$

$$Q(\varphi Op(s,r)u,\varphi Op(s,r)u)^{\frac{1}{2}} \le C_0C_1^{r+1}r! \tag{4.7.4}$$

Avant tout, rappelons un résultat bien connu dû à J. J. Kohn et L. Nirenberg (voir [K.N]) :

L'inégalité de sous éllipticité pour le $\bar\partial$-Neumann sur $\bar\Omega\cap V(D)$, donnée par le lemme 4.6.1 implique la régularité C^∞ locale du $\bar\partial$-Neumann sur $\bar\Omega\cap V(D)$.

1$^{\text{ère}}$ étape: Majoration des termes en puissance pure de T.

Pour ces termes, l'hypothèse de récurrence à l'ordre p est : $\exists C_0\ge 1\ \exists C_1\ge 1\ /\ \forall\gamma\le p$

$$\| \varphi T^\gamma u \| \le C_1^{\gamma+1}\gamma! \tag{4.7.5}$$

$$Q(\varphi T^\gamma u,\varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} \le C_0C_1^{\gamma+1}\gamma! \tag{4.7.6}$$

Montrons les inégalités 4.7.5 et 4.7.6 pour $\gamma=p+1$.

Quitte à restreindre $V'(D)$ nous pouvons supposer qu'il correspond au $V'(D)$ donné par le corollaire 4.6.3. L'inégalité (4.6.3) du corollaire 4.6.3 donne alors : $\forall\delta\in]0,1[\ ,\ \exists C_\delta>0$ tel que

$$\| \varphi T^\gamma u \|\le \delta\left(Q(\varphi T^\gamma u,\varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}}+\| \varphi T^\gamma u \|\right)+C_\delta\| \varphi T^\gamma u \|_{-1} \tag{4.7.7}$$

On est donc amené à s'intéresser de plus près à $Q(\varphi T^\gamma u,\varphi T^\gamma u)$. En effectuant "des commutations" dans les produits scalaires, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} &Q\big(\varphi T^\gamma u,\varphi T^\gamma u\big)\\ &=\big(\varphi T^\gamma f,\varphi T^\gamma u\big)+\underbrace{\big(\bar\partial\varphi\wedge T^\gamma u,\bar\partial\varphi T^\gamma u\big)}_{i_1}+\underbrace{\big([\bar\partial^*,\varphi]T^\gamma u,\bar\partial^*\varphi T^\gamma u\big)}_{i_2}\\ &-\underbrace{\big(\bar\partial T^\gamma u,\bar\partial\varphi\wedge\varphi T^\gamma u\big)}_{i_3}-\underbrace{\big(\bar\partial^* T^\gamma u,[\bar\partial^*,\varphi]\varphi T^\gamma u\big)}_{i_4}+\underbrace{\big([\bar\partial,T^\gamma]u,\bar\partial\varphi^2T^\gamma u\big)}_{i_5}\\ &+\underbrace{\big([\bar\partial^*,T^\gamma]u,\bar\partial^*\varphi^2T^\gamma u\big)}_{i_6}+\underbrace{\big(\bar\partial u,[T^{\gamma *},\bar\partial]\varphi^2T^\gamma u\big)}_{i_7}+\underbrace{\big(\bar\partial^* u,[T^{\gamma *},\bar\partial^*]\varphi^2T^\gamma u\big)}_{i_8}\end{aligned} \tag{4.7.8}$$

Pour tout ε positif on a :

$$(4.7.9)\qquad |i_1| \leq \frac{1}{\varepsilon} \parallel \bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u \parallel^2 + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi T^\gamma u \parallel^2$$

$$(4.7.10)\qquad |i_2| \leq \frac{1}{\varepsilon} \parallel [\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u \parallel^2 + \varepsilon \parallel \bar\partial^* \varphi T^\gamma u \parallel^2$$

$$(4.7.11)\qquad |i_3| \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \parallel \bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u \parallel^2 + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi T^\gamma u \parallel^2$$

En remarquant que si φ et θ sont deux fonctions, on a $[\bar\partial^*, \varphi]\theta v = \theta[\bar\partial^*, \varphi]v$; nous obtenons :

$$(4.7.12)\qquad |i_4| \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \parallel [\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u \parallel^2 + \varepsilon \parallel \bar\partial^* \varphi T^\gamma u \parallel^2$$

Pour estimer les termes i_5, i_6, i_7 et i_8 nous aurons besoin du lemme de commutation suivant, qui fut initialement donné dans [D.T].

LEMME 4.7.1. *Pour $l \in \{1, ..., 2n\}$ et $\gamma \in \mathbb{N}^*$ on a :* $[R_l, T^\gamma] = \sum\limits_{j=1}^{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{2n} a^l_{jk} R_k T^{\gamma - j}$.
Les a^l_{jk} étant des fonctions analytiques réelles sur $V(D)$ vérifiant :

$\forall K \subset\subset V(D)$ $\exists A \geq 1$ *indépendant de γ tel que* :

$\forall s \in \mathbb{N}$ $\forall N \in \{0, ..., 2n\}^s$, $\forall j \in \{1, ..., \gamma\}$

$$\sum_{k=1}^{2n} \sup_K \mid R_N(a^l_{jk}) \mid \leq A^{j+|N|+1} j \binom{\gamma}{j} (j + |N|)!$$

De plus $\forall j$, $a^l_{j,2n-1}$ et $a^l_{j,2n}$ sont nulles sur $\partial\Omega \cap V(D)$.

Pour majorer i_5, il suffit de majorer les termes de la forme $([\bar L_l, T^\gamma]u, \bar\partial\varphi^2 T^\gamma u)$ pour $l \in \{1, ..., n\}$, les autres termes issus du crochetage jouent simplement un rôle de "parasite" en ce qui concerne les inégalités que l'on veut obtenir, car ils sont d'ordre de différentiation inférieur.

Nous faisons l'abus d'écriture suivant : Pour $u = \sum\limits_{|I|=q} u_I \bar\omega_I$ on pose :

$$([\bar L_l, T^\gamma]u, \bar\partial\varphi^2 T^\gamma u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{|J|=q+1} \left(\sum_{|I|=q} \varepsilon^{lI}_J [\bar L_l, T^\gamma] u_I, \sum_{\substack{|I|=q \\ j=1,...,n}} \varepsilon^{jI}_J \bar L_j \varphi^2 T^\gamma u_I + s_{JI} \varphi^2 T^\gamma u_I \right)$$

en accord avec la définition de $\bar\partial$ donnée dans les préliminaires. Dans ce qui suit nous referons cet abus d'écriture dans des circonstances légèrement différentes, nous le signalerons, l'interprétation rigoureuse (qui ne pose pas de problème), est laissée au lecteur.

Donc on a compte tenu du lemme 4.7.1 :

$$
\begin{aligned}
([\bar{L}_l, T^\gamma]u, \bar{\partial}\varphi^2 T^\gamma u) &= \sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{k=1}^{2n}(a^l_{jk}R_k T^{\gamma-j}u, \bar{\partial}\varphi^2 T^\gamma u) \\
&= \sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{k=1}^{2n}(\varphi a^l_{jk}R_k T^{\gamma-j}u, \bar{\partial}\varphi \wedge T^\gamma u + \bar{\partial}\varphi T^\gamma u)\,.
\end{aligned}
$$

D'où pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$
\begin{aligned}
&|\,([\bar{L}_l, T^\gamma]u, \bar{\partial}\varphi^2 T^\gamma u)\,|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{k=1}^{2n} \|\, \varphi a^l_{jk}R_k T^{\gamma-j}u \,\| + \|\, \bar{\partial}\varphi \wedge T^\gamma u \,\| + \varepsilon \,\|\, \bar{\partial}\varphi T^\gamma u \,\| \\
(4.7.13)\quad &\leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{k=1}^{2n} \sup|R_k(a^l_{jk})|\ \|\varphi T^{\gamma-j}u\| + \sup|a^l_{jk}|\ \|R_k(\varphi)T^{\gamma-j}u\| \\
&\quad + \|\, R_k\varphi a^l_{jk}T^{\gamma-j}u \,\| + \|\, \bar{\partial}\varphi \wedge T^\gamma u \,\| + \varepsilon \,\|\, \bar{\partial}\varphi T^\gamma u \,\|
\end{aligned}
$$

Où sup| . | signifie et signifiera dans la suite, le suprémum pris sur le support de φ.

Ω vérifie sur $V(D)$ une inégalité de type maximal, donc on a pour $k \neq 2n$:

$$
(4.7.14)\quad \|\, R_k\varphi a^l_{jk}T^{\gamma-j}u \,\| \leq C\Big(Q(\varphi a^l_{jk}T^{\gamma-j}u, \varphi a^l_{jk}T^{\gamma-j}u)^{\frac{1}{2}} + \|\, \varphi a^l_{jk}T^{\gamma-j}u \,\|\Big)
$$

où C est une constante qui ne depend ni de γ, ni de j. ($C, \widetilde{C}$, et $\widetilde{\widetilde{C}}$ désigneront dans toute la suite des constantes qui ne dépendront que de l'ouvert Ω, des champs $(L_j, \bar{L}_j, T)^n_{j=1}$ choisis, de φ et de son support. En particulier, elles seront toujours indépendantes de l'étape de récurrence, et des constantes C_0 et C_1.)

Les coefficients $a^l_{j,2n}$ sont nuls sur le bord, donc, en procédant par intégration par parties, comme pour l'estimation (4.4.1), et en utilisant l'inégalité de base donnée par le lemme 4.4.1, on a aussi :

$$
\begin{aligned}
&\|\, R_{2n}\varphi a^l_{j,2n}T^{\gamma-j}u \,\| \\
(4.7.15)\quad &\leq C\Big(Q(\varphi a^l_{j,2n}T^{\gamma-j}u, \varphi a^l_{j,2n}T^{\gamma-j}u)^{\frac{1}{2}} + \|\, \varphi a^l_{j,2n}T^{\gamma-j}u \,\|\Big)
\end{aligned}
$$

d'où

$$| ([\bar{L}_l, T^\gamma]u, \bar\partial\varphi^2 T^\gamma u) |^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{k=1}^{2n} \sup|R_k(a^l_{jk})| \parallel \varphi T^{\gamma-j}u \parallel + \sup|a^l_{jk}| \parallel R_k(\varphi)T^{\gamma-j}u \parallel$$

$$+\widetilde{C}\Big(Q(\varphi a^l_{jk}T^{\gamma-j}u, \varphi a^l_{jk}T^{\gamma-j}u)^{\frac{1}{2}} + \|\varphi a^l_{jk}T^{\gamma-j}u\|\Big) + \|\bar\partial\varphi\wedge T^\gamma u\| + \varepsilon\, \|\bar\partial\varphi T^\gamma u\|$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{k=1}^{2n} \Big[\sup|R_k(a^l_{jk})| \parallel \varphi T^{\gamma-j}u \parallel + \sup|a^l_{jk}| \parallel R_k(\varphi)T^{\gamma-j}u \parallel$$

$$+ \widetilde{C}\Big(\|\bar\partial a^l_{jk}\wedge\varphi T^{\gamma-j}u\| + \|[\bar\partial^*, a^l_{jk}]\varphi T^{\gamma-j}u\| + \sup|a^l_{jk}| Q(\varphi T^{\gamma-j}u, \varphi T^{\gamma-j}u)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sup|a^l_{jk}| \parallel \varphi T^{\gamma-j}u \parallel \Big) + \parallel \bar\partial\varphi\wedge T^\gamma u \parallel + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi T^\gamma u \parallel \Big]$$

