ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CHRISTOPHE CHEVERRY
MONIQUE SABLÉ-TOUGERON

Optique géométrique oscillante en présence d'un grand choc

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 28, nº 1 (1999), p. 41-98

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1999_4_28_1_41_0>

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)
Vol. XXVIII (1999), pp. 41-98

Optique géométrique oscillante en présence d'un grand choc

CHRISTOPHE CHEVERRY - MONIQUE SABLÉ-TOUGERON

Abstract. *Oscillating geometric optics for a large shock wave.* This paper justifies, for hyperbolic systems of conservation laws, the asymptotic behavior of weak solutions, which are oscillatory perturbations of a large shock. The large discontinuity requires working in a multiphase context. It extends the earlier results of [Ch] about monophase Cauchy problem, in the multiphase context, with or whithout a large shock.

Mathematics Subject Classification (1991): 35L50 (primary), 35L65, 35L67 (secondary).

1. - Introduction

Le problème de l'asymptotique des solutions faibles de systèmes hyperboliques conservatifs, dans les hautes fréquences d'oscillations, a été soulevé par R. Di Perna et A. Majda [D-M], avec une réponse dans le cas du problème de Cauchy, en petite amplitude, pour les lois scalaires ou les systèmes 2×2. Pour les systèmes $N \times N$, les modèles formels d'oscillations sur des phases linéaires, dégagés par A. Majda et R. Rosales [M-R] ont été justifiés par S. Schochet [S], puis par C. Cheverry [Ch] avec extension à des phases non linéaires.

Le cas des problèmes mixtes, à frontières fixes ou libres, a été abordé d'un point de vue formel par P. Cehelsky et R. Rosales [C-R], A. Majda et M. Artola [M-A]. Le présent article justifie la modélisation dans le cas de perturbations oscillantes des valeurs initiales d'un choc de grande amplitude. L'approche de [M-A], qui redresse la géométrie du choc perturbé en une droite fixe, présente par retour dans les variables de départ, un défaut de modélisation. On lui préfère ici une analyse directe dans l'espace des variables indépendantes où le problème perturbé est résolu au sens faible, globalement en temps.

Dans une même généralité d'oscillations sur des profils de phases non linéaires, on adapte la technique mise en oeuvre par C. Cheverry [Ch] aux solutions exactes construites par A. Corli et M. Sablé-Tougeron [C-ST]. Une

Pervenuto alla Redazione l'8 aprile 1998 e in forma definitiva il 10 settembre 1998.

difficulté majeure par rapport à [Ch] est le contexte multiphase génériquement créé par les réflexions et transmissions des oscillations de petite amplitude sur le grand choc. Ce contexte conduit habituellement à travailler dans le cadre des fonctions presque périodiques, alors que la méthode des mesures de Young bi-échelle n'est à ce jour développée que dans le cadre périodique. Pour insister sur la spécificité du problème mixte, on choisit ici d'imposer des conditions suffisantes permettant d'effectuer l'étude dans le cadre périodique. Des conditions analogues conduisent à une extension multiphase des résultats de [Ch] pour le problème de Cauchy ou le problème mixte à bord fixe.

2. – Résultats

On considère un système strictement hyperbolique de N lois de conservation:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Le flux f est défini dans l'union $\underline{\Omega}$ de deux ouverts $\underline{\Omega}^-, \underline{\Omega}^+$ de $\mathbb{R}^N$, régulier, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et possède les propriétés de Lax [L]:

(L) hyperbolicité stricte: les valeurs propres $\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \ldots < \lambda_N(u)$, de $Df(u)$ sont réelles et simples;
linéarité ou non: chaque $\lambda_k(u)$ est linéairement dégénérée ou vraiment non linéaire,

c'est à dire que dans $\underline{\Omega}$, $D\lambda_k(u)\ r_k(u)$ est soit toujours nul, soit jamais nul, $r_k(u)$ étant vecteur propre à droite pour $Df(u)$ associé à $\lambda_k(u)$. On normalise alors $r_k(u)$ par $D\lambda_k(u)\ r_k(u) = 1$ si $\lambda_k(u)$ est vraiment non linéaire, arbitrairement sinon, et on définit $\ell_k(u)$ par $\ell_k(u).r_j(u) = \delta_{k,j}$.

On sélectionne une valeur propre $\lambda_\kappa(u)$ et deux états de base $\underline{u}^\pm \in \underline{\Omega}^\pm$, valeurs en $t = 0$ dans $\pm x > 0$ d'un κ-choc entropique et stable pour le système (2.1), c'est à dire qu'il existe $\underline{p}$ vérifiant

$$(E) \qquad \lambda_\kappa(\underline{u}^+) < \underline{p} < \lambda_\kappa(\underline{u}^-) \ \text{ et } \ \lambda_{\kappa-1}(\underline{u}^-) < \underline{p} < \lambda_{\kappa+1}(\underline{u}^+)$$

$$(S) \qquad \operatorname{rang}\Big(r_1(\underline{u}^-), \ldots, r_{\kappa-1}(\underline{u}^-), \underline{u}^+ - \underline{u}^-, r_{\kappa+1}(\underline{u}^+), \ldots, r_N(\underline{u}^+)\Big) \ = \ N$$

et tel que la fonction $\underline{u} := \underline{u}^\pm$ dans $\pm x > \underline{p}t$, soit solution faible de (2.1):

$$f(\underline{u}^+) - f(\underline{u}^-) = \underline{p}\ (\underline{u}^+ - \underline{u}^-).$$

Quitte à effectuer un changement linéaire des variables indépendantes, on peut supposer que $\underline{p} = 0$. Dorénavant, les vitesses et vecteurs propres aux états de base sont notés $\underline{\lambda}_k^{\pm}$ et $\underline{r}_k^{\pm}$, $\underline{\ell}_k^{\pm}$ et le κ-choc non perturbé $(\underline{u}^-, \underline{p}, \underline{u}^+) \equiv (\underline{u}^-, 0, \underline{u}^+)$. L'indice d'une valeur propre $\underline{\lambda}_k^{\pm}$ vérifiant $\mp\underline{\lambda}_k^{\pm} > 0$ est dit causal, et dit non causal dans le cas contraire; les ensembles qu'ils constituent sont notés $N_c^{\pm}$, $N_{nc}^{\pm}$, ainsi que leur cardinal. La condition de stabilité (S) équivaut à l'inversibilité de la matrice

$$\underline{\mathcal{B}} := \left(\underline{\lambda}_1^- \underline{r}_1^-, \dots, \underline{\lambda}_{\kappa-1}^- \underline{r}_{\kappa-1}^-, \underline{u}^+ - \underline{u}^-, -\underline{\lambda}_{\kappa+1}^+ \underline{r}_{\kappa+1}^+, \dots, -\underline{\lambda}_N^+ \underline{r}_N^+\right)$$

ce qui définit les matrices de transmission $\underline{T}^{\pm}$, déformation $\underline{D}^{\pm}$, réflexion $\underline{R}^{\pm}$ constituant la matrice $N \times N$ de Calderon $\underline{\mathcal{C}}$

$$\underline{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{C}}^- \\ \underline{\mathcal{D}} \\ \underline{\mathcal{C}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{R}^- & \underline{T}^+ \\ \underline{D}^- & \underline{D}^+ \\ \underline{T}^- & \underline{R}^+ \end{pmatrix} \equiv \underline{\mathcal{B}}^{-1}\left(-\underline{\lambda}_\kappa^- \underline{r}_\kappa^-, \dots, -\underline{\lambda}_N^- \underline{r}_N^-, \underline{\lambda}_1^+ \underline{r}_1^+, \dots, \underline{\lambda}_\kappa^+ \underline{r}_\kappa^+\right)$$

où les matrices $\underline{R}^-$, $\underline{D}^-$, $\underline{T}^-$ ont $(N - \kappa + 1)$ colonnes, $\underline{R}^-$ a $(\kappa - 1)$ lignes et $\underline{D}^-$ une seule ligne. On perturbe les valeurs initiales de ce choc par des oscillations de faible amplitude et de haute fréquence; on introduit une famille de données de Cauchy $(u_\varepsilon^{\pm}(0,x))_\varepsilon$ dans $\pm x > 0$ indexée par un paramètre $\varepsilon \in]0,1]$ qui tendra vers zéro

$$u_\varepsilon^{\pm}(0,x) = \underline{u}^{\pm} + \varepsilon v_{0,\varepsilon}^{\pm}(x) := \underline{u}^{\pm} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} v_{0,\varepsilon}^{i,\pm}(x)\ \underline{r}_i^{\pm}, \quad \pm x > 0 \tag{2.2}$$

et dont l'asymptotique en ε est l'équivalence L^1

$$v_{0,\varepsilon}^{i,\pm}(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{L^1}{\sim}} \sigma_{0,\pm}^i\left(x, \frac{\vec{\psi}_{0,\pm}^i(x)}{\varepsilon}\right), \quad \pm x > 0.$$

Les $\sigma_{0,\pm}^i$ sont des fonctions réelles scalaires, telles que $\sigma_{0,\pm}^i(\cdot, \vec{y}_{\pm}^i)$ soient nulles hors d'un compact de $[0, \pm\infty[$ et $\sigma_{0,\pm}^i(x,\cdot)$ périodiques de période 1 en chaque composante de $\vec{y}_{\pm}^i$, de régularité

$$\sigma_{0,\pm}^i \in L^\infty(\mathbb{R}^{\pm}, BV(\mathbb{T}^{d_\pm^i})) \cap \mathrm{Lip}\ (\mathbb{R}^{\pm}, L^1(\mathbb{T}^{d_\pm^i})), \tag{σ)$_0$}$$

BV désignant l'espace des fonctions bornées dont les dérivées sont des mesures bornées et $\mathbb{T}$ le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ identifié à $[0,1[$.

Chaque $\vec{\psi}_{0,\pm}^i$ est une famille libre de $d_\pm^i$ fonctions réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ engendrant des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\phi_\pm^i$. La notion d'équivalence L^1 est celle de Joly-Métivier-Rauch [J-M-R2, Definition 4.2.1]: il existe une suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_{0,\pm,\mu}^i)_\mu$ à coefficients dans L^1 et des suites de nombres $\varepsilon_\mu > 0$, $\alpha_\mu > 0$ tendant vers zéro avec μ, telles que pour tout μ et pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_\mu]$ on ait

$$||\sigma^i_{0,\pm} - \sigma^i_{0,\pm,\mu}||_{L^1(]0,\pm\infty[\times\mathbb{T}^{d^i_\pm})} \leq \alpha_\mu \text{ et } \left\|\sigma^i_{0,\pm,\mu}\left(\cdot, \frac{\vec{\psi}^i_{0,\pm}(\cdot)}{\varepsilon}\right) - v^{i,\pm}_{0,\varepsilon}\right\|_{L^1(]0,\pm\infty[)} \leq \alpha_\mu.$$

La régularité $(\sigma)_0$ permet de choisir dans la classe d'équivalence un représentant $v^{i,\pm}_{0,\varepsilon} \in BV(\mathbb{R}^\pm)$; on l'insère en (2.2) pour définir la condition de Cauchy exacte dans le cadre BV.

On impose aux profils de phases la condition de non-stationnarité [J-M-R2, Assumption 4.1.1],

$$(N.S)_0 \quad \forall\, \vec{\alpha} \in \mathbb{Z}^{d^i_\pm} \setminus \{0\},\ \langle \vec{\alpha}, \partial_x \vec{\psi}^i_{0,\pm}(x)\rangle \neq 0 \text{ pour presque tout } x, \pm x > 0.$$

Une mesure périodique μ est normée par sa variation totale sur le tore $\|\mu\|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^d)}$. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, ainsi que la quantité

$$L^1 V_0 := \max_{\pm,i} \int_{\mathbb{R}^\pm} \|\partial_{\vec{y}^i_\pm} \sigma^i_{0,\pm}(x,\cdot)\|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^{d^i_\pm})}\, dx$$

la norme L^∞ et la variation totale des perturbations initiales $\varepsilon v^\pm_{0,\varepsilon}$ sont aussi assez petites, et le problème de Cauchy pour (2.1) de donnée (2.2),

$$(CC)_\varepsilon \qquad \partial_t u_\varepsilon + \partial_x f(u_\varepsilon) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

se résout au sens faible par [C-ST], globalement en temps. Cette solution, construite par une méthode de Glimm, présente un κ-choc de grande amplitude $x = \chi_\varepsilon(t)$, dont la vitesse $\chi'_\varepsilon = p_\varepsilon$ est de petite variation (globale en temps), et sur lequel les traces unilatérales des états sont aussi de petite variation. Un schéma de Bressan adapté, donne le même résultat.

Dans ce contexte, la méthode formelle de l'optique géométrique est appliquée par [M-A] dans le cas de phases linéaires avec un développement de $u^\pm_\varepsilon(\underline{t}, \chi_\varepsilon(\underline{t}) + \underline{x})$ dans les variables indépendantes $(\underline{t}, \underline{x})$ où les chocs $x = \chi_\varepsilon(t)$ sont redressés sur le choc non perturbé. Cette méthode est reprise par [Co] pour la justification de l'asymptotique de solutions régulières, dans la plus grande généralité en ce qui concerne les profils de phases; ces objets, sur lesquels agissent les fonctions oscillantes, sont attachés à la géométrie non perturbée. Ils sont décrits aussi dans [J], dans un cadre légèrement plus simple (excluant les constantes). Le point de vue adopté ici est d'appréhender la modélisation sans effectuer de changement des variables indépendantes. Quant aux phases, on se place dans un cadre non linéaire, mais sous une contrainte qui permet l'analyse de l'asymptotique dans l'espace des fonctions périodiques. On décrit maintenant ces phases.

Pour tout i, les $\vec{\psi}^{i,\pm}_\pm := (\psi^{i,\pm}_{\pm,k})_k$ sont les phases guidées, localisées dans les secteurs

$$S^{i,\pm}_\pm := \{t \geq 0,\ \pm x \geq 0,\ \pm(x - \underline{\lambda}^\pm_i t) \geq 0\},$$

fonctions des phases linéaires $x - \underline{\lambda}_i^{\pm} t$

$$\vec{\psi}_{\pm}^{i,\pm}(t,x) = \vec{\psi}_{0,\pm}^{i}(x - \underline{\lambda}_i^{\pm} t).$$

L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qu'elles engendrent, de dimension $d_{\pm}^{i}$, est noté $\Phi_{\pm}^{i,\pm}$.

Les traces sur la demi-droite $\{x = 0,\ t \geq 0\}$, $\mathrm{tr}^{\pm}\,\psi_{\pm,k}^{i,\pm}$, $i \in N_c^{\pm}$, $k = 1, \ldots, d_{\pm}^{i}$, de toutes les phases causales de base engendrent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ϕ_b, de dimension d_b; on en choisit une base $\vec{\varphi}_b$ qu'on suppose non stationnaire

$$(N.S)_b \qquad \forall \vec{\alpha} \in \mathbb{Z}^{d_b} \setminus \{0\}, \quad \langle \vec{\alpha}, \partial_t \vec{\varphi}_b(t) \rangle \neq 0 \qquad \text{pour presque tout } t > 0.$$

Enfin, pour $i \in N_{nc}^{\pm}$, les phases vectorielles non causales $\vec{\psi}_{\pm}^{i,\circ}$, localisées dans

$$S_{\pm}^{i,\circ} := \{t \geq 0,\ \pm x \geq 0,\ \pm(x - \underline{\lambda}_i^{\pm} t) \leq 0\},$$

sont les phases guidées issues de $x = 0$ avec pour valeurs les éléments de $\vec{\varphi}_b$. L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qu'elles engendrent, de dimension d_b, est noté $\Phi_{\pm}^{i,\circ}$.

On note $m_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}} \in \{d_{\pm}^{j}, d_b\}$ la dimension générale des espaces de phases $\Phi_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$.

On empêche l'apparition de phases constantes non triviales, pour un mode donné, en imposant

$$(\not{C}) \qquad 1 \notin \phi_b \quad \text{et} \quad 1 \notin \phi_{\pm}^{i} \quad \forall i.$$

Cette hypothèse évite de devoir introduire la variable rapide supplémentaire $1/\varepsilon$ dans les développements.

Les directions non causales découpent le demi-plan $t > 0$ suivant les angles

$$\mathcal{A}^{i,\pm} := \left\{t \geq 0,\ \pm x \geq 0,\ \pm(x - \underline{\lambda}_{i\pm 1}^{\pm} t) \leq 0 \leq \pm(x - \underline{\lambda}_i^{\pm} t)\right\}, \qquad i \in N_{nc}^{\pm} \cup \{\kappa\},$$

où la convention $\underline{\lambda}_0^{-} = -\infty$, $\underline{\lambda}_{N+1}^{+} = +\infty$ donne en particulier $\mathcal{A}^{1,-} = S_{-}^{1,-}$, $\mathcal{A}^{N,+} = S_{+}^{N,+}$.

Un angle $\mathcal{A}^{i,\pm}$ fixé est traversé par les phases des $\Phi_{\pm}^{j,\pm}$ pour $j \in N_c^{\pm}$ et $j \in N_{nc}^{\pm}$ si $\pm j \leq \pm i$, et des $\Phi_{\pm}^{k,\circ}$ pour $k \in N_{nc}^{\pm}$, $\pm k \geq \pm(i \pm 1)$, où il est convenu que $\Phi_{-}^{0,\circ} := \Phi_{-}^{1,-}$ et $\Phi_{+}^{N+1,\circ} := \Phi_{+}^{N,+}$. L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par la restriction de ces phases à cet angle est noté $\Psi^{i,\pm}$.

La non linéarité du problème (2.1) conduit à envisager dans chaque angle $\mathcal{A}^{i,\pm}$ toutes les harmoniques, c'est à dire toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers des phases de base traversant cet angle. Toutefois, la spécificité du problème traité fait que seuls les produits de deux fonctions (interactions quadratiques) sont utiles. Pour ces raisons, les notions de fermeture par résonance et de transversalité faible introduites dans [J-M-R1] (voir aussi [H-M-R]), sont à remplacer par:

$$(F_q\text{–}R_q E)\qquad \begin{array}{c} \forall\psi \in \Psi^{i,\pm},\ \ \psi = \vec{\alpha}\cdot\vec{\psi}_{\pm}^{p,\overset{\pm}{\circ}} + \vec{\beta}\cdot\vec{\psi}_{\pm}^{q,\overset{\pm}{\circ}},\ \ \vec{\alpha}\in\mathbb{Z}^{m_{\pm}^{p,\overset{\pm}{\circ}}},\ \ \vec{\beta}\in\mathbb{Z}^{m_{\pm}^{q,\overset{\pm}{\circ}}}, \\ r\neq p\neq q\neq r,\ (\partial_t + \underline{\lambda}_r^{\pm}\partial_x)\psi = 0 \Rightarrow \exists\gamma\in\mathbb{Z}^{m_{\pm}^{r,\overset{\pm}{\circ}}},\ \ \psi = \vec{\gamma}\cdot\vec{\psi}_{\pm}^{r,\overset{\pm}{\circ}}, \end{array}$$

$$(f\text{–}T_q)\qquad \begin{array}{c} \forall\psi \in \Psi^{i,\pm},\ \ \psi = \vec{\alpha}\cdot\vec{\psi}_{\pm}^{p,\overset{\pm}{\circ}} + \vec{\beta}\cdot\vec{\psi}_{\pm}^{q,\overset{\pm}{\circ}},\ \ \vec{\alpha}\in\mathbb{Z}^{m_{\pm}^{p,\overset{\pm}{\circ}}},\ \ \vec{\beta}\in\mathbb{Z}^{m_{\pm}^{q,\overset{\pm}{\circ}}}, \\ r\neq p\neq q\neq r,\ (\partial_t + \underline{\lambda}_r^{\pm}\partial_x)\psi \neq 0 \Rightarrow ((\partial_t + \underline{\lambda}_r^{\pm}\partial_x)\psi)(t,x) \neq 0 \\ \text{pour presque tout}\quad (t,x)\in\mathcal{A}^{i,\pm}. \end{array}$$

La condition $(F_q - R_q E)$, dite de fermeture par résonance quadratique (entière), suffit à l'analyse des résonances; elle conduit à la Définition (5.2.8) des opérateurs de résonance dans chaque angle. Avec la condition "de réflexion au bord entière",

$$(r_b E)\qquad \begin{array}{c} \forall\ \psi \in \cup_{j\in N_c^{\pm}} \vec{\psi}_{\pm}^{j,\pm}, \\ \text{les composantes de }\ \mathrm{tr}^{\pm}\,\psi\ \text{ dans la base } \vec{\varphi}_b \text{ sont entières,} \end{array}$$

elle assure la périodicité des profils modélisant l'asymptotique (voir le Lemme 5.2.7).

Les conditions $(f\text{–}T_q)$, $(N.S)_0$ et $(N.S)_b$ contraignent les phases d'oscillations non triviales à se plier à des théorèmes de phase non stationnaire.

REMARQUE 2.1. La contrainte $(r_b E)$ est équivalente à chacune des deux suivantes :

$(r_b E)'$ Le $\mathbb{Z}$ – module Γ engendré par les $\{\vec{\psi}_{\pm}^{j,\pm};\ j\in N_c^{\pm}\}$ est un réseau de ϕ_b ,

$(r_b E)''$ Le $\mathbb{Z}$–module Γ engendré par les $\{\vec{\psi}_{\pm}^{j,\pm};\ j\in N_c^{\pm}\}$ est discret dans ϕ_b .

L'asymptotique lorsque ε tend vers zéro de la solution à grand choc u_ε s'exprime de façon localisée dans chaque angle $\mathcal{A}^{i,\pm}$, à l'aide de la restriction à ces angles des phases et de profils $\sigma_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,x,\vec{y}_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}})$ localisés dans les secteurs $S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$. Ces profils sont solutions d'un système d'équations de modulation dans lequel interviennent les quantités scalaires liées à la non-linéarité

$$\Gamma_{p,q}^{\pm,k} = \underline{\ell}_k^{\pm}\cdot f''(\underline{u}^{\pm})(\underline{r}_p^{\pm},\underline{r}_q^{\pm})\ , \qquad k,p,q\in\{1,\dots,N\}$$

et les quantités macroscopiques $\langle\sigma_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}\rangle(t,x)$, $\langle q\rangle(t)$, transportées des limites faible-$\star$ $\langle\sigma_{0,\pm}^j\rangle$ des données de Cauchy $v_{0,\varepsilon}^{j,\pm}$ suivant le système de propagation

$$(\mathcal{P})\qquad \begin{aligned}
&(\partial_t + \underline{\lambda}_j^\pm \partial_x)\ \langle\sigma_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}\rangle = 0 \qquad \text{dans} \quad S_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}\ ,\\
&\langle\sigma_\pm^{j,\pm}\rangle(0,\cdot) = \langle\sigma_{0,\pm}^j\rangle := \int_{\mathbb{T}^{d_\pm^j}} \sigma_{0,\pm}^j(\cdot,\vec{y}_\pm^j)\ d\vec{y}_\pm^j \quad \text{dans} \quad \pm x > 0\,,\\
&\begin{pmatrix} \mathrm{tr}^-\langle\sigma_-^{nc,\circ}\rangle \\ \langle q\rangle \\ \mathrm{tr}^+\langle\sigma_+^{nc,\circ}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{C}}^- \\ \underline{\mathcal{D}} \\ \underline{\mathcal{C}}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{tr}^-\langle\sigma_-^{c,-}\rangle \\ \mathrm{tr}^+\langle\sigma_+^{c,+}\rangle \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

les notations c ou nc regroupant les indices causaux ou non. La moyenne $\langle q\rangle$ détermine la limite à tout temps $t \geq 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\chi_\varepsilon(t)}{\varepsilon} = \int_0^t \langle q\rangle(s)\ ds := \xi(t)\ .$$

Pour tout $j \in \{1,\dots,N\}$, $i \in N_{nc}^\pm \cup \{\kappa\}$ tels que $\mathcal{A}^{i,\pm} \subset S_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}$, la j-ième équation de modulation s'écrit dans $\mathcal{A}^{i,\pm} \times \mathbb{T}^{m_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}}$,

$$(\mathcal{M})\qquad \begin{aligned}
\mathcal{M}_j^{i,\pm}(\sigma_\pm) := (\partial_t + \underline{\lambda}_j^\pm\partial_x)\sigma_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}} &+ \sum_{k\neq j} \Gamma_{k,j}^{\pm,j}\ \langle\sigma_\pm^{k,\overset{\pm}{\circ}}\rangle\ (\partial_x\vec{\psi}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}})\cdot\nabla_{\vec{y}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}}\sigma_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}\\
&+ \frac{1}{2}\Gamma_{j,j}^{\pm,j}\ (\partial_x\vec{\psi}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}})\cdot\nabla_{\vec{y}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}}(\sigma_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}})^2\\
&+ \sum_{j\neq p<q\neq j} \Gamma_{p,q}^{\pm,j}\ \mathcal{R}_{p,q;j}^{i,\pm}\ (\sigma_\pm^{p,\overset{\pm}{\circ}} \otimes \sigma_\pm^{q,\overset{\pm}{\circ}})\ = 0
\end{aligned}$$

où l'opérateur de résonance $\mathcal{R}_{p,q;j}^{i,\pm}$, attaché à l'angle $\mathcal{A}^{i,\pm}$ est construit dans la Section 5 et défini par (5.2.8):

$$\mathcal{R}_{p,q;j}^{i,\pm} = (\partial_x\vec{\psi}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}})\cdot\nabla_{\vec{y}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}}\ \mathcal{C}_{p,q;j}^{i,\pm}\ .$$

Cette équation de modulation est une loi de type Burgers agissant sur $\sigma_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}$, avec terme supplémentaire couplant des profils de type différent, d'une façon qui ressemble à des dérivées de produits de convolution.

Les conditions aux limites sont

$$\sigma_\pm^{j,\pm}(0,\cdot,\cdot) = \sigma_{0,\pm}^j \qquad \forall j$$

$$\sigma_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}} \text{ continus sur les } x = \underline{\lambda}_i^\pm t \text{ traversant } S_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}$$

$\sigma_{\pm}^{nc,\circ} = \{\sigma_{\pm}^{j,\circ},\ j \in N_{nc}^{\pm}\}$ liés aux $\sigma_{\pm}^{c,\pm} = \{\sigma_{\pm}^{j,\pm},\ j \in N_{c}^{\pm}\}$ sur $x = 0$ par

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{tr}^- \sigma_-^{nc,\circ}(t, \vec{y}_b - \frac{\xi(t)}{\lambda_{nc}^-}\partial_t \vec{\varphi}_b(t)) \\ \mathrm{tr}^+ \sigma_+^{nc,\circ}(t, \vec{y}_b - \frac{\xi(t)}{\lambda_{nc}^+}\partial_t \vec{\varphi}_b(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{C}}^- \\ \underline{\mathcal{C}}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{tr}^- \sigma_-^{c,-}(t, L_c^-(\vec{y}_b) - \frac{\xi(t)}{\lambda_c^-}\partial_t \vec{\psi}_-^{c,-}(t,0)) \\ \mathrm{tr}^+ \sigma_+^{c,+}(t, L_c^+(\vec{y}_b) - \frac{\xi(t)}{\lambda_c^+}\partial_t \vec{\psi}_+^{c,+}(t,0)) \end{pmatrix}$$

$L_c^{\pm}$ regroupant les applications linéaires de $\mathbb{R}^{d_b}$ dans $\mathbb{R}^{d_{\pm}^j}$ qui, pour $j \in N_c^{\pm}$ réalisent

$$\mathrm{tr}^{\pm}\, \vec{\psi}_{\pm}^{j,\pm} = L_j^{\pm}(\vec{\varphi}_b) \ .$$

Cette décomposition des éléments de $\vec{\psi}_{\pm}^{j,\pm}(t,0)$ dans la base $\vec{\varphi}_b$ est à coefficients entiers d'après $(r_b E)$.