En utilisant maintenant l'hypothèse de récurrence pour les termes en puissance pure de T, le fait que $\parallel \bar\partial a^l_{jk}\wedge\varphi T^{\gamma-j}u \parallel$ et $\parallel [\bar\partial^*, a^l_{jk}]\varphi T^{\gamma-j}u \parallel$ sont majorés par $\widetilde{\widetilde{C}}\sum_{h=1}^{2n}\sup|R_h(a^l_{jk})| \parallel \varphi T^{\gamma-j}u \parallel$, le lemme 4.7.1, et le fait – fondamental dans notre travail – que $R_k(\varphi)T^{\gamma-j}u$ et $\bar\partial\varphi\wedge T^\gamma u$ sont à support compact là où il y a stricte pseudoconvexité – c'est précisément là où, D. S. Tartakoff et F. Trèves ont en 78 montré indépendamment que sous ces hypothèses, on a l'analyticité locale de la solution du $\bar\partial$-Neumann, voir [Tar1], [Tar2] & [Trè]– on obtient :

$$| ([\bar{L}_l, T^\gamma]u, \bar\partial\varphi^2 T^\gamma u) |^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_\varepsilon \sum_{j=1}^{\gamma} A^{j+2}\binom{\gamma}{j} j(j+1)!C_0C_1^{\gamma-j+1}(\gamma-j)! + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi T^\gamma u \parallel$$

$$\leq C_0C_1^\gamma\gamma!\widetilde{C_\varepsilon}A^3\sum_{j=1}^{\gamma}\left(\frac{A}{C_1}\right)^{j-1}\binom{\gamma}{j} j\frac{(j+1)!(\gamma-j)!}{\gamma!} + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi T^\gamma u \parallel$$

$$\leq \widetilde{\widetilde{C_\varepsilon}}C_0C_1^\gamma\gamma! + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi T^\gamma u \parallel$$

Avec $\widetilde{\widetilde{C_\varepsilon}}$ qui dépend de ε, mais qui est indépendante de C_0, C_1, et γ, ceci pour peu que la constante C_1 soit choisie assez grande dès le départ.

(4.7.16) On en déduit que : $|i_5|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_0 C_1^\gamma \gamma! + \varepsilon \parallel \bar{\partial}\varphi T^\gamma u \parallel$

où C_ε dépend de ε, mais est indépendante de C_0, C_1, et γ, ceci pour peu que C_1 soit choisie assez grande dès le départ.

(4.7.17) De manière similaire on obtient : $|i_6|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_0 C_1^\gamma \gamma! + \varepsilon \parallel \bar{\partial}^*\varphi T^\gamma u \parallel$.

Passons maintenant à la majoration des termes i_7 et i_8. De même que pour i_5 et i_6, on ne s'intéresse qu'aux termes du plus haut degré de différentiation. On supposera donc que $\bar{L}_l^* = -L_l$.

On a pour $l \in \{1, ..., n\}$, en utilisant le même abus d'écriture que pour i_5 :

$$| (\bar{\partial}u, [T^{\gamma *}, \bar{L}_l]\varphi^2 T^\gamma u) |^{\frac{1}{2}} = | ([T^\gamma, L_l]\bar{\partial}u, \varphi^2 T^\gamma u) |^{\frac{1}{2}}$$

(Il n'y a pas de terme au bord car d'après le lemme 4.7.1, $[T^\gamma, L_l]$ est tangent.)

$$= \left| \sum_{j=1}^{\gamma} \sum_{k=1}^{2n} (a_{jk}^l R_k T^{\gamma - j}\bar{\partial}u, \varphi^2 T^\gamma u) \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{\gamma} \sum_{k=1}^{2n} (T^{\gamma - j}\bar{\partial}u, R_k^* \bar{a}_{jk}^l \varphi^2 T^\gamma u) \right|^{\frac{1}{2}}$$

(Il n'y a pas de terme au bord car $a_{j,2n-1}^l$ et $a_{j,2n}^l$ sont nuls au bord.)

$$= \left| \sum_{j=1}^{\gamma} \sum_{k=1}^{2n} (\varphi T^{\gamma - j}\bar{\partial}u, \bar{a}_{jk}^l R_k^*(\varphi) T^\gamma u + R_k^* \bar{a}_{jk}^l \varphi T^\gamma u) \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\gamma} (1 + \frac{1}{\varepsilon}) A^{j+2} \binom{\gamma}{j} j(j+1)! \parallel \varphi T^{\gamma - j}\bar{\partial}u \parallel$$

$$+ \varepsilon \left(A^{j+2} \binom{\gamma}{j} j(j+1)! \right)^{-1} C \sum_{k=1}^{2n} \left(Q(\bar{a}_{jk}^l \varphi T^\gamma u, \bar{a}_{jk}^l \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} + \parallel \bar{a}_{jk}^l \varphi T^\gamma u \parallel \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{2n} \parallel R_k^*(\varphi) T^\gamma u \parallel$$

où C est indépendante de γ et de j, et $\varepsilon > 0$ est arbitraire. On a utilisé l'inégalité de type maximal, le fait que $a^l_{j,2n-1} = 0$ sur $\partial\Omega \cap V(D)$, et l'inégalité du lemme 4.7.1.

En procédant comme dans i_5, avec les mêmes arguments, nous avons :

$$
\begin{aligned}
|(\bar{\partial}u, [T^{\gamma *}, \bar{L}_l]\varphi^2 T^\gamma u)|^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^{\gamma} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) A^{j+2} \binom{\gamma}{j} j(j+1)! \Big(\| \varphi[T^{\gamma-j}, \bar{\partial}]u \| \\
+ \| \bar{\partial}\varphi \wedge T^{\gamma-j}u \| + \| \bar{\partial}\varphi T^{\gamma-j}u \| \Big) \\
+ \varepsilon \widetilde{C} \Big(Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} + \| \varphi T^\gamma u \| \Big) + \widetilde{C} C_1^\gamma \gamma!
\end{aligned}
$$

avec la constante $\widetilde{C}$ indépendante de γ.

Maintenant, il suffit de remarquer que le terme $\| \varphi[T^{\gamma-j}, \bar{\partial}]u \|$ a déjà été traité lors de l'estimation de i_5 (on remplace γ dans i_5 par $\gamma - j$), et que l'on a : $\| \varphi[T^{\gamma-j}, \bar{\partial}]u \| \leq C_\varepsilon C_0 C_1^{\gamma-j}(\gamma-j)!$ où l'indice ε est celui de i_5 que l'on peut choisir égal à celui qui nous concerne ici. Puis, en répétant une fois encore les mêmes arguments que ceux utilisés dans i_5, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
|(\bar{\partial}u, [T^{\gamma *}, \bar{L}_l]\varphi^2 T^\gamma u)|^{\frac{1}{2}} &\leq \widetilde{C_\varepsilon} \sum_{j=1}^{\gamma} A^{j+2} \binom{\gamma}{j} j(j+1)! C_0 C_1^{\gamma-j+1}(\gamma-j)! \\
&\quad + \widetilde{C} C_1^\gamma \gamma! + \varepsilon \widetilde{C} \Big(Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} + \| \varphi T^\gamma u \| \Big) \\
&\leq \widetilde{\widetilde{C_\varepsilon}} C_0 C_1^\gamma \gamma! + \varepsilon \widetilde{C} \Big(Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} + \| \varphi T^\gamma u \| \Big)
\end{aligned}
$$

où $\widetilde{\widetilde{C_\varepsilon}}$ ne dépend pas de γ ni de j, pour peu que C_1 soit choisie assez grande dès le départ.

On en déduit alors que :

$$
(4.7.18) \qquad |i_7|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_0 C_1^\gamma \gamma! + \varepsilon C \Big(Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} + \| \varphi T^\gamma u \| \Big)
$$

avec C_ε qui dépend de ε, mais pas de γ, ni de C_0, ni de C_1.

De même manière, on obtient :

$$
(4.7.19) \qquad |i_8|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_0 C_1^\gamma \gamma! + \varepsilon C \Big(Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} + \| \varphi T^\gamma u \| \Big)
$$

D'où finalement, compte tenu de l'égalité (4.7.8), et des inégalités (4.7.9), (4.7.10), (4.7.11), (4.7.12), (4.7.16), (4.7.17), (4.7.18) et (4.7.19) nous avons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|\varphi T^\gamma u\| + \|\varphi T^\gamma f\| + 8C_\varepsilon C_0 C_1^\gamma \gamma! + 2\varepsilon C \; \|\varphi T^\gamma u\| + \varepsilon(C+4) Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}}$$

Donc, en choisissant $\varepsilon = \varepsilon_0$ tel que $1 - \varepsilon_0(C+4) \geq \frac{1}{2}$, il existe une constante A_0 indépendante de γ et ε_0 telle que :

$$Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi T^\gamma f\| + A_0 \; \|\varphi T^\gamma u\| \; + A_0 C_1^\gamma \gamma! \tag{4.7.20}$$

Maintenant, en "injectant" l'inégalité (4.7.20) dans l'inégalité (4.7.7) on obtient :

$$\| \varphi T^\gamma u \| \leq \delta\Big(\| \varphi T^\gamma f \| + (A_0 + 1) \| \varphi T^\gamma u \| + A_0 C_1^\gamma \gamma! \Big) + C_\delta \| \varphi T^\gamma u \|_{-1}$$

et donc en choisissant $\delta > 0$ tel que $1 - (A_0 + 1)\delta \geq \frac{1}{2}$ on a : $\| \varphi T^\gamma u \| \leq A_1 C_1^\gamma \gamma! + A_2 \| \varphi T^\gamma u \|_{-1}$ où A_1 et A_2 sont des constantes qui ne dépendent ni de γ ni de C_1. (On a utilisé le fait que f est analytique réelle au voisinage du support de φ.)

$$\text{D'où} \quad \begin{aligned} \| \varphi T^\gamma u \| &\leq A_1 C_1^\gamma \gamma! + A_2\Big(\| T(\varphi) T^{\gamma-1} u \| + \| \varphi T^{\gamma-1} u \| \Big) \\ &\leq A_3 C_1^\gamma \gamma! \end{aligned} \tag{4.7.21}$$

avec la constante A_3 qui ne dépend ni de C_1 ni de γ.

On déduit des inégalités (4.7.20) et (4.7.21) qu'il existe une constante A_4 qui ne dépend ni de γ ni de C_1 telle que :

$$Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} \leq A_4 C_1^\gamma \gamma! \tag{4.7.22}$$

Ainsi, en choisissant dès le départ $C_1 \geq \max(A_3, A_4)$ on aura les inégalités (4.7.5) et (4.7.6) à l'ordre $p+1$, i.e. les termes en puissance pure de T sont majorés comme désiré.

Passons maintenant au cas général, supposons donc les inégalités (4.7.3) et (4.7.4) vérifiées à l'ordre p, i.e. pour tout $s, r \in \mathbb{N}$ tels que $s \leq r \leq p$, et montrons qu'elles sont encore vraies à l'ordre $p+1$.

Pour $s = 0$ le résultat est vrai, on vient de le montrer, soit alors $Op(s, p+1)$ avec $s \geq 1$ on a, $Op(s, p+1) = \overset{(-)}{L}_k Op(s-1, p)$ avec $k \leq n-1$, ou $Op(s, p+1) = T\,Op(s, p)$.