La résolution de ce système, résumée à la Section 5.3, s'exprime suivant le

THÉORÈME 2.1. *Le système des équations de modulation, de donnée de Cauchy $(\sigma)_0$, possède, pour $L^1 V_0$ petit, une unique solution faible entropique, globale en temps, dont les localisées $\sigma_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}} \in \mathrm{Lip}\,(S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}, L^1(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}}))$ vérifient pour tout temps*

$$\sigma_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,\cdot) \in L^{\infty}(S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t), BV(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}})) \cap \mathrm{Lip}\,(S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t), L^1(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}}))\ ,$$

$S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t)$ désignant la section à l'instant t du secteur $S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$. De plus, les traces unilatérales $\mathrm{tr}^{\pm}\,\sigma_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ des $\sigma_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ sur $x = 0$ vérifient

$$\mathrm{tr}^{\pm}\,\sigma_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}} \in L^{\infty}((0,T), BV(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}})) \cap \mathrm{Lip}\,([0,T], L^1(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}}))\ .$$

La description du comportement asymptotique lorsque ε tend vers zéro des solutions exactes u_ε est le résultat principal de cet article. Elle se formule conformément à [J-M-R2] suivant l'énoncé,

THÉORÈME 2.2. *Pour tout temps $T > 0$, sur les sections $\mathcal{A}^{i,\pm}(T)$ des $\mathcal{A}^{i,\pm}$ au temps T, la solution u_ε de $(CC)_\varepsilon$ vérifie lorsque ε tend vers 0,*

$$\frac{u_\varepsilon^{\pm}(T,x) - \underline{u}^{\pm}}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{L^1(\mathcal{A}^{i,\pm}(T))}{\sim}} \sum_j \sigma_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}\left(T, x, \frac{\vec{\psi}_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(T,x)}{\varepsilon}\right) \underline{r}_j^{\pm}\ ,$$

la somme faisant intervenir les profils et les phases définis dans $\mathcal{A}^{i,\pm}$.

De plus les traces $\mathrm{tr}_\varepsilon^\pm u_\varepsilon^\pm$ *de* u_ε *sur la courbe de choc* $x = \chi_\varepsilon(t)$ *sont modélisées par les traces* $\mathrm{tr}^\pm \sigma_\pm^{\overset{\pm}{j,\circ}}$ *en*

$$\frac{\mathrm{tr}_\varepsilon^\pm u_\varepsilon^\pm(t) - \underline{u}^\pm}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{L^1((0,T))}{\sim}} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{tr}^\pm \sigma_\pm^{\overset{\pm}{j,\circ}} \left(t, \frac{\vec{\psi}_\pm^{\overset{\pm}{j,\circ}}(t,0)}{\varepsilon} - \frac{\xi(t)}{\underline{\lambda}_j^\pm} \partial_t \vec{\psi}_\pm^{\overset{\pm}{j,\circ}}(t,0) \right) \underline{r}_j^\pm$$

et la vitesse χ_ε' *de la courbe de choc est modélisée en*

$$\frac{\chi_\varepsilon'(t)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{L^1((0,T))}{\sim}} \underline{\mathcal{D}}\ \mathrm{tr}^\pm \sigma_\pm^{c,\pm} \left(t, \frac{\vec{\psi}_\pm^{c,\pm}(t,0)}{\varepsilon} - \frac{\xi(t)}{\underline{\lambda}_c^\pm} \partial_t \vec{\psi}_\pm^{c,\pm}(t,0) \right) .$$

REMARQUE. Lorsque l'angle $\mathcal{A}^{i,\pm}$ est traversé par la courbe de choc $x = \chi_\varepsilon(t)$, l'écriture de la première formule d'asymptotique de ce théorème est à comprendre en prolongeant $u_\varepsilon^\pm$ par $\underline{u}^\pm$ dans la région (de taille ε) de l'angle où elle n'est pas définie.

3. – Propagation et réflexion de la variation locale ε-normalisée

3.1. – Cadre et résultat

La norme L^∞ est notée $|u|_\infty$ et la variation sur un intervalle I de la droite réelle $V(u; I)$. Suivant C.Cheverry [Ch], on dit qu'une fonction u définie sur une demi-droite est $\varepsilon - BV$ si la quantité suivante, où le *sup* porte sur tous les intervalles I_ε de la demi-droite qui sont de longueur ε, est finie:

$$V_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-1} \sup_{I_\varepsilon} V(u; I_\varepsilon) < \infty.$$

On considère ici une famille de données initiales $(h_\varepsilon^\pm)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définies sur $\mathbb{R}^\pm$ et y vérifiant les hypothèses de [C-ST]:

$$\text{(3.1.1)} \qquad \sup_{\varepsilon\in]0,\eta_1]} |h_\varepsilon^\pm - \underline{u}^\pm|_\infty \leq \eta_1, \qquad \sup_{\varepsilon\in]0,\eta_1]} V(h_\varepsilon^\pm) = \delta_2 \leq \eta_2,$$

et de plus les conditions uniformes en ε:

$$\text{(3.1.2)} \quad \sup_{\varepsilon\in]0,1]} \varepsilon^{-1} |h_\varepsilon^\pm - \underline{u}^\pm|_\infty \leq 1, \ \sup_{\varepsilon\in]0,1]} \max\{\ V_\varepsilon(h_\varepsilon^+)\ ,\ \ V_\varepsilon(h_\varepsilon^-)\ \} = L < \infty.$$

La première garantit l'existence globale pour η_1 et η_2 petits d'une solution faible u_ε présentant un choc de grande amplitude sur une courbe lipschitzienne $x = \chi_\varepsilon(t)$ de vitesse $\chi'_\varepsilon := p_\varepsilon$ à variation bornée avec les estimations

$$(3.1.3) \quad |u_\varepsilon^\pm(t,\cdot) - \underline{u}^\pm|_\infty + |\chi'_\varepsilon - \underline{p}|_\infty \leq F_1 \ \max(|h_\varepsilon^- - \underline{u}^-|_\infty \ , \ |h_\varepsilon^+ - \underline{u}^+|_\infty),$$

$$(3.1.4) \qquad V(u_\varepsilon^\pm(t,\cdot)) + V(\chi'_\varepsilon) \leq F_2(V(h_\varepsilon^-) + V(h_\varepsilon^+)).$$

On a noté $u_\varepsilon^\pm(t,\cdot)$ la restriction de $u_\varepsilon(t,\cdot)$ aux demi-droites $\pm(x - \chi_\varepsilon(t)) > 0$. On note $\mathrm{tr}_\varepsilon^\pm u_\varepsilon$ les traces unilatérales de u_ε sur la courbe de choc χ_ε. On définit comme plus haut les quantités $V_\varepsilon(u_\varepsilon^\pm(t,\cdot))$ et on note aussi

$$V_{\varepsilon,t}(p_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sup_{I_\varepsilon \subset [0,t]} V(p_\varepsilon; I_\varepsilon) \quad ; \quad V_{\varepsilon,t}(\mathrm{tr}_\varepsilon^\pm u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sup_{I_\varepsilon \subset [0,t]} V(\mathrm{tr}_\varepsilon^\pm u_\varepsilon; I_\varepsilon) \ .$$

Comme dans [Ch], on montre que le caractère $\varepsilon - BV$ se propage uniformément en ε, (au sens des problèmes mixtes). La géométrie et les fonctionnelles qu'utilise la preuve sont plus aisées à décrire dans un schéma de type Bressan. Ce point fait l'objet de la Sous-Section 3.2 et aboutit au résultat suivant:

THÉORÈME 3.1.1. *Il existe η_1^0, il existe $\delta_2^0 \leq \eta_2$ tels que pour tous $\eta_1 \leq \eta_1^0$, $\delta_2 < \delta_2^0$, pour tout $T > 0$, il existe une constante $C(T)$ pour laquelle la solution u_ε du problème conservatif* (2.1), *de donnée de Cauchy $h_\varepsilon^\pm$ vérifie*

$$(3.1.5) \ \forall\, t \in]0,T], \qquad \sup_{\varepsilon \in]0,\eta_1]} \big(V_\varepsilon(u_\varepsilon^\pm(t,.)) + V_{\varepsilon,t}(p_\varepsilon) + V_{\varepsilon,t}(\mathrm{tr}_\varepsilon^\pm u_\varepsilon)\big) \leq C(T)\, L.$$

On ajoute un résultat technique qui sera utilisé dans la Section 4.

COROLLAIRE 3.1.2. *Soit $\tilde{u}_\varepsilon^{i,\pm}$ le prolongement de $u_\varepsilon^{i,\pm} := u_\varepsilon^\pm \cdot \underline{\ell}_i^\pm$ par* $(\mathrm{tr}_\varepsilon^\pm u_\varepsilon)(t) \cdot$ *$\underline{\ell}_i^\pm$ le long de la demi-droite de vitesse $\underline{\lambda}_i^\pm$ issue de $(t, \chi_\varepsilon(t))$. Sous les conditions du Théorème* 3.1.1, *la trace bilatérale* $\mathrm{tr}^\pm \tilde{u}_\varepsilon^{i,\pm}$ *de $\tilde{u}_\varepsilon^{i,\pm}$ sur $x = 0$ est définie et vérifie*

$$(3.1.6) \qquad \sup_{\varepsilon \in]0,\eta_1]} V_{\varepsilon,T}(\mathrm{tr}^\pm \tilde{u}_\varepsilon^{i,\pm}) \leq C(T).$$

3.2. – Le schéma de Bressan en présence d'un grand choc

Dans [C-ST], la solution u_ε est construite par un schéma de Glimm à mailles inclinées dans la direction du choc fort approché. Pour éviter l'utilisation peu pratiquée des caractéristiques généralisées de Glimm-Lax, on choisit ici une adaptation du schéma de Bressan. On omet la lettre ε. Les solutions approchées $u_\nu \equiv u_{\varepsilon,\nu}$ sont indexées par $\nu \in \mathbb{N}$ qui tend vers l'infini; elles s'obtiennent par résolution approchée de problèmes de Riemann à partir d'une discrétisation $h_\nu := h_\nu^\pm$ de la donnée de Cauchy $h^\pm := h_\varepsilon^\pm$, prenant un nombre fini de ses valeurs et vérifiant

$$(3.2.1) \quad h_\nu^\pm(x) = h^\pm(\pm\nu) \quad \text{si} \quad \pm\, x \geq \nu \quad , \quad \int_0^{\pm\nu} |h_\nu^\pm(x) - h^\pm(x)| dx < \nu^{-1}.$$

Près d'un point $x_0 \neq 0$ de saut faible de $h_\nu^\pm$, la résolution de Lax [La] du problème de Riemann est modifiée en y remplaçant chaque détente $u_d = \Phi_i(\varepsilon_i, u_g)$, $\varepsilon_i > 0$, par des discontinuités suivant le procédé

$$AD_\nu \qquad \begin{cases} u = \Phi_i(\frac{\nu'}{\nu}\varepsilon_i, u_g), & 0 \leq \nu' \leq \nu - 1, \text{ dans} \\ \lambda_i\left(\Phi_i\left(\dfrac{\nu'}{\nu}\varepsilon_i, u_g\right)\right) < \frac{x-x_0}{t} < \lambda_i\left(\Phi_i\left(\dfrac{\nu'+1}{\nu}\varepsilon_i, u_g\right)\right). \end{cases}$$

Près de $x_0 = 0$, point de saut fort de h_ν on utilise la Proposition 2.2 de [C-ST]. Si le nombre de points de saut de $h_\nu^\pm$ est $n_0^\pm(\nu)$, avant la première interaction u_ν contient au plus $N\nu n_0^\pm(\nu)$ discontinuités faibles à gauche ou à droite du grand choc; chacune est dite de génération 1 et de type $i \in \{1, ..., N\}$, i étant le numéro de la valeur propre λ_i de l'onde simple approchée qu'elle décrit.

Au premier temps d'interaction, s'il s'y rencontrent plus de 2 discontinuités, on augmente de $2^{-\nu}$ la valeur absolue de la vitesse d'une discontinuité faible interagissante; par la suite, on répète ce procédé pour que tout temps d'interaction soit celui de deux discontinuités exactement. Dans une interaction mettant en jeu ces ondes faibles dont la vitesse a été modifiée, on applique les règles de génération puisque les états bordant n'ont pas été changés; simplement ces discontinuités n'étant pas solution faible, la modification réapparait au niveau de la consistance.

Pour définir les règles de génération, on repère les secteurs définis par le grand choc $t \to \chi_\nu(t)$: le secteur $-$ est à gauche de $\chi_\nu(t)$, le secteur + est à droite; on note

$f_\pm(i; g) \bigwedge F$ l'interaction d'une onde faible du secteur $\pm$, de type i et de génération g avec χ_ν,

$f_\pm(i_1; g_1) \bigwedge f_\pm(i_2; g_2)$ l'interaction de deux ondes faibles du même secteur.

Voici les règles de génération:

• des interactions faibles: ce sont celles de Bressan; dans la résolution de Lax de l'interaction $f_\pm(i_1; g_1) \bigwedge f_\pm(i_2; g_2), g_k < \nu$, les détentes sortantes de type non entrant subissent AD_ν, les détentes sortantes de type entrant subissent AD_1 et chaque onde sortante ainsi définie prend suivant son type j, la génération

$$1 + \max\{g_1, g_2\} \quad \text{si} \quad j \notin \{i_1, i_2\}, \qquad \min\{g_1, g_2\} \quad \text{si} \quad j = i_1 = i_2\ ,$$

$$g_k \qquad \text{si} \qquad j = i_k, \qquad k = 1, 2 \qquad \text{et} \qquad i_1 \neq i_2\ .$$

Lorsque g atteint ν, ce sont les mêmes qu'en génération inférieure pour les ondes sortantes de type entrant, les ondes sortantes de type non entrant étant détruites. Par ailleurs, la succession des deux discontinuités entrantes qui aboutit à $u_d = \Phi_{i_2}(\varepsilon_{i_2}, \Phi_{i_1}(\varepsilon_{i_1}, u_g))$ est remplacée après leur temps d'interaction par $\Phi_{i_1}(\varepsilon_{i_1}, \Phi_{i_2}(\varepsilon_{i_2}, u_g))$ qui aboutit à $\tilde{u}_d \neq u_d$; les états situés à droite au temps $t - 0$, liés par $u^+ = \Phi_i(\varepsilon_i, u^-)$ ou $u^+ = H(p, u^-)$ sont remplacés au temps $t + 0$ par carambolage en $\tilde{u}^+ = \Phi_i(\varepsilon_i, \tilde{u}^-)$ ou $\tilde{u}^+ = H(p, \tilde{u}^-)$.

• des interactions fortes : dans la résolution des interactions $f_\pm(i;g)\bigwedge F$, $g\leq\nu$, par la Proposition 2.2 de [C-ST], les détentes sortantes subissent AD_ν et chaque onde faible sortante conserve quel que soit son type la génération g.

Voici la définition des courbes de discontinuités faibles: elles sont indexées par leur secteur, leur type et leur génération. Leur arrêt, prolongement ou création se décide en un temps d'interaction. Sont arrêtées les discontinuités faibles atteignant le choc fort, soit parce qu'elles créent au plus $N\nu$ discontinuités de secteur différent par transmission ou de type différent par réflexion. Sont prolongées dans une interaction faible d'un même secteur les discontinuités conservant leur génération, les autres étant arrêtées; sont créées dans une telle interaction, les sortantes de type non entrant.

Les courbes de discontinuité interagissent 2 à 2 au plus une fois. Dans chaque secteur, les discontinuités de génération 1 ne peuvent naître que par transmission ou réflexion à travers le grand choc. Celles de génération g naissent par transmission, réflexion ou interaction faible. Pour borner le nombre des discontinuités de génération g du secteur $\pm$, on note $N_c^\pm$, $N_{nc}^\pm$ l'ensemble des types de valeurs propres causales ou non pour chaque secteur ainsi que leur nombre; si $n_c^\pm(g), n_{nc}^\pm(g)$, bornent le nombre des discontinuités de type causal ou non, de génération g, du secteur $\pm$, et si $n^\pm(g)=n_c^\pm(g)+n_{nc}^\pm(g)$, on a

$$n_c^-(1)\leq N_c^-\nu n_0^-(\nu)$$

$$n_{nc}^+(1)\leq N_{nc}^+\nu n_0^+(\nu)+N_c^+\nu n_0^+(\nu)(1+N_{nc}^+\nu)+N_c^-\nu n_0^-(\nu)N_{nc}^+\nu$$

et une estimation symétrique pour $n_c^+(1)$ et $n_{nc}^-(1)$. On a ensuite

$$n_c^-(2)\leq N_c^-\nu n^-(1)^2\ ,\quad n_{nc}^+(2)\leq N_{nc}^+\nu(n^+(1)^2+n_c^-(2)).$$

Plus généralement, pour $1\leq g\leq\nu$,

$$n_c^-(g)\leq N_c^-\nu n^-(g-1)(n^-(1)+\ldots+n^-(g-1))$$

$$n_{nc}^+(g)\leq N_{nc}^+\nu(n_c^-(g)+n^+(g-1)(n^+(1)+\ldots+n^+(g-1)))$$

et une estimation symétrique pour $n_c^+(g)$ et $n_{nc}^-(g)$. Ainsi, à ν fixé, les courbes de discontinuité sont en nombre fini.

On décrit maintenant rapidement les fonctionnelles en jeu. Omettant l'écriture de ν, pour une approximation u_ν, on désigne par $I_f^\pm$, $I_F^\pm$ l'ensemble des temps d'interaction faible dans le secteur $\pm$, d'une discontinuité faible du secteur $\pm$ avec χ_ν. On note

$$I_F:=I_F^-\cup I_F^+\ ;\ \mathcal{I}:=I_f^-\cup I_F\cup I_f^+:=\{\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_{\#\mathcal{I}}\}\ .$$

Pour $t\notin\mathcal{I}$ on note $\gamma^\pm(n)$, $n\in\mathbb{N}$, les forces de Lax exprimant les discontinuités faibles de u_ν au temps t dans le secteur $\pm$, $\gamma^\pm(n)$ étant à gauche de $\gamma^\pm(n+1)$; on les norme à l'aide d'un grand poids K, dont la taille est imposée par la structure du système, suivant le caractère causal ou non de leur type $j(\gamma^{\pm}) \in \{1, ..., N\}$, par

$$
\begin{aligned}
|\gamma^{\pm}|_K &= |\gamma^{\pm}| \quad \text{si } j(\gamma^{\pm}) \in N^{\pm}_{nc} \\
|\gamma^{\pm}|_K &= K|\gamma^{\pm}| \text{ si } j(\gamma^{\pm}) \in N^{\pm}_{c}
\end{aligned}
$$

et on définit les potentiels "d'intérieur" unilatéraux

$$\mathcal{L}^{\pm}(t) = \sum_{n} |\gamma^{\pm}(n)|_K$$

et les potentiels bilatéraux

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\circ}(t) &= \mathcal{L}^{-}(t) + \mathcal{L}^{+}(t) \\
\mathcal{L}_c(t) &= \sum_{n\in N_c^-} |\gamma^{-}(n)|_K + \sum_{n\in N_c^+} |\gamma^{+}(n)|_K .
\end{aligned}
$$

Pour $t \in I_F$ on note $\dot{p}(t) = |p_\nu(t+) - p_\nu(t-)|$ et $\gamma_e^{\pm}(t), \gamma_s^{\pm}(t)$ les forces entrantes, sortantes, de secteur $\pm$ dans l'interaction forte; pour $t \notin I_F$, on charge le grand choc par les potentiels

$$\mathcal{P}(t) = \sum_{\tau<t,\ \tau\in I_F} \dot{p}(\tau) \ , \quad \mathcal{T}^{\pm}(t) = \sum_{\tau<t,\ \tau\in I_F} (|\gamma_e^{\pm}(\tau)| + |\gamma_s^{\pm}(\tau)|)$$

qui estiment la variation de la vitesse du grand choc et des traces unilatérales de u_ν sur ce choc (pour l'essentiel). La fonctionnelle d'ordre 1 intervenant naturellement dans cette version du schéma de Bressan est alors

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}^{-}(t) + \mathcal{T}^{-}(t) + \mathcal{P}(t) + \mathcal{T}^{+}(t) + \mathcal{L}^{+}(t).$$

Sa croissance est compensée par la décroissance du potentiel quadratique

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}^{-}(t) + \mathcal{Q}^{+}(t) + \mathcal{L}_c(t)\mathcal{L}^{\circ}(t)$$

où

$$\mathcal{Q}^{\pm}(t) = \sum_{\alpha^{\pm}\mathcal{A}^t\beta^{\pm}} |\alpha^{\pm}||\beta^{\pm}|,$$

la notation $\alpha\mathcal{A}^t\beta$ signifiant que l'onde α approche l'onde β au temps t au sens de Glimm. En effet, quitte à diminuer les η_i, sous une hypothèse de récurrence jusqu'au temps $t-0$, on peut supposer que pour $t \in I_f^{\pm}$, temps d'interaction entre deux ondes faibles α et β, on a

$$\Delta\mathcal{Q}(t) \leq -\ \frac{1}{2}\ |\alpha||\beta| \ ;$$

alors la croissance de $\mathcal{L}$ estimée à l'aide d'un majorant c_0 des lemmes d'interaction de Glimm en
$$\Delta\mathcal{L}(t) \leq c_0\ K\ |\alpha||\beta|$$
est contrôlée en
$$\Delta(\mathcal{L} + 2c_0\ K\ \mathcal{Q})(t) \leq 0\ .$$
Pour $t \in I_F^-$, temps d'interaction entre une onde faible α^- du secteur $-$ et le choc fort, on a
$$\Delta\mathcal{L}_c(t) \leq -K|\alpha|$$
$$\Delta(\mathcal{L}^\circ - \mathcal{L}_c)(t) \leq (1 + T + R)|\alpha|$$
$$\Delta(\mathcal{T}^- + \mathcal{P} + \mathcal{T}^+)(t) \leq (2 + D + T + R)|\alpha|$$
et le choix d'un K assez grand pour absorber des bornes D, T, R des coefficients de déformation, transmission et réflexion,
$$K > \underline{A} := 3 + D + 2T + 2R, \tag{3.2.2}$$
permet de réaliser
$$\Delta\mathcal{L}^\circ(t) \leq 0\ , \qquad \Delta\mathcal{L}(t) \leq 0.$$
Cela entraine
$$\Delta(\mathcal{L}_c\mathcal{L}^\circ)(t) \leq -K\mathcal{L}^\circ(t-0)|\alpha|$$
ce qui compense les croissances
$$\Delta\mathcal{Q}^-(t) \leq (1 + R)|\alpha|\mathcal{L}^-(t-0)\quad , \quad \Delta\mathcal{Q}^+(t) \leq (1 + T)|\alpha|\mathcal{L}^+(t-0)$$
et conduit à
$$\Delta\mathcal{Q}(t) \leq 0\ .$$
Des estimations de potentiels plus fins, indexés par la génération $g \in \{1, ..., \nu\}$, conduisent ensuite à la convergence d'une suite extraite de $(u_\nu)_\nu$ vers une solution faible du problème de Cauchy. On retient les estimations vérifiées par ces u_ν (et leur limite) :

Proposition 3.2.1 ([C-ST]). *Il existe $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0$ petits, $F_1, F_2, F_2' > 0$ tels que pour toute fonction constante par morceaux u_ν, à grand saut sur la courbe $x = \chi_\nu(t)$, construite par le schéma de Bressan à partir d'une discrétisation $h_\nu^\pm$ vérifiant* (3.2.1), *$h_\nu^\pm(x) = \underline{u}^\pm$ hors d'un compact de* $[0, \pm\infty[$ *et*
$$|h_\nu^\pm - \underline{u}^\pm|_\infty \leq \eta_1, \quad V(h_\nu^\pm) \leq \eta_2$$
vérifie aussi pour tout temps $t > 0$,
$$|u_\nu^\pm(t,\cdot) - \underline{u}^\pm|_\infty + |\chi_\nu' - \underline{p}|_\infty \leq F_1\ \max(|h_\nu^- - \underline{u}^-|_\infty\ ,\ |h_\nu^+ - \underline{u}^+|_\infty),$$
$$V(u_\nu^\pm(t,\cdot)) + V(\chi_\nu') \leq F_2\ (V(h_\nu^-) + V(h_\nu^+)).$$

De plus, hors des temps d'interaction, les fonctionnelles sous-jacentes satisfont

$$\mathcal{L}^-(t) + \mathcal{T}^-(t) + \mathcal{P}(t) + \mathcal{T}^+(t) + \mathcal{L}^+(t) \leq F_2' \,(V(h_\nu^-) + V(h_\nu^+)).$$

Dans le cas d'une famille $(h_\varepsilon^\pm)_{0<\varepsilon\leq\eta_1}$ vérifiant (3.1.1) et (3.1.2), on dispose donc déjà d'estimations, pour $\nu > \nu_\varepsilon$ assez grand, sur les approximations des états $u_{\varepsilon,\nu}$ et des vitesses $p_{\varepsilon,\nu} = \chi_{\varepsilon,\nu}'$ du grand choc. Notant α/J le croisement d'une courbe J par une onde α,

$$\mathcal{L}^\pm(J) \;:=\; \sum_{\gamma/J} \; |\gamma|_K \;,$$

J_ε un intervalle de longueur ε et

$$\mathcal{L}^{\pm,\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1} \sup_{J_\varepsilon\subset\{t\}\times\{\pm(x-\chi_{\varepsilon,\nu}(t))\geq 0\}} \mathcal{L}^\pm(J_\varepsilon) \;,$$

on peut utiliser

$$|h_{\varepsilon,\nu}^\pm - \underline{u}^\pm|_\infty \leq \varepsilon \leq \eta_1, \quad \mathcal{L}^-(0+) + \mathcal{L}^+(0+) \leq \delta_2' \;,$$

$$\mathcal{L}^{-,\varepsilon}(0+) + \mathcal{L}^{+,\varepsilon}(0+) \leq L' \;,$$

$$\forall t \notin \mathcal{I}, \quad |u_{\varepsilon,\nu}^\pm(t,\cdot) - \underline{u}^\pm|_\infty + |p_{\varepsilon,\nu} - \underline{p}|_\infty \leq F_1 \;\varepsilon \;, \tag{3.2.3}$$

$$\mathcal{Q}(t) \leq \mathcal{Q}(0+) \leq 2\;(\delta_2')^2 \;,$$

$$\mathcal{L}^-(t) + \mathcal{T}^-(t) + \mathcal{P}(t) + \mathcal{T}^+(t) + \mathcal{L}^+(t) \leq F_2' \;\delta_2' \;.$$

La dernière ligne contient en particulier

$$\mathcal{T}^c(t) := \sum_{\tau>t\;,\;\tau\in I_F} |\gamma_e(\tau)|_K \leq K F_2' \;\delta_2' \;, \tag{3.2.4}$$

où les forces entrantes $\gamma_e \equiv \gamma_c \equiv \gamma_c^\pm$ sont causales de secteur $\pm$.