Dans le premier cas, i.e. $Op(s, p+1) = \overset{(-)}{L}_k Op(s-1, p)$ on a :

$$
\begin{aligned}
\| \varphi Op(s, p+1)u \| \leq \| \overset{(-)}{L}_k(\varphi) Op(s-1, p)u \| & \\
+ C\Big(Q(\varphi Op(s-1, p)u, \varphi Op(s-1, p)u)^{\frac{1}{2}} & \\
+ \| \varphi Op(s-1, p)u \| \Big) & \qquad (4.7.23)\\
\leq \widetilde{C} C_1^{p+1} p! &
\end{aligned}
$$

Deuxième cas : Si $Op(s, p+1) = T Op(s, p)$ alors, on peut écrire, $Op(s, p+1) = T^\gamma \overset{(-)}{L}_k Op(s-1, p-\gamma)$ avec $k \leq n-1$, et en notant $\overset{(-)}{L}_k$ par R_l, $l \in \{1, ..., 2n-2\}$ on a :

(4.7.24) $\qquad \| \varphi Op(s, p+1)u \|$

$$
\begin{aligned}
&\leq \| \varphi [T^\gamma, R_l] Op(s-1, p-\gamma)u \| + \underbrace{\| R_l(\varphi) T^\gamma Op(s-1, p-\gamma)u \|}_{j_1} \\
&+ \underbrace{C\Big(Q(\varphi T^\gamma Op(s-1, p-\gamma)u, \varphi T^\gamma Op(s-1, p-\gamma)u)^{\frac{1}{2}} + \| \varphi T^\gamma Op(s-1, p-\gamma)u \| \Big)}_{j_2} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\gamma} \sum_{k=1}^{2n} \| \varphi a_{jk}^l R_k T^{\gamma-j} Op(s-1, p-\gamma)u \| + j_1 + j_2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\gamma} \sum_{k=1}^{2n} C\Big(Q(\varphi a_{jk}^l Op(s-1, p-j)u, \varphi a_{jk}^l Op(s-1, p-j)u)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad + \| \varphi a_{jk}^l Op(s-1, p-j)u \| \Big) \\
&+ \sup | R_k(a_{jk}^l) | \| \varphi Op(s-1, p-j)u \| \\
&+ \sup | a_{jk}^l | \| R_k(\varphi) Op(s-1, p-j)u \| + j_1 + j_2 \\
&\leq \widetilde{C} \sum_{j=1}^{\gamma} A^{j+2} j \binom{\gamma}{j} (j+1)! C_1^{p-j+1} (p-j)! + \widetilde{C} C_1^{p+1} p! \\
&\leq \widetilde{\widetilde{C}} C_1^{p+1} p!
\end{aligned}
$$

où $\tilde{\tilde{C}}$ est indépendante de C_0, C_1, et p, ceci pour peu que C_1 soit assez grande dès le départ.

Ainsi l'inégalité (4.7.3) est vraie à l'ordre $p+1$. Montrons maintenant que l'inégalité (4.7.4) est aussi vraie à l'ordre $p+1$. Posons $q=p+1$, on a :

$$
\begin{aligned}
Q(\varphi Op(s,q)u, \varphi Op(s,q)u) &= \underbrace{(\bar\partial\varphi \wedge Op(s,q)u, \bar\partial\varphi Op(s,q)u)}_{i_1} \\
&+ \underbrace{([\bar\partial^*,\varphi]Op(s,q)u, \bar\partial^*\varphi Op(s,q)u)}_{i_2} - \underbrace{(\bar\partial Op(s,q)u, \bar\partial\varphi \wedge \varphi Op(s,q)u)}_{i_3} \\
&- \underbrace{(\bar\partial^* Op(s,q)u, [\bar\partial^*,\varphi]\varphi Op(s,q)u)}_{i_4} + \underbrace{([\bar\partial, Op(s,q)]u, \bar\partial\varphi^2 Op(s,q)u)}_{i_5} \\
&+ \underbrace{([\bar\partial^*, Op(s,q)]u, \bar\partial^*\varphi^2 Op(s,q)u)}_{i_6} + \underbrace{(\bar\partial u, [Op(s,q)^*, \bar\partial]\varphi^2 Op(s,q)u)}_{i_7} \\
&+ \underbrace{(\bar\partial^* u, [Op(s,q)^*, \bar\partial^*]\varphi^2 Op(s,q)u)}_{i_8} + (\varphi Op(s,q)f, \varphi Op(s,q)u)
\end{aligned}
$$

Les termes i_1 , i_2 , i_3 et i_4 sont majorés, par le procédé déjà vu pour les termes analogues apparus lors de la majoration des termes en puissance pure de T, on obtient ici pour tout $\varepsilon > 0$:

$$
(4.7.25) \qquad |i_1|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \parallel \bar\partial\varphi \wedge Op(s,q)u \parallel + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi Op(s,q)u \parallel
$$

$$
(4.7.26) \qquad |i_2|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \parallel [\bar\partial^*,\varphi]Op(s,q)u \parallel + \varepsilon \parallel \bar\partial^*\varphi Op(s,q)u \parallel
$$

$$
(4.7.27) \qquad |i_3|^{\frac{1}{2}} \leq (1+\frac{1}{\varepsilon}) \parallel \bar\partial\varphi \wedge Op(s,q)u \parallel + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi Op(s,q)u \parallel
$$

$$
(4.7.28) \qquad |i_4|^{\frac{1}{2}} \leq (1+\frac{1}{\varepsilon}) \parallel [\bar\partial^*,\varphi]Op(s,q)u \parallel + \varepsilon \parallel \bar\partial^*\varphi Op(s,q)u \parallel
$$

Majorons i_5 et i_6. Pour majorer i_5 (à notre convenance), il suffit de bien majorer les termes $([\bar L_l, Op(s,q)]u, \bar\partial\varphi^2 Op(s,q)u)$ pour $l \in \{1, ..., n\}$ (abus d'écriture), pour cela nous allons donner une expression précise du crochet considéré par le biais du lemme suivant dont la preuve est similaire à celle du lemme 4.7.1.

LEMME 4.7.2. *Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $I \in \{0, ..., 2n-2\}^q$ on a pour tout $l \in \{0, ..., 2n\}$:*

$$
\begin{aligned}
[R_l, R_I] &= \sum_{g=1}^{q} \sum_{G_g \in \{0,...,2n-2\}^g} a_{G_g}^{I,l} R_{G_g} + \sum_{h=0}^{q-1} \sum_{H_h \in \{0,...,2n-2\}^h} b_{H_h}^{I,l} \bar L_n R_{H_h} \\
&+ \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{K_k \in \{0,...,2n-2\}^k} c_{K_k}^{I,l} L_n R_{K_k}
\end{aligned}
$$

Les $a^{I,l}_{G_g}$, $b^{I,l}_{H_h}$ et $c^{I,l}_{K_k}$ sont des fonctions analytiques réelles sur $V(D)$, pour lesquelles : $\forall K \subset\subset V(D)$, $\exists\, A \geq 1$ ne dépendant que de K et des champs $(T, (\overset{(-)}{L}_j)_{j=1}^n)$ tel que $\forall r \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \{0, ..., 2n\}^r$ on a : $\forall g \in \{1, ..., q\}$, $h, k \in \{0, ..., q-1\}$

$$\sum_{G_g \in \{0,...,2n-2\}^g} \sup_K \mid R_P\big(a^{I,l}_{G_g}\big) \mid \;\leq A^{q+|P|-g+1}(q-g+1)\binom{q}{g}(q+|P|-g)!$$

$$\sum_{H_h \in \{0,...,2n-2\}^h} \sup_K \mid R_P\big(b^{I,l}_{H_h}\big) \mid \;\leq A^{q+|P|-h}(q-h)\binom{q}{h+1}(q+|P|-h-1)!$$

$$\sum_{K_k \in \{0,...,2n-2\}^k} \sup_K \mid R_P\big(c^{I,l}_{K_k}\big) \mid \;\leq A^{q+|P|-k}(q-k)\binom{q}{k+1}(q+|P|-k-1)!$$

De plus si R_I est de la forme TR_K, alors les coefficients $b^{I,l}_{H_h}$ et $c^{I,l}_{K_k}$ sont nuls sur $\partial\Omega \cap V(D)$.

En interprétant ce lemme avec nos notations, en posant $Op(s,q) = R_I$ on obtient pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&|([\bar{L}_l, Op(s,q)]u, \bar{\partial}\varphi^2 Op(s,q)u)\,|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{g=1}^{q} A^{q-g+1}(q-g+1)\binom{q}{g}(q-g)!\,C_1^{g+1}g! \\
&+ \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{h=0}^{q-1}\sum_{H_h\in\{0,...,2n-2\}^h} \| \, b^{I,l}_{H_h}\varphi\bar{L}_n R_{H_h}u \, \| \\
&+ \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{K_k\in\{0,...,2n-2\}^k} \| \, c^{I,l}_{K_k}\varphi L_n R_{K_k}u \, \| \\
&+ 3 \, \| \, \bar{\partial}\varphi \wedge Op(s,q)u \, \| + 3\varepsilon \, \| \, \bar{\partial}\varphi Op(s,q)u \, \|
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que Ω vérifie une estimation de type maximal sur $V(D)$, de l'hypothèse de récurrence et du fait que $L_n = a_n^{-1}\Big(T - b_n\bar{L}_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j L_j + b_j\bar{L}_j\Big)$ sur $V'(D)$, nous avons :

(4.7.29) $$\| \, \varphi L_n Op(s,k)u \, \| \leq C \sum_{h=0}^{2n-1} \| \, \varphi R_h Op(s,k)u \, \|$$

(ceci pour tous $s, k \in \mathbb{N}$, $s \leq k$ avec C une constante positive qui ne dépend que de φ et des champs $(T, L_j, \bar{L}_j)_{j=1}^n$), on obtient alors :

$$|([\bar{L}_l, Op(s,q)]u, \bar{\partial}\varphi^2 Op(s,q)u)|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\widetilde{C}\sum_{k=0}^{q-1} A^{q-k}(q-k)\binom{q}{k+1}(q-k-1)!C_0C_1^{k+2}(k+1)!$$

$$+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\widetilde{C}\sum_{g=1}^{q} A^{q-g+1}(q-g+1)\binom{q}{g}(q-g)!C_1^{g+1}g!$$

$$+\dot{3} \parallel \bar{\partial}\varphi\wedge Op(s,q)u \parallel +3\varepsilon \parallel \bar{\partial}\varphi Op(s,q)u \parallel$$

D'où

$$|([\bar{L}_l, Op(s,q)]u, \bar{\partial}\varphi^2 Op(s,q)u)|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_\varepsilon C_1^{q+1}q!A\sum_{r=1}^{q}\left(\frac{AC_0}{C_1}\right)^{q-r}(q-r+1)+3\,\|\bar{\partial}\varphi\wedge Op(s,q)u\| +3\varepsilon\,\|\bar{\partial}\varphi Op(s,q)u\|$$

$$\leq \widetilde{C_\varepsilon}C_1^{q+1}q!+3\varepsilon \parallel \bar{\partial}\varphi Op(s,q)u \parallel$$

où $\widetilde{C_\varepsilon}>0$ est une constante qui dépend de ε, mais pas de C_0, C_1, et p, ceci pour peu que C_1 soit choisie assez grande dès le départ.

Ainsi, on en déduit que :

$$|i_5|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_1^{q+1}q!+\varepsilon C \parallel \bar{\partial}\varphi Op(s,q)u \parallel \tag{4.7.30}$$

où C_ε est une constante >0 qui dépend de ε, mais qui est indépendante de C_0, C_1, et q.

De manière similaire nous avons :

$$|i_6|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_1^{q+1}q!+\varepsilon C \parallel \bar{\partial}^*\varphi Op(s,q)u \parallel \tag{4.7.31}$$

Majorons maintenant i_7 et i_8, pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant, dont la preuve est similaire à celle du lemme 4.7.2.