On note $\tilde{J}_\varepsilon$ un morceau du grand choc compris entre deux temps distants de $\underline{\mu}\;\varepsilon$, $\underline{\mu} > 0$ désignant une constante de normalisation qui sera précisée ultérieurement. On note aussi $\tilde{J}_\varepsilon\cap]0,t[$ la partie de $\tilde{J}_\varepsilon$ de temps inférieur à t

$$\tilde{J}_\varepsilon\cap]0,t[:= \{(s,\chi_{\varepsilon,\nu}(s)) \;;\; t_1 < s < \min(t_1 + \underline{\mu}\varepsilon, t)\} \;.$$

La preuve du Théorème 3.1.1 fera intervenir

$$\mathcal{T}^{\pm,c,\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1} \sup_{\tilde{J}_\varepsilon} \;\; \mathcal{T}^{\pm,c}(\tilde{J}_\varepsilon\cap]0,t[)$$

où

$$\mathcal{T}^{\pm,c}(J) = \sum_{\gamma_c^{\pm}/J} |\gamma_c^{\pm}|_K ,$$

leur somme

$$\mathcal{T}^{c,\varepsilon}(t) = \mathcal{T}^{-,c,\varepsilon}(t) + \mathcal{T}^{+,c,\varepsilon}(t) ,$$

ainsi que

$$\mathcal{L}^{\varepsilon}(t) = \max \ (\ \mathcal{L}^{-,\varepsilon}(t) \ , \ \mathcal{T}^{-,c,\varepsilon}(t) \ , \ \mathcal{T}^{+,c,\varepsilon}(t) \ , \ \mathcal{L}^{+,\varepsilon}(t)) \ .$$

3.3. – Les fonctionnelles de Glimm localisées

On note $S^{\pm} = \{(t,x), \pm x > 0 \text{ si } t < 0, \pm(x - \chi_{\varepsilon,\nu}(t)) > 0 \text{ si } t \geq 0\}$ les deux demi-espaces ouverts définis par le grand choc approché, $S^{\pm}(t)$ leurs sections à l'instant t. Les domaines de localisation en jeu pour des données vérifiant (3.1.1), (3.1.2) se définissent à partir des quantités $\underline{\lambda}_j^{\pm}$ et

$$\underline{a} = \max \{F_1 \ , \ \sup_{\pm} \ \sup_{j\in\{1,\dots,N\}} \ \sup_{\varepsilon\in]0,\eta_1]} \ \sup_{|u-\underline{u}^{\pm}|_\infty \leq \varepsilon F_1, \quad u\in\underline{\Omega}^{\pm}} \varepsilon^{-1}|\lambda_j(u) - \underline{\lambda}_j^{\pm}| \ \}.$$

On soulignera de même toutes les constantes (de structure locale) qui interviendront par la suite.

Pour $j \in \{1, \dots, N\}, T > 0$, et un intervalle $J =]i_1, i_2[$ *quelconque* dans $\mathbb{R}$, situé à l'instant T, on définit le domaine rétrograde

$$\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j} := \{(t,x) \in \overline{S^{\pm}}; 0 \leq t \leq T, i_1 - (\underline{\lambda}_j^{\pm} + \varepsilon\underline{a})(T-t) < x < i_2 - (\underline{\lambda}_j^{\pm} - \varepsilon\underline{a})(T-t)\}.$$

Pour $t \leq T$, on note $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}(t)$ la courbe continue affine par morceaux

$$\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}(t) = \{(t,x) \in \mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}\} \cup \{(s,\chi(s)) \in \mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j} \ ; s \leq t\} \quad \text{si } j \in N_c^{\pm} \ ,$$
$$\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}(t) = \{(t,x) \in \mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}\} \cup \{(s,\chi(s)) \in \mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j} \ ; s \geq t\} \quad \text{si } j \in N_{nc}^{\pm} \ .$$

On note $\alpha_j/\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}(t)$ lorsqu'une onde de type j, située dans $S^{\pm}$ et de force α_j intersecte $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}(t)$ (le long de χ, si $j \in N_c^{\pm}$ c'est une force entrante, si $j \in N_{nc}^{\pm}$ c'est une force transmise ou réfléchie) et pour $t \notin \mathcal{I}$ on définit

$$\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}(t) := \sum_{\gamma_j/\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}(t)} |\gamma_j|_K \ .$$

Lorsqu'ils existent, on note respectivement $t_{J,\varepsilon}^{i,T,j} \leq t_{J,\varepsilon}^{f,T,j}$, le temps initial, final, en lequel l'adhérence de $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{\pm,T,j}$ rencontre χ et on définit, pour $t_{J,\varepsilon}^{i,T,j} < t < t_{J,\varepsilon}^{f,T,j}$

$$\mathcal{T}_{J,\varepsilon}^{c,T,j}(t) := \sum_{\tau\in I_F \ , \ t \ < \ \tau \ < \ t_{J,\varepsilon}^{f,T,j}} |\gamma_c(\tau)|_K \ . \tag{3.3.1}$$

Lorsque $J \subset \overline{S^\pm}$, on utilise

$$\mathcal{L}^{\pm,j}(J) := \sum_{\gamma_j / J} |\gamma_j|_K \ .$$

3.3.1. – Les fonctionnelles causales

On les construit pour le domaine S^-; le procédé serait analogue dans S^+.

LEMME 3.3.1. *Soit $j \in N_c^-$, $T > 0$, $J \subset \mathbb{R}$.*

i) *Sur tout intervalle de $]0, T]$ ne contenant pas de τ_i, la fonctionnelle $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$ est décroissante.*

ii) *A tout temps $\tau_i \in I_f \cap]0, T[$, d'interaction faible entre deux ondes α et β de S^- on a*

$$\Delta \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i) = 0 \text{ si } (\tau_i, x_i) \notin \mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i)\,, \ \ \Delta \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i) \leq c_0 K\, |\alpha|\, |\beta| \text{ sinon.}$$

iii) *A tout temps $\tau_i \in I_F \cap]0, T[$, on a $\Delta \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i) = 0$. iv) $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(0+) \leq (\varepsilon^{-1}|J| + 2\underline{a}\, T + 1)\, \varepsilon\, L'$.*

PREUVE. i) aucune j-onde ne peut pénétrer dans le domaine entre les temps t et t', $\tau_i < t < t' < \tau_{i+1}$.

ii) est le lemme d'interaction de Glimm.

iii) la continuité de $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$ en un $\tau_i \in I_F^+$ est claire, de même que si l'onde α de secteur S^- rencontre χ avec $j(\alpha) \neq j$ (car aucune onde causale ne peut être créée par transmission ou réflexion). Elle l'est aussi si l'interaction se produit en un point $(\tau_i, x_i) \notin \mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i)$. Il ne reste alors que les α_j^- interagissant à l'angle de $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i)$ qui passent d'un croisement de $t = \tau_i$ en $\tau_i - 0$ à un croisement de χ en $\tau_i + 0$, avec conservation de leur norme. iv) $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(0)$ est vide ou bien un intervalle de $\{0\} \times \{x < 0\}$ de longueur maximale $|J| + 2\varepsilon\underline{a}\ T$. Son découpage par des intervalles de longueur au plus ε, avec (3.2.3), donne le résultat.

On définit maintenant les notions d'interaction réelle ou virtuelle [Ch], et les potentiels quadratiques associés, pour le secteur S^-. Un point $(t, x) \in \overline{S^-}$ étant fixé, son j-cône d'avenir à l'échelle ε est tronqué en

$$\mathcal{C}_{j,\varepsilon}^-(t, x) = \{(s, y) \in \overline{S^-} ; t < s, \underline{\lambda}_j^- - \underline{a}\varepsilon < \frac{y - x}{s - t} < \underline{\lambda}_j^- + \underline{a}\varepsilon\}$$

Lorsque (t, x) est point de saut d'une onde α de type $j(\alpha)$ au temps t et à la position $x(\alpha)$, on convient d'écrire

$$\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^{-,t} = \mathcal{C}_{j(\alpha),\varepsilon}^-(t, x(\alpha)).$$

Si $\mathcal{D}$ est un domaine de S^-, α, β deux ondes de $\overline{S^-}$ au temps t vérifiant $\alpha\mathcal{A}^t\beta$, on note $\alpha\mathcal{A}^{t,r}_{\mathcal{D}}\beta$ ou $\alpha\mathcal{A}^{t,v}_{\mathcal{D}}\beta$ suivant que $\mathcal{C}^{-,t}_{\alpha,\varepsilon} \cap \mathcal{C}^{-,t}_{\beta,\varepsilon} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ ou non. On définit alors le potentiel d'interaction réelle relativement à $\mathcal{D}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}$, pour $0 < t < T$,

$$\mathcal{Q}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}(t) = \sum_{\alpha\,\mathcal{A}^{t,r}_{\mathcal{D}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}}\,\beta} |\alpha|\,|\beta|$$

et pour $(t,x) \in \overline{S^-}$, $(t,x) \notin \overset{\circ}{\mathcal{D}}{}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}$, $t < T$, l'ensemble

$$\mathcal{E}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}(t,x) = \{(t, x(\beta)) \in \overline{S^-} \ ; \ x = x(\alpha) \ \text{ et } \ \alpha \ \mathcal{A}^{t,r}_{\mathcal{D}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}} \beta \ \text{ est possible}\} \ .$$

Si $(t,x) \in \overline{S^-}$ n'est pas dans le domaine $\mathcal{D}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}$, cet ensemble est la coupe à l'instant t d'un éventail, constitué d'au plus $N(N-1)$ intervalles. Cet éventail peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles $J^k_\varepsilon, k = 1, ..., k_\varepsilon$, de longueur ε et dont la mesure cumulée vérifie

$$(3.3.2) \qquad |\mathcal{E}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}(t,x)| \leq \sum_{k=1}^{k_\varepsilon} |J^k_\varepsilon| \leq \underline{C}_1(|J| + \varepsilon(1 + T - t)) \ .$$

Si (t,x) est de la forme $(t, \chi(t))$ avec $t^{i,T,j}_{J,\varepsilon} < t < t^{f,T,j}_{J,\varepsilon}$, cet ensemble est un intervalle contenu dans la section $\mathcal{D}^{-,T}_J(t)$ du grand domaine

$$\mathcal{D}^{-,T}_J := \{(t,x) \in \overline{S^-} \ ; \ 0 \leq t \leq T, i_1 - \underline{\lambda}(T-t) < x < i_2 + \underline{\lambda}(T-t)\}$$
$$\underline{\lambda} = \sup_{\pm\ ,\ j\in\{1,\dots,N\}} \ \sup_{|u-\underline{u}^\pm|_\infty \leq 1,\ \ u\in\underline{\Omega}^\pm} |\lambda_j(u)|$$

et on a encore

$$(3.3.3) \qquad |\mathcal{E}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}(t,x)| \leq \sum_{k=1}^{k'_\varepsilon} |J^k_\varepsilon| \leq \varepsilon + |J| + 2\underline{\lambda}(T-t) \ .$$

LEMME 3.3.2. *Soient* $j \in N^-_c$, $T > 0$, $J \subset \mathbb{R}$.

i) *A tout temps* $\tau_i \in I^-_f \cap]0, T[$ *d'interaction faible entre deux ondes* α *et* β *vérifiant* $\alpha\,\mathcal{A}^{\tau_i - 0,r}_{\mathcal{D}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}}\,\beta$, *on a:*

$$\Delta\mathcal{Q}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}(\tau_i) \ \leq \ -\frac{1}{2}\ |\alpha|\,|\beta| \quad ; \quad \Delta(\mathcal{L}^{-,T,j}_{J,\varepsilon} + 2c_0\,K\,\mathcal{Q}^{-,T,j}_{J,\varepsilon})(\tau_i) \ \leq \ 0 .$$

ii) $\quad \mathcal{Q}^{-,T,j}_{J,\varepsilon}(0+) \ \leq \ \underline{C}_2(\varepsilon^{-1}|J| + T + 1)\,\varepsilon\,L'\,\delta'_2 .$

iii) *Sur tout intervalle de* $]0, T]$ *ne contenant pas de temps d'interaction forte, ou faible de secteur* S^- *virtuelle relativement à* $\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$, *les fonctionnelles* $\mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$ *et* $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j} + 2c_0\, K\, \mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$ *sont décroissantes.*

iv) *A tout temps* $\tau_i \in I_F \cap]0, T[$ *d'interaction d'une onde* α *avec* χ *on a*

$$\Delta\ \mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i) \ \leq\ \mathcal{L}^-(\mathcal{E}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i, \chi(\tau_i)))\ \underline{A}\ |\alpha|.$$

v) *A tout temps* $\tau_i \in I_f^- \cap]0, T[$ *d'interaction faible à la position* (τ_i, x_i) *entre deux ondes* α *et* β *vérifiant* $\alpha\, \mathcal{A}^{\tau_i - 0, v}_{\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}}\, \beta$, *on a*

$$\Delta\ \mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i) \ \leq\ \mathcal{L}^-(\mathcal{E}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i - 0, x_i))\ c_0\ |\alpha|\,|\beta|.$$

PREUVE. i) résulte du lemme d'interaction de Glimm.

Pour ii) notant $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$, $J_0 = \mathcal{D}(0)$ sa section à l'instant 0+, de complémentaire J_0^C dans $]-\infty, 0]$, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(0+) &\leq \left(\sum_{\alpha \mathcal{A}^t \beta,\ \alpha/J_0,\ \beta/J_0} + \sum_{\alpha \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^{t,r} \beta,\ \alpha \text{ ou } \beta/J_0^C} \right) |\alpha|\,|\beta| \\
&\leq \left(\sum_{\alpha/J_0} |\alpha| \right)^2 + \sum_{x(\alpha)\in J_0^C} |\alpha| \sum_{x(\beta)\in \mathcal{E}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(0, x(\alpha))} |\beta|\ ,
\end{aligned}$$

puis on utilise (3.2.3), (3.3.2) et (3.3.3).

iii) un tel intervalle est découpé par des $\tau_i \in I_f^-$ d'interaction réelle, entre lesquels $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$ et $\mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$ décroissent (même au passage d'un temps de I_f^+), et au passage desquels $\mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$ et $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j} + 2c_0 K\, \mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}$ décroissent. iv) si α_s sont les ondes sortantes (non causales) de secteur S^- transmises ou réfléchies par χ, on a

$$\Delta \mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i) \leq \sum_{\alpha_s} \sum_{\beta\, \mathcal{A}^{t,r}_{\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}}\, \alpha_s} |\alpha_s|\,|\beta| \ \text{ et } \sum_{\alpha_s} |\alpha_s| \leq\ (1 + \max\ (T, R))\ |\alpha|\ .$$

v) se traite comme dans [Ch].

La compensation des non décroissances en iv) et v) s'effectue à l'aide des potentiels Q et $\mathcal{T}^c$:

LEMME 3.3.3. *Soient* $j \in N_c^-$, $T > 0$, $J \subset \mathbb{R}$.

i) *Les fonctionnelles* $\mathcal{T}^c$ *et* $\mathcal{Q}$ *décroissent dans* $]0, T[$.

ii) *A tout temps* $\tau_i \in I_F \cap]0, T[$ *d'interaction d'une onde* α *avec* χ *on a*

$$\Delta \mathcal{T}^c(\tau_i) \leq -|\gamma_c(\tau_i)|_K \,,$$
$$\Delta(\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j} + 2c_0\, K\, \mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j})\,(\tau_i) + 2c_0\, K\, \mathcal{L}^-(\mathcal{E}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i, \chi(\tau_i)))\; \Delta \mathcal{T}^c(\tau_i) \leq 0$$

iii) *A tout temps* $\tau_i \in I_f^- \cap]0, T[$ *d'interaction faible entre deux ondes* α *et* β *vérifiant* $\alpha\, \mathcal{A}^{\tau_i - 0, v}_{\mathcal{D}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}}\, \beta$, *on a*

$$\Delta \mathcal{Q}(\tau_i) \leq -\frac{1}{2}\, |\alpha|\, |\beta| \,;$$
$$\Delta(\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-,T,j} + 2c_0\, K\, \mathcal{Q}_{J,\varepsilon}^{-,T,j})\,(\tau_i) + (2c_0)^2\, K\, \mathcal{L}^-(\mathcal{E}_{J,\varepsilon}^{-,T,j}(\tau_i, x_i))\; \Delta \mathcal{Q}(\tau_i) \leq 0.$$

iv) $\quad \mathcal{Q}(0+) \leq 2(\delta_2')^2 \,, \ \mathcal{T}^c(0) \leq K\, F_2'\, \delta_2'$.

On introduit maintenant la fonction affine $\varphi_{a,b}(t) = a + bt$, avec $a \geq 1$ et $b > 0$.

LEMME 3.3.4. *Soient* $j \in N_c^-$, $T > 0$, $J_\varepsilon \subset \mathbb{R}$, *de temps constant et d'extrémité gauche contenue dans* S^-, $|J_\varepsilon| = \varepsilon$.

i) *Soient* $t' \leq t \leq T$ *et*

$$\underline{C}_3 := 4c_0 K \ \max\left\{ \underline{C}_1;\, 1 + \frac{\lambda}{\underline{\lambda}_j^{\pm} - \underline{p} - 2\underline{a}\eta_1} \right\} + 1 \,.$$

Pour peu que l'on ait

$$\mathcal{L}^{-,\varepsilon}(s) \leq \varphi_{a,b}(s)\, L' \ \ pour\ tout \ \ s \in [0, t'[, \tag{3.3.4}$$

alors la fonctionnelle de Glimm causale, localisée, d'échelle ε

$$\begin{aligned}[0, t] \ni s \mapsto \mathcal{S}_{J_\varepsilon,\varepsilon}^{-,t,j}(s) := \mathcal{L}_{J_\varepsilon,\varepsilon}^{-,t,j}(s) + \ 2c_0 K \mathcal{Q}_{J_\varepsilon,\varepsilon}^{-,t,j}(s) \\ + \ \underline{C}_3\ (1 + (t - s))\varepsilon L' \varphi_{a,b}(t)\ (\mathcal{T}^c(s) + 2c_0 \mathcal{Q}(s)) \,,\end{aligned}$$

décroit sur $]0, t' + 0[$.

ii) *Soient*

$$\begin{aligned}\delta_2'(T, \sigma) &:= \min \left\{ \frac{\sigma}{2\underline{C}_3(F_2'K + 4c_0)(1 + T)} \,,\ \eta_2' \right\} \,, \\ a(T, \sigma) &:= \frac{4}{\sigma}(1 + 2\delta_2'(T, \sigma)c_0 \underline{C}_2 K); \\ b(T, \sigma) &:= \frac{4}{\sigma}(\underline{a} + \delta_2'(T, \sigma)c_0 \underline{C}_2 K) \,.\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Pour tous $\sigma \in]0,1]$, $\delta_2' \in]0, \delta_2'(T,\sigma)[$, $t \in]0,T[$, *on a*

(3.3.6) $$\mathcal{S}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(0+) \leq \sigma\ \varepsilon\ L'\ \varphi_{a(T,\sigma),b(T,\sigma)}(t)\ .$$

PREUVE. i) Soit $\tau_i \in I_f^- \cup I_F$, $\tau_i \leq t'$, le temps d'une interaction se produisant à la position (τ_i, x_i). Si $(\tau_i, x_i) \notin \mathcal{D}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$, alors (3.3.2) et (3.3.4) donnent

$$\mathcal{L}^-(\mathcal{E}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i,x_i)) \leq \underline{C}_1\ (2+t-\tau_i)\ \varepsilon\ L'\ \varphi_{a,b}(\tau_i)\ .$$

Si $(\tau_i, x_i) = (\tau_i, \chi(\tau_i)) \in \mathcal{D}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$, alors $t^{f,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon} = t$ et, quitte à diminuer η_1,

$$t - \frac{\varepsilon}{\underline{\lambda}_j^- - \underline{p} - 2\underline{a}\eta_1} \leq \tau_i \leq t\ ,$$

d'où en utilisant (3.3.3) et (3.3.4),

$$\mathcal{L}^-(\mathcal{E}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i,x_i)) \leq 2\varepsilon\left(1 + \frac{\lambda}{\underline{\lambda}_j^- - \underline{p} - 2\underline{a}\eta_1}\right)\ L'\ \varphi_{a,b}(\tau_i)\ .$$

La fonctionnelle $\mathcal{S}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ est décroissante entre les temps d'interaction. Au passage d'un tel temps, ou bien $(\tau_i, x_i) \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}{}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ et alors $\Delta(\mathcal{S}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon})(\tau_i) \leq 0$ résulte du Lemme 3.3.2. Ou bien $(\tau_i, x_i) \notin \overset{\circ}{\mathcal{D}}{}^{-,t,j}_{J,\varepsilon}$ et alors d'après le Lemme 3.3.3, une condition suffisante à sa décroissance est

$$2c_0 K \mathcal{L}^-(\mathcal{E}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i,x_i)) \leq \underline{C}_3\ (1+t-\tau_i)\ \varepsilon\ L'\ \varphi_{a,b}(t)\ .$$

Cette condition est réalisée grâce aux estimations ci-dessus et la croissance de $\varphi_{a,b}$.

ii) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(0+) \leq\ & 2(1+\underline{a}t)\varepsilon L' + 2c_0\underline{C}_2 K(2+t)\varepsilon L'\delta_2' \\ & + \underline{C}_3(1+t)\varepsilon L'\varphi_{a,b}(t)(KF_2'\delta_2' + 4c_0(\delta_2')^2) \\ \leq\ & \varepsilon L'\Big[(2 + \delta_2'(4c_0\underline{C}_2K + \underline{C}_3\varphi_{a,b}(t)(F_2'K + 4c_0\delta_2'))) \\ & + t(2\underline{a} + \delta_2'(2c_0\underline{C}_2K + \underline{C}_3\varphi_{a,b}(t)(F_2'K + 4c_0\delta_2')))\Big]\end{aligned}$$

Le terme délimité par [.] est majoré par $\sigma\varphi_{a,b}(t)$ si

$$2 + 2\underline{a}t + \delta_2' 2c_0\underline{C}_2K(2+t) \leq (\sigma - \underline{C}_3\delta_2'(F_2'K + 4c_0\delta_2')(1+t))\ \varphi_{a,b}(t)\ .$$

La définition de la fonction $\delta_2'(T,\sigma)$ garantit que

$$\underline{C}_3\delta_2'(T,\sigma)(F_2'K + 4c_0\delta_2'(T,\sigma))(1+T) < \frac{\sigma}{2}\ ;$$

avec celle des fonctions $a(T,\sigma)$ et $b(T,\sigma)$, cela assure l'inégalité (3.3.6).

3.3.2. – Les fonctionnelles non causales

A nouveau on les construit dans S^-. Soit J_ε un intervalle de $S^-(T)$, de longueur ε. Lorsque le domaine $\mathcal{D}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ ne rencontre pas χ, les résultats des Lemmes 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3 restent valables; dans le cas contraire, ils le restent aussi sur l'intervalle de temps $[t^{f,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}\ ,\ T[$. Pour remonter plus loin on fait entrer en jeu la fonctionnelle de trace $\mathcal{T}^{c,T,j}_{J,\varepsilon}$ définie par (3.3.1).

LEMME 3.3.5. *Soit $j \in N^-_{nc}$, $T > 0$, $J_\varepsilon \subset \overline{S^-(T)}$, $|J_\varepsilon| = \varepsilon$.*

i) *Sur tout intervalle de $]0, T]$ ne contenant pas de $\tau_i \in \mathcal{I} \setminus I_f^+$, les fonctionnelles $\mathcal{L}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ et $\mathcal{Q}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ sont décroissantes .*

ii) *Sur tout intervalle de $]t^{i,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}, T]$ ne contenant pas de temps d'interaction forte, ou faible de secteur S^- virtuelle relativement à $\mathcal{D}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$, les fonctionnelles $\mathcal{Q}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ et $\mathcal{L}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon} + 2c_0\, K\, \mathcal{Q}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ sont décroissantes.*

iii) *A tout temps $\tau_i \in]t^{i,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}, T[$ d'interaction faible dans S^-, virtuelle relativement à $\mathcal{D}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$, on a*

$$\Delta(\mathcal{L}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon} + 2c_0\, K\, \mathcal{Q}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon})\,(\tau_i) + (2c_0)^2\, K\, \mathcal{L}^-(\mathcal{E}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i, x_i))\ \Delta\mathcal{Q}(\tau_i) \leq 0\ .$$

iv) *A tout temps $\tau_i \in]t^{i,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}, T[\cap I_F$ on a $\Delta\mathcal{L}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i) = 0$ et*

$$\Delta\mathcal{Q}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i) + \mathcal{L}^-(\mathcal{E}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i, \chi(\tau_i)))\ \Delta\mathcal{T}^c(\tau_i) \leq 0 \ \text{ si }\ \tau_i \notin]t^{i,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}, t^{f,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}[\ ,$$

$$\Delta\mathcal{Q}^{-,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i) + \mathcal{L}^-(\mathcal{D}^{-,T}_{J_\varepsilon}(\tau_i))\ \Delta\mathcal{T}^{c,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i) \leq 0 \ \text{ si }\ \tau_i \in]t^{i,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}, t^{f,T,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}[\ .$$

LEMME 3.3.6. *Soient $j \in N^-_{nc}$, $T > 0$, $J_\varepsilon \subset \overline{S^-}$, de temps constant, $|J_\varepsilon| = \varepsilon$.*

i) *Soient $t \leq T$, $t' \in]t^{i,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}, t]$. Pour peu que l'on ait (3.3.4), alors la fonctionnelle de Glimm non causale, localisée, d'échelle ε*

$$\begin{aligned}[0,t] \ni s \mapsto \tilde{\mathcal{S}}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(s) := {} & \mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(s) + 2c_0 K\, \mathcal{Q}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(s) \\ & + \underline{C}_3\,(1 + (t-s))\varepsilon L' \varphi_{a,b}(t)\ (\mathcal{T}^c(s) + 2c_0\mathcal{Q}(s)) \\ & + 2c_0 K\ F_2'\, \delta_2'\, \mathcal{T}^{c,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(s)\end{aligned}$$

décroit sur $]t^{i,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}, t' + 0[$.

ii) *Soit $\underline{C}_4 \geq 1$. Il existe $\sigma_T \in]0, \frac{1}{\underline{C}_4 N(1+T)}]$ tel que sous les hypothèses*

$$\mathcal{L}^{-,\varepsilon}(t^{i,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}) \leq \varphi_{a,b}(t^{i,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon})\ L'\ \ ,\ \ \mathcal{T}^{c,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^{i,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}) \leq \underline{C}_4\ (1+t)\ \sigma_T\ \varepsilon\ \varphi_{a,b}(t^{f,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon})\ L'\ ,$$

on ait, pour tous $\delta_2' \in]0, \delta_2'(T, \sigma_T)]$, $t \in]0, T]$,

$$\tilde{\mathcal{S}}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^{i,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{N}\ L'\ \varphi_{a,b}(t)\ .$$

PREUVE. i) Soit $s \in]t^{i,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}, t']$. Lorsque $s \in]t^{f,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}, t]$, on a $\mathcal{T}^{c,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(s) = 0$, donc $\tilde{\mathcal{S}}$ n'est autre que $\mathcal{S}$ traitée dans le Lemme 3.3.4, et la preuve de ce lemme convient. Lorsque $s \le t^{f,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$, il suffit d'invoquer (3.2.3), (3.3.4) et le Lemme 3.3.5.

ii) Au temps $t^i \equiv t^{i,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$, la courbe $\mathcal{D}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i)$ est contenue dans le grand choc, donc on a $\mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i) \le \mathcal{T}^{c,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i)$. De plus les ondes intervenant dans $\mathcal{Q}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ sont extérieures au domaine $\mathcal{D}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$, d'où

$$\mathcal{Q}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i) \le F_2' \; \delta_2' \sup_{x \in S^-(t^i)} \mathcal{L}^-(\mathcal{E}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i, x)) \; .$$

Avec la croissance de $\varphi_{a,b}$ et les hypothèses injectées au temps initial t^i, dans lesquelles σ_T est à remplacer à ce stade par un σ à déterminer, on en déduit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i) \le{}& (1 + 2c_0 K F_2'\delta_2')\underline{C}_4(1+t) \; \sigma \; \varepsilon \quad L' \; \varphi_{a,b}(t^f) \\ &+ 2c_0 K F_2'\delta_2'\underline{C}_1(2+t) \; \varepsilon \quad L' \; \varphi_{a,b}(t^i) \\ &+ \underline{C}_3(1+t) \; \varepsilon \quad L' \; \varphi_{a,b}(t^i) \; \delta_2' \; (K F_2' + 4c_0\delta_2') \; .\end{aligned}$$

La condition $\delta_2' \le \delta_2'(T, \sigma)$ définie en (3.3.5) donne en particulier $\underline{C}_3 K F_2'\delta_2' \le \sigma$, ce qui conduit à une majoration où σ est factorisé

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i) \le \frac{\varepsilon}{N} \quad L' \; \varphi_{a,b}(t) \; \sigma \Bigg[& N\underline{C}_4(1+T)\left(1 + \frac{2c_0}{\underline{C}_3}\right) \\ &+ N\underline{C}_1(2+T)\frac{2c_0}{\underline{C}_3} + N(1+T)\left(1 + \frac{4c_0\sigma}{\underline{C}_3(K F_2')^2}\right)\Bigg] \; .\end{aligned}$$

Un choix de $\sigma \in]0, \frac{1}{\underline{C}_4 N(1+T)}]$, petit, garantit alors le résultat annoncé.

La constante $\underline{C}_4$ est dégagée ci-après dans la preuve du Théorème 3.1.1.

3.4. – Preuve du Théorème 3.1.1

On fixe $T > 0$ et, suivant ii) du Lemme 3.3.6, on choisit σ_T, ce qui détermine $\delta_2'(T, \sigma_T)$ et la fonction affine $\varphi_{a(T,\sigma_T),b(T,\sigma_T)}$ suivant (3.3.5). On note désormais σ et φ sans leurs indices.

Par récurrence continue sur $t \in]0, T]$, $t \notin \mathcal{I}$, on montre la propriété

$$(\mathcal{L}^\varepsilon)_t \qquad\qquad \mathcal{L}^\varepsilon(t) \le \varphi(t) \; L' \; ,$$

pour tout ν assez grand, $\nu \ge \nu_\varepsilon$.

En $t = 0+$, on a simplement $\mathcal{L}^\varepsilon(0+) = \max\; (\mathcal{L}^{-,\varepsilon}(0+) \;,\; \mathcal{L}^{+,\varepsilon}(0+))$, et comme $\varphi(0) \ge 1$, c'est une conséquence de (3.2.3). Pour l'obtenir au temps t, il suffit de montrer que pour tout intervalle $J_\varepsilon \subset S^{\pm}(t)$ de longueur ε, ou tout morceau $\tilde{J}_\varepsilon$ du grand choc (du type décrit en fin de Section 3.2), on a

$$(\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon)_t \qquad \begin{aligned} &\mathcal{L}^{\pm,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t) \leq \frac{\varepsilon}{N}\varphi(t)\ L' \ , \quad \text{pour tout} \quad j \in \{1, ..., N\}, \\ &\mathcal{T}^{\pm,j}_{\tilde{J}_\varepsilon}(t) := \sum_{\gamma_j^{\pm}/(\tilde{J}_\varepsilon \cap]0,t[)} |\gamma_j^{\pm}|_K \ \leq \sigma \ \varepsilon\varphi(t)\ L' \ , \quad \text{pour} \quad j \in N_c^{\pm}. \end{aligned}$$

Jusqu'au premier temps d'interaction $\tau_1 - 0$, par décroissance de $\mathcal{L}^{\pm,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$, si $\mathcal{D}^{\pm,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ ne rencontre pas χ on a, avec (3.3.6),

$$\mathcal{L}^{\pm,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t) \leq \mathcal{S}^{\pm,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(0+) \leq \sigma \ \varepsilon \ \varphi(t) \ L' \ , 0 < t < \tau_1 \ .$$

Si le domaine rencontre χ, alors $j \in N^{\pm}_{nc}$ et $\mathcal{D}^{\pm,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(0) = J^0 \cup J^\chi$, où J^0 est un intervalle de type espace au temps 0 et J^χ un morceau du grand choc χ. On a alors

$$\mathcal{L}^{\pm,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t) \leq \mathcal{L}^{\pm,j}(J^0) \ + \ \mathcal{T}^{\pm,j}_{J^\chi}(t)$$

avec $\mathcal{T}^{\pm,j}_{J^\chi}(t) = 0$, d'où encore

$$\mathcal{L}^{\pm,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t) \leq (\varepsilon^{-1} \ |J_\varepsilon| + 2\underline{a}t + 1)\varepsilon \ L' \leq 2(1 + \underline{a}t)\varepsilon \ L' \leq \frac{\varepsilon}{N} \ \ \varphi(t) \ L' \ .$$

Ainsi $(\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon)_t$ est vraie pour $0 < t < \tau_1$, donc aussi $(\mathcal{L}^\varepsilon)_t$.

On suppose maintenant que la propriété $(\mathcal{L}^\varepsilon)_t$ est vraie jusqu'à un temps $\tau_i - 0 < T$ et on la montre sur $]\tau_i \ , \min\ (\tau_{i+1}, T)[$. Soit $t \in]\tau_i \ , \min\ (\tau_{i+1}, T)[$.

Si $j \in N_c^-$ le Lemme 3.3.1 donne

$$\mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t) \leq \mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i + 0) \leq \mathcal{S}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i + 0) \ .$$

L'hypothèse de récurrence et le Lemme 3.3.4 donnent ensuite

$$\mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t) \leq \mathcal{S}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i + 0) \leq \mathcal{S}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i - 0) \leq \mathcal{S}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(0+) \leq \frac{\varepsilon}{N} \ L' \ \varphi(t) \ .$$

Par ailleurs,

$$\mathcal{T}^{-,j}_{\tilde{J}_\varepsilon}(t) = \mathcal{T}^{-,j}_{\tilde{J}_\varepsilon}(\tilde{\tau}_i + 0) \ ,$$

$\tilde{\tau}_i$ désignant le temps maximum inférieur à τ_i le long de $\tilde{J}_\varepsilon$. Le choix

$$\underline{\mu} := (|\underline{\lambda}_N^+ - \underline{p}| + |\underline{p} - \underline{\lambda}_1^-| + 2\underline{a}\eta_1)^{-1}$$

garantit que $\tilde{J}_\varepsilon \subset \mathcal{D}^{-,\tilde{\tau}_i,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tilde{\tau}_i)$ lorsque $J_\varepsilon =]\chi(\tilde{\tau}_i), \chi(\tilde{\tau}_i) + \varepsilon[$ et ainsi

$$\mathcal{T}^{-,j}_{\tilde{J}_\varepsilon}(\tilde{\tau}_i + 0) \leq \mathcal{L}^{-,\tau_i+0,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tilde{\tau}_i + 0) \leq \mathcal{S}^{-,\tau_i+0,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tilde{\tau}_i + 0) \ .$$

Avec l'hypothèse de récurrence, le Lemme 3.3.4 s'applique encore et donne

$$\mathcal{T}^{-,j}_{\tilde{J}_\varepsilon}(t) \leq \sigma \ \varepsilon \ L' \ \varphi(t) \ .$$

La même preuve dans le secteur S^+ montre que $(\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon)_t$ est vraie en ce qui concerne les indices causaux. Elle s'utilise aussi pour les indices non causaux si le domaine $\mathcal{D}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$ ne rencontre pas le grand choc.

Il ne reste à traiter que le cas où $j \in N^-_{nc}$ avec $t^f := t^{f,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon} > 0$. On estime d'abord $\mathcal{T}^{c,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i)$, défini en (3.3.1), pour $t^i := t^{i,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}$. On a

$$(3.3.7)\quad \mathcal{T}^{c,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i) \leq \left(\frac{t^f - t^i}{\underline{\mu}\varepsilon} + 1\right) \sup_{\tilde{J}_\varepsilon} \sum_{\pm,k\in N^c_\pm} \mathcal{T}^{\pm,k}_{\tilde{J}_\varepsilon}(t^f) \leq \underline{C}_4(1+t)\sigma\varepsilon\varphi(t^f)L',$$

avec

$$\underline{C}_4 := 1 + \frac{1+\underline{a}}{\underline{\mu}(\min(\underline{\lambda}^-_\kappa - \underline{p}, \underline{p} - \underline{\lambda}^+_\kappa) - F_1\eta_1)} \ ,$$

d'après les estimations causales obtenues jusqu'au temps t.

Ensuite, par décroissance, $\mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t) \leq \mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i+0)$ si $t \in]\tau_i, \min\,(\tau_{i+1}, T)[$ et deux cas se présentent.

Ou bien $t^i \geq \tau_i$ alors

$$\mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i+0) = \mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i) \leq \mathcal{T}^{c,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i) \leq \underline{C}_4\ (1+T)\sigma\ \varepsilon\ L'\ \varphi(t^f) \leq \frac{\varepsilon}{N}\ L'\ \varphi(t) \ .$$

Ou bien $t^i < \tau_i$, alors $\mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t) \leq \tilde{\mathcal{S}}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i+0)$ et le point i) du Lemme 3.3.6 entraîne, par l'hypothèse de récurrence,

$$\mathcal{L}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t) \leq \tilde{\mathcal{S}}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(\tau_i - 0) \leq \tilde{\mathcal{S}}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i) \ .$$

Enfin l'hypothèse de récurrence donne aussi dans ce cas $\mathcal{L}^{-,\varepsilon}(t^i) \leq \varphi(t^i)L'$; joint à (3.3.7), on en déduit par ii) du Lemme 3.3.6, que

$$\tilde{\mathcal{S}}^{-,t,j}_{J_\varepsilon,\varepsilon}(t^i) \leq \frac{\varepsilon}{N}\ L'\ \varphi(t)$$

ce qui termine la preuve du théorème.

3.5. – Preuve du Corollaire 3.1.2

L'égalité pour presque tout temps des traces unilatérales de $\tilde{u}^{i,\pm}_\varepsilon$ sur la droite non caractéristique $x = 0$ résulte de l'étude de Volpert [V], en utilisant quand nécessaire l'équation conservative. Ensuite, comme la variation est invariante dans la propagation des valeurs des traces le long des droites de vitesse $\underline{\lambda}^\pm_i$, (3.1.6) est une conséquence immédiate du résultat suivant:

Soit les courbes définies par

$$\chi_\varepsilon^{\pm}(t) = \pm \ \max \ (\pm\chi_\varepsilon(t) \ , \ 0) \ .$$

Soit $tr_0^- u_\varepsilon$ la trace à gauche de u_ε sur χ_ε^-, $tr_0^+ u_\varepsilon$ la trace à droite de u_ε sur χ_ε^+. On note encore

$$V_{\varepsilon,T}(tr_0^{\pm} u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \sup_{I_\varepsilon \subset [0,T]} V(\mathrm{tr}_0^{\pm} u_\varepsilon; I_\varepsilon) \ .$$

LEMME 3.5.1. *Sous les conditions du Théorème* 3.1.1 *pour tout* $T > 0$ *on a*

$$\sup_{\varepsilon \in]0,\eta_1]} \quad V_{\varepsilon,T}(tr_0^{\pm} u_\varepsilon) \leq C(T).$$

PREUVE. On la développe pour le signe $+$. On montre d'abord l'estimation pour les solutions du schéma, avec des notations analogues indexées de plus par ν. Pour un intervalle de temps $I = [t_1, t_2]$ on définit les domaines de détermination (au bord)

$$\mathcal{D}_I^+ = \{(t,x) \ ; \ t_1 < t < t_2, \ \chi_{\varepsilon,\nu}(t) < x < \chi_{\varepsilon,\nu}^+(t_2) + \underline{\lambda}(t_2 - t)\} \ ,$$

$$\mathcal{D}_I^{+,c} = \mathcal{D}_I^+ \cap \{x > \chi_{\varepsilon,\nu}^+(t)\} \qquad \mathcal{D}_I^{+,nc} = \mathcal{D}_I^+ \cap \{x < \chi_{\varepsilon,\nu}^+(t)\} \ .$$

Leur section à l'instant t est notée $\mathcal{D}_I^+(t)$, $\mathcal{D}_I^{+,c}(t)$, $\mathcal{D}_I^{+,nc}(t)$. Comme à la fin de la Section 3.2, mais sans le grand poids K inutile ici, pour un arc J de la courbe $\chi_{\varepsilon,\nu}^+$, ou bien de type espace, on définit les fonctionnelles causales

$$\mathcal{T}_+^c(J) = \sum_{\gamma_c^+/J} |\gamma_c^+|, \qquad \mathcal{L}^c(J) = \sum_{\gamma_c^+/J} |\gamma_c^+|$$

et aussi les non causales

$$\mathcal{T}_+^{nc}(J) = \sum_{\gamma_{nc}^+/J} |\gamma_{nc}^+|, \qquad \mathcal{L}^{nc}(J) = \sum_{\gamma_{nc}^+/J} |\gamma_{nc}^+|.$$

$\mathcal{T}_+^{nc}(J)$ contient en particulier les forces transmises ou réfléchies aux endroits où $\chi_{\varepsilon,\nu}$ et $\chi_{\varepsilon,\nu}^+$ coincident. Si J est paramétré par $t \in I$ on a

$$\mathcal{T}_+^c(J) \leq \mathcal{L}^c(\mathcal{D}_I^{+,c}(t_1)) + \ O(1) \ \Lambda(\mathcal{D}_I^+) \ ,$$

$$\mathcal{T}_+^{nc}(J) \leq \mathcal{T}^{+,nc}(I) + \mathcal{L}^{nc}(\mathcal{D}_I^{+,nc}(t_1)) + \ O(1) \ \Lambda(\mathcal{D}_I^+) \ ,$$

$\mathcal{T}^{+,nc}(I)$ désignant les forces non causales à droite de $\chi_{\varepsilon,\nu}(I)$ et $\Lambda(\mathcal{D}_I^+)$ la quantité d'interaction faible contenue dans $\mathcal{D}_I^+$. Cette dernière quantité se contrôle par le potentiel quadratique localisé dans $\mathcal{D}_I^+$

$$\mathcal{Q}_I(t) = \sum_{\substack{\alpha^+ \mathcal{A} \beta^+ \\ \alpha^+,\beta^+/J(t)}} |\alpha^+||\beta^+|$$

où $J(t) = \{(s, \chi_{\varepsilon,\nu}(s))\ ;\ t < s < t_2\} \cup \mathcal{D}_I^+(t)$, les ondes sont non causales le long de $\chi_{\varepsilon,\nu}$, et les interactions (faibles) se produisent à l'intérieur de $\mathcal{D}_I^+$. $\mathcal{Q}_I(t)$ n'est modifié qu'aux temps d'interaction faible dans $\mathcal{D}_I^+$; si deux ondes α^+ et β^+ interagissent au temps τ,

$$\mathcal{Q}_I(\tau+0) \leq \mathcal{Q}_I(\tau-0) - 1/2\ |\alpha^+||\beta^+|$$

entraîne par sommation sur tous ces temps, en notant $\mathcal{L}(J) = \mathcal{L}^c(J) + \mathcal{L}^{nc}(J)$,

$$\Lambda(\mathcal{D}_I^+) \leq O(1)\ \mathcal{Q}_I(t_1) \leq O(1)\ ((\mathcal{L}(\mathcal{D}_I^+(t_1)))^2 + (\mathcal{T}^{+,nc}(I))^2).$$

On en déduit que

$$\mathcal{T}_+(J) := \mathcal{T}_+^c(J) + \mathcal{T}_+^{nc}(J) \leq O(1)\ (\mathcal{L}(\mathcal{D}_I^+(t_1)) + \mathcal{T}^{+,nc}(I)).$$

Lorsque $J = J_\varepsilon$ est paramétré par $I = I_\varepsilon \subset [0, T]$ de longueur ε, la propriété $(\mathcal{L}_\varepsilon)_t$ de la Section 3.4 entraîne alors

$$\mathcal{T}_+(J_\varepsilon) \leq C(T)\ \varepsilon,$$

d'où l'estimation du lemme pour les approximations $u_{\varepsilon,\nu}$ de u_ε.

La même estimation pour u_ε vient ensuite du fait que, quitte à extraire une sous-suite, les traces à droite des $u_{\varepsilon,\nu}$ sur $\chi_{\varepsilon,\nu}^+$ convergent pour presque tout temps $t > 0$ vers la trace à droite de u_ε sur χ_ε^+. Cela se démontre comme dans [C-ST] pour la trace à droite sur χ_ε, en suivant la démarche de Glimm-Lax [G-L].

4. – L'asymptotique L^1 par mesures de Young

Ces mesures scalaires sont celles de suites obtenues par polarisation relativement à la solution non perturbée : $v_\varepsilon^\pm := \frac{u_\varepsilon^\pm - \underline{u}^\pm}{\varepsilon}$ est définie dans $\pm(x - \chi_\varepsilon(t)) > 0$ et sa trace $\mathrm{tr}_\varepsilon\, v_\varepsilon^\pm := \frac{\mathrm{tr}_\varepsilon\, u_\varepsilon^\pm - \underline{u}^\pm}{\varepsilon}$ sur $x = \chi_\varepsilon(t)$ est définie dans $t > 0$. On note alors

$$v_\varepsilon^{j,\pm} = v_\varepsilon^\pm \cdot \underline{\ell}_j^\pm \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}_\varepsilon\, v_\varepsilon^{j,\pm} = \mathrm{tr}_\varepsilon\, v_\varepsilon^\pm \cdot \underline{\ell}_j^\pm.$$

D'après (3.1.3) on dispose de l'estimation L^∞

$$S^\infty := \sup_{j,\pm}\ \sup_{\varepsilon\in]0,1]}\ \sup_{\pm(x-\chi_\varepsilon(t))>0} |v_\varepsilon^{j,\pm}(t,x)| < +\infty.$$

L'équation conservative vérifiée par $u_\varepsilon^\pm$ donne pour chaque j

$$(\partial_t + \underline{\lambda}_j^\pm \partial_x) v_\varepsilon^{j,\pm} = -\varepsilon(\partial_x r_\varepsilon^{j,\pm}) \quad \text{dans} \quad \pm(x - \chi_\varepsilon(t)) > 0$$

où $r_\varepsilon^{j,\pm}$ est de la forme

$$r_\varepsilon^{j,\pm} := \underline{\ell}_j^\pm \cdot (g_k^\pm(u_\varepsilon^\pm)(v_\varepsilon^\pm, v_\varepsilon^\pm))_{1\le k\le N}$$

les $g_k^\pm$ étant régulières. Ce sont des fonctions de (t, x) localement BV, qui possèdent des traces bilatérales sur les droites de temps constant, $r_\varepsilon^{\pm,j}(t,\cdot)$, traces qui vérifient d'après l'estimation L^∞ et (3.1.4)

$$S^V := \sup_{j,\pm}\ \sup_{\varepsilon\in]0,1]}\ \sup_{t>0}\ |\varepsilon\partial_x(r_\varepsilon^{j,\pm}(t,\cdot))|_{\mathcal{M}(\pm(x-\chi_\varepsilon(t))>0)} < +\infty\ .$$

On fixe un temps $T > 0$, arbitraire, et dans la suite de cette section, on ne note pas la dépendance en T des constantes. D'après l'estimation $\varepsilon-BV$ (3.1.5) du Théorème 3.1.1, pour une telle constante S^{Vn}, on a

$$V_\varepsilon(\varepsilon r_\varepsilon^{j,\pm}(t,\cdot)) \le S^{Vn}, \tag{4.1}$$

les données de Cauchy $v_{0,\varepsilon}^\pm$ pouvant être supposées vérifier (3.1.2).

On prolonge χ_ε en $\tilde\chi_\varepsilon$ par 0 pour $t < 0$ et les $\mathrm{tr}_\varepsilon\, v_\varepsilon^{j,\pm}$ en $\tilde{\mathrm{tr}}_\varepsilon v_\varepsilon^{j,\pm}$ par $(\mathrm{tr}_\varepsilon\, v_\varepsilon^{j,\pm})(0+)$ pour $t < 0$. Ensuite on prolonge $v_\varepsilon^{j,\pm}$ dans $\mp(x-\chi_\varepsilon(t)) > 0, t \ge 0$, par $\tilde{\mathrm{tr}}_\varepsilon v_\varepsilon^{j,\pm}(s)$ le long de la droite de vitesse $\underline{\lambda}_j^\pm$ passant par $(s, \tilde\chi_\varepsilon(s))$. On obtient une fonction $\tilde v_\varepsilon^{j,\pm}$ qui vérifie

$$(\partial_t + \underline{\lambda}_j^\pm\partial_x)\tilde v_\varepsilon^{j,\pm} = -\varepsilon\partial_x \check r_\varepsilon^{j,\pm} \quad \text{dans } t > 0,$$

où $\check r_\varepsilon^{j,\pm}$ est le prolongement de $r_\varepsilon^{j,\pm}$ par sa trace unilatérale sur $x = \chi_\varepsilon(t)$, à t fixé, dans $\mp(x-\chi_\varepsilon(t)) > 0$. D'après (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6), ces prolongements conservent les propriétés

$$\begin{cases} |\tilde v_\varepsilon^{j,\pm}(t,x)| < S^\infty\ , \\ |\varepsilon\partial_x(\check r_\varepsilon^{j,\pm}(t,\cdot))|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} \le S^V \qquad V_\varepsilon(\varepsilon\check r_\varepsilon^{j,\pm}(t,\cdot)) \le S^{Vn}. \end{cases} \tag{4.2}$$

L'approche développée dans Cheverry [Ch] fait appel aux notations suivantes:

$(\rho_\delta)_{\delta>0}$ est une famille régularisante classique de fonctions C^∞, définie sur $\mathbb{R}^n$ en $\rho_\delta(\cdot) = \delta^{-n}\rho(\delta^{-1}\ \cdot)$, par une fonction ρ positive, radiale, supportée près de 0 et d'intégrale 1. On utilisera la même notation quelque soit la dimension n pour laquelle elle est utilisée.

$(\eta_\delta)_{\delta>0}$ est une famille de fonctions positives strictement convexes obtenues par régularisation de $\eta(\lambda) = |\lambda|$. Chaque $\eta_\delta(\lambda) = (\eta * \rho_\delta)(\lambda)$ jouera un rôle d'entropie; elle vérifie

$$\forall\delta \in]0,1], \quad |\eta_\delta - \eta|_{L^\infty} \le \delta\ ,\ |\partial_\lambda\eta_\delta|_{L^\infty} \le 1.$$

$\sigma_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$, où $\mu > 0$ est petit, est une composante du profil obtenu par résolution du système des équations de modulation partiellement visqueuses, pour des données de Cauchy régularisées; ce profil est décrit à la Section 5.3. Pour $t \leq T$, il a un support en x contenu dans un compact fixe et est lipschitzien dans $S_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}} \times \mathbb{T}^{m_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}}$. Il est estimé uniformément en

$$(4.3) \qquad P^\infty := \sup_{j,\pm,\overset{\pm}{\circ}} \ \sup_{\mu \in]0,1]} |\sigma_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}}|_{L^\infty(S_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}} \times \mathbb{T}^{m_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}})} < +\infty$$

$$P^V := \sup_{j,\pm,\overset{\pm}{\circ}} \ \sup_{\mu \in]0,1]} \ \sup_{(t,x) \in S_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}} |\nabla_{t,x,\vec{y}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}} \sigma_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,x,\cdot)|_{L^1(\mathbb{T}^{m_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}})} < +\infty .$$

Sa restriction à $\vec{y}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}} = \dfrac{\vec{\psi}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,x)}{\varepsilon}$ est notée $\sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,x)$. Les profils réguliers $\sigma_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ convergent vers $\sigma_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ pour tout (t,x) dans $L^1(\mathbb{T}^{m_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}})$; de plus, leurs traces unilatérales $\mathrm{tr}^\pm \sigma_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ sur $x = 0$, convergent vers $\mathrm{tr}^\pm \sigma_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ pour tout t dans $L^1(\mathbb{T}^{m_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}})$.

On note $\overset{\circ}{S}$, $\overset{\circ}{\mathcal{A}}$, l'intérieur des secteurs et des angles et pour $t \in [0,T]$, $S_t = S \cap (]0,t[\times\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A} \cap (]0,t[\times\mathbb{R})$ les domaines tronqués.

LEMME 4.1. *Pour $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mu > 0$, $t \in [0,T]$, la formule de Stokes s'interprète pour la fonction positive*

$$\eta_\delta((\tilde{v}_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\overset{\pm}{\circ}})(t,x))$$

suivant l'indice j selon:

$$\text{si} \quad j \in N_{nc}^\pm, \quad \int_{S_\pm^{j,\pm}(t)} \eta_\delta((\tilde{v}_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\pm})(t,x))\,dx$$
$$= \iint_{\overset{\circ}{S}{}_{\pm,t}^{j,\pm}} (\partial_t + \underline{\lambda}_j^\pm \partial_x)(\eta_\delta((\tilde{v}_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\pm})(s,x)))\,ds\,dx$$
$$+ \int_{S_\pm^{j,\pm}(0)} \eta_\delta((\tilde{v}_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\pm})(0,x))\,dx$$

$$\text{si} \quad j \in N_c^\pm, \qquad \mp \underline{\lambda}_j^\pm \int_{(0,t)} \eta_\delta(\mathrm{tr}^\pm(\tilde{v}_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\pm})(s))\,ds$$
$$+ \int_{S_\pm^{j,\pm}(t)} \eta_\delta((\tilde{v}_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\pm})(t,x))\,dx$$
$$= \iint_{\overset{\circ}{S}{}_{\pm,t}^{j,\pm}} (\partial_t + \underline{\lambda}_j^\pm \partial_x)(\eta_\delta((\tilde{v}_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\pm})(s,x)))\,ds\,dx$$
$$+ \int_{S_\pm^{j,\pm}(0)} \eta_\delta((\tilde{v}_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\pm})(0,x))\,dx$$

$$\text{si} \quad j \in N_{nc}^{\pm}, \qquad \int_{S_{\pm}^{j,\circ}(t)} \eta_\delta((\tilde v_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\circ})(t,x))\,dx$$

$$= \iint_{\overset{\circ}{S}{}^{j,\circ}_{\pm,t}} (\partial_t + \underline{\lambda}_j^{\pm}\partial_x)(\eta_\delta((\tilde v_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\circ})(s,x)))\,ds\,dx$$

$$\pm\ \underline{\lambda}_j^{\pm} \int_{(0,t)} \eta_\delta(\mathrm{tr}^{\pm}(\tilde v_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\circ})(s))\,ds$$

Ce lemme appelle l'étude de la dynamique en $t \in [0,T]$ des quantités paramétrées par $(\delta,\mu) \in]0,1]^2$, $\varepsilon \in]0,1]$,

$$\mathcal{G}_{\pm,\delta,\mu,\varepsilon}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t) := \int_{S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t)} \eta_\delta((\tilde v_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\overset{\pm}{\circ}})(t,x))\ dx$$

via les échanges au niveau du bord $x = 0$, qui font intervenir

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\pm,\delta,\mu,\varepsilon}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t) := \int_{(0,t)} \eta_\delta(\mathrm{tr}^{\pm}(\tilde v_\varepsilon^{j,\pm} - \sigma_{\pm,\mu,\varepsilon}^{j,\overset{\pm}{\circ}})(s))\ ds.$$

PROPOSITION 4.2 (asymptotique des termes de bord du Lemme 4.1). *Il existe une suite $(\varepsilon(n))_n$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, les passages à la limite suivants aient un sens*

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\mu\to 0}\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_{\pm,\delta,\mu,\varepsilon(n)}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t) := \mathcal{G}_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\mu\to 0}\lim_{n\to\infty} \tilde{\mathcal{G}}_{\pm,\delta,\mu,\varepsilon(n)}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t) := \tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t)\ .$$

De plus l'application $\mathcal{G}_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ est lipschitzienne sur $[0,T]$.