LEMME 4.7.3. *Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $I \in \{0, ..., 2n-2\}^q$ on a pour tout $l \in \{0, ..., 2n\}$:*

$$[R_l, R_I]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{u=0}^{q-1}\sum_{U_u\in\{0,...,2n-2\}^u} R_{U_u}a_{U_u,j}^{I,l}L_j+\sum_{v=0}^{q-1}\sum_{V_v\in\{0,...,2n-2\}^v} R_{V_v}b_{V_v,j}^{I,l}\bar{L}_j$$

Les $a^{I,l}_{U_u,j}$ et les $b^{I,l}_{V_v,j}$ sont des fonctions analytiques réelles sur $V(D)$, pour lesquelles : $\forall K \subset\subset V(D)$, $\exists\, A \geq 1$ ne dépendant que de K et des champs $(T, (\overset{(-)}{L}_j)_{j=1}^n)$ tel que $\forall r \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \{0, ..., 2n\}^r$ on a : $\forall u, v \in \{0, ..., q-1\}$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{U_u \in \{0,...,2n-2\}^u} \sup_K |\, R_P\big(a^{I,l}_{U_u,j}\big) \,|\leq A^{q+|P|-u}(q-u)\binom{q}{u+1}(q+|P|-u-1)! \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{V_v \in \{0,...,2n-2\}^v} \sup_K |\, R_P\big(b^{I,l}_{V_v,j}\big) \,| \leq A^{q+|P|-v}(q-v)\binom{q}{v+1}(q+|P|-v-1)! \end{cases}$$

On a alors en posant $R_I \simeq Op(s,q)^*$, (le symbole $\simeq$ signifiant que l'on fait abstraction des termes parasites issus du passage à l'adjoint, et qu'on utilise l'abus d'écriture défini page 73.) :

$$i_7 = \big(\bar{\partial}u, [Op(s,q)^*, \bar{\partial}]\varphi^2 Op(s,q)u\big)$$

$$\simeq \sum_{l=1}^{n} \Big(\bar{\partial}u, \sum_{j=1}^{n}\sum_{v=0}^{q-1} \sum_{V_v \in \{0,...,2n-2\}^v} R_{V_v} a^{I,l}_{V_v,j} L_j \varphi^2 Op(s,q)u + R_{V_v} b^{I,l}_{V_v,j} \bar{L}_j \varphi^2 Op(s,q)u\Big)$$

Le symbole $\simeq$ signifiant que l'on fait abstraction des termes parasites issus du crochetage et qu'on utilise l'abus d'écriture défini page précédement.

$$\simeq \sum_{l,j=1}^{n}\sum_{v=0}^{q-1}\sum_{V_v} \Big(\varphi \bar{a}^{I,l}_{V_v,j} R^*_{V_v}\bar{\partial}u, L_j(\varphi)Op(s,q)u + L_j\varphi Op(s,q)u\Big)$$
$$+ \Big(\varphi \bar{b}^{I,l}_{V_v,j} R^*_{V_v}\bar{\partial}u, \bar{L}_j(\varphi)Op(s,q)u + \bar{L}_j\varphi Op(s,q)u\Big)$$

d'où, pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$|i_7|^{\frac{1}{2}} \leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) C \sum_{l,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{v=0}^{q-1}\sum_{V_v} \big(\sup|\bar{a}^{I,l}_{V_v,j}| + \sup|\bar{b}^{I,l}_{V_v,k}|\big) \parallel \varphi R^*_{V_v}\bar{\partial}u \parallel$$

$$+ \parallel L_j(\varphi)Op(s,q)u \parallel + \parallel \bar{L}_k(\varphi)Op(s,q)u \parallel$$
$$+ \varepsilon C\big(Q(\varphi Op(s,q)u, \varphi Op(s,q)u)^{\frac{1}{2}} + \parallel \varphi Op(s,q)u \parallel \big)$$

$$+ \sum_{l=1}^{n}\sum_{v=0}^{q-1}\sum_{V_v} \left| \Big(\varphi \bar{a}^{I,l}_{V_v,n} R^*_{V_v}\bar{\partial}u, L_n(\varphi)Op(s,q)u + \sum_{p=0}^{2n-1} a_p R_p \varphi Op(s,q)u\Big)\right|^{\frac{1}{2}}$$

où les a_p sont des fonctions de classe C^ω sur $V'(D)$.

On a déjà majoré les termes de la forme $\parallel \varphi R^*_{V_v}\bar{\partial}u \parallel$ lors de l'estimation de i_5, (il suffit pour s'y ramener de faire le crochet $[R^*_{V_v}, \bar{\partial}]$ tout en supposant que $R^*_{V_v} = \pm\bar{R}_{V_v}$, i.e. abstraction des termes parasites) nous obtenions alors pour $v \geq 1$:

$$\| \varphi R^*_{V_v}\bar{\partial} u \| \leq \sum_{h=1}^{v} A^{v-h+1}(v-h+1)\binom{v}{h}(v-h)!C_1^{h+1}h! + \| \varphi\bar{\partial}\bar{R}_{V_v}u \|$$

et donc compte tenu de l'hypothèse de récurrence et des résultats de D. S. Tartakoff & F. Trèves déja cités nous avons pour $v \geq 1$:

$$\| \varphi R^*_{V_v}\bar{\partial} u \| \leq \sum_{h=1}^{v} A^{v-h+1}(v-h+1)\binom{v}{h}(v-h)!C_1^{h+1}h! + 2C_0C_1^{v+1}v! \tag{4.7.32}$$

Ainsi nous avons :

$$|i_7|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \underbrace{\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)C\sum_{v=1}^{q-1}A^{q-v}(q-v)\binom{q}{v+1}(q-v-1)!\sum_{h=1}^{v}A^{v-h+1}(v-h+1)\binom{v}{h}(v-h)!C_1^{h+1}h! + C_0C_1^{v+1}v!}_{e_1}$$

$$+ \underbrace{\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)CA^q q\binom{q}{1}(q-1)! \| \varphi\bar{\partial} u \| + \sum_{j=1}^{n} \| \overset{(-)}{L}_j(\varphi)Op(s,q)u \|}_{e_2}$$

$$+ \underbrace{\varepsilon\widetilde{C}\Big(Q(\varphi Op(s,q)u, \varphi Op(s,q)u)^{\frac{1}{2}} + \| \varphi Op(s,q)u \| \Big)}_{e_3}$$

$$+ \sum_{l=1}^{n}\sum_{v=0}^{q-1}\sum_{V_v} | (\varphi\bar{a}^{l,l}_{V_v,n}\bar{R}_{V_v}\bar{\partial} u, a_0T\varphi Op(s,q)u) |^{\frac{1}{2}}$$

d'où : $|i_7|^{\frac{1}{2}} \leq e_1 + e_2 + e_3 + \underbrace{\sum_{l=1}^{n}\sum_{v=0}^{q-2}\sum_{V_v} | \big(T^*(\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{l,l}_{V_v,n})\bar{R}_{V_v}\bar{\partial} u, \varphi Op(s,q)u\big) |^{\frac{1}{2}}}_{e_4}$

$$\underbrace{+ | \big(\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{l,l}_{V_v,n}T^*\bar{R}_{V_v}\bar{\partial} u, \varphi Op(s,q)u\big) |^{\frac{1}{2}}}_{e_5}$$

$$\underbrace{+ \sum_{l=1}^{n}\sum_{V_{q-1}} | \big(T^*(\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{l,l}_{V_{q-1},n})\bar{R}_{V_{q-1}}\bar{\partial} u, \varphi Op(s,q)u\big) |^{\frac{1}{2}}}_{e_6}$$

$$\underbrace{+ | \big(\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{l,l}_{V_{q-1},n}T^*\bar{R}_{V_{q-1}}\bar{\partial} u, \varphi Op(s,q)u\big) |^{\frac{1}{2}}}_{e_7}$$

On sait déjà majorer les termes e_4, e_5, et e_6, en utilisant l'hypothèse de récurrence, le fait que l'on peut supposer que $T^* = -T$, et, la même méthode que celle employée précédemment.

Majorons e_7 :

1^{er} cas, si $\bar{R}_{V_{q-1}} = T^{q-1}$, alors, compte tenu des résultats de majoration des termes en puissances pures de T, et des estimations données dans le lemme 4.7.3 on a :

$$\mid \left(\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{I,l}_{V_{q-1},n}T^q\bar\partial u, \varphi Op(s,q)u\right) \mid^{\frac{1}{2}} \leq CC_1^{q+1}q!$$

$2^{ème}$ cas, si $T\bar{R}_{V_{q-1}} = Op_{V_{q-1}}(r,q)$ avec $r \geq 1$, alors on peut écrire $T\bar{R}_{V_{q-1}}$ sous la forme :

$$T\bar{R}_{V_{q-1}} = T^{\gamma_{V_{q-1}}} R_{k_{V_{q-1}}} Op_{V_{q-1}}(r-1, q-\gamma_{V_{q-1}}-1)$$

où $\gamma_{V_{q-1}} \in \{1, ..., q-1\}$ et $k_{V_{q-1}} \in \{1, ..., 2n-2\}$.

$$= R_{k_{V_{q-1}}} Op_{V_{q-1}}(r-1,q-1) + [T^{\gamma_{V_{q-1}}}, R_{k_{V_{q-1}}}] Op_{V_{q-1}}(r-1,q-\gamma_{V_{q-1}}-1)$$

$$= R_{k_{V_{q-1}}} Op_{V_{q-1}}(r-1,q-1) + \sum_{j=1}^{\gamma_{V_{q-1}}} \sum_{\mu=1}^{2n} a_{j\mu}^{k_{V_{q-1}}} R_\mu Op_{V_{q-1}}(r-1,q-j-1)$$

(On a utlisé le lemme 4.7.1.)
Nous avons donc :

$$e_7 = \sum_{l=1}^{n} \sum_{V_{q-1}} \left| \left(\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{I,l}_{V_{q-1},n} T^* \bar{R}_{V_{q-1}} \bar\partial u, \varphi Op(s,q)u\right) \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n} \sum_{V_{q-1}} \left| \left(R_{k_{V_{q-1}}} (\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{I,l}_{V_{q-1},n}) Op_{V_{q-1}}(r-1,q-1)\bar\partial u, \varphi Op(s,q)u \right) \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left| \left(\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{I,l}_{V_{q-1},n} Op_{V_{q-1}}(r-1,q-1)\bar\partial u, R^*_{k_{V_{q-1}}} \varphi Op(s,q)u \right) \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\gamma_{V_{q-1}}} \sum_{\mu=1}^{2n} \left| \left(R_\mu(\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{I,l}_{V_{q-1},n}) a_{j\mu}^{k_{V_{q-1}}} Op_{V_{q-1}}(r-1,q-j-1)\bar\partial u, \varphi Op(s,q)u \right) \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left| \left(\bar{a}_0\varphi\bar{a}^{I,l}_{V_{q-1},n} Op_{V_{q-1}}(r-1,q-j-1)\bar\partial u, R^*_\mu \bar{a}_{j\mu}^{k_{V_{q-1}}} \varphi Op(s,q)u \right) \right|^{\frac{1}{2}}$$

(On a utilisé le fait que $a_{j,2n-1}^{k_{V_{q-1}}}$ et $a_{j,2n}^{k_{V_{q-1}}}$ sont nuls sur le bord.)