PREUVE. On la développe dans le cas le plus significatif $j \in N_{nc}^{+}$ et le secteur $S_{+}^{j,\circ}$. Elle repose essentiellement sur la définition des mesures de Young bi-échelle relatives aux phases en présence. On en rappelle la présentation

LEMME 4.3 ([E-S], [J-M-R2]). i) *La famille bornée des mesures boréliennes sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{m_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}} \times]0,T[$, $\left(\delta_{\lambda = \mathrm{tr}^{\pm}\,\tilde v_\varepsilon^{j,\pm}(t)} \otimes \delta_{\vec y_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}} = \frac{\vec\psi_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,0)}{\varepsilon}} \otimes dt\right)_\varepsilon$, *contient une suite indexée par $\varepsilon(n)$, $\varepsilon(n) \to 0$ quand $n \to \infty$, qui converge vers une mesure $\tilde\tau_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$. Cette mesure se désintègre en*

$$\tilde\tau_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}} = \tilde\tau_{\pm,t,\vec y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(d\lambda) \otimes d\vec y_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}} \otimes dt$$

$\tilde\tau_{\pm,t,\vec y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ étant pour presque tout $(t, \vec y_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}})$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ supportée dans $[-S^\infty, S^\infty]$.

ii) *pour tout* $t > 0$*, de toute suite* $(\varepsilon(n))_n$ *convergeant vers* 0*, on peut extraire une suite* $(\varepsilon(n; t))_n$ *(qui dépend de* t*), telle que la suite des mesures boréliennes sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{m^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}} \times \overset{\circ}{S}{}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}(t)$, $\left(\delta_{\lambda = \tilde{v}^{j,\pm}_{\varepsilon(n;t)}(t,x)} \otimes \delta_{\vec{y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm} = \frac{\vec{\psi}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}(t,x)}{\varepsilon(n;t)}} \otimes dx \right)_n$ *converge vers une mesure* $\nu^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,t}$*. Cette mesure se désintègre en*

$$\nu^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,t} = \nu^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,t,x,\vec{y}}(d\lambda) \otimes d\vec{y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm} \otimes dx$$

$\nu^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,t,x,\vec{y}}$ *étant pour tout* t *et pour presque tout* $(x, \vec{y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm})$ *une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}$ *supportée dans* $[-S^\infty, S^\infty]$.

La preuve de la proposition s'articule alors en trois étapes:

i) Construction de la fonction $\tilde{\mathcal{G}}^{j,\circ}_{+}$ sur $[0, T]$ et de $\mathcal{G}^{j,\circ}_{+}$ sur $[0, T] \cap \mathbf{Q}$. D'après i) du Lemme 4.3, pour tout $t \in [0, T]$, pour $(\delta, \mu) \in]0, 1]^2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \tilde{\mathcal{G}}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon(n)}(t)\\ &\quad = \int_{]0,T[\times\mathbb{T}^{m^{j,\circ}_{+}}} d\vec{y}^{j,\circ}_{+} \; 1_{]0,t[}(s)ds \int_{\mathbb{R}} \eta_\delta((\lambda - \operatorname{tr}^+ \sigma^{j,\circ}_{+,\mu})(s, \vec{y}^{j,\circ}_{+})) \; \tilde{\tau}^{j,\circ}_{+,s,\vec{y}} \; (d\lambda).\end{aligned}$$

La convergence dans L^1 de $\operatorname{tr}^+ \sigma^{j,\circ}_{+,\mu}$ vers $\operatorname{tr}^+ \sigma^{j,\circ}_{+}$ assure alors l'existence des limites successives

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0}\lim_{\mu\to 0}\lim_{n\to\infty} \tilde{\mathcal{G}}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon(n)}(t)\\ &\quad := \tilde{\mathcal{G}}^{j,\circ}_{+}(t) := \int_0^t ds \int_{\mathbb{T}^{m^{j,\circ}_{+}}} d\vec{y}^{j,\circ}_{+} \int_{\mathbb{R}} |\lambda - \operatorname{tr}^+ \sigma^{j,\circ}_{+}(s, \vec{y}^{j,\circ}_{+})| \; \tilde{\tau}^{j,\circ}_{+,s,\vec{y}} \; (d\lambda)\end{aligned}$$

De même, ii) de ce lemme, suivi d'un procédé diagonal, conduit à l'existence d'une sous-suite $(\varepsilon_{\varphi(n)})_n$, telle qu'au temps T et en chaque temps t rationnel de $[0, T]$, la suite des mesures de Young bi-échelle $\left(\delta_{\lambda = \tilde{v}^{j,+}_{\varepsilon_{\varphi(n)}}(t,x)} \otimes \delta_{\vec{y}^{j,\circ}_{+} = \frac{\vec{\psi}^{j,\circ}_{+}(t,x)}{\varepsilon_{\varphi(n)}}} \otimes dx \right)_n$ converge vers $\nu^{j,\circ}_{+,t}$. De la même façon, on obtient pour ces temps,

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0}\lim_{\mu\to 0}\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon_{\varphi(n)}}(t)\\ &\quad := \mathcal{G}^{j,\circ}_{+}(t) := \int_{\mathbb{T}^{m^{j,\circ}_{+}}} d\vec{y}^{j,\circ}_{+} \int_{S^{j,\circ}_{+}(t)} dx \int_{\mathbb{R}} |\lambda - \sigma^{j,\circ}_{+}(t, x, \vec{y}^{j,\circ}_{+})| \; \nu^{j,\circ}_{+,t,x,\vec{y}} \; (d\lambda).\end{aligned}$$

ii) Estimations uniformes en $\delta > 0$ et $\mu > 0$ de l'asymptotique en ε de la quantité, où les temps $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ sont quelconque,

$$\mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon}(t_2) - \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon}(t_1).$$

On la décompose en $g^2_{\delta,\mu,\varepsilon} - g^1_{\delta,\mu,\varepsilon} + r_{\delta,\mu,\varepsilon}$ suivant

$$g^k_{\delta,\mu,\varepsilon} := \int_{\underline{\lambda}_j^+(t_k - t_1)}^{\underline{\lambda}_j^+ t_k} \eta_\delta \left(\left(\tilde{v}^{j,+}_\varepsilon(t_k, x) \; - \sigma^{j,\circ}_{+,\mu} \left(t_k, x, \frac{\vec{\psi}^{j,\circ}_+(t_k, x)}{\varepsilon} \right) \right) \right) \; dx$$

$$r_{\delta,\mu,\varepsilon} := \int_0^{\underline{\lambda}_j^+(t_2 - t_1)} \eta_\delta \left(\left(\tilde{v}^{j,+}_\varepsilon(t_2, x) - \sigma^{j,\circ}_{+,\mu} \left(t_2, x, \frac{\vec{\psi}^{j,\circ}_+(t_2, x)}{\varepsilon} \right) \right) \right) \; dx.$$

Ce dernier reste s'estime immédiatement en

$$r_{\delta,\mu,\varepsilon} \leq \underline{\lambda}_j^+ \; (\delta + S^\infty + P^\infty) \; |t_2 - t_1|$$

Ensuite, dans $g^2_{\delta,\mu,\varepsilon}$, le changement de variables $x = z + \underline{\lambda}_j^+(t_2 - t_1)$ donne

$$\begin{aligned} g^2_{\delta,\mu,\varepsilon} = \int_0^{\underline{\lambda}_j^+ t_1} \eta_\delta \Bigg(\Bigg(& \tilde{v}^{j,+}_\varepsilon(t_2, z + \underline{\lambda}_j^+(t_2 - t_1)) \\ & - \sigma^{j,\circ}_{+,\mu} \left(t_2, z + \underline{\lambda}_j^+(t_2 - t_1), \frac{\vec{\psi}^{j,\circ}_+(t_1, z)}{\varepsilon} \right) \Bigg) \Bigg) \; dz \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |g^2_{\delta,\mu,\varepsilon} - g^1_{\delta,\mu,\varepsilon}| \leq & \int_{\mathbb{R}} |\tilde{v}^{j,+}_\varepsilon(t_2, x + \underline{\lambda}_j^+(t_2 - t_1)) - \tilde{v}^{j,+}_\varepsilon(t_1, x)| \; dx \\ & + \int_{S^{j,\circ}_+(t_1)} \Bigg| \sigma^{j,\circ}_{+,\mu} \left(t_2, x + \underline{\lambda}_j^+(t_2 - t_1), \frac{\vec{\psi}^{j,\circ}_+(t_1, x)}{\varepsilon} \right) \\ & - \sigma^{j,\circ}_{+,\mu} \left(t_1, x, \frac{\vec{\psi}^{j,\circ}_+(t_1, x)}{\varepsilon} \right) \Bigg| \; dx := h^1_\varepsilon + h^2_{\mu,\varepsilon} \, . \end{aligned}$$

D'après (4.2), la mesure image $\theta^*_t(\varepsilon\partial_x(\check{r}^{j,+}_\varepsilon(t,\cdot)))$, image de $\varepsilon\partial_x(\check{r}^{j,+}_\varepsilon(t,\cdot))$ par la translation $\theta_t(x) = x + \underline{\lambda}_j^+(t - t_1)$ a une variation totale bornée par S^V d'où

$$h^1_\varepsilon \leq \int_{t_1}^{t_2} |\theta^*_\tau(\varepsilon\partial_x(\check{r}^{j,+}_\varepsilon(\tau,\cdot))|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} d\tau \leq S^V |t_2 - t_1|.$$

Par ailleurs, la condition $(N.S)_b$ de non stationarité des phases, entraîne d'après [J-M-R2, Lemme 4.1.3], que lorsque ε tend vers 0, $h^2_{\mu,\varepsilon}$ converge vers

$$\int_{\mathbb{T}^{m^{j,\circ}_+}} \int_{S^{j,\circ}_+(t_1)} |\sigma^{j,\circ}_{+,\mu}(t_2, x+\underline{\lambda}^+_j(t_2-t_1), \vec{y}^{j,\circ}_+) - \sigma^{j,\circ}_{+,\mu}(t_1, x, \vec{y}^{j,\circ}_+)| \; dx \; d\vec{y}^{j,\circ}_+$$
$$= \int_{S^{j,\circ}_+(t_1)} \int_0^{t_2-t_2} \left(\int_{\mathbb{T}^{m^{j,\circ}_+}} ((\partial_t + \underline{\lambda}^+_j \partial_x)\sigma^{j,\circ}_{+,\mu})(t_1+s, x+\underline{\lambda}^+_j s, \vec{y}^{j,\circ}_+) d\vec{y}^{j,\circ}_+ \right) dsdx.$$

Avec (4.3), on en déduit que pour tout $\mu \in]0,1]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h^2_{\mu,\varepsilon} \le (1+\underline{\lambda}^+_j) \; P^V |t_2 - t_1| \; .$$

Notant

$$K := \underline{\lambda}^+_j \; (\delta + S^\infty + P^\infty + \; P^V) + S^V + P^V$$

on obtient ainsi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon}(t_2) - \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon}(t_1)| \le K|t_2 - t_1|. \tag{4.4}$$

iii) Prolongement de $\mathcal{G}^{j,\circ}_+$ à $[0,T]$ et identification de ses valeurs aux temps irrationnels.

Aux temps rationnels, la fonction $\mathcal{G}^{j,\circ}_+$ hérite de l'estimation lipschitzienne (4.4)

$$|\mathcal{G}^{j,\circ}_+(t_2) - \mathcal{G}^{j,\circ}_+(t_1)| \le K \;\; |t_2 - t_1|$$

On peut donc la prolonger à $[0,T]$ en une application lipschitzienne qu'on note provisoirement $G^{j,\circ}_+$. Il s'agit maintenant de montrer que pour tout $t \in [0,T]$, $\lim_{\delta\to 0}\lim_{\mu\to 0}\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon_{\varphi(n)}}(t) := \mathcal{G}^{j,\circ}_+(t)$ existe et égale $G^{j,\circ}_+(t)$. D'abord pour tous $\delta, \mu > 0$, $s \in [0,T]$, la suite entière $(\mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon_{\varphi(n)}}(s))_n)_n$ converge. En effet, comme elle est bornée, il suffit de montrer que si $\ell^1_{\delta,\mu,s} \neq \ell^2_{\delta,\mu,s}$ sont deux valeurs d'adhérence, elles sont égales. Soient $\varphi^k_{\delta,\mu,s}$ des applications croissantes réalisant

$$\ell^k_{\delta,\mu,s} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon_{\varphi(\varphi^k_{\delta,\mu,s}(n))}}(s)$$

Pour tout $t \in \mathbf{Q}$, la limite de $(\mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon_{\varphi(n)}}(t))_n$ est définie par une mesure de Young; on la note $\mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu}(t)$. A la limite $n \to \infty$, (4.4) donne alors

$$|\ell^1_{\delta,\mu,s} - \ell^2_{\delta,\mu,s}| \le \sum_{k\in\{1,2\}} |\ell^k_{\delta,\mu,s} - \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu}(t)| \le 2K|t-s|$$

d'où le résultat en faisant tendre t vers s.

On peut ainsi définir, pour tout $s \in [0, T]$,

$$\mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu}(s) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu,\varepsilon_{\varphi(n)}}(s)$$

et utiliser la propriété

$$|\mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu}(s_1) - \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu}(s_2)| \leq K|s_1 - s_2| \ . \tag{4.5}$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite en μ puis en δ, à s fixé. Soit φ' une application croissante telle que la suite $(\tilde{v}^{j,+}_{\varepsilon_{\varphi(\varphi'(n))}}(s,\cdot))_n$ définisse une mesure de Young bi-échelle relative à $\vec{\psi}^{j,\circ}_{+}$

$$m = m_{x,\vec{y}}(d\lambda) \otimes d\vec{y}^{j,\circ}_{+} \otimes dx.$$

Pour tous $\delta, \mu \in]0,1]$, on a alors

$$\mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu}(s) = \int_{\mathbb{T}^{m^{j,\circ}_{+}}} d\vec{y}^{j,\circ}_{+} \ \int_{S^{j,\circ}_{+}(t)} dx \ \int_{\mathbb{R}} \eta_\delta((\lambda - \sigma^{j,\circ}_{+,\mu})(t, x, \vec{y}^{j,\circ}_{+})) \ m_{x,\vec{y}} \ (d\lambda)$$

où la mesure $m_{x,\vec{y}}$ est de probabilité. Avec la majoration

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\mathbb{R}} \big(\eta_\delta((\lambda - \sigma^{j,\circ}_{+,\mu})(s, x, \vec{y}^{j,\circ}_{+})) - |(\lambda - \sigma^{j,\circ}_{+})(s, x, \vec{y}^{j,\circ}_{+})|\big) \ m_{x,\vec{y}} \ (d\lambda) \right| \\ &\quad \leq \delta + |(\sigma^{j,\circ}_{+,\mu} - \sigma^{j,\circ}_{+})(s, x, \vec{y}^{j,\circ}_{+})|\end{aligned}$$

cela entraîne l'existence des limites successives

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0} \ \lim_{\mu\to 0} \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu}(s) \\ &\quad = \int_{\mathbb{T}^{m^{j,\circ}_{+}}} d\vec{y}^{j,\circ}_{+} \ \int_{S^{j,\circ}_{+}(t)} dx \ \int_{\mathbb{R}} |(\lambda - \sigma^{j,\circ}_{+})(s, x, \vec{y}^{j,\circ}_{+})| \ m_{x,\vec{y}} \ (d\lambda) := \ell\end{aligned}$$

Enfin (4.5) donne, pour tout $t \in \mathbf{Q}$,

$$|G^{j,\circ}_{+}(s) - \ell| \leq |G^{j,\circ}_{+}(s) - G^{j,\circ}_{+}(t)| + \lim_{\delta\to 0} \ \lim_{\mu\to 0} |\mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu}(t) - \mathcal{G}^{j,\circ}_{+,\delta,\mu}(s)| \leq 2 \ K \ |t - s|$$

d'où la valeur de ℓ.

PROPOSITION 4.4 (asymptotique des termes d'intérieur du Lemme 4.1).

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\mu\to 0}\lim_{n\to\infty}\iint_{\overset{\circ}{S}{}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,t}}(\partial_t+\underline{\lambda}_j^{\pm}\partial_x)(\eta_\delta((\tilde{v}^{j,\pm}_{\varepsilon(n)}-\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu,\varepsilon(n)})(s,x)))\,ds\,dx$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{N}\int_0^t \mathcal{G}^{k,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}(s)\,ds\,.$$

PREUVE. Le travail de [Ch], prérequis dans cette preuve, concerne le problème de Cauchy dans le cadre monophase; il décrit les contributions apportées dans l'analyse asymptotique par les différents termes de couplage non linéaire. Ses résultats sont utilisables ici dans chaque angle $\mathcal{A}^{i,\pm}$ en prenant en compte l'aspect multiphase dont la mise en oeuvre est développée dans la Section 5.

On résume le cas du secteur $\overset{\circ}{S}{}^{j,\circ}_{+,T}$, $j\in N^{nc}_{+}$. La continuité de $\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu,\varepsilon}$ sur les droites $x=\underline{\lambda}_j^{\pm}t$ traversant $S^{j,\circ}_{+}$, $j\in N^{nc}_{+}$, ainsi que (4.1), assurent que l'intégrale sur le secteur ouvert $\overset{\circ}{S}{}^{j,\circ}_{+,T}$ est à $o(\varepsilon)$ près la somme des intégrales sur l'intérieur $\overset{\circ}{\mathcal{A}}{}^{i,+}_{T}$ de chacun des angles qui le partitionnent. L'angle le plus relevant est $\overset{\circ}{\mathcal{A}}{}^{\kappa,+}_{T}$, qui borde $x=0$. L'analyse non linéaire asymptotique des termes de couplage neutre, de couplage sur la vitesse, de Bürgers et des termes d'erreur, développée dans [Ch, Section II.4], s'applique telle quelle au domaine $\overset{\circ}{\mathcal{A}}{}^{\kappa,+}_{T}$ (et elle suffit pour $N\leq 2$). Une nouvelle difficulté, liée au contexte multiphase, apparait en ce qui concerne les expressions résonantes ($N\geq 3$). L'argument manquant fait l'objet de la Proposition 5.2.4 ci-après, (où les hypothèses $(F_q\text{–}R_qE)$, $(f\text{–}T_q)$, $(N.S)_0$ et $(N.S)_b$ interviennent; cette proposition élargit le Lemme II.4.1 de [Ch]). Exploitées conjointement, ces informations conduisent à l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\iint_{\overset{\circ}{\mathcal{A}}{}^{\kappa,+}_{T}}(\partial_t+\underline{\lambda}_j^{+}\partial_x)(\eta_\delta((\tilde{v}^{j,+}_{\varepsilon(n)}-\sigma^{j,\circ}_{+,\mu,\varepsilon(n)})(t,x)))\;dt\;dx\\
&\leq -\iiint_{\overset{\circ}{\mathcal{A}}{}^{\kappa,+}_{T}\times\mathbb{T}^{m^{j,\circ}_{+}}}\langle\Upsilon^{j,\circ}_{+,t,x,\vec{y}}(d\lambda),\,\eta'_\delta(\lambda-\sigma^{j,\circ}_{+,\mu,\varepsilon(n)})\rangle\mathcal{M}^{\kappa,+}_{j}\\
&\quad\times(\sigma_{+,\mu})(t,x,\vec{y}^{\,j,\circ}_{+})dt\;dx\;d\vec{y}^{\,j,\circ}_{+}\\
&\quad+C\;\delta\;\iint_{\overset{\circ}{\mathcal{A}}{}^{\kappa,+}_{T}}\|\partial_{\vec{y}}\sigma^{j,\circ}_{+,\mu,\varepsilon(n)}(t,x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{T}^{m^{j,\circ}})}\;dt\;dx\\
&\quad+C\;\sum_{k=1}^{N}\;\lim_{n\to\infty}\iint_{\overset{\circ}{\mathcal{A}}{}^{\kappa,+}_{T}\cap\overset{\circ}{S}{}^{k,\overset{+}{\circ}}_{+,T}}\eta_\delta((\tilde{v}^{k,+}_{\varepsilon(n)}-\sigma^{k,\overset{+}{\circ}}_{+,\mu,\varepsilon(n)})(t,x))\;dt\;dx
\end{aligned}$$

On a noté $\Upsilon^{j,\circ}_{+}$ la mesure de Young bi-échelle 2d associée à la suite $(\tilde{v}^{j,+}_{\varepsilon(n)})_n$ pour les phases $\vec{\psi}^{\,j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}$. Les passages à la limite $\mu\to 0$ puis $\delta\to 0$ relèvent ensuite des arguments de [Ch, Lemme III.2.2] (ou la condition d'entropie sur les profils intervient): les deux premières expressions intégrales du membre de droite de l'inégalité disparaissent, ce qui justifie la Proposition 4.4.

Proposition 4.5 (relais causal vers non causal sur le bord).
i) Pour presque tout temps, les $\mathrm{tr}_\varepsilon^{\pm}\, v_\varepsilon^{j,\pm}$ *et* $\varepsilon^{-1} p_\varepsilon$ *vérifient*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{tr}_\varepsilon^{-}\, v_\varepsilon^{nc,-}(t) \\ \varepsilon^{-1} p_\varepsilon(t) \\ \mathrm{tr}_\varepsilon^{+}\, v_\varepsilon^{nc,+}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{C}}^{-} \\ \underline{\mathcal{D}} \\ \underline{\mathcal{C}}^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{tr}_\varepsilon^{-}\, v_\varepsilon^{c,-}(t) \\ \mathrm{tr}_\varepsilon^{+}\, v_\varepsilon^{c,+}(t) \end{pmatrix} + O(\varepsilon)$$

où $O(\varepsilon)$ *est uniforme en* t.
ii) Il existe une constante $C > 0$*, qui dépend de* T*, telle que pour* $j \in N_{nc}^{-}$ *ou* $j \in N_{nc}^{+}$ *on ait pour tout* $t \in [0, T]$,

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{j,\circ}(t) \leq C \left(\sum_{k \in N_c^{-}} \tilde{\mathcal{G}}_{-}^{k,-}(t) + \sum_{k \in N_c^{+}} \tilde{\mathcal{G}}_{+}^{k,+}(t) \right) . \tag{4.6}$$

Preuve i) La relation de Rankine Hugoniot s'exprime pour presque tout t en

$$\chi_\varepsilon'(t)\ (\mathrm{tr}_\varepsilon^{+}\, u_\varepsilon(t) - \mathrm{tr}_\varepsilon^{-}\, u_\varepsilon(t)) = f(\mathrm{tr}_\varepsilon^{+}\, u_\varepsilon(t)) - f(\mathrm{tr}_\varepsilon^{-}\, u_\varepsilon(t)) .$$

Avec les estimations L^∞, les développements de Taylor du flux aux points $\underline{u}^{\pm}$ donnent, par le même calcul différentiel que dans [C-ST], la formule annoncée. Elle entraîne en particulier que la limite faible-$\star$ de la famille $(\frac{p_\varepsilon}{\varepsilon})_\varepsilon$ n'est autre que $\langle q \rangle$, ce qui donne pour tout temps t,

$$\frac{\chi_\varepsilon(t)}{\varepsilon} = \xi(t) + o(1). \tag{4.7}$$

ii) On rédige la preuve pour le temps T; $\varepsilon > 0$ et j étant fixés, l'équation

$$\tilde{\chi}_\varepsilon(s_\varepsilon^{j,\pm}(t)) = \underline{\lambda}_j^{\pm}(s_\varepsilon^{j,\pm}(t) - t)$$

définit un changement de variables lipschitzien $s_\varepsilon^{j,\pm}$ qui vérifie

$$\sup_{t \in [0,T]} |s_\varepsilon^{j,\pm}(t) - t| = O(\varepsilon) .$$

Pour $\delta > 0$, $\mu > 0$, $j \in N_{nc}^{+}$ par exemple, l'asymptotique quand ε tend vers zéro, s'obtient à l'aide des décompositions suivantes:

$$\int_0^T \eta_\delta \left(\mathrm{tr}^{+}\, \tilde{v}_\varepsilon^{j,+}(t) - \sigma_{+,\mu}^{j,\circ} \left(t, 0, \frac{\vec{\psi}_{+}^{j,\circ}(t,0)}{\varepsilon} \right) \right) dt \leq \delta T + (1)_\varepsilon + (2)_\varepsilon + (3)_\varepsilon ,$$

$$(1)_\varepsilon := \int_0^T |\, \mathrm{tr}^{+}\, \tilde{v}_\varepsilon^{j,+}(t) - \mathrm{tr}_\varepsilon^{+}\, v_\varepsilon^{j,+}(s_\varepsilon^{j,+}(t))|\ dt ,$$

$$(2)_\varepsilon := \int_0^T \left| \sigma_{+,\mu}^{j,\circ} \left(s_\varepsilon^{j,+}(t), 0, \frac{\vec{\psi}_{+}^{j,\circ}(t,0)}{\varepsilon} \right) - \sigma_{+,\mu}^{j,\circ} \left(t, 0, \frac{\vec{\psi}_{+}^{j,\circ}(t,0)}{\varepsilon} \right) \right| dt ,$$

$$(3)_\varepsilon := \int_0^T \left| \mathrm{tr}_\varepsilon^{+}\, v_\varepsilon^{j,+}(s_\varepsilon^{j,+}(t)) - \sigma_{+,\mu}^{j,\circ} \left(s_\varepsilon^{j,+}(t), 0, \frac{\vec{\psi}_{+}^{j,\circ}(t,0)}{\varepsilon} \right) \right| dt .$$

Dans $(1)_\varepsilon$, on effectue le changement de variables $(t,x)=\theta(s,y):=(s,y+\underline{\lambda}_j^+ s)$, $W(s,y)=\tilde{v}_\varepsilon^{j,+}(t,x)$, qui donne, avec (4.2),

$$(1)_\varepsilon \leq |\underline{\lambda}_j^+|^{-1}\left|\int_0^{-\underline{\lambda}_j^+ T}\int_{\tilde{\chi}_\varepsilon(s)-\underline{\lambda}_j^+ s\in(y,y+\tilde{\chi}_\varepsilon(\frac{y}{-\underline{\lambda}_j^+}))}|\partial_s(W(\cdot,y))|ds\,dy\right|$$

$$\leq \int_0^{T+O(\varepsilon)}\left|\int_0^{\tilde{\chi}_\varepsilon(t)}|\varepsilon\partial_x(\check{r}^{j,+}(t,\cdot))|\,dx\right|\,dt\leq C(T)\,\varepsilon.$$

D'après (4.7), $(2)_\varepsilon$ est un $O(\varepsilon)$ (qui dépend de μ) puisque la trace $\sigma_{+,\mu}^{j,\circ}(t,0,\vec{y}_+^{j,\circ})$ du profil visqueux ainsi que l'application $s_\varepsilon^{j,+}$ sont lipschitziennes.

Dans $(3)_\varepsilon$, le changement de variables $s=s_\varepsilon^{j,+}(t)$ donne

$$(3)_\varepsilon=\int_0^{s_\varepsilon^{j,+}(T)}\left|\mathrm{tr}_\varepsilon^+\,v_\varepsilon^{j,+}(s)-\sigma_{+,\mu}^{j,\circ}\left(s,0,\frac{\vec{\psi}_+^{j,\circ}\left(s-\frac{\tilde{\chi}_\varepsilon(s)}{\underline{\lambda}_j^+},0\right)}{\varepsilon}\right)\right|\left(1-\frac{\tilde{\chi}_\varepsilon'(s)}{\underline{\lambda}_j^+}\right)ds$$

Avec (3.1.3), le caractère lipschitzien de la trace du profil visqueux et (4.7) donnent à nouveau

$$(3)_\varepsilon=o(1)+\int_0^T\left|\mathrm{tr}_\varepsilon^+\,v_\varepsilon^{j,+}(s)-\sigma_{+,\mu}^{j,\circ}\left(s,0,\frac{\vec{\psi}_+^{j,\circ}(s,0)}{\varepsilon}-\frac{\xi(s)}{\underline{\lambda}_j^+}\partial_t\vec{\psi}_+^{j,\circ}(s,0)\right)\right|\,ds.$$

De $(\mathcal{C})$ on déduit alors

$$(3)_\varepsilon=o(1)+\int_0^T\left|\underline{\mathcal{C}}^{+,j}\begin{pmatrix}\mathrm{tr}_\varepsilon^-\,v_\varepsilon^{c,-}(s)-\sigma_\mu^{c,-}\left(s,0,\frac{\vec{\psi}_-^{c,-}(s,0)}{\varepsilon}-\frac{\xi(s)}{\underline{\lambda}_c^-}\partial_t\vec{\psi}_-^{c,-}(s,0)\right)\\ \mathrm{tr}_\varepsilon^+\,v_\varepsilon^{c,+}(s)-\sigma_\mu^{c,+}\left(s,0,\frac{\vec{\psi}_+^{c,+}(s,0)}{\varepsilon}-\frac{\xi(s)}{\underline{\lambda}_c^+}\partial_t\vec{\psi}_+^{c,+}(s,0)\right)\end{pmatrix}\right|ds$$

et le retour sur $x=0$ pour chaque indice causal k par le changement de variables inverse de $s_\varepsilon^{\pm,k}$ introduit des erreurs du même type.