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, en utilisant l'inégalité de type maximal, l'hypothèse de récurrence et le fait que $a_{j,2n-1}^{k_{V_{q-1}}}$ est nul au bord, nous avons :

$$
\begin{aligned}
e_7 \leq\ & C_\varepsilon C_1^{q+1} q! + \varepsilon C Q(\varphi Op(s,q)u, \varphi Op(s,q)u)^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{l=1}^{n} \sum_{V_{q-1}} \sup \mid \bar{a}_0 a_{V_{q-1},n}^{l,l} \mid \\
& \times \sum_{j=1}^{\gamma_{V_{q-1}}} (2n-1)^j A^{j+2} j \binom{\gamma_{V_{q-1}}}{j} (j+1)! C_0 C_1^{q-j} (q-j-1)! \\
& + \varepsilon \left((2n-1)^j A^{j+2} j \binom{\gamma_{V_{q-1}}}{j} (j+1)! \right)^{-1} \\
& \times C \sum_{\mu=1}^{2n} Q(\varphi a_{j\mu}^{k_{V_{q-1}}} Op(s,q)u, \varphi a_{j\mu}^{k_{V_{q-1}}} Op(s,q)u)^{\frac{1}{2}} \\
& + \| \varphi a_{j\mu}^{k_{V_{q-1}}} Op(s,q)u \|
\end{aligned}
$$

Le pire des cas étant pour $\gamma_{V_{q-1}} = q-1$, on a alors :

$$
e_7 \leq \widetilde{C_\varepsilon} C_1^{q+1} q! + \varepsilon \widetilde{C} Q(\varphi Op(s,q)u, \varphi Op(s,q)u)^{\frac{1}{2}}
$$

Où $\widetilde{C}$ et $\widetilde{C_\varepsilon}$ sont constantes positives, indépendantes de l'étape q de récurrence, et de C_0, C_1.

Finalement, nous avons :

$$
\begin{aligned}
|i_7|^{\frac{1}{2}} &\leq e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 \\
&\leq C_\varepsilon C_1^{q+1} q! + \varepsilon C Q(\varphi Op(s,q)u, \varphi Op(s,q)u)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{4.7.33}
$$

Où C est une constante positive indépendante de l'étape de récurrence q, (elle peut changer de valeurs au fil des lignes), et C_ε est une constante positive qui dépend de ε, mais pas de q, ni de C_0, ni de C_1, ceci pour peu que C_1 soit choisie assez grande dès le départ par rapport à C_0 et par rapport à la constante A qui intervient dans les lemmes de crochetage 4.7.1, 4.7.2, et 4.7.3.

Par la même méthode nous avons :

$$
|i_8|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_1^{q+1} q! + \varepsilon C Q(\varphi Op(s,q)u, \varphi Op(s,q)u)^{\frac{1}{2}} \tag{4.7.34}
$$

Ainsi, compte tenu des inégalités (4.7.25), (4.7.26), (4.7.27), (4.7.28), (4.7.30), (4.7.31), (4.7.33), et (4.7.34) on déduit l'inégalité (4.7.4) à l'ordre $q = p + 1$, i.e., ce qu'il fallait montrer.

Pour achever la preuve du théorème 3.1, il ne nous reste plus qu'à bien majorer les termes $\| \varphi L_n Op(s, r) \|$ pour r quelconque, ce qui ne pose pas de problème compte tenu de l'inégalité (4.7.29). D'où le résultat.

4.8. – Lemmes préparatoires à la preuve du théorème 3.4

LEMME 4.8.1 (lemme de commutation). *Sous les hypothèses* b), c) *et* c$_2$) *du théorème* 3.4 *on a:* $[\bar{\partial}, T] = \bar{\partial}$ et $[\bar{\partial}^*, T] = -\bar{\partial}^*$.

$$\text{et } \forall \gamma \in \mathbb{N} \text{ on a } : \begin{cases} \bar{\partial} T^\gamma = \displaystyle\sum_{j=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{j} T^j \bar{\partial} \\ \bar{\partial}^* T^\gamma = \displaystyle\sum_{j=0}^{\gamma} (-1)^{\gamma - j} \binom{\gamma}{j} T^j \bar{\partial}^* \end{cases}$$

PREUVE. On pourra la trouver dans un cadre particulier dans [Rei], mais pour être complet nous la reproduisons succintement.

Les hypothèses b), c) et c$_2$) du théorème 3.4 impliquent que $[\bar{\partial}, T] = \bar{\partial}$ et que $[\bar{\partial}^*, T] = -\bar{\partial}^*$

En effet, il suffit de remarquer que les s_{JI} de l'expression de $\bar{\partial} v$ donnée en (2.0.1) dans les préliminaires sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des s_{jk}^p définis par :

$$(4.8.1) \quad \bar{\partial} \bar{\omega}_p = \sum_{1 \le j < k \le n} s_{jk}^p \bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_k \quad \text{ou encore par} \quad [\bar{L}_j, \bar{L}_k] = \sum_{p=1}^{n} -s_{jk}^p \bar{L}_p$$

De plus $[T, \bar{L}_j] = -\bar{L}_j \Longrightarrow T(s_{jk}^p) = -s_{jk}^p$ (car T est imaginaire pur).

On a alors $[\bar{\partial}, T] = \bar{\partial}$ et $[\bar{\partial}^*, T] = -\bar{\partial}^*$.

Pour ce qui est du développement de $\bar{\partial} T^\gamma$ et de $\bar{\partial}^* T^\gamma$, il suffit d'utiliser une récurrence.

COROLLAIRE 4.8.2. *Les égalités du lemme* 4.8.1 *sont encore vraies si l'on remplace T par T^*.*

LEMME 4.8.3 (Inégalité de compacité). *Sous l'hypothèse* d) *du théorème* 3.4, *on a :*

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall \delta \in]0, 1[$, $\exists C_{\delta,p} > 0$ / $\forall v \in \mathcal{D}_q(\bar{\Omega} \cap V(D))$ *vérifiant* supp $v \subset\subset V'(D)$

$$(4.8.2) \qquad \| v \| \le \delta \left(\| \bar{\partial} v \| + \| \bar{\partial}^* v \| \right) + C_{\delta,p} \| v \|_{-p}$$

PREUVE. C'est une conséquence du théorème d'injection compacte de Rellich-Kondrashov dans les espaces de Sobolev, de l'hypothèse de sous-ellipticité d) du théorème 3.4 et du lemme 4.6.2.

4.9. – Démonstration du théorème 3.4

On reprend les notations de la preuve du théorème 3.1. Quitte à restreindre l'ouvert $V'(D)$ donné ici ou celui donné dans l'hypothèse d) de l'énoncé du théorème 3.4, on peut supposer qu'ils correspondent.

Considérons une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V'(D))$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ avec $\varphi = 1$ sur un voisinage ouvert de D dans $\mathbb{C}^n$. Pour montrer que u est de classe $\mathcal{C}^\omega$ sur $V'(D) \cap \partial\Omega$, il nous suffit (voir [D.T]) de montrer que : $\exists C > 0 \ / \ \forall r \in \mathbb{N}$, $\forall I \in \{0, 1, ..., 2n-2\}^r$

$$\| \varphi R_I u \| \leq C^{|I|+1}|I|! \tag{4.9.1}$$

$$\| \varphi L_n R_I u \| \leq C^{|I|+1}|I|! \tag{4.9.2}$$

où $\| \ . \ \|$ désigne $\| \ . \ \|_{L^2_q(\Omega)}$

Pour le faire , on va effectuer un raisonnement par récurrence sur la longueur de I, en posant pour hypothèse de récurrence à l'ordre p : $\exists C_0 \geq 1$, $C_1 \geq 1$, $C_2 \geq 1 \ / \ \forall r \in \mathbb{N}$, $r \leq p$, $\forall \gamma \in \mathbb{N}$

$$\sum_{I \in \{0,....,2n-2\}^r} \| \varphi R_I T^\gamma u \| \leq C_1^{|I|+1} C_2^{\gamma+1}(|I|+\gamma)! \tag{4.9.3}$$

$$\sum_{I \in \{0,....,2n-2\}^r} Q(\varphi R_I T^\gamma u, \varphi R_I T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} \leq C_0 C_1^{|I|+1} C_2^{\gamma+1}(|I|+\gamma)! \tag{4.9.4}$$

Avant tout, rappelons un résultat bien connu dû à J. J. Kohn et L. Nirenberg (voir [K.N]) :

L'inégalité de sous-ellipticité (2.0.4) pour le $\bar\partial$-Neumann sur $\bar\Omega \cap V(D)$, implique la régularité $\mathcal{C}^\infty$ locale du $\bar\partial$-Neumann sur $\bar\Omega \cap V(D)$.

1ère étape: l'ordre $p = 0$.

Commençons par estimer les termes en "puissance pure" de T i.e. les $\| \varphi T^\gamma u \|$.

Soit $\gamma \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité de compacité (4.8.2) appliquée à $\varphi T^\gamma u$ donne : $\forall \delta \in]0,1[$, $\exists C_\delta > 0$ tel que

$$\| \varphi T^\gamma u \| \leq \delta \left(Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} + \| \varphi T^\gamma u \| \right) + C_\delta \| \varphi T^\gamma u \|_{-1} \tag{4.9.5}$$

On est donc amené à s'intéresser de plus près à $Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)$.

$$Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u) = (\varphi T^\gamma f, \varphi T^\gamma u) + \underbrace{(\bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u, \bar\partial\varphi T^\gamma u)}_{i_1} + \underbrace{([\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u, \bar\partial^* \varphi T^\gamma u)}_{i_2}$$

$$- \underbrace{(\bar\partial T^\gamma u, \bar\partial\varphi \wedge \varphi T^\gamma u)}_{i_3} - \underbrace{(\bar\partial^* T^\gamma u, [\bar\partial^*, \varphi]\varphi T^\gamma u)}_{i_4}$$

On a utilisé le lemme 4.8.1 pour écrire cette égalité.

Or pour tout ε positif on a :

$$|i_1| \leq \frac{1}{\varepsilon} \parallel \bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u \parallel^2 + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi T^\gamma u \parallel^2 \tag{4.9.6}$$

$$|i_2| \leq \frac{1}{\varepsilon} \parallel [\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u \parallel^2 + \varepsilon \parallel \bar\partial^* \varphi T^\gamma u \parallel^2 \tag{4.9.7}$$

$$|i_3| \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \parallel \bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u \parallel^2 + \varepsilon \parallel \bar\partial\varphi T^\gamma u \parallel^2 \tag{4.9.8}$$

et pour finir, en remarquant que si φ et θ sont deux fonctions, on a $[\bar\partial^*, \varphi]\theta v = \theta[\bar\partial^*, \varphi]v$.

$$\text{Donc :} \quad |i_4| \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \parallel [\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u \parallel^2 + \varepsilon \parallel \bar\partial^* \varphi T^\gamma u \parallel^2 \tag{4.9.9}$$

d'où pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned} Q\big(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u\big) \leq &\mid \big(\varphi T^\gamma f, \varphi T^\gamma u\big) \mid \\ &+ 2\varepsilon \parallel \bar\partial\varphi T^\gamma u \parallel^2 + \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) \parallel \bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u \parallel^2 \\ &+ 2\varepsilon \parallel \bar\partial^*\varphi T^\gamma u \parallel^2 + \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) \parallel [\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u \parallel^2 \end{aligned} \tag{4.9.10}$$

ainsi, en choisissant $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe C_0 indépendante de γ telle que :

$$Q\big(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u\big) \leq C_0 \Big(\mid \big(\varphi T^\gamma f, \varphi T^\gamma u\big) \mid + \parallel \bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u \parallel^2 + \parallel [\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u \parallel^2\Big) \tag{4.9.11}$$

Or, compte tenu des l'inégalités (4.9.5) et (4.9.11) on a : $\forall\ \delta \in]0, 1[$, $\exists\ C_\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \parallel \varphi T^\gamma u \parallel \leq C_0\delta\Big(&\parallel \varphi T^\gamma f \parallel + \parallel \varphi T^\gamma u \parallel + \parallel \bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u \parallel + \parallel [\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u \parallel\Big) \\ &+ C_\delta \parallel \varphi T^\gamma u \parallel_{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } (1 - C_0\delta) \parallel \varphi T^\gamma u \parallel \leq C_0\delta\Big(&\parallel \varphi T^\gamma f \parallel + \parallel \bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u \parallel + \parallel [\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u \parallel\Big) \\ &+ C_\delta \parallel \varphi T^\gamma u \parallel_{-1} \end{aligned}$$

Soit maintenant en choisissant $\delta > 0$ tel que $1 - C_0\delta > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \parallel \varphi T^\gamma u \parallel &\leq A_1 \Big(\parallel \varphi T^\gamma f \parallel + \parallel \bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u \parallel + \parallel [\bar\partial^*, \varphi] T^\gamma u \parallel\Big) + A_2 \parallel \varphi T^\gamma u \parallel_{-1} \\ &\leq A_3^{\gamma+1} \gamma! + A_2 \parallel \varphi T^\gamma u \parallel_{-1} \end{aligned}$$

Où A_1, A_2 et A_3 sont des constantes qui ne dépendent pas de γ.