On obtient ainsi à la limite $\varepsilon\to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\eta_\delta\left(\mathrm{tr}^+\,\tilde{v}_\varepsilon^{j,+}(t)-\sigma_{+,\mu}^{j,\circ}\left(t,0,\frac{\vec{\psi}_+^{j,\circ}(t,0)}{\varepsilon}\right)\right)\,dt\leq(1+N_c^-+N_c^+)\delta T$$

$$+\sum_{\pm,k\in N_c^\pm}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\eta_\delta\left(\mathrm{tr}^\pm\,\tilde{v}_\varepsilon^{k,\pm}(t)-\sigma_{\pm,\mu}^{k,\overset{\pm}{\circ}}\left(t,0,\frac{\vec{\psi}_\pm^{k,\overset{\pm}{\circ}}(t,0)}{\varepsilon}\right)\right)\,dt$$

d'où la majoration souhaitée par passage à la limite $\mu\to 0$ puis $\delta\to 0$.

PREUVE DU THÉORÈME 2.2. On effectue le passage à la limite dans le Lemme 4.1. en utilisant les Propositions 4.2 et 4.4. Notant pour $t \in [0, T]$,

$$\mathcal{G}(t) := \sum_{\pm, j, \overset{\pm}{\circ}} \mathcal{G}_{\pm}^{j, \overset{\pm}{\circ}}(t)$$

et C une constante flottante (fonction de T), on obtient

$$\begin{array}{llll} & \text{si} \quad j \in N_{nc}^{\pm}, & & \mathcal{G}_{\pm}^{j,\pm}(t) \leq C \displaystyle\int_0^t \mathcal{G}(s)\ ds + \mathcal{G}_{\pm}^{j,\pm}(0) \\ (4.8) & \text{si} \quad j \in N_{c}^{\pm}, & & \mp\lambda_j^{\pm}\tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{j,\pm}(t) + \mathcal{G}_{\pm}^{j,\pm}(t) \leq C \displaystyle\int_0^t \mathcal{G}(s)\ ds + \mathcal{G}_{\pm}^{j,\pm}(0) \\ & \text{si} \quad j \in N_{nc}^{\pm}, & & \mathcal{G}_{\pm}^{j,\circ}(t) \leq C \displaystyle\int_0^t \mathcal{G}(s)\ ds \pm \lambda_j^{\pm}\tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{j,\circ}(t)\,. \end{array}$$

La Proposition 4.5 s'applique à cette dernière ligne en

$$\text{si} \quad j \in N_{nc}^{\pm}, \qquad \mathcal{G}_{\pm}^{j,\circ}(t) \leq C \left(\int_0^t \mathcal{G}(s)\ ds + \sum_{\pm, k \in N_c^{\pm}} \tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{k,\pm}(t) \right),$$

qui devient d'après (4.8),

$$\text{si} \quad j \in N_{nc}^{\pm}, \qquad \mathcal{G}_{\pm}^{j,\circ}(t) \leq C \left(\int_0^t \mathcal{G}(s)\ ds + \mathcal{G}(0) \right).$$

Une sommation donne alors l'inégalité

$$\mathcal{G}(t) \leq C \left(\int_0^t \mathcal{G}(s)\ ds + \mathcal{G}(0) \right),$$

dans laquelle $\mathcal{G}(0)$, défini par une mesure de Young, est nul d'après (2.2) et la notion d'équivalence L^1 de [J-M-R2]. Il en résulte que sur $[0, T]$, $\mathcal{G}$ est la fonction nulle. L'unicité de la solution entropique des équations de modulation et [J-M-R2, Proposition 4.3.9] entraînent alors le résultat d'asymptotique L^1 en espace et au temps T du Théorème 2.2 pour la famille entière $(u_\varepsilon(T, \cdot))_\varepsilon$.

La nullité de $\mathcal{G}$ se reporte ensuite dans (4.8); avec la Proposition 4.5, on obtient que les $\tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{j,\pm}$, $j \in N_c^{\pm}$ et les $\tilde{\mathcal{G}}_{\pm}^{j,\circ}$, $j \in N_{nc}^{\pm}$, sont aussi des fonctions nulles. La détermination (unique) des traces sur $x = 0$ des équations de modulation donne alors l'asymptotique

$$\mathrm{tr}^{\pm}\ \tilde{v}_{\varepsilon}^{j,\pm}(t) \quad \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{L^1(\mathbb{R}^{\pm})}{\sim}} \quad \mathrm{tr}^{\pm}\ \sigma_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}} \left(t, \frac{\vec{\psi}_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,0)}{\varepsilon} \right).$$

En utilisant les estimations des termes $(1)_\varepsilon$ et $(3)_\varepsilon$ de la preuve de ii) de la Proposition 4.5, on en déduit le résultat d'asymptotique des traces $tr_\varepsilon^{\pm} u_\varepsilon^{\pm}$ du Théorème 2.2. L'asymptotique de la vitesse du choc χ_ε' en est une conséquence d'après i) de la Proposition 4.5.

5. – Résonances

L'objectif de cette section est de décrire les objets naturels qui entrent en jeu dans les équations de modulation régissant les perturbations oscillantes multiphases d'un grand choc.

5.1. – Préliminaires

Sur l'espace vectoriel $H = \mathbb{R}^n$, rapporté à la variable $\theta := (\theta_1, ..., \theta_n)$, on utilise les deux normes

$$\|\theta\|_H := \langle\theta, \theta\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \theta_i^2\right)^{1/2}, \qquad \|\theta\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |\theta_i|.$$

Pour un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$, on note d_V sa dimension, θ_V son point courant, et pr_V la projection orthogonale sur V relativement à la structure euclidienne définie par $\langle\, ,\rangle$. On munit V de la norme $\|.\|_H$. Une troisième norme sur $\mathbb{R}^n$ est définie par V:

$$\|\theta\|_{V\oplus V^\perp} := \max(\|\mathrm{pr}_V\theta\|_H; \|\mathrm{pr}_{V^\perp}\theta\|_H).$$

Pour $r > 0$, les boules fermées de H centrées en 0 et de rayon r, associées aux différentes normes, sont notées $B_H(0, r]$, $B_\infty(0, r]$, $B_{V\oplus V^\perp}(0, r]$. On notera aussi $B_V(0, r]$ la boule euclidienne fermée de V. Le tore $\mathbb{T}^n$ étant représenté par $[-1/2, 1/2[^n$, on note $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ deux nombres réalisant les emboitements

$$B_{V\oplus V^\perp}(0, R_1] \subset \mathbb{T}^n \subset B_{V\oplus V^\perp}(0, R_2].$$

$C^0_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes continues et presque périodiques sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire l'adhérence dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de l'espace vectoriel Λ engendré par les fonctions exponentielles $\theta \mapsto \mathrm{e}^{i<\lambda,\theta>}$, λ décrivant $\mathbb{R}^n$. On le munit de la norme de L^∞. Le sous-espace de $C^0_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions périodiques de période 1 en chaque coordonnée est noté $C^0_{\mathrm{p}}(\mathbb{T}^n)$; c'est l'adhérence dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de l'espace Λ^{per} des polynômes trigonométriques, engendré par les fonctions exponentielles $\theta \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi\langle\lambda,\theta\rangle}$, λ décrivant $\mathbb{Z}^n$. On y utilisera la norme induite L^∞ et aussi la norme de $L^1(\mathbb{T}^n)$.

Un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ étant donné, on note $C^0(V)$ l'espace des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}^n$ qui ne dépendent que de la variable $\mathrm{pr}_V(\theta)$ et on définit

$$C^0_{\mathrm{p},V}(\mathbb{T}^n) := C^0_{\mathrm{p}}(\mathbb{T}^n) \cap C^0(V).$$

LEMME 5.1.1. *Il existe deux constantes C_1 et $C_2 > 0$ telles que toute fonction $u \in C^0_{p,V}(\mathbb{T}^n)$, $u(\theta) = w(\mathrm{pr}_V\,\theta)$, on ait*

$$\limsup_{s\longrightarrow\infty} \frac{C_1}{s^{d_V}} \int_{sB_V(0,R_1]} |w(\theta_V)|d\theta_V \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \leq \liminf_{s\longrightarrow\infty} \frac{C_2}{s^{d_V}} \int_{sB_V(0,R_2]} |w(\theta_V)|d\theta_V.$$

PREUVE. On note $[s] \in \mathbb{Z}$ la partie entière d'un nombre réel s, $[s] \leq s < [s]+1$. L'inégalité triviale $\left(1-\frac{1}{s}\right)^n \frac{1}{[s]^n} \leq \frac{1}{s^n} \leq \left(1+\frac{1}{s}\right)^n \frac{1}{(1+[s])^n}$, pour $s \geq 1$, entraîne que pour tout $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $s > 1$, on a

$$\left(1-\frac{1}{s}\right)^n \frac{1}{[s]^n} \int_{[s]\mathbb{T}^n} |u(\theta)| d\theta \leq \frac{1}{s^n} \int_{s\mathbb{T}^n} |u(\theta)| d\theta$$
$$\leq \left(1+\frac{1}{s}\right)^n \frac{1}{(1+[s])^n} \int_{(1+[s])\mathbb{T}^n} |u(\theta)| d\theta \ .$$

Dans l'encadrement recherché il suffit donc de passer à la limite sur les s entiers. Pour de tels $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le choix des R_i donne

$$\frac{1}{s^n} \int_{sB_{V\oplus V^\perp}(0,R_1]} |u(\theta)| d\theta \leq \frac{1}{s^n} \int_{s\mathbb{T}^n} |u(\theta)| d\theta = \|u\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$$
$$\leq \frac{1}{s^n} \int_{sB_{V\oplus V^\perp}(0,R_2]} |u(\theta)| d\theta$$

où les termes extrêmes sont de la forme

$$\left(\int_{B_{V^\perp}(0,R_j]} d\theta_{V^\perp}\right) \times \frac{1}{s^{d_V}} \int_{sB_V(0,R_j]} |w(\theta_V)| d\theta_V,$$

ce qui fournit les C_j, les passages à la limite ayant un sens si $u \in C^0_{p,V}(\mathbb{T}^n)$. □

On note $E_V : \Lambda \to \Lambda$ le sélectionneur des fréquences de $V^\perp$:

$$(5.1.1) \qquad (E_V u)(\theta) := \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s^{d_V}} \int_{sQ_V} u(\theta+\theta_V)\ d\theta_V,$$

$d\theta_V$ désignant la mesure de Lebesgue sur V et Q_V un pavé de V de mesure un. Il réalise

$$\left(E_V e^{i\langle\lambda,.\rangle}\right)(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \notin V^\perp \\ e^{i\langle\lambda,\theta\rangle} & \text{si } \lambda \in V^\perp \end{cases}$$

Il se prolonge de façon unique en un endomorphisme continu de $C^0_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^n)$, noté encore E_V, qui laisse stable le sous-espace $C^0_{\mathrm{p}}(\mathbb{T}^n)$. Ce prolongement vérifie de plus

$$(5.1.2) \qquad (E_V u)(\theta) = (E_V u)\left(\mathrm{pr}_{V^\perp}(\theta)\right), \quad \forall u \in C^0_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^n),$$

si bien que $E_V(C^0_{\mathrm{p}}(\mathbb{T}^n)) \subset C^0_{\mathrm{p},V^\perp}(\mathbb{T}^n)$, et n'amplifie pas les normes L^∞ et L^1

$$\|E_V u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad ; \quad \forall u \in C^0_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^n),$$

$$(5.1.3) \qquad \|E_V u\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \qquad ; \quad \forall u \in C^0_{\mathrm{p}}(\mathbb{T}^n).$$

On note aussi E_V son prolongement à L^1.

5.2. – Résonances

Cette section décrit la géométrie des oscillations à l'intérieur d'un angle fixé $\mathcal{A}^{i,\pm}$. Elle introduit la définition des opérateurs de résonance et explique comment ceux-ci interviennent dans l'analyse des interactions quadratiques d'oscillations. Pour alléger les notations on omet l'écriture des exposants $i, \pm$ dans toutes les quantités qui le contiennent. On suppose $N \geq 3$, on fixe trois entiers p, q, r de $\{1, ..., N\}$, deux à deux distincts et on note i la variable de l'ensemble $\{p, q, r\}$. On considère l'ensemble produit

$$\Psi_{p,q,r} := \Phi_{\pm}^{p,\overset{\pm}{\circ}} \times \Phi_{\pm}^{q,\overset{\pm}{\circ}} \times \Phi_{\pm}^{r,\overset{\pm}{\circ}}$$

de triplets de phases traversant l'angle, à valeurs dans $\mathbb{R}^{m_p} \times \mathbb{R}^{m_q} \times \mathbb{R}^{m_r}$, $m_i \in \{d_{\pm}^i, d_b\}$, puis on omet aussi l'écriture des signes $\pm$ en indice. On note sans l'exposant $\overset{\pm}{\circ}$

$$\vec{\psi}^i(t,x) = \{\psi_1^i(t,x), ..., \psi_{m_i}^i(t,x)\} \in \mathbb{R}^{m_i}$$

les bases des $\Phi^i := \Phi^{i,\overset{\pm}{\circ}}$ et, pour $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i,1}, ..., \alpha_{i,m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}$, $\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\psi}^i = \sum_k \alpha_{i,k} \psi_k^i$. On note enfin

$$\mathrm{pr}_{p,q,r}^{p,q} : \mathbb{R}^{m_p} \times \mathbb{R}^{m_q} \times \mathbb{R}^{m_r} \longrightarrow \mathbb{R}^{m_p} \times \mathbb{R}^{m_q} \quad , \quad \mathrm{pr}_{p,q,r}^{i} : \mathbb{R}^{m_p} \times \mathbb{R}^{m_q} \times \mathbb{R}^{m_r} \longrightarrow \mathbb{R}^{m_i}$$

les projections sur les buts des flèches respectives.

Les relations de résonance réelles relatives à $\Psi_{p,q,r}$ sont définies par un sous-espace vectoriel $R_{p,q;r}$ de $\mathbb{R}^{m_p} \times \mathbb{R}^{m_q} \times \mathbb{R}^{m_r}$

$$R_{p,q;r} := \left\{ (\vec{\alpha}_p, \vec{\alpha}_q, -\vec{\alpha}_r) \in \mathbb{R}^{m_p} \times \mathbb{R}^{m_q} \times \mathbb{R}^{m_r} \ , \ \sum_{i \in \{p,q,r\}} \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\psi}^i \ \equiv 0 \right\}$$

dont les projections sont notées

$$R_{p,q;r}^{p,q} := \mathrm{pr}_{p,q,r}^{p,q}(R_{p,q;r}) \quad , \quad R_{p,q;r}^{i} := \mathrm{pr}_{p,q,r}^{i}(R_{p,q;r}) \ .$$

Les relations de résonance entières relatives à $\Psi_{p,q,r}$ sont définies par le $\mathbb{Z}$-module $Z_{p,q;r}$

$$Z_{p,q;r} := R_{p,q;r} \cap (\mathbb{Z}^{m_p} \times \mathbb{Z}^{m_q} \times \mathbb{Z}^{m_r}).$$

Avec les notations de cet appendice, la condition $(F_q\text{–}R_qE)$ de la Section 2, est la conjonction des deux suivantes:

$$(F_q) \qquad \begin{aligned} &\forall \ \vec{\alpha}_p \in \mathbb{Z}^{m_p} \ , \ \vec{\alpha}_q \in \mathbb{Z}^{m_q} \ , \ r \neq p \neq q \neq r, \\ &(\partial_t + \lambda_r^{\pm} \partial_x)(\vec{\alpha}_p \cdot \vec{\psi}^p + \vec{\alpha}_q \cdot \vec{\psi}^q) = 0 \Longrightarrow \exists \vec{\alpha}_r \in \mathbb{R}^{m_r} \ , \\ &\vec{\alpha}_p \cdot \vec{\psi}^p + \vec{\alpha}_q \cdot \vec{\psi}^q = \vec{\alpha}_r \cdot \vec{\psi}^r . \end{aligned}$$

$$(R_q E) \qquad \begin{array}{l} \forall \quad \vec{\alpha}_p \in \mathbb{Z}^{m_p},\ \ \vec{\alpha}_q \in \mathbb{Z}^{m_q},\ \ \vec{\alpha}_r \in \mathbb{R}^{m_r},\ \ r \neq p \neq q \neq r, \\ \vec{\alpha}_p \cdot \vec{\psi}^p + \vec{\alpha}_q \cdot \vec{\psi}^q = \vec{\alpha}_r \cdot \vec{\psi}^r \quad \Longrightarrow \quad \vec{\alpha}_r \in \mathbb{Z}^{m_r} \ . \end{array}$$

La première est la condition de "fermeture" introduite dans [J-M-R1] (donnée ici dans une version adaptée). Elle dit que les systèmes de phases sont sélectionnés de manière à déjà contenir toutes les possibilités de création (par interaction quadratique) de phases. La seconde empêche la formation de spectre réel non entier par résonance: lorsqu'une combinaison linéaire à coefficients entiers des phases de base ψ_j^p, ψ_k^q égale une combinaison linéaire à coefficients réels des phases ψ_j^r on impose que ces derniers coefficients soient entiers. On retient l'expression équivalente:

$$(R_q E) \iff R_{p,q;r} \cap (\mathrm{pr}^{p,q}_{p,q,r})^{-1}\ (\mathbb{Z}^{m_p} \times \mathbb{Z}^{m_q}) = Z_{p,q;r} \ .$$

EXEMPLE 5.2.1. Pour un système à trois vitesses valant

$$\underline{\lambda}_1^- = -1 \quad , \quad \underline{\lambda}_2^- = 1 \quad , \quad \underline{\lambda}_3^- = 2 \quad ; \quad \underline{\lambda}_1^+ = -2 \quad , \quad \underline{\lambda}_2^+ = -1 \quad , \quad \underline{\lambda}_3^+ = 1$$

et des données initiales oscillant sur l'unique phase linéaire: $\psi^i_{0,\pm}(x) = x$, le système de phases intervenant dans chacun des secteurs angulaires $\mathcal{A}^{1,-}$ et $\mathcal{A}^{2,-}$ est, pour le choix $\vec{\varphi}_b = t$,

$$x + t \quad , \quad x - t \quad , \quad x - 2t,$$

alors que dans $\mathcal{A}^{2,+}$ et $\mathcal{A}^{3,+}$ c'est

$$x + 2t \quad , \quad x + t \quad , \quad x - t.$$

On vérifie facilement que toutes les hypothèses sont vérifiées pour ce cas de figure. □

EXEMPLE 5.2.2. La présence de résonances peut être détectée lorsque les valeurs propres satisfont une relation ad hoc et lorsqu'il est possible de mettre en jeu au moins trois phases linéaires différentes. Elle est donc absente dans le cas d'un problème de Cauchy dont les données initiales (monophases sur chaque mode) oscillent selon des phases qui sont non linéaires. La situation est différente en présence d'un grand choc. En effet, une combinaison linéaire de traces sur le bord $x = 0$ de phases non linéaires (propagées depuis $t = 0$) peut engendrer une phase linéaire dont la transmission à des régions non causales donne lieu à résonances. En voici un exemple: on considère un système à cinq vitesses réparties suivant

$$\begin{array}{l} \underline{\lambda}_1^- = -1 \quad , \quad \underline{\lambda}_2^- = 1 \quad , \quad \underline{\lambda}_3^- = 2 \quad , \quad \underline{\lambda}_4^- = 3 \quad , \quad \underline{\lambda}_5^- = 4 \ , \\ \underline{\lambda}_1^+ = -2 \quad , \quad \underline{\lambda}_2^+ = -1 \quad , \quad \underline{\lambda}_3^+ = 1 \quad , \quad \underline{\lambda}_4^+ = 2 \quad , \quad \underline{\lambda}_5^+ = 3 \ . \end{array}$$

Le grand choc est $\{x = 0, t \geq 0\}$ et l'indice κ réalisant (E) est $\kappa = 2$. Les oscillations sur chaque mode causal sont choisies monophases ($d^i_\pm = 1$ pour $i \in N^\pm_c$):

$$\vec{\psi}^{i,-}_{-}(t,x) = \psi^{i,-}_{-}(t,x) = \left(\frac{x}{\underline{\lambda}^-_i} - t\right)^2 + \left(\frac{x}{\underline{\lambda}^-_i} - t\right) \quad , \qquad i \in N^-_c \ .$$

$$\vec{\psi}^{i,+}_{+}(t,x) = \psi^{i,+}_{+}(t,x) = - \ \left(\frac{x}{\underline{\lambda}^+_i} - t\right)^2 + \left(\frac{x}{\underline{\lambda}^+_i} - t\right) \quad , \ i \in N^+_c \ .$$

On empêche les phases non causales issues de $\{t = 0\}$ de produire des résonances en les choisissant non linéaires, par exemple $\vec{\psi}^{i,\pm}_{\pm}(t,x) = \psi^{i,\pm}_{\pm}(t,x) = (x - \underline{\lambda}^\pm_i t)^2, \quad i \in N^\pm_{nc}$.

Les traces sur le grand choc des phases causales sont $t^2 - t$ et $-t^2 - t$. Elles engendrent un espace vectoriel dont $\vec{\varphi}_b = (t^2 - t, t)$ est une base. Cette base vérifie la condition $(N.S)_b$ car

$$\partial_t \ \big(\alpha \ (t^2 - t) + \beta \ t\big) = 2 \ \alpha \ t + \ (\beta - \alpha) \neq 0 \quad \text{pp} \quad t > 0 \qquad \text{si} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$$

ainsi que la condition de réflexion au bord entière $(r_b E)$, puisque $-t^2 - t = -(t^2 - t) - 2 \ (t)$.

Les oscillations qui sont propagées à partir des traces au bord dans des directions non causales sont

$$\left(\frac{x}{\underline{\lambda}^\pm_i} - t\right)^2 - \left(\frac{x}{\underline{\lambda}^\pm_i} - t\right) \quad \text{et} \quad \frac{x}{\underline{\lambda}^\pm_i} - t \quad \text{dans} \quad S^{i,\circ}_{\pm} \quad \text{pour} \quad i \in N^\pm_{nc} \ .$$

Le jeu de phases ainsi dégagé vérifie aussi les conditions $(N.S)_0$, $(\not{C})$, $(F_q\text{–}R_q E)$ et $(f - T_q)$. Ici, seul l'angle $\mathcal{A}^{2,+} := \{t \geq 0 \ , \ 0 < x < t\}$ contient trois phases linéaires,

$$x - t \quad , \quad \frac{x}{2} - t \quad , \quad \frac{x}{3} - t$$

qui sont liées par la relation (entière)

$$(x - t) \ \ - 4 \ \left(\frac{x}{2} - t\right) \ + \ 3 \ \left(\frac{x}{3} - t\right) \ = \ 0 \ . \qquad \square$$

LEMME 5.2.3. *Sous l'hypothèse* $(\not{C})$, *les restrictions* $\tilde{\text{pr}}^i_{p,q,r}$, $\tilde{\text{pr}}^{p,q}_{p,q,r}$ *des applications* $\text{pr}^i_{p,q,r}$, $\text{pr}^{p,q}_{p,q,r}$ *à* $R_{p,q;r}$ *sont injectives. En conséquence les applications suivantes réalisent des isomorphismes:*

$$J^i_{i'} = \text{pr}^{i'}_{p,q,r} \circ (\tilde{\text{pr}}^i_{p,q,r})^{-1} : R^i_{p,q;r} \longrightarrow R^{i'}_{p,q;r} \qquad i' \neq i$$

$$J^p_{p,q} = \text{pr}^{p,q}_{p,q,r} \circ (\tilde{\text{pr}}^p_{p,q,r})^{-1} : R^p_{p,q;r} \longrightarrow R^{p,q}_{p,q;r}$$

$$J^{p,q}_r = J^p_r \circ (J^p_{p,q})^{-1} : R^{p,q}_{p,q;r} \longrightarrow R^r_{p,q;r} \ ,$$

et la condition $(R_q E)$ *équivaut à*

$$J_r^{p,q}((\mathbb{Z}^{m_p} \times \mathbb{Z}^{m_q}) \cap R^{p,q}_{p,q;r}) = \mathbb{Z}^{m_r} \cap R^r_{p,q;r}.$$

PREUVE. L'injectivité de $\mathrm{pr}^i_{p,q,r}$ sur $R_{p,q;r}$ entraîne celle de $\mathrm{pr}^{p,q}_{p,q,r}$; pour la première, si $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in R_{p,q;r}$ vérifient par exemple $\vec{\alpha}_p = \vec{\beta}_p$ alors la phase $(\vec{\alpha}_q - \vec{\beta}_q).\vec{\psi}^q = (\vec{\alpha}_r - \vec{\beta}_r).\vec{\psi}^r$, annulée par les deux champs indépendants $\partial_t + \underline{\lambda}_q \partial_x$, $\partial_t + \underline{\lambda}_r \partial_x$, est identiquement nulle d'après $(\not{C})$, d'où l'injectivité de $\mathrm{pr}^i_{p,q,r}$ puis la définition et la bijectivité des applications J ainsi que la formulation équivalente de $(R_q E)$. □

Sous la condition $(R_q E)$, exprimée suivant ce lemme, les relations de résonance permettent de définir l'action "convolutive" formelle $G_r^{p,q}$ sur les séries de Fourier formelles

$$(5.2.4)\quad G_r^{p,q}(u_p \otimes u_q)(\theta_r) := \sum_{(\vec{\alpha}_p, \vec{\alpha}_q) \in R^{p,q}_{p,q;r} \cap (\mathbb{Z}^{m_p} \times \mathbb{Z}^{m_q})} \left(a_p^{\vec{\alpha}_p} a_q^{\vec{\alpha}_q}\right) e^{2i\pi J_r^{p,q}(\vec{\alpha}_p, \vec{\alpha}_q) \cdot \vec{\theta}^r},$$

$$u_i(\theta_i) = \sum_{\vec{\alpha}_i \in \mathbb{Z}^{m_i}} a_i^{\vec{\alpha}_i} \; e^{2i\pi \; \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\theta}^i}$$

Cette action, paramétrée par les points (t, x) d'un angle $\mathcal{A}$, intervient dans l'analyse non linéaire des termes d'intérieur du Lemme 4.1. Celle-ci demande de pouvoir passer à la limite au niveau d'intégrales oscillantes de la forme

$$\mathcal{O}_\varepsilon := \int_{\mathcal{A}_T} \varepsilon \; \partial_x \left\{ U_p\left(t, x, \frac{\vec{\psi}^p(t,x)}{\varepsilon}\right) \; U_q\left(t, x, \frac{\vec{\psi}^q(t,x)}{\varepsilon}\right) \right\} \times U_r\left(t, x, \frac{\vec{\psi}^r(t,x)}{\varepsilon}\right) dt \; dx \; ,$$

où $\mathcal{A}_T$ est l'ensemble des points de $\mathcal{A}$ de temps inférieur à T et les profils $U_i(t, x, \vec{\theta}^i)$ ont la régularité

$$U_i \in \mathcal{F}_\infty(T, m_i) := \mathrm{Lip}\big(\mathcal{A}_T; C^\infty(\mathbb{T}^{m_i})\big) := \cap_k \mathrm{Lip}\big(\mathcal{A}_T; C^k(\mathbb{T}^{m_i})\big) \;,\; i \in \{p, q, r\}.$$

Cette régularité entraîne que les sommes partielles du développement en série de Fourier

$$U_i(t, x, \vec{\theta}^i) \;=\; \sum_{\vec{\alpha}_i \in \mathbb{Z}^{m_i}} a_i^{\vec{\alpha}_i}(t, x) \; e^{2i\pi \; \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\theta}^i}$$

dérivées au plus une fois en variables lentes et un nombre arbitraire de fois en variables rapides convergent normalement. Ainsi $G_r^{p,q}$ opère sur $\mathcal{F}_\infty(T, m_p) \times \mathcal{F}_\infty(T, m_q)$, à valeurs dans $\mathcal{F}_\infty(T, m_r)$.

La base $\vec{\psi}^i$ de l'espace des phases Φ^i définit dans le dièdre $\mathcal{A} \times \mathbb{T}^{m_i}$ le champ de vecteurs

$$T^i := \partial_x \vec{\psi}^i \cdot \nabla_{\vec{\theta}^i}$$

qui opère dans $\mathcal{F}_\infty(T, m_i)$. Sa composition avec $G_r^{p,q}$ est l'opérateur de résonance

$$(5.2.5)\qquad \mathcal{R}_{p,q;r}(U_p, U_q) := \; T^r\Big(G_r^{p,q}(U_p \otimes U_q)\Big)$$

qui apparaît dans l'asymptotique ε tend vers zéro, de la famille $\{\mathcal{O}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]}$.

PROPOSITION 5.2.4. *Pour tous $U_i \in \mathcal{F}_\infty(T, m_i)$ on a*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{O}_\varepsilon = \int_{\mathcal{A}_T} \int_{\mathbb{T}^{m_r}} \mathcal{R}_{p,q;r}(U_p, U_q)(t, x, \vec{\theta}^r)\, U_r(t, x, \vec{\theta}^r)\, dt\, dx\, d\vec{\theta}^r\ .$$

REMARQUE. L'absence de résonances correspond à $Z_{p,q;r} = \{(0,0,0)\}$. On a alors $J_r^{p,q}\big((\mathbb{Z}^{m_p} \times \mathbb{Z}^{m_q}) \cap R_{p,q;r}^{p,q}\big) = \{0\}$ et l'action de $\mathcal{R}_{p,q;r}$ se réduit à celle de l'opérateur nul.

PREUVE. La démonstration s'apparente à celle qui est donnée dans [Ch, Lemme II.4.1]. La régularité dont on dispose sur les fonctions U_i est suffisante pour donner un sens (pour presque tout (t,x)) à la quantité

$$\varepsilon\ \partial_x \left\{ U_p \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^p(t,x)}{\varepsilon} \right)\ U_q \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^q(t,x)}{\varepsilon} \right) \right\}\ ,$$

et la remplacer dans l'expression $\mathcal{O}_\varepsilon$ par

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \left\{ (\partial_x U_p) \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^p(t,x)}{\varepsilon} \right)\ U_q \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^q(t,x)}{\varepsilon} \right) \right. \\
&\qquad \left. + U_p \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^p(t,x)}{\varepsilon} \right)\ (\partial_x U_q) \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^q(t,x)}{\varepsilon} \right) \right\} \\
&\qquad + \left\{ \left[\partial_x \vec{\psi}^p(t,x) \cdot (\nabla_{\vec{\theta}^p} U_p) \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^p(t,x)}{\varepsilon} \right) \right] U_q \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^q(t,x)}{\varepsilon} \right) \right. \\
&\qquad \left. + U_p \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^p(t,x)}{\varepsilon} \right) \left[\partial_x \vec{\psi}^q(t,x) \cdot (\nabla_{\vec{\theta}^q} U_q) \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^q(t,x)}{\varepsilon} \right) \right] \right\}\ .
\end{aligned}$$

L'apport dans $\mathcal{O}_\varepsilon$ du premier terme (où ε est en facteur) est clairement nul à la limite (ε tendant vers zéro). Afin d'identifier la contribution du second terme, on développe U_p et U_q en série de Fourier; dans $\mathcal{O}_\varepsilon$ apparaît alors l'intégrale sur $\mathcal{A}_T$ de l'expression

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sum_{(\vec{\alpha}_p, \vec{\alpha}_q) \in \mathbb{Z}^{m_p} \times \mathbb{Z}^{m_q}} (a_p^{\vec{\alpha}_p} a_q^{\vec{\alpha}_q})(t,x) 2i\pi (\vec{\alpha}_p \cdot \partial_x \vec{\psi}^p + \vec{\alpha}_q \cdot \partial_x \vec{\psi}^q)(t,x) e^{2i\pi(\vec{\alpha}_p \cdot \vec{\psi}^p + \vec{\alpha}_q \cdot \vec{\psi}^q)(t,x)/\varepsilon} \right\} \\
&\qquad \times U_r \left(t, x, \frac{\vec{\psi}^r(t,x)}{\varepsilon} \right) .
\end{aligned}$$

La condition $(f\text{–}T_q)$ permet d'appliquer le lemme de compacité par compensation bilinéaire classique [T]. Elle élimine dans la somme (par passage à la limite, ε tendant vers 0) les oscillations qui se produisent suivant une "direction" autre que $\vec{\psi}^r(t,x)$, c'est à dire qui ne sont pas de la forme $e^{2i\pi\ \vec{\alpha}_r\cdot\vec{\psi}^r(t,x)}$ pour des $\vec{\alpha}_r \in \mathbb{Z}^{m_r}$. Les oscillations restantes relèvent de l'hypothèse (R_qE). Elles apportent exactement la contribution

$$\left(T^r\left(\sum_{(\vec{\alpha}_p,\vec{\alpha}_q)\in R^{p,q}_{p,q;r}} \left(a_p^{\vec{\alpha}_p}\ a_q^{\vec{\alpha}_q}\right) e^{2i\pi J_r^{p,q}(\vec{\alpha}_p,\vec{\alpha}_q)\cdot\vec{\theta}^r}\right)\right)\left(t,x,\frac{\vec{\psi}^r(t,x)}{\varepsilon}\right)$$
$$\times U_r\left(t,x,\frac{\vec{\psi}^r(t,x)}{\varepsilon}\right)$$

dont la limite lorsque ε tend vers zéro se traite à l'aide de $(N.S)_0$ et $(N.S)_b$ et fait apparaître les opérateurs (5.2.4) et (5.2.5). □

La définition de l'opérateur $\mathcal{R}_{p,q;r}$ sur les espaces $\mathcal{F}_\infty$ est trop étroite pour l'analyse de solutions faibles. Son sens n'est pas évident pour des U_i dans l'espace
$$\mathrm{Lip}(\mathcal{A}_T;L^1(\mathbb{T}^{m_i}))^\bullet \cap L^\infty(\mathcal{A}_T;BV(\mathbb{T}^{m_i})) .$$
Or ce point est essentiel. En effet, les équations de modulation contiennent un terme de type Bürgers. Ses solutions U_i présentent génériquement des discontinuités d'ordre zéro et vivent naturellement dans l'espace ci-dessus. Il importe donc de comprendre l'action de l'opérateur de résonance dans ce nouveau contexte. Notre objectif, maintenant, est de décrire $\mathcal{R}_{p,q;r}$ à l'aide d'une formule plus intrinsèque, qui rende possible son extension à des espaces moins réguliers.

On note $V^{p,q}_{p,q;r}$, $V^i_{p,q;r}$, une copie des sous-espaces $R^{p,q}_{p,q;r}$, $R^i_{p,q;r}$, de $\mathbb{R}^{m_p}\times\mathbb{R}^{m_q}$, $\mathbb{R}^{m_i}$, rapportés aux variables $(\vec{\theta}^p,\vec{\theta}^q)$, $\vec{\theta}^r$, respectivement, puis on note ${}^tJ_r^{p,q} : V^r_{p,q;r} \to V^{p,q}_{p,q;r}$ l'isomorphisme associant à $\vec{\theta}^r \in V^r_{p,q;r}$ l'unique $(\vec{\theta}^p,\vec{\theta}^q)\in V^{p,q}_{p,q;r}$ réalisant

$$\langle(\vec{\alpha}_p,\vec{\alpha}_q)\ ,\ (\vec{\theta}^p,\vec{\theta}^q)\rangle \ = \ \langle J_r^{p,q}(\vec{\alpha}_p,\vec{\alpha}_q)\ ,\ \vec{\theta}^r\rangle \quad , \quad \forall(\vec{\alpha}_p,\vec{\alpha}_q)\in R^{p,q}_{p,q;r}.$$

Lorsque $(\vec{\lambda}_p,\vec{\lambda}_q)\in R^{p,q}_{p,q;r}$, la composition $w = v\circ{}^tJ_r^{p,q}\circ \mathrm{pr}_{V^r_{p,q;r}}$ des fonctions élémentaires
$$v(\vec{\theta}^p,\vec{\theta}^q) = e^{i\ \langle(\vec{\lambda}_p,\vec{\lambda}_q)\ ,\ (\vec{\theta}^p,\vec{\theta}^q)\rangle} \ :\in \Lambda_{p,q}$$
n'est autre que

$$G_r^{p,q}(v)(\vec{\theta}^r) := w(\vec{\theta}^r) = e^{i\ \langle J_r^{p,q}(\vec{\lambda}_p,\vec{\lambda}_q)\ ,\ \vec{\theta}^r\rangle} \ :\in \Lambda_r.$$

Par (5.1.1) on en déduit que pour tout $(\vec{\lambda}_p,\vec{\lambda}_q)\in\mathbb{R}^{m_p}\times\mathbb{R}^{m_q}$,

$$\left(E_{(V^{p,q}_{p,q;r})^\perp}(e^{i\ \langle(\vec{\lambda}_p,\vec{\lambda}_q)\ ,\ \cdot\rangle})\right)\circ{}^tJ_r^{p,q}\circ\mathrm{pr}_{V^r_{p,q;r}} \ \in\ \Lambda_r$$

puis que l'application formelle $G_r^{p,q}$ définie en (5.2.4), est justifiée en l'application linéaire et continue

$$(5.2.6)\qquad \begin{aligned} G_r^{p,q} : C^0_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{m_p} \times \mathbb{R}^{m_q}) &\longrightarrow C^0_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{m_r}) \\ u &\longmapsto (E_{(V^{p,q}_{p,q;r})^\perp} u) \circ {}^t\!J_r^{p,q} \circ \mathrm{pr}_{V^r_{p,q;r}} \end{aligned}.$$

Son action sur les fonctions périodiques est décrite par le

Lemme 5.2.5. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{L})$ *et* $(R_q E)$, *l'opérateur* $G_r^{p,q}$ *agit de* $C^0_p(\mathbb{T}^{m_p} \times \mathbb{T}^{m_q})$ *dans* $C^0_{p,V^r_{p,q;r}}(\mathbb{T}^{m_r})$ *et se prolonge en une application linéaire continue de* $L^1(\mathbb{T}^{m_p} \times \mathbb{T}^{m_q})$ *dans* $L^1(\mathbb{T}^{m_r})$.

Preuve. Lorsque $u \in C^0_p(\mathbb{T}^{m_p} \times \mathbb{T}^{m_q})$ est de la forme $u(\vec{\theta}^p, \vec{\theta}^q) = e^{2i\pi\ \langle(\vec{\lambda}_p, \vec{\lambda}_q)\ ,\ (\vec{\theta}^p, \vec{\theta}^q)\rangle}$ avec $(\vec{\lambda}_p, \vec{\lambda}_q) \in \mathbb{Z}^{m_p} \times \mathbb{Z}^{m_q}$, $G_r^{p,q} u$ est nulle si $(\vec{\lambda}_p, \vec{\lambda}_q) \notin R^{p,q}_{p,q;r}$ et vaut $e^{2i\pi\ \langle J_r^{p,q}(\vec{\lambda}_p, \vec{\lambda}_q)\ ,\ \cdot\rangle}$ sinon, $J_r^{p,q}(\vec{\lambda}_p, \vec{\lambda}_q)$ étant entier d'après la condition équivalente à $(R_q E)$ du Lemme 5.2.2. Ainsi $G_r^{p,q} u \in C^0_p(\mathbb{T}^{m_r})$, et même, d'après (5.1.2), $G_r^{p,q} u \in C^0_{p,V^r_{p,q;r}}(\mathbb{T}^{m_r})$. L'action de $G_r^{p,q}$ sur $C^0_p(\mathbb{T}^{m_p} \times \mathbb{T}^{m_q})$ s'en déduit par le théorème de Stone-Weierstrass.

Notant d la dimension commune de $V^r_{p,q;r}$, $V^{p,q}_{p,q;r}$, le Lemme 5.1.1 donne alors pour $u \in C^0_p(\mathbb{T}^{m_p} \times \mathbb{T}^{m_q})$,

$$\begin{aligned} \|G_r^{p,q} u\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_r})} &\le \liminf_{s\to\infty} \frac{C_2}{s^d} \int_{sB_{V^r_{p,q;r}}(0,R_2]} \left|(E_{(V^{p,q}_{p,q;r})^\perp} u)\big({}^t\!J_r^{p,q}(\theta_{V^r_{p,q;r}})\big)\right| d\theta_{V^r_{p,q;r}} \\ &\le \liminf_{s\to\infty} \quad \frac{C_2'}{s^d} \int_{s\rho B_{V^{p,q}_{p,q;r}}(0,R_1]} \left|(E_{(V^{p,q}_{p,q;r})^\perp} u)\big(\theta_{V^{p,q}_{p,q,r}}\big)\right| d\theta_{V^{p,q}_{p,q;r}}, \end{aligned}$$

C_2' et ρ étant convenablement choisies après le changement de variables défini par ${}^t\!J_r^{p,q}$.

Par ailleurs, $E_{(V^{p,q}_{p,q;r})^\perp} u$ appartient aussi à $C^0_{p,V^{p,q}_{p,q;r}}(\mathbb{T}^{m_p} \times \mathbb{T}^{m_q})$ et le Lemme 5.1.1, avec (5.1.3) donne

$$\begin{aligned} \limsup_{s\to\infty} \frac{C_1}{s^d} \int_{sB_{V^{p,q}_{p,q;r}}(0,R_1]} |(E_{(V^{p,q}_{p,q;r})^\perp} u)(\theta_{V^{p,q}_{p,q;r}})| d\theta_{V^{p,q}_{p,q;r}} &\le \|(E_{(V^{p,q}_{p,q;r})^\perp} u)\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_p}\times\mathbb{T}^{m_q})} \\ &\le \|u\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_p}\times\mathbb{T}^{m_q})}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $u \in C^0_p(\mathbb{T}^{m_p} \times \mathbb{T}^{m_q})$

$$\|G_r^{p,q} u\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_r})} \le \frac{C_2'}{C_1} \rho^d \|u\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_p}\times\mathbb{T}^{m_q})}.$$

L'action sur L^1 s'en déduit par densité. □

LEMME 5.2.6 (action convolutive). i) *Pour tous* $u_p \otimes u_q \in C^0_p(\mathbb{T}^{m_p}) \times C^0_p(\mathbb{T}^{m_q})$, *on a*

$$\begin{aligned}&\|G^{p,q}_r(u_p \otimes u_q)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^{m_r})}\\&\qquad \leq \min\Big\{\|u_p\|_{L^\infty(\mathbb{T}^{m_p})}\|u_q\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_q})},\ \|u_p\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_p})}\|u_q\|_{L^\infty(\mathbb{T}^{m_q})}\Big\}.\end{aligned}$$

ii) *Pour tout* $k \in \{1, ..., m_r\}$, *il existe des champs de vecteurs à coefficients constants* X_k *sur* $\mathbb{T}^{m_p}$, Y_k *sur* $\mathbb{T}^{m_q}$, *tels que pour tous* $u_p \otimes u_q \in C^1_p(\mathbb{T}^{m_p}) \times C^1_p(\mathbb{T}^{m_q})$, *on ait*

$$\partial_{\theta^r_k}\big(G^{p,q}_r(u_p \otimes u_q)\big) = G^{p,q}_r(X_k u_p \otimes u_q) = G^{p,q}_r(u_p \otimes Y_k u_q)\ .$$

En conséquence, il existe $C > 0$, *telle que*

$$\begin{aligned}&\|\nabla_{\vec\theta^r}[G^{p,q}_r(u_p \otimes u_q)]\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_r})}\\&\qquad \leq C\min\Big\{\|u_p\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_p})}\|\nabla_{\vec\theta^q}u_q\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_q})}\ ,\ \|\nabla_{\vec\theta^p}u_p\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_p})}\|u_q\|_{L^1(\mathbb{T}^{m_q})}\Big\}\ .\end{aligned}$$

PREUVE. Il suffit aussi de considérer des $u \in \Lambda^{per}$. On peut alors utiliser la formule où V est $V^{p,q}_{p,q;r}$,

$$\begin{aligned}&G^{p,q}_r(u_p \otimes u_q)(\vec\theta^r)\\&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{d_{V^\perp}}}\int_{sQ_{V^\perp}} u_p(\mathrm{pr}^p_{p,q}({}^tJ^{p,q}_r \circ \mathrm{pr}_{V^r_{p,q;r}}(\vec\theta^r)+\psi))\\&\quad\times u_q(\mathrm{pr}^q_{p,q}({}^tJ^{p,q}_r \circ \mathrm{pr}_{V^r_{p,q;r}}(\vec\theta^r)+\psi))d\psi\ .\end{aligned}$$

L'estimation de i) s'en déduit immédiatement. Ensuite, pour le transfert des dérivées, $k \in \{1, ..., m_r\}$ étant fixé, par symétrie il suffit de savoir construire Y_k; les majorations cherchées s'en déduisent alors par le Lemme 5.2.5. La dérivation $\partial_{\theta^r_k}$ commute à la limite en s et à l'intégrale dans la formule ci-dessus. Le terme intégral ainsi obtenu s'exprime, en notant $a_{i,k} \in \mathbb{R}^{m_i}$ la k-ième colonne de la matrice de $\mathrm{pr}^i_{p,q} \circ {}^tJ^{p,q}_r \circ \mathrm{pr}_{V^r_{p,q;r}}$ dans les bases canoniques,

$$\int_{sQ_{(V^{p,q}_{p,q;r})^\perp}} \Big\{\big(\langle a_{p,k}, \nabla_{\vec\theta^p}u_p\rangle \otimes u_q + u_p \otimes \langle a_{q,k}, \nabla_{\vec\theta^q}u_q\rangle\big)({}^tJ^{p,q}_r \circ \mathrm{pr}_{V^r_{p,q;r}}(\vec\theta^r)+\psi)\Big\}\, d\psi.$$

On introduit alors les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^{m_i}$, $X_{i,k} = \langle a_{i,k}, \nabla_{\vec\theta^i}\rangle$

$$\partial_{\theta^r_k}[G^{p,q}_r(u_p \otimes u_q)] = G^{p,q}_r\big((X_{p,k}\ u_p) \otimes u_q\big) + G^{p,q}_r\big(u_p \otimes (X_{q,k}\ u_q)\big).$$

Pour transporter les dérivées de u_p sur u_q dans le premier terme de cette dernière somme, on utilise (5.1.2): $\forall z \in \mathbb{R}$, $\forall \vec a \in (V^{p,q}_{p,q;r})^\perp$, l'égalité

$$G^{p,q}_r\big(u_p \otimes u_q\big) = G^{p,q}_r\big((u_p \otimes u_q)(\cdot + z\ \vec a)\big)$$

donne, par dérivation en z, au point $z = 0$, et en notant $\vec{a} = (a_p, a_q)$, $X_{a_i} = \langle a_i, \nabla_{\vec{\theta}i} \rangle$,

$$0 = G_r^{p,q}\big((X_{a_p}u_p) \otimes u_q\big) + G_r^{p,q}\big(u_p \otimes (X_{a_q}u_q)\big) \ .$$

Il suffit donc de trouver a_q réalisant $(a_{p,k}, a_q) \in (V_{p,q;r}^{p,q})^{\perp}$. Notant ${}^tJ_q^p : V_{p,q,r}^p \to V_{p,q,r}^q$ l'isomorphisme associant à $\vec{\theta}^p \in V_{p,q,r}^p$ l'unique $\vec{\theta}^q \in V_{p,q,r}^q$ réalisant

$$\langle \vec{\alpha}_q \ , \ \vec{\theta}^q \rangle \ = \ \langle J_q^p \vec{\alpha}_p \ , \ \vec{\theta}^p \rangle \quad , \quad \forall \vec{\alpha}_q \in R_{p,q;r}^q,$$

on écrit que pour tout $\vec{\alpha}_p \in R_{p,q;r}^p$, on a

$$\begin{aligned} 0 = \ & \langle \vec{\alpha}_p \ , \ a_{p,k} - {}^tJ_q^p \ ({}^tJ_q^p)^{-1} a_{p,k} \rangle \ = \ \langle \vec{\alpha}_p \ , \ a_{p,k} \rangle + \langle J_q^p \vec{\alpha}_p \ , -({}^tJ_q^p)^{-1} a_{p,k} \rangle \\ = \ & \langle J_{p,q}^p \vec{\alpha}_p \ , \ (a_{p,k}, -({}^tJ_q^p)^{-1} a_{p,k}) \rangle \end{aligned}$$

Les $J_{p,q}^p \vec{\alpha}_p$ décrivant $R_{p,q;r}^{p,q}$, on en déduit que $(a_{p,k}, -({}^tJ_q^p)^{-1} a_{p,k}) \in (V_{p,q;r}^{p,q})^{\perp}$ et ainsi $a_q = -({}^tJ_q^p)^{-1} a_{p,k}$ convient. On obtient

$$\partial_{\theta_k^r}[G_r^{p,q}\big(u_p \otimes u_q\big)] = G_r^{p,q}\big(u_p \otimes (X_{a_{q,k}} + X_{({}^tJ_q^p)^{-1}a_{p,k}})u_q\big) \ ,$$

ce qui définit Y_k. □

LEMME 5.2.7. *Soit l'espace* $\mathcal{F}_0(T,m_i) := C^0(\mathcal{A}_T, L^1(\mathbb{T}^{m_i})) \cap L^\infty(\mathcal{A}_T, BV(\mathbb{T}^{m_i}))$, *muni de la norme*

$$\|U_i\|_{\mathcal{F}_0(T,m_i)} \ := \ \|U_i\|_{L^\infty(\mathcal{A}_T \times \mathbb{T}^{m_i})} + \sup_{(t,x)\in\mathcal{A}_T} \ \|\nabla_{\vec{\theta}i} \ U_i(t,x,.)\|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^{m_i})} \ .$$

L'opérateur $\mathcal{R}_{p,q;r}$ *se prolonge en une application bilinéaire continue de* $\mathcal{F}_0(T,m_p) \times \mathcal{F}_0(T,m_q)$ *dans* $\mathcal{F}_0(T,m_r)$.

PREUVE. Pour $i \in \{p,q\}$, soit $U_i \in \mathcal{F}_0(T,m_i)$; le Lemme 5.2.5 donne un sens à $G_r^{p,q}(U_p \otimes U_q)$ dans $C^0(\mathcal{A}_T, L^1(\mathbb{T}^{m_i}))$, donc $\mathcal{R}_{p,q;r}(U_p, U_q)$ est défini au sens des distributions par

$$\mathcal{R}_{p,q;r}(U_p, U_q) := \sum_{k=1}^{m_r} \ \partial_x \psi_k^r(t,x) \ \partial_{\theta_k^r} \ [G_r^{p,q}(U_p \otimes U_q)] \ .$$

Soit $(U_i^n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $C^0(\mathcal{A}_T, C^\infty(\mathbb{T}^{m_i}))$, bornée dans $\mathcal{F}_0(T,m_i)$, convergente vers U_i dans $C^0(\mathcal{A}_T, L^1(\mathbb{T}^{m_i}))$:

$$\sup_{n\geq 1} \|U_i^n\|_{\mathcal{F}_0(T,m_i)} \leq 2 \ \|U_i\|_{\mathcal{F}_0(T,m_i)} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \|U_i^n - U_i\|_{L^\infty(\mathcal{A}_T, L^1(\mathbb{T}^{m_i}))} = 0 \ .$$

Le Lemme 5.2.6 donne les formules $\mathcal{R}_{p,q;r}(U_p^n, U_q^n) = \sum_{k=1}^{m_r} \partial_x \psi_k^r \;\; G_r^{p,q}(U_p^n \otimes Y_k U_q^n)$,

$$\text{(5.2.7)} \qquad \partial_{\theta^r_{k'}} \mathcal{R}_{p,q;r}(U_p^n, U_q^n) = \sum_{k=1}^{m_r} \partial_x \psi_k^r \quad G_r^{p,q}(X_{k'} U_p^n \otimes Y_k U_q^n) \ ,$$

la borne

$$\|\mathcal{R}_{p,q;r}(U_p^n, U_q^n)\|_{\mathcal{F}_0(T,m_r)} \leq C \;\; \|U_p\|_{\mathcal{F}_0(T,m_p)} \|U_q\|_{\mathcal{F}_0(T,m_q)}$$

et l'estimation

$$\begin{aligned} &\|\partial_{\theta^r_k} G_r^{p,q}(U_p^n \otimes U_q^n) - \partial_{\theta^r_k} G_r^{p,q}(U_p^{n'} \otimes U_q^{n'})\|_{L^\infty(\mathcal{A}_T, L^1(\mathbb{T}^{m_r}))} \\ &\quad \leq C\big(\|U_p\|_{\mathcal{F}_0(T,m_p)} \|U_n^q - U_{n'}^q\|_{L^\infty(\mathcal{A}_T, L^1(\mathbb{T}^{m_q}))} \\ &\qquad + \|U_q\|_{\mathcal{F}_0(T,m_q)} \|U_n^p - U_{n'}^p\|_{L^\infty(\mathcal{A}_T, L^1(\mathbb{T}^{m_p}))}\big) \ . \end{aligned}$$

Ainsi la suite de fonctions continues sur $\mathcal{A}_T$ à valeurs L^1, $(\mathcal{R}_{p,q;r}(U_p^n, U_q^n))_{n \geq 1}$, est de Cauchy dans $L^\infty(\mathcal{A}_T, L^1(\mathbb{T}^{m_r}))$. Sa limite $\mathcal{R}_{p,q;r}(U_p, U_q)$ est donc continue sur $\mathcal{A}_T$ à valeurs L^1 et elle vérifie

$$\|\mathcal{R}_{p,q;r}(U_p, U_q)\|_{L^\infty(\mathcal{A}_T \times \mathbb{T}^{m_r})} \leq C \;\; \|U_p\|_{\mathcal{F}_0(T,m_p)} \|U_q\|_{\mathcal{F}_0(T,m_q)} \ .$$

Les suites des dérivées en θ sont gérées par la formule (5.2.7); (t, x) étant fixé dans $\mathcal{A}_T$, la suite $(\mathcal{R}_{p,q;r}(U_p^n, U_q^n)(t, x, \cdot))_n$ est bornée dans $BV(\mathbb{T}^{m_r})$ et convergente dans $L^1(\mathbb{T}^{m_r})$. De plus, pour tout compact K de $\mathbb{R}^{m_r}$, tout test $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{m_r})$ à support dans K, on a

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^{m_r}} \partial_{\theta^r_k} G_r^{p,q}(U_p \otimes U_q) \;\; \partial_{\theta^r_{k'}} \varphi \;\; d\vec{\theta}^r \right| \\ &\quad \leq C \;\; |K| \liminf \;\; \|G_r^{p,q}(X_k U_p^n \otimes Y_{k'} U_q^n)\|_{L^\infty(\mathcal{A}_T, L^1(\mathbb{T}^{m_r}))} \;\; \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{m_r})} \ . \end{aligned}$$

La norme $\|\mu\|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^d)}$ étant aussi

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^d)} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m^d} \quad \sup_{\varphi \in C_c^0(]0,m[^d) \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1} \left| \int \varphi \;\; d\mu \right| \ ,$$

il s'en suit que $\mathcal{R}_{p,q;r}(U_p, U_q)(t, x, \cdot)$ appartient à $BV(\mathbb{T}^{m_r})$, avec

$$\sup_{(t,x) \in \mathcal{A}_T} \|\nabla_{\vec{\theta}^r} \mathcal{R}_{p,q;r}(U_p, U_q)(t, x, \cdot)\|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^{m_r})} \leq C \;\; \|U_p\|_{\mathcal{F}_0(T,m_p)} \|U_q\|_{\mathcal{F}_0(T,m_q)} \ .$$

Afin de présenter le résultat d'interaction sous sa forme utilisée dans les Sections 2 et 4, on réintroduit les exposants et indices des angles $\mathcal{A}^{i,\pm}$ et des secteurs $S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$. Dans un secteur $S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ et pour la base $\vec{\psi}_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ de l'espace des phases $\Phi_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$, est défini le champ de vecteurs

$$T_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}} := \partial_x \vec{\psi}_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}} \cdot \nabla_{\vec{y}_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}} \ .$$

Dans un angle $\mathcal{A}^{i,\pm}$ et pour chaque triplet $(p,q;r)$ d'indices deux à deux distincts, est défini l'opérateur de résonance

$$\mathcal{R}_{p,q;r}^{i,\pm} : (U_p, U_q) \mapsto T_{\pm}^{r,\overset{\pm}{\circ}} \mathcal{C}_{p,q;r}^{i,\pm}(U_p \otimes U_q) \ , \tag{5.2.8}$$

où l'action convolutive

$$\mathcal{C}_{p,q;r}^{i,\pm}(U_p, U_q) := G_r^{p,q}(U_p \otimes U_q)$$

utilise l'opérateur $G_r^{p,q}$ concerné par le système de phases en jeu.