On a utilisé le fait que f est analytique réelle au voisinage de supp φ, et que $\bar\partial\varphi \wedge T^\gamma u$ ainsi que $[\bar\partial^*, \varphi]T^\gamma u$ sont à support compact là où il y a stricte pseudoconvexité. C'est précisément là où, D. S. Tartakoff et F. Trèves ont en 78 montré indépendamment que l'on a sous ces hypothèses l'analyticité locale de la solution du $\bar\partial$-Neumann, voir [Tar1], [Tar2] & [Trè].

$$\begin{aligned}
\text{D'où :} \quad \| \varphi T^\gamma u \| &\leq A_3^{\gamma+1}\gamma! + A_4\Big(\| T(\varphi)T^{\gamma-1}u \| + \| \varphi T^{\gamma-1}u \| \Big) \\
&\leq A_3^{\gamma+1}\gamma! + A_5^{\gamma}(\gamma-1)! + A_4 \| \varphi T^{\gamma-1}u \| \\
&\leq A_6^{\gamma+1}\gamma! + A_4 \| \varphi T^{\gamma-1}u \|
\end{aligned}$$

avec les constantes A_j qui ne dépendent pas de γ. (On a utilisé le fait que $T(\varphi)$ est lui aussi à support compact dans $V'(D) \setminus D$ et donc $T(\varphi)T^{\gamma-1}u$ est à support là où il y a stricte pseudoconvexité.)

Par une récurrence immédiate on voit que :

$$\exists E > 1 \ / \ \forall \gamma \in \mathbb{N} \ \| \varphi T^\gamma u \| \leq E^{\gamma+1}\gamma! \tag{4.9.12}$$

Donc les termes en puissance pure de T sont bien majorés, et on en déduit de plus qu'il existe $B > 0$ tel que $\forall \gamma \in \mathbb{N}$

$$Q\big(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u\big)^{\frac{1}{2}} \leq B^{\gamma+1}\gamma! \tag{4.9.13}$$

On peut supposer $B = E$, ce que l'on fera pour la suite, de façon à simplifier l'écriture.

Ainsi, on a montré les inégalités (4.9.3) et (4.9.4) à l'ordre $r = 0$; supposons les vraies à l'ordre p (i.e. $\forall r \leq p$), et montrons les à l'ordre $p + 1 = q$.

Dans la suite, $C, \widetilde{C}, \widetilde{\widetilde{C}}, \ldots$ désigneront des constantes positives indépendantes de l'étape de récurrence et des constantes C_0, C_1, et C_2.

Majorons $\| \varphi R_I T^\gamma u \|$ pour $I \in \{0, \ldots, 2n-2\}^q$, pour cela posons $R_I = Op_I(s, q)$.

Nous avons trois cas possibles :

$$\begin{aligned}
&1) \quad \| \varphi Op_I(s,q)T^\gamma u \| = \| \varphi \bar{L}_j Op_I(s-1, q-1)T^\gamma u \| \\
&2) \quad \| \varphi Op_I(s,q)T^\gamma u \| = \| \varphi T Op_I(s, q-1)T^\gamma u \| \\
&3) \quad \| \varphi Op_I(s,q)T^\gamma u \| = \| \varphi L_j Op_I(s-1, q-1)T^\gamma u \|
\end{aligned}$$

avec $j \leq n - 1$.

Estimons le premier cas :

En utilisant l'inégalité de base (4.4.1), nous avons :

$$\begin{aligned}
&\| \varphi \bar{L}_j Op_I(s-1,q-1)T^\gamma u \| \\
(4.9.14)\qquad &\leq \| \bar{L}_j(\varphi) Op_I(s-1,q-1)T^\gamma u \| + C\Big(\| \varphi Op_I(s-1,q-1)T^\gamma u \| \\
&\qquad + Q(\varphi Op_I(s-1,q-1)T^\gamma u, \varphi Op_I(s-1,q-1)T^\gamma u)^{\frac{1}{2}}\Big)
\end{aligned}$$

Pour le deuxième cas, nous avons :

$$\| \varphi T Op_I(s,q-1)T^\gamma u \| \leq \| \varphi[T, Op_I(s,q-1)]T^\gamma u \| + \| \varphi Op_I(s,q-1)T^{\gamma+1} u \|$$

Or, compte tenu de notre hypothèse de commutation, il est facile de voir que de manière générale, pour tous $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $r \leq s$ nous avons : $[T, Op_I(r,s)] = a_s Op_I(r,s)$ où a_s est une constante telle que $|a_s| \leq s$. D'où

$$\begin{aligned}
(4.9.15)\qquad \| \varphi T Op_I(s, q-1)T^\gamma u \| &\leq |a_{q-1}| \, \| \varphi Op_I(s, q-1)T^\gamma u \| \\
&\quad + \| \varphi Op_I(s, q-1)T^{\gamma+1} u \|
\end{aligned}$$

Pour estimer le troisième cas, nous commençons par remarquer qu'une simple intégration par parties nous donne : $\forall j \leq n-1$, $\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \cap V)$ tel que supp $v \subset\subset V$ on a :

$$(4.9.16)\qquad \| L_j v \| \leq \| c_j T v \| + \mathcal{O}(\| v \| + \sum_{k=1}^{n} \| \bar{L}_k v \|)$$

où c_j est une fonction analytique réelle sur V, qui, restreinte à $\partial\Omega \cap V$, n'est autre que le $j^{\text{ème}}$ coefficient de la diagonale principale de la matrice de Levi écrite dans la base (L_j).

Ainsi en utilisant ici encore l'inegalité de base (4.4.1), nous avons :

$$\begin{aligned}
&\| \varphi L_j Op_I(s-1, q-1)T^\gamma u \| \\
&\leq C\Big(Q(\varphi Op_I(s-1, q-1)T^\gamma u, \varphi Op_I(s-1, q-1)T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} \\
(4.9.17)\qquad &\qquad + \| \varphi Op_I(s-1, q-1)T^\gamma u \| \Big) \\
&\quad + \| c_j T(\varphi) Op_I(s-1,q-1)T^\gamma u \| + |a_{q-1}| \, \| c_j \varphi Op_I(s-1,q-1)T^\gamma u \| \\
&\quad + \| c_j \varphi Op_I(s-1, q-1)T^{\gamma+1} u \| + \| L_j(\varphi) Op_I(s-1, q-1)T^\gamma u \|
\end{aligned}$$

Ainsi, compte tenu des inégalités (4.9.14), (4.9.15) et (4.9.17) nous avons :

$$\sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} \| \varphi R_I T^\gamma u \| \leq (2n-1) \sum_{K\in\{0,\dots,2n-2\}^{q-1}} \sum_{j=1}^{n} \| \bar{L}_j(\varphi) R_K T^\gamma u \|$$
$$+ C\Big(\| T(\varphi) R_K T^\gamma u \| + |a_{q-1}| \, \| \varphi R_K T^\gamma u \|$$
$$+ \| \varphi R_K T^{\gamma+1} u \| + Q(\varphi R_K T^\gamma u, \varphi R_K T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} \Big)$$

Maintenant en utilisant l'hypotèse de récurrence, le théorème de Tartakoff et Trèves ([Tar], [Tar1], [Trè]), et le fait que $|a_{q-1}| \leq q-1$ nous obtenons :

$$\sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} \| \varphi R_I T^\gamma u \| \leq (2n-1)\widetilde{C} C_0 C_1^q C_2^{\gamma+2} (q+\gamma)!$$

D'où en supposant dès le départ que $C_1 \geq (2n-1)\widetilde{C} C_0 C_2$ nous aurons :

$$\sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} \| \varphi R_I T^\gamma u \| \leq C_1^{q+1} C_2^{\gamma+1} (q+\gamma)!$$

Ce qui prouve l'inégalité (4.9.3) à l'ordre $q = p+1$. Montrons maintenant que l'on a aussi l'inégalité (4.9.4) à l'ordre $q = p+1$.
Soit I de longueur p+1=q estimons l'expression $\sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} Q\big(\varphi R_I T^\gamma u, \varphi R_I T^\gamma u\big)$.

$$\sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} Q\big(\varphi R_I T^\gamma u, \varphi R_I T^\gamma u\big)$$
$$= \sum_I \underbrace{\big(\bar\partial\varphi \wedge R_I T^\gamma u, \bar\partial\varphi R_I T^\gamma u\big)}_{i_1} + \underbrace{\big([\bar\partial^*, \varphi] R_I T^\gamma u, \bar\partial^* \varphi R_I T^\gamma u\big)}_{i_2}$$
$$- \underbrace{\big(\bar\partial R_I T^\gamma u, \bar\partial\varphi \wedge \varphi R_I T^\gamma u\big)}_{i_3} - \underbrace{\big(\bar\partial^* R_I T^\gamma u, [\bar\partial^*, \varphi]\varphi R_I T^\gamma u\big)}_{i_4}$$
$$+ \underbrace{\big([\bar\partial, R_I] T^\gamma u, \bar\partial\varphi^2 R_I T^\gamma u\big)}_{i_5} + \underbrace{\big([\bar\partial^*, R_I] T^\gamma u, \bar\partial^*\varphi^2 R_I T^\gamma u\big)}_{i_6}$$
$$+ \underbrace{\big(\bar\partial T^\gamma u, [R_I^*, \bar\partial]\varphi^2 R_I T^\gamma u\big)}_{i_7} + \underbrace{\big(\bar\partial^* T^\gamma u, [R_I^*, \bar\partial^*]\varphi^2 R_I T^\gamma u\big)}_{i_8}$$
$$+ \big(\varphi R_I T^\gamma f, \varphi R_I T^\gamma u\big)$$

Pour obtenir cette égalité, on a utilisé le lemme 4.8.1.

Ceci étant, i_1 , i_2 , i_3 et i_4 sont bien majorés, par le même procédé déjà vu pour l'estimation de $Q(\varphi T^\gamma u, \varphi T^\gamma u)$, on utilise l'hypothèse de récurrence, et "petite et grande constante". On obtient alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$|i_1|^{\frac{1}{2}} \leq \sum_I \frac{1}{\varepsilon} \parallel \bar{\partial}\varphi \wedge R_I T^\gamma u \parallel + \varepsilon \parallel \bar{\partial}\varphi R_I T^\gamma u \parallel \tag{4.9.18}$$

$$|i_2|^{\frac{1}{2}} \leq \sum_I \frac{1}{\varepsilon} \parallel [\bar{\partial}^*, \varphi] R_I T^\gamma u \parallel + \varepsilon \parallel \bar{\partial}^* \varphi R_I T^\gamma u \parallel \tag{4.9.19}$$

$$|i_3|^{\frac{1}{2}} \leq \sum_I \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \parallel \bar{\partial}\varphi \wedge R_I T^\gamma u \parallel + \varepsilon \parallel \bar{\partial}\varphi R_I T^\gamma u \parallel \tag{4.9.20}$$

$$|i_4|^{\frac{1}{2}} \leq \sum_I \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \parallel [\bar{\partial}^*, \varphi] R_I T^\gamma u \parallel + \varepsilon \parallel \bar{\partial}^* \varphi R_I T^\gamma u \parallel \tag{4.9.21}$$

Majorons maintenant les termes i_5 et i_6. Pour cela, nous allons utiliser le lemme 4.7.2.

On a alors, compte tenu de ce lemme :

$$\begin{aligned} i_5 \simeq \sum_{I \in \{0,\dots,2n-2\}^q} & \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{g=1}^{q} \sum_{G_g \in \{0,\dots,2n-2\}^g} a_{G_g}^{I,l} R_{G_g} T^\gamma u, \bar{\partial}\varphi^2 R_I T^\gamma u \right) \\ & + \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{h=0}^{q-1} \sum_{H_h \in \{0,\dots,2n-2\}^h} b_{H_h}^{I,l} \bar{L}_n R_{H_h} T^\gamma u, \bar{\partial}\varphi^2 R_I T^\gamma u \right) \\ & + \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{K_k \in \{0,\dots,2n-2\}^k} c_{K_k}^{I,l} L_n R_{K_k} T^\gamma u, \bar{\partial}\varphi^2 R_I T^\gamma u \right) \end{aligned}$$

Le symbole $\simeq$ signifie et signifiera que l'on fait abstraction des termes parasites issus du crochetage et des adjoints, et aussi qu'on utilise l'abus d'écriture défini page 73.

Or on a :

$$L_n = \sum_{p=0}^{2n-1} a_p R_p \tag{4.9.22}$$

avec $a_p \in \mathcal{C}^\omega(\bar{\Omega} \cap V'(D))$, donc :

$$i_5 \simeq \sum_I \left(\sum_{l=1}^n \sum_{g,G_g} a_{G_g}^{I,l} R_{G_g} T^\gamma u, \bar{\partial}\varphi^2 R_I T^\gamma u \right)$$
$$+ \left(\sum_{l=1}^n \sum_{h,H_h} b_{H_h}^{I,l} \bar{L}_n R_{H_h} T^\gamma u, \bar{\partial}\varphi^2 R_I T^\gamma u \right)$$
$$+ \left(\sum_{l=1}^n \sum_{k,K_k} \sum_{p=0}^{2n-1} a_p c_{K_k}^{I,l} R_p R_{K_k} T^\gamma u, \bar{\partial}\varphi^2 R_I T^\gamma u \right)$$

D'où compte tenu des inégalités données dans le lemme 4.7.2 de l'inégalité de base (4.4.1), et des résultats de Tartakoff et Trèves déjà cités, nous avons :

$$|i_5| \leq \sum_I \| \bar{\partial}\varphi \wedge R_I T^\gamma u + \bar{\partial}\varphi R_I T^\gamma u \| \left\{ \| \sum_{l=1}^n \sum_{g,G_g} \varphi a_{G_g}^{I,l} R_{G_g} T^\gamma u \| \right.$$
$$\left. + \| \sum_{l=1}^n \sum_{h,H_h} \varphi b_{H_h}^{I,l} \bar{L}_n R_{H_h} T^\gamma u \| + \| \sum_{l=1}^n \sum_{k,K_k} \sum_{p=0}^{2n-1} \varphi a_p c_{K_k}^{I,l} R_p R_{K_k} T^\gamma u \| \right\}$$
$$\leq \sum_I \| \bar{\partial}\varphi \wedge R_I T^\gamma u + \bar{\partial}\varphi R_I T^\gamma u \|$$
$$\times \left\{ n \sum_{g=1}^q A^{q-g+1}(q-g+1)\binom{q}{g}(q-g)! C_1^{g+1} C_2^{\gamma+1}(g+\gamma)! \right.$$
$$+ C \sum_{h=0}^{q-1} A^{q-h}(q-h)\binom{q}{h+1}(q-h-1)! C_0 C_1^{h+1} C_2^{\gamma+1}(h+\gamma)!$$
$$\left. + \widetilde{C} \sum_{k=0}^{q-1} A^{q-k}(q-k)\binom{q}{k+1}(q-k-1)! C_0 C_1^{k+2} C_2^{\gamma+1}(k+\gamma+1)! \right\}$$

D'où pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons :

$$|i_5|^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \sum_I \| \bar{\partial}\varphi \wedge R_I T^\gamma u + \bar{\partial}\varphi R_I T^\gamma u \|$$
$$+ \frac{\widetilde{\widetilde{C}}}{\varepsilon} \sum_{g=1}^q A^{q-g+1}(q-g+1)\binom{q}{g}(q-g)! C_1^{g+1} C_2^{\gamma+1}(g+\gamma)!$$
$$+ \frac{\widetilde{\widetilde{C}}}{\varepsilon} \sum_{r=1}^q A^{q-r+1}(q-r+1)\binom{q}{r}(q-r)! C_0 C_1^{r+1} C_2^{\gamma+1}(r+\gamma)!$$

Ainsi, pour peu que C_1 soit suffisamment grande par rapport à A et C_0 dès le départ, nous aurons :

$$|i_5|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_1^{q+1} C_2^{\gamma+1}(q+\gamma)! + \varepsilon \sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} \| \bar\partial \varphi R_I T^\gamma u \| \tag{4.9.23}$$

Avec $C_\varepsilon > 0$ une constante qui dépend de ε, mais pas l'étape de récurrence, ni de C_0, C_1 et C_2.

En utilisant les mêmes arguments, nous avons aussi :

$$|i_6|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_1^{q+1} C_2^{\gamma+1}(q+\gamma)! + \varepsilon \sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} \| \bar\partial^* \varphi R_I T^\gamma u \| \tag{4.9.24}$$

Majorons maintenant i_7 et i_8, pour cela nous allons utiliser le lemme 4.7.3. Compte tenu de ce lemme, nous avons :

$$\begin{aligned}
i_7 &= \sum_I (\bar\partial T^\gamma u, [R_I^*, \bar\partial]\varphi^2 R_I T^\gamma u) \simeq \sum_I \left(\bar\partial T^\gamma u, \sum_{l=1}^n [\bar R_I, \bar L_l] \varphi^2 R_I T^\gamma u \right) \\
&= \sum_I \left(\bar\partial T^\gamma u, \sum_{\substack{l=1\\ j=1}}^n \sum_{v,V_v} R_{V_v} a^{I,l}_{V_v,j} L_j \varphi^2 R_I T^\gamma u + R_{V_v} b^{I,l}_{V_v,j} \bar L_j \varphi^2 R_I T^\gamma u \right) \\
&= \sum_I \left(\sum_{\substack{l=1\\ j=1}}^n \sum_{v,V_v} \varphi \bar b^{I,l}_{V_v,j} R^*_{V_v} \bar\partial T^\gamma u, \bar L_j(\varphi) R_I T^\gamma u + \bar L_j \varphi R_I T^\gamma u \right) \\
&+ \left(\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{v,V_v} \varphi L_j^* \bar a^{I,l}_{V_v,j} R^*_{V_v} \bar\partial T^\gamma u, \varphi R_I T^\gamma u \right) \\
&+ \left(\sum_{l=1}^n \sum_{p=0}^{2n-2} \sum_{v,V_v} \varphi R_p^* \bar a_p \bar a^{I,l}_{V_v,n} R^*_{V_v} \bar\partial T^\gamma u, \varphi R_I T^\gamma u \right) \\
&+ \left(\sum_{l=1}^n \sum_{v,V_v} \varphi \bar a_{2n-1} \bar a^{I,l}_{V_v,n} R^*_{V_v} \bar\partial T^\gamma u, \bar L_n(\varphi) R_I T^\gamma u + \bar L_n \varphi R_I T^\gamma u \right)
\end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité (4.9.22) ; en faisant ici encore abstraction des termes parasites, on a :

$$i_7 \simeq \sum_I \left(\sum_{\substack{l=1\\j=1}}^{n} \sum_{v,V_v} \varphi \bar{b}^{I,l}_{V_v,j} \bar{R}_{V_v} \bar{\partial} T^\gamma u,\, \bar{L}_j(\varphi) R_I T^\gamma u + \bar{L}_j \varphi R_I T^\gamma u \right)$$

$$+ \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{v,V_v} \varphi \bar{L}_j(\bar{a}^{I,l}_{V_v,j}) \bar{R}_{V_v} \bar{\partial} T^\gamma u + \varphi \bar{a}^{I,l}_{V_v,j} \bar{L}_j \bar{R}_{V_v} \bar{\partial} T^\gamma u,\, \varphi R_I T^\gamma u \right)$$

$$+ \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{p=0}^{2n-2} \sum_{v,V_v} \varphi \bar{R}_p(\bar{a}_p \bar{a}^{I,l}_{V_v,n}) \bar{R}_{V_v} \bar{\partial} T^\gamma u + \varphi \bar{a}_p \bar{a}^{I,l}_{V_v,n} \bar{R}_p \bar{R}_{V_v} \bar{\partial} T^\gamma u,\, \varphi R_I T^\gamma u \right)$$

$$+ \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{v,V_v} \varphi \bar{a}_{2n-1} \bar{a}^{I,l}_{V_v,n} \bar{R}_{V_v} \bar{\partial} T^\gamma u,\, \bar{L}_n(\varphi) R_I T^\gamma u + \bar{L}_n \varphi R_I T^\gamma u \right)$$

$$= \sum_I \left(\sum_{\substack{l=1\\j=1}}^{n} \sum_{v,V_v} \varphi \bar{b}^{I,l}_{V_v,j} [\bar{R}_{V_v}, \bar{\partial}] T^\gamma u + \varphi \bar{b}^{I,l}_{V_v,j} \bar{\partial} \bar{R}_{V_v} T^\gamma u, \bar{L}_j(\varphi) R_I T^\gamma u + \bar{L}_j \varphi R_I T^\gamma u \right)$$

$$+ \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{v,V_v} \varphi \bar{L}_j(\bar{a}^{I,l}_{V_v,j}) [\bar{R}_{V_v}, \bar{\partial}] T^\gamma u + \varphi \bar{L}_j(\bar{a}^{I,l}_{V_v,j}) \bar{\partial} \bar{R}_{V_v} T^\gamma u \right.$$

$$\left. + \varphi \bar{a}^{I,l}_{V_v,j} [\bar{L}_j \bar{R}_{V_v}, \bar{\partial}] T^\gamma u + \varphi \bar{a}^{I,l}_{V_v,j} \bar{\partial} \bar{L}_j \bar{R}_{V_v} T^\gamma u,\, \varphi R_I T^\gamma u \right)$$

$$+ \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{p=0}^{2n-2} \sum_{v,V_v} \varphi \bar{R}_p(\bar{a}_p \bar{a}^{I,l}_{V_v,n}) [\bar{R}_{V_v}, \bar{\partial}] T^\gamma u + \varphi \bar{R}_p(\bar{a}_p \bar{a}^{I,l}_{V_v,n}) \bar{\partial} \bar{R}_{V_v} T^\gamma u \right.$$

$$\left. + \varphi \bar{a}_p \bar{a}^{I,l}_{V_v,n} [\bar{R}_p \bar{R}_{V_v}, \bar{\partial}] T^\gamma u + \varphi \bar{a}_p \bar{a}^{I,l}_{V_v,n} \bar{\partial} \bar{R}_p \bar{R}_{V_v} T^\gamma u,\, \varphi R_I T^\gamma u \right)$$

$$+ \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{v,V_v} \varphi \bar{a}_{2n-1} \bar{a}^{I,l}_{V_v,n} [\bar{R}_{V_v}, \bar{\partial}] T^\gamma u \right.$$

$$\left. + \varphi \bar{a}_{2n-1} \bar{a}^{I,l}_{V_v,n} \bar{\partial} \bar{R}_{V_v} T^\gamma u,\, \bar{L}_n(\varphi) R_I T^\gamma u + \bar{L}_n \varphi R_I T^\gamma u \right)$$

En utilisant maintenant le lemme 4.7.2 pour développer chacun des crochets, et en employant les mêmes arguments que ceux utilisés lors de la majoration de

i_5, nous obtenons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(4.9.25) \qquad |i_7|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_1^{q+1} C_2^{\gamma+1}(q+\gamma)! + \varepsilon C \sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} \| \bar{\partial}\varphi R_I T^\gamma u \|$$

où C_ε est une constante positive qui dépend de ε, et pas de l'étape de récurrence ni de C_0, C_1 et C_2, ceci pour peu que C_1 soit choisie dès le départ assez grande par rapport à C_0 et A.