On retient l'action décrite par le Lemme 5.2.7: l'opérateur $\mathcal{R}_{p,q;r}^{i,\pm}$ est bilinéaire continu de

$$\Big(C^0(\mathcal{A}_T^{i,\pm}, L^1(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{p,\overset{\pm}{\circ}}})) \cap L^\infty(\mathcal{A}_T^{i,\pm}, BV(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{p,\overset{\pm}{\circ}}}))\Big)$$
$$\times \Big(C^0(\mathcal{A}_T^{i,\pm}, L^1(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{q,\overset{\pm}{\circ}}})) \cap L^\infty(\mathcal{A}_T^{i,\pm}, BV(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{q,\overset{\pm}{\circ}}}))\Big)$$
$$\text{dans } C^0\big(\mathcal{A}_T^{i,\pm}, L^1(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{r,\overset{\pm}{\circ}}})\big) \cap L^\infty\big(\mathcal{A}_T^{i,\pm}, BV(\mathbb{T}^{m_{\pm}^{r,\overset{\pm}{\circ}}})\big).$$

5.3. – Résolution des équations de modulation

Ces équations ne sont couplées que par les termes résonants qui, suivant la remarque de S.Schochet [S, Section 4] et le Lemme 5.2.7, peuvent être traités comme des termes non principaux. Une méthode de viscosité en variables rapides peut ainsi être appréhendée, les variables lentes induisant de plus une structure feuilletée. On décrit ici les différentes étapes de la construction en insistant sur les points essentiels.

Dans un premier temps, dans le système $(\mathcal{M})$, on remplace les termes non linéaires par un second membre et on ajoute de la viscosité en variable rapide. Les équations d'intérieur, complètement découplées, s'écrivent dans les secteurs $S_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}$; les conditions sur le bord $x = 0$ ordonnent leur résolution. En fait, chaque équation d'intérieur peut se résoudre feuille à feuille dans le feuilletage $\{x - \underline{\lambda}_j^{\pm} t = cte\} \times \mathbb{R}^{m_{\pm}^{j,\overset{\pm}{\circ}}}$, ce qui ramène le système à la famille suivante de problèmes de Cauchy paraboliques, où le paramètre de viscosité μ est positif:

— pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, dans chaque feuille $\{x - \underline{\lambda}_j^{\pm} t = \pm\eta\} \times \mathbb{R}^{m_\pm^{j,\pm}}$ paramétrée par $\eta > 0$,

$$(\partial_t + \underline{\lambda}_j^{\pm}\partial_x)(U_{\pm,\mu}^{j,\pm}) - \mu\Delta_{\vec{y}_\pm^{j,\pm}} U_{\pm,\mu}^{j,\pm} = g_\pm^{j,\pm}, \quad U_{\pm,\mu}^{j,\pm}(0, \pm\eta, \vec{y}_\pm^{j,\pm}) = \sigma_{0,\pm,\mu}^{j}(\pm\eta, \vec{y}_\pm^{j,\pm})$$

où les données de Cauchy sont des régularisées en variables rapides des profils initiaux $\sigma_{0,\pm}^{j,\pm}$, (ce qui n'affecte ni la périodicité ni la moyenne):

$$\sigma_{0,\pm,\mu}^{j} := \rho_{\mu^{1/2}} * \sigma_{0,\pm}^{j} \ ,$$

— pour $j \in N_{nc}^{\pm}$, dans chaque feuille $\{x - \underline{\lambda}_j^{\pm} t = -\underline{\lambda}_j^{\pm}\tau\} \times \mathbb{R}^{m_\pm^{j,\circ}}$ paramétrée par $\tau > 0$,

$$(\partial_t + \underline{\lambda}_j^{\pm}\partial_x)(U_{\pm,\mu}^{j,\circ}) - \mu\Delta_{\vec{y}_\pm^{j,\circ}} U_{\pm,\mu}^{j,\circ} = g_\pm^{j,\circ}$$

$$U_{\pm,\mu}^{j,\circ}(\tau, 0, \vec{y}_b - \frac{\xi(\tau)}{\underline{\lambda}_j^{-}}\partial_t\vec{\varphi}_b(\tau)) = \underline{\mathcal{C}}^{\pm,j}(U_{\pm,\mu}^{c,\pm}(\tau, 0, L_c^{\pm}(\vec{y}_b) - \frac{\xi(\tau)}{\underline{\lambda}_c^{\pm}}\partial_t\vec{\psi}_\pm^{c,\pm}(\tau, 0)) \ .$$

On désigne par $C_\#^\infty$ l'espace des fonctions C^∞, 1-périodiques dans chaque variable. Pour des données $g_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}$ continues par morceaux en variable lente, à valeurs dans $C_\#^\infty$, chaque problème de Cauchy du premier type possède une solution globale continue en variable d'évolution à valeurs dans $C_\#^\infty$ qui dépend de plus continûment de la variable de feuille η. Les traces sur $x = 0$ des solutions causales déterminent alors la famille continue en τ à valeurs $C_\#^\infty$ des données de Cauchy des problèmes du second type, qu'on résout de la même façon.

Dans un second temps, on présente un schéma itératif sur le système intégral équivalent au système parabolique linéaire en régularité $C_\#^1$. On l'initialise avec une donnée $\mathbf{g}$ nulle, ce qui fournit une solution $\mathbf{U}_1$, puis pour $n \geq 0$, $\mathbf{U}_{n+1}$ s'obtient de $\mathbf{U}_n$ à partir de la donnée $\mathbf{g}_n = -Div_{\vec{y}}\ \vec{\mathbf{h}}_n$, où dans chaque angle $\vec{\mathbf{h}}_n$ s'écrit schématiquement

$$\left(H(\mathbf{U}_n^j)\left(\sum_{k\neq j}\Gamma_{k,j}^j\langle\sigma^k\rangle\mathbf{U}_n^j + \frac{1}{2}\Gamma_{j,j}^j(\mathbf{U}_n^j)^2\right) + \sum_{j\neq p<q\neq j}\Gamma_{p,q}^j C_{p,q;j}(H(\mathbf{U}_n^p)\otimes H(\mathbf{U}_n^q))\right)\partial_x\vec{\psi}^j,$$

H désignant une fonction régulière de troncature dans les (grandes) valeurs. En temps bornés, le schéma converge dans l'espace des fonctions continues à valeurs dans $C_\#^0$; de plus la limite $\mathbf{U}$ est continue à valeurs dans $C_\#^\infty$ et lipschitzienne en la variable totale. C'est alors une solution globale en temps du système des équations de modulation visqueuses $(\tilde{\mathcal{M}})_\mu$ où les termes non linéaires sont tronqués dans les valeurs. Par principe du maximum, ces troncatures peuvent être supprimées dans les temps petits, ce qui fournit une solution $(\sigma_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}})$ au système des équations de modulation visqueuses $(\mathcal{M})_\mu$ jusqu'à un temps $T_\mu^0 > 0$, qui ne dépend en fait que de μ et d'une borne L^∞ des données de Cauchy

$$T_\mu^0 = T(\mu, \|(\sigma_{0,\pm}^j)\|_{L^\infty}) \ .$$

Le troisième temps consiste à montrer que, sous une hypothèse de petitesse sur L^1V_0, le temps T_μ est infini. Cette partie est développée en détail. Le contrôle uniforme en μ de l'amplitude ne pouvant se faire que via la variation, on introduit les fonctions suivantes:
— la variation totale sur le tore des profils visqueux, fonction continue jusqu'au bord dans le secteur $S_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}$

$$f_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,x) \ := \left\|\nabla_{\tilde{y}_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}} \sigma_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,x,.)\right\|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^{m_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}})} \ ,$$

— les fonctionnelles "L^∞ à valeurs mesure"

$$\mathcal{L}^\infty(f_\mu;t) \ := \ \max_{j\in[1,N]} \ \max_{\pm,\overset{\pm}{\circ}} \ \sup_{x\in S_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t)} \ f_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,x) \ ,$$

et pour le poids causal $K \geq 1$ à déterminer, les fonctionnelles "L^1 à valeurs mesure"

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_K^1(f_\mu;t) := \sum_{\pm} \ \sum_{j\in N_{nc}^\pm} \ \sum_{\overset{\pm}{\circ}} \ \int_{S_\pm^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t)} f_{\pm,\mu}^{j,\overset{\pm}{\circ}}(t,x) \ dx \\ + \ K \sum_{\pm} \ \sum_{j\in N_c^\pm} \ \int_{S_\pm^{j,\pm}(t)} f_{\pm,\mu}^{j,\pm}(t,x) \ dx.\end{aligned}$$

Le point clé de la preuve consiste à obtenir des bornes uniformes en temps pour les deux expressions $\mathcal{L}_K^1$ et $\mathcal{L}^\infty$. C'est l'objet du lemme suivant dont la preuve est reportée en fin de section:

LEMME 5.3.1. *Il existe un seuil $\delta_0 > 0$ et des constantes K, C et D indépendantes de μ tels que si*

$$0 \leq \mathcal{L}_K^1(f_\mu;0) \leq \delta \leq \delta_0 \ ,$$

alors pour tout instant $t \in [0, T_\mu]$,

$$\mathcal{L}_K^1(f_\mu;t) \leq 4\delta \quad , \quad \max_{i\in[1,N]} \ \max_{\overset{\pm}{\circ}} \ \| \ \sigma_{\pm,\mu}^{i,\overset{\pm}{\circ}} \ \|_{L^\infty(\mathcal{A}_\pm^{i,\pm}\times\mathbb{T}^{d_\pm^i})} \ \leq \ D \ ,$$

$$\mathcal{L}^\infty(f_\mu;t) \leq C \ \mathcal{L}^\infty(f_\mu;0) \ \leq \ C \ \max_{i\in[1,N]} \ \| \ \sigma_{0,\pm}^i \ \|_{L^\infty(\mathbb{R}^\pm;BV(\mathbb{T}^{d_\pm^i}))} \ .$$

La contrainte de petitesse qui est imposée dans l'introduction

$$L^1 V_0 = \int_{\mathbb{R}^\pm} \quad \| \nabla_{\vec{y}^j_\pm} \ \sigma^j_{0,\pm}(x,.) \|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^{d^j_\pm})} \quad \ll \ 1$$

peut à présent être quantifiée:

$$0 \leq \mathcal{L}^1_K(f_\mu; 0) \leq \delta_0.$$

La deuxième étape fournit une solution locale $\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}$. A l'instant d'arrêt T^0_μ, la trace $\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}(T^0_\mu,.)$ vit dans chaque feuille dans l'espace $C^\infty_\#$. Elle vérifie d'après le Lemme 5.3.1,

$$\mathcal{L}^\infty(f_\mu; T^0_\mu) \ \leq \ C \ \mathcal{L}^\infty(f_\mu; 0).$$

Les moyennes $\langle \sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu} \rangle \ = \ \langle \sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm} \rangle$, satisfont le système de propagation qui est présenté dans la Section 2. Elles restent bornées:

$$\max_{i \in N^\pm_{nc} \cup \{\kappa\}} \quad \sup_{(t,x)\in \mathcal{A}^i_\pm} \quad |\langle \sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu} \rangle (t,x)| \ \leq \ D_4 \ < \ \infty.$$

On écrit

$$\begin{aligned} \sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}(t,x,\vec{y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}) = & \ \sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}(t,x,\vec{z}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}) \\ & + \int_0^1 \big(\nabla_{\vec{y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}} . \sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}\big)\big(t,x,\vec{z}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm} + s(\vec{y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm} - \vec{z}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm})\big).(\vec{y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm} - \vec{z}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}) ds \end{aligned}$$

qui donne, après intégration en $\vec{z}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}$,

$$\max_{i \in N^\pm_{nc} \cup \{\kappa\}} \qquad \sup_{(t,x,\vec{y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}) \in \mathcal{A}^i_\pm \times \mathbb{T}^{m^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}}} \qquad | \ \sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}(t,x,\vec{y}^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}) \ | \ \leq \ D \ < \ \infty.$$

En particulier, au temps T^0_μ, la norme L^∞ de la trace $\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}(T^0_\mu,\cdot)$ est inférieure à D. Cette majoration permet d'itérer le procédé qui est décrit à la deuxième étape. La solution se trouve ainsi définie au delà de T^0_μ, jusqu'au temps

$$T^1_\mu \ := \ T^0_\mu + \ T(\mu, D).$$

Enfin, toujours à l'aide du Lemme 5.3.1, on atteint tous les instants

$$T^n_\mu \ := \ T^0_\mu + n \ T(\mu, D) \ , \ n \in \mathbb{N},$$

ce qui prouve l'existence globale en temps d'une solution visqueuse $\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}$.

Le dernier temps concerne le passage à la limite $\mu \to 0$ sur la famille $(\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu})_\mu$. Il s'effectue de façon standard. On établit d'abord un contrôle presque-lipschitzien en (t,x) à valeurs L^1 sur le tore, puis, par compacité, on extrait une suite $(\mu(n))_n$ tendant vers zéro telle que pour tous (t,x) les suites

$(\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu(n)}(t,x))_n$ convergent dans L^1. Dans le passage à la limite sur les équations $(\mathcal{M})_\mu$, seul le terme résonant est non standard. Il relève du Lemme 5.2.3, pour tout (t,x) fixé. La limite $(\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm})$ hérite des estimations et L^∞ en (t,x) à valeurs BV du tore, et de plus devient lipschizienne (t,x) à valeurs L^1. Le terme de résonance prend alors le sens donné au Lemme 5.2.7.

Enfin la limite $(\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm})$ est solution entropique au sens de Kruskov: pour tout j, dans chaque feuille, la condition [K,(2.1)] est réalisée. L'unicité de telles solutions se déduit de la stabilité L^1 par rapport aux données initiales, comme dans [S,(4.1)]. Elle entraîne en outre la convergence de la famille entière $(\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu})_\mu$ vers $(\sigma^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm})$ dans L^∞ en (t,x) à valeurs L^1 du tore.

La preuve du Théorème 2.1 est achevée. □

Preuve du Lemme 5.3.1. La solution périodique σ_μ d'une loi scalaire visqueuse (où $\vec{a}.\nabla_{\vec{y}}$ et $\vec{b}.\nabla_{\vec{y}}$ désignent des champs de vecteurs réguliers)

$$\partial_s\sigma_\mu + \vec{a}.\nabla_{\vec{y}}\sigma_\mu + \vec{b}.\nabla_{\vec{y}}(\sigma_\mu^2) = \mu\Delta_{\vec{y}}\sigma_\mu \;, \quad (s,\vec{y}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \;,$$

possède une variation sur le tore qui n'augmente pas avec le temps

$$\frac{d}{ds}||(\nabla_{\vec{y}}\sigma_\mu)(s,.)||_{L^1(\mathbb{T}^d)} \le 0 \;.$$

Les composantes du système $(\mathcal{M})_\mu$ sont obtenues en ajoutant dans chaque feuille à de telles lois scalaires, un second membre de type résonant qui fait intervenir des feuilles transverses. D'après le Lemme 5.2.7, cette modification induit une augmentation de la variation à un taux au plus proportionnel au carré de sa valeur courante. En conséquence, les fonctions $f^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}$ peuvent être dominées par des fonctions positives et régulières $g^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}$ qui sont gérées par le système suivant, où D_0 désigne une constante positive de structure:

$$(\mathcal{M}^*)_\mu \begin{cases} (\partial_t + \underline{\lambda}_j^\pm\partial_x)g^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu} = D_0 \displaystyle\sum_{j\neq p<q\neq j} g^{p,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}\; g^{q,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu} \text{ dans chaque angle de} S^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm}, \\ g^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu} \quad \text{continu sur les } x = \underline{\lambda}_i^\pm t \quad \text{traversant } S^{j,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm} \;, \\ g^{j,\pm}_{\pm,\mu}(0,x) = g^{j,\pm}_{0,\pm,\mu}(x) \ge f^{j,\pm}_{\pm,\mu}(0,x) \quad \text{dans } \pm x \ge 0 \;, \\ g^{j,\circ}_{\pm,\mu}(t,0) = D_0 \displaystyle\sum_{k\in N_c^\pm} g^{k,\pm}_{\pm,\mu}(t,0) \quad \text{dans } t \ge 0 \text{ pour tout } j \in N_{nc}^\pm \;. \end{cases}$$

On leur attache les fonctions $\mathcal{L}^1_K(g;t)$ et $\mathcal{L}^\infty(g;t)$, définies comme plus haut pour f.

Les données de Cauchy $g^{j,\pm}_{0,\pm,\mu}$ sont choisies régulières. Elles satisfont à l'encadrement

$$f^{j,\pm}_{\pm,\mu}(0,x) \leq g^{j,\pm}_{\pm,\mu}(0,x) \leq f^{j,\pm}_{\pm,\mu}(0,x) + \iota \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^{\pm},$$

où le paramètre $\iota \leq \delta$ est ajusté de manière à ce que

$$0 < \mathcal{L}^1_K(f;0) \leq \mathcal{L}^1_K(g;0) \leq 2\ \delta \leq 2\ \delta_0.$$

On introduit les fonctionnelles auxilliaires

$$\begin{aligned}
Q^{\pm}(g;t) &:= \sum_{i \in N^{\pm}_{nc} \cup \{\kappa\}} \ \sum_{\pm p > \pm q} \iint_{\{(x,y) \in \mathcal{A}^{i,\pm}_{\pm}(t), \pm x \leq \pm y\}} g^{p,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}(t,x) g^{q,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}(t,y)\ dxdy\ , \\
Q(g;t) &:= \sum_{\pm} \ Q^{\pm}(g;t)\,, \\
B(g;t) &:= \sum_{k \in N^{\pm}_c} \ g^{k,\pm}_{\pm,\mu}(t,0)\,, \\
\mathcal{F}(g;t) &:= \mathcal{L}^1_K(g;t) + L\ \ Q(g;t).
\end{aligned}$$

Les deux quantités $\mathcal{L}^1_K(g;t)$ et $Q(g;t)$ sont dérivées par rapport au temps. La dérivée ∂_t est placée sous le signe somme. Les identités composant $(\mathcal{M}^*)_\mu$ permettent de la remplacer par des dérivées spatiales ∂_x. On procède ensuite à des intégrations par partie. Ces manipulations mettent à jour deux constantes de structure D_1 (grande) et D_2 (petite) pour lesquelles on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ \mathcal{L}^1_K(g;t) &\leq \ K\ D_1\ Q(g;t)\ +\ (D_1 - K\ D_2)\ B(g;t)\ , \\
\frac{d}{dt}\ Q(g;t) &\leq \ D_1\ \mathcal{L}^1_K(g;t)\ B(g;t)\ +\ (D_1\ \mathcal{L}^1_K(g;t) - D_2)\ Q(g;t)\ .
\end{aligned}$$

On fixe

$$K\ := \ (2\ D_1/D_2) + 1 \quad ; \quad L := (K+1)\ D_1/D_2\ .$$

Le seuil δ_0 sera choisi inférieur à δ'_0 avec $0 < \delta'_0 := 1/(4\ L\ N^2)$. Ainsi, à l'instant de départ, on a:

$$\mathcal{F}(g;0)\ \leq\ \mathcal{L}^1_K(g;0) + L\ N^2\ \mathcal{L}^1_K(g;0)^2\ \leq\ (2 + 4\ L\ N^2\ \delta'_0)\ \delta\ \leq\ 3\ \delta\ .$$

On pose

$$t_\delta\ := \ \sup\ \{\ t \in [0,T]\ ;\ \mathcal{L}^1_K(g;s) \leq 4\ \delta\ ,\ \forall\ s \in [0,t]\ \}\ .$$

Sur l'intervalle $[0, t_\delta]$, on dispose d'un contrôle à priori sur $\mathcal{L}^1_K$. Cette majoration permet de mettre à jour la décroissance

$$\frac{d}{ds}\ \mathcal{F}(g;s)\ =\ \frac{d}{ds}\ \mathcal{L}^1_K(g;s)\ +\ L\ \frac{d}{ds}\ Q(g;s)\ \leq\ 0$$

ce qui garantit

$$\mathcal{L}^1_K(g;s) \ \le\ \mathcal{F}(g;s) \ \le\ \mathcal{F}(g;0) \ \le\ 3\ \delta \quad , \quad \forall\ s \in [0,t_\delta]\ .$$

La continuité de $\mathcal{L}^1_K(g;\cdot)$ assure alors la borne par 4δ au delà de t_δ, ce qui signifie que t_δ coïncide nécessairement avec T_μ.

Il reste à évaluer $\mathcal{L}^\infty(g;t)$. On a, pour un certain D_3,

$$g^{j,\pm}_{\pm,\mu}(t,x) = g^{j,\pm}_{\pm,\mu}(0, x - \underline{\lambda}^\pm_j\ t) + D_0 \sum_{j\neq p<q\neq j} \int_0^t (g^{p,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}\ g^{q,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu})\big(s, x+\underline{\lambda}^\pm_j(s-t)\big)ds$$

$$\le \mathcal{L}^\infty(g;0) + D_0 D_3 \delta\big(\sup_{0\le s\le t} \mathcal{L}^\infty(g;s)\big)\ ,$$

$$\begin{aligned} g^{j,\circ}_{\pm,\mu}(t,x) \le\ & D_0 \sum_{k\in N^\pm_c} g^{k,\circ}_{\pm,\mu}\big(t-(x/\underline{\lambda}^\pm_j),0\big) \\ & +\ D_0 \sum_{j\neq p<q\neq j} \int_{t-(x/\underline{\lambda}^\pm_j)}^t (\ g^{p,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}\quad g^{q,\overset{\pm}{\circ}}_{\pm,\mu}\ )\big(s, x+\underline{\lambda}^\pm_j(s-t)\big)\ ds \\ \le\ & N\ D_0 \Big[\ \mathcal{L}^\infty(g;0) + D_0\ D_3\ \delta\ \big(\sup_{0\le s\le t}\ \mathcal{L}^\infty(g;s)\big)\ \Big] \\ & +\ D_0\ D_3\ \delta\ \ \big(\sup_{0\le s\le t}\ \ \mathcal{L}^\infty(g;s)\big)\ . \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L}^\infty(g;t)\ \le\ (1+N\ D_0)\ [\ \mathcal{L}^\infty(g;0)\ +\ D_0\ D_3\ \delta\ \ \big(\sup_{0\le s\le t}\ \ \mathcal{L}^\infty(g;s)\big)\ ].$$

Le choix

$$\delta_0\ := \min\Big(\ \delta_0'\ ;\ \ 1\ /\ \big(2\ (1+N\ D_0)\ D_0\ D_3\big)\ \Big)$$

donne accès à:

$$\sup_{0\le s\le t}\ \mathcal{L}^\infty(g;s)\ \le\ C\ \ \mathcal{L}^\infty(g;0)\quad ,\quad C\ :=\ 2\ (1+N\ D_0).$$

La conclusion du Lemme 5.3.1 se trouve établie. □

RÉFÉRENCES

[B] A. BRESSAN, "Lectures notes on systems of conservation laws", S.I.S.S.A, Trieste 1994.

[C-R] P. CEHELSKY – R. ROSALES, *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves in the presence of shocks: a single space variable in a homogeneous, time independant medium*, Stud. Appl. Math. **74** (1986), 117-138.

[Ch] C. CHEVERRY, *Justification de l'optique géométrique non linéaire pour un système de lois de conservation*, Duke Math. J. **87** (1997), 213-263.

[Co] A. CORLI, *Weakly nonlinear geometric optics for hyperbolic systems of conservation laws with shock waves*, Asymptotic Anal. **10** (1995), 117-172.

[C-ST] A. CORLI – M. SABLÉ-TOUGERON, *Perturbations of bounded variation of a strong shock wave*, J. Differential Equations **138** (1997), 195-228.

[D-M] R. DI PERNA – A. MAJDA, *The validity of nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws*, Comm. Math. Phys. **98** (1985), 313-347.

[E-S] W. E – D. SERRE, *Correctors for the homogenization of conservation laws with oscillatory forcing terms*, Asymptotic Anal. **5** (1992), 311-316.

[G-L] J. GLIMM – P. D. LAX, "Decay of solutions of systems of hyperbolic conservation laws", Memoirs of the Amer. Math. Soc. n. 101, Providence RI, 1970.

[H-M-R] J. K. HUNTER – A. MAJDA – R. ROSALES, *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves. II. Several space variables*, Stud. Appl. Math. **75** (1986), 187-226.

[J-M-R1] J. L. JOLY – G. MÉTIVIER – J. RAUCH, *Resonant one dimensional nonlinear geometric optics*, J. Funct. Anal. **114** (1993), 106-231.

[J-M-R2] J. L. JOLY – G. MÉTIVIER – J. RAUCH, *Focusing at a point and absorption of nonlinear oscillations*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 3921-3969.

[J] S. JUNCA, "Optique géométrique non linéaire, chocs forts, relaxation", thèse, Université de Nice, 1995.

[K] S. N. KRUZKOV, *First order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR-Sb. **10** (1970), 217-243.

[L] P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 537-566.

[M-A] A. MAJDA – M. ARTOLA, *Nonlinear geometric optics for hyperbolic mixed problems*, In: "Analyse Mathématique et Applications, Contribution en l'honneur de J. L. Lions", Gauthier-Villars, Paris, 1988, pp. 319-356.

[M-R] A. MAJDA – R. ROSALES, *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves. I. A single space variable*, Stud. Appl. Math. **71** (1984), 149-179.

[S] S. SCHOCHET, *Resonant nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws*, J. Differential Equations **113** (1994), 473-504.

[T] L. TARTAR, *Compacité par compensation: résultats et perspectives*, In: "Nonlinear Part. Diff. Eq. and their Appl. Collège de France, vol IV". Research Notes in Math. 84, Pitman, 1983.

[V] A. VOLPERT, *The spaces BV and quasilinear aquations*, Math. USSR-Sb. **2** (1967), 225-267.

IRMAR, Université Rennes 1,
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex, France
cheverry@univ-rennes1.fr
monique.sable@univ-rennes1.fr