De la même façon, on montre que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$(4.9.26) \qquad |i_8|^{\frac{1}{2}} \leq C_\varepsilon C_1^{q+1} C_2^{\gamma+1}(q+\gamma)! + \varepsilon C \sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} \| \bar{\partial}^*\varphi R_I T^\gamma u \|$$

Avec C_ε et C des constantes comme celles de l'inégalité (4.9.25).

Ainsi, finalement, compte tenu des inégalités (4.9.18), (4.9.19), (4.9.20), (4.9.21), (4.9.23), (4.9.24), (4.9.25), et (4.9.26), en choisissant ε suffisamment petit, nous avons :

$$(4.9.27) \qquad \sum_{I\in\{0,\dots,2n-2\}^q} Q(\varphi R_I T^\gamma u, \varphi R_I T^\gamma u)^{\frac{1}{2}} \leq C_0 C_1^{q+1} C_2^{\gamma+1}(q+\gamma)!$$

i.e. ce que l'on voulait.

Pour terminer la preuve du théorème 3.4, il ne nous reste plus qu'à montrer que l'on a l'inégalité $\| \varphi L_n R_I u \| \leq C^{q+1} q!$, ce qui ne pose pas de problème, compte tenu de l'égalité (4.9.22).

4.10. – Démonstration du théorème 3.11

Pour établir cette preuve, il suffit de reprendre la preuve du théorème 3.1, et d'en suivre *mutatis-mutandis* le cheminement, en remplacant l'inégalité de type maximal, par l'inégalité semi-maximale. On utilisera bien sur le fait que, si $u = \sum_{j=1}^n u_j \bar{\omega}_j$ est une $(0,1)$ forme sur $V(D)$, alors on a "le miracle" suivant : $\bar{\partial}^* u = \sum_{j=1}^n \bar{L}_j^* u_j$ (avec $(\omega_j)_{j=1}^n$ la base duale de $(L_j)_{j=1}^n$).

On utilisera aussi en complément du lemme 4.7.1, le lemme de commutation suivant dont la preuve est similaire à celle du lemme 4.7.1.

LEMME 4.10.1. *Soit $l \in \{1,\dots,s\}$ alors $\forall p \in \mathbb{I}_l$, $\forall \gamma \in \mathbb{N}^*$ on a :*

$$[L_p, T^\gamma] = \sum_{j=1}^{\gamma}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^p L_k T^{\gamma-j} + b_{jk}^p \bar{L}_k T^{\gamma-j}$$

Les a_{jk}^p et b_{jk}^p étant des fonctions analytiques réelles sur $V(D)$ vérifiant : $\forall K \subset\subset V(D)$ $\exists A \geq 1$ indépendant de γ tel que : $\forall r \in \mathbb{N}$, $\forall N \in \{0,\dots,2n\}^r$, $\forall j \in \{1,\dots,\gamma\}$

$$\sum_{k=1}^{2n} \sup_K \mid R_N(a_{jk}^p) \mid + \sup_K \mid R_N(b_{jk}^p) \mid \leq A^{j+|N|+1} j \binom{\gamma}{j} (j+|N|)!$$

De plus $a_{j,k}^p{}_{/\partial\Omega\cap V(D)} = 0$ si $k \notin \mathbb{I}_l$ et on a $b_{j,k}^p{}_{/\partial\Omega\cap V(D)} = 0$.

Et pour finir on remarquera que l'on peut supposer dès le départ que $[T, L_n]_{/\partial\Omega\cap V(D)} \in \mathbb{L}$.
(Où $\mathbb{L}$ est le module sur $\mathcal{C}^{\omega}(V(D))$ engendré par les $(1,0)$ champs tangents $(L_j)_{j=1}^{n-1}$.)
Pour le voir il suffit de transposer la preuve du corollaire 3.2 à ce cas.

REFERENCES

[Ben] B. BEN MOUSSA, *Analyticité semi-globale pour le $\bar{\partial}$-Neumann pour une classe de domaines pseudoconvexes vérifiant une inégalité de type maximal*, C.R. Acad. Sci. Paris **328** Série 1 (1999), 979-982.

[B.G] T. BLOOM – I. GRAHAM, *A geometric characterization of points of type m on real submanifolds of $\mathbb{C}^n$*, J. Differential Geom. **12** (1977), 171- 182.

[Cat] D. CATLIN, *Global regularity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem*, Proc. Sympos. in Pure Math. **41** (1984), 39-49.

[Cat1] D. CATLIN, *Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains*, Ann. Math. **126** (1987), 131-191.

[Che] S. C. CHEN, *Global real analyticity of solutions to the $\bar{\partial}$-Neumann problem on Reinhardt domains*, Indiana Univ. Math. J. **37** (1988), 421-430.

[Che1] S. C. CHEN, *Global real analyticity of solutions to the $\bar{\partial}$-Neumann problem*, Math. Z.**198** (1988), 239-259.

[Che2] S. C. CHEN, *Global analytic hypoellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on circular domains*, Invent. Math. **92** (1988) 173-185.

[Chr1] M. CHRIST, *Analytic hypoellipticity break down for weakly pseudoconvex Reinhardt domains*, Internat. Math. Res. Notices **1** (1991), 31-40.

[Chr2] M. CHRIST, *Global analytic regularity in the presence of symmetry*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 499-563.

[Chr3] M. CHRIST, *The Szegö projection need not preserve global analy ticity*, Ann. Math. (2) **143** (1996), 301-330.

[D'An1] J. D'ANGELO, *Subelliptic estimates and failure of semi-continuity of orders of contact*, Ann. Math. **47** (1980), 955-957.

[D'An2] J. D'ANGELO, *Real hypersurfaces, orders of contact and applications*, Ann. Math. **115** (1982), 615-637.

[Der] M. DERRIDJ, *Régularité pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines faiblement pseudoconvexes*, J. Differential Geom. **13** (1978), 559-576.

[Der1] M. DERRIDJ, *Domaines à estimation maximale*, Math. Z. **208** (1991), 71-88.

[Der2] M. DERRIDJ, *Estimations par composantes pour le problème $\bar{\partial}$-Neumann pour quelques classes de domaines pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$*, Math. Z. **208** (1991), 89-99.

[D.T] M. DERRIDJ – D. S. TARTAKOFF, *On the global real analyticity for the $\bar{\partial}$-Neumann problem*, Comm. in Partial Differential Equations **5** (1976), 401-435.

[D.T.1] M. DERRIDJ – D. S. TARTAKOFF, *Local analyticity for $\bar{\partial}$-Neumann problem and $\Box_b$, some model domains without maximal estimates*, Duke. Math. J. **64** (1991), 377-402.

[D.T.2] M. DERRIDJ – D. S. TARTAKOFF, *Analyticité au voisinage de la dégénérescence de la forme de Lévi, de la solution canonique de $\bar{\partial}_b$ sur des surfaces pseudoconvexes de* C^2, Preprint 1997.

[D.F] K. DIEDERICH – J. E. FORNAESS, *Pseudoconvex domains with real-analytic boundary*, Ann. Math. **107** (1978), 371-384.

[F.K] G. B. FOLLAND – J. J. KOHN, "The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex", Annals of Mathematics studies, n° **75**. Princeton University press, 1972.

[Gri] A. GRIGIS, *Propagation des singularités au bord d'ouverts de $\mathbb{C}^n$*, Comm. Partial Differential Equations **6** (1981), 689-717.

[G.R] A. GRIGIS – L. P. ROTHSCHILD, *L^2 Estimates for the boundary Laplacian operator on hypersurfaces*, Am. J. Math. **110** (1988), 577-593.

[H.F] B. HELFFER – J. NOURRIGAT, "Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs", Progress in Maths **58** Birkhaüser 1985.

[Hör] L. HÖRMANDER, "An Introduction to Complex Analysis in Several Variables", D. Van Norstrand Company, Inc. 1966.

[Hör1] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.

[Hör2] L. HÖRMANDER, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators, T1.2.3&4 Springer-Verlag s.e 1989.

[Koh] J. J. KOHN, *Boundary behavior of $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds of dimension two*, J. Differential Geom. **6** (1972), 523-542.

[I.K] A. V. ISAEV – S. G. KRANTZ, *Finitely smooth Reinhardt domains with non-compact automorphism group*, Preprint 1997.

[Koh1] J. J. KOHN, *Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains*, Acta Math. **142** (1979), 79-122.

[K.N] J. J. KOHN – L. NIRENBERG, *Non-coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 443-492.

[Kom] G. KOMATSU, *Global analytic hypoellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem*, Tohöku Math. J. **28** (1976), 145-156.

[M.N] C. B. MORREY – L. NIRENBERG, *On the analyticity of solutions of linear elliptic systems of partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 271-290.

[Nag] T. NAGANO, *Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 398-404.

[Rei] I. REIZNER, *Analyticité globale de la solution du problème du $\bar{\partial}$-Neumann pour une classe de domaines de C^n*, C.R. Acad. Sci. Paris **324** Série 1, (1997), 1231-1236.

[Sha] M. C. SHAW, *L^2 existence theorems for the $\bar{\partial}_b$-Neumann problem on strongly pseudoconvex CR manifolds*, J. Geom. Anal. **1** (1991), 139-163.

[Swe] W. J. SWEENEY, *The D-Neumann problem*, Acta Math. **120** (1968), 223-277.

[Tar] D. S. TARTAKOFF, *On the global real analyticity of solutions to $\Box_b$ on compact manifolds*, Comm. Partial Differential Equations **1** (1976), 283-311.

[Tar1] D. S. TARTAKOFF, *Local analytic hypoellipticity for $\Box_b$ on non-degenerate Cauchy-Riemann Manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A, 75 n° **7** (1978), 3027-3028.

[Tar2] D. S. TARTAKOFF, *Local real analyticity of solutions to* $\Box_b$ *and* $\bar{\partial}$*-Neumann*, Acta Math. **145** (1980), 117-204.

[Trè] F. TRÈVES, *Operators with double characteristics and application to the* $\bar{\partial}$*-Neumann problem*, Comm Partial Differential Equations **3** (1978), 475-462.

Université de Rouen
UPRES-A CNRS
60-85 Mont-saint-Aignan
76821 Cedex, France
Benoit.Benmoussa@univ-rouen.fr