

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

MYRIAM OUNAIES

**Estimations du type Nevanlinna pour les applications  
non dégénérées de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série*, tome 26,  
n° 4 (1998), p. 737-748

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1998\\_4\\_26\\_4\\_737\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1998_4_26_4_737_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Estimations du type Nevanlinna pour les applications non dégénérées de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$

MYRIAM OUNAIES

**Abstract.** Considering a family of sets  $\{E_a, a \in (\mathbb{C}^*)^n\}$  which intersect the image of every non-degenerate holomorphic map, we show that the asymptotic growth of  $F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)$  is the same for all  $a \in (\mathbb{C}^*)^n$ .

**Mathematics Subject Classification (1991):** 32A15 (primary), 32A22, 32H02, 32H30 (secondary).

### Introduction

Nous nous intéressons dans ce travail à l'image des applications holomorphes non dégénérées de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$  pour  $n \geq 2$  et plus précisément à la taille de l'intersection de ces images avec des ensembles discrets inévitables. Nous généralisons ici aux applications non dégénérées (c'est à dire dont le Jacobien n'est pas identiquement nul) les résultats de [9] qui concernaient les applications dont le Jacobien est identiquement égal à une constante non nulle.

Ce travail est motivé par la théorie de Nevanlinna en une variable. Dans  $\mathbb{C}$ , une fonction méromorphe prend toute les valeurs de la sphère de Riemann sauf au plus deux. D'après la théorie de Nevanlinna [8], en dehors d'un ensemble exceptionnel dénombrable, chaque valeur est prise avec la même fréquence asymptotique.

La situation est différente dans  $\mathbb{C}^n$  pour  $n \geq 2$ . Il existe en effet des applications biholomorphes dont le jacobien est identiquement égal à 1 mais dont l'image évite un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ : les applications de Fatou-Bieberbach (cf. [2], [3], [11]). Il existe d'autres exemples d'applications non dégénérées dont l'image est petite (cf. [5]), voire de volume fini (cf. [10]).

Dans ce contexte, l'existence d'ensembles discrets qui rencontrent l'image de toute application holomorphe non dégénérée prend toute son importance. Rosay et Rudin ont montré l'existence de ces ensembles "inévitables" et L. Gruman ([7]) a montré qu'une condition suffisante pour qu'un ensemble discret soit inévitable est que ses points se resserrent à l'infini avec une certaine vitesse.

Soit  $\mathbb{C}_0^n = \mathbb{C}^n \setminus \{z / \prod_{j=1}^n z_j = 0\}$  et  $M_F(r) = \sup_{z \in B(0,r)} \|F(z)\|$ . Gruman [7] a construit une famille  $\{E_a, a \in \mathbb{C}_0^n\}$  d'ensembles vérifiant cette condition, donc inévitables pour la famille  $\mathcal{F}$  des applications holomorphes non dégénérées. Il a montré que, pour  $a \in \mathbb{C}_0^n \setminus \psi_F$ , où  $\psi_F$  est un ensemble pluripolaire dans  $\mathbb{C}^n$ , la fréquence asymptotique de  $F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)$  est de l'ordre de  $M_F(r)^{\log \log M_F(r)^{2n-1}}$ .

Nous montrons dans cet article que, pour  $F$  dans  $\mathcal{F}$ , l'ensemble exceptionnel  $\psi_F$  est en fait vide.

**0. – Notations et définitions**

Nous désignerons par  $\|z\| = (\sum_{i=1}^n |z_i|^2)^{1/2}$  et  $[z] = \sup_{j=1 \dots n} |z_j|$ .

Si  $z = (z_1, \dots, z_n)$  et  $w = (w_1, \dots, w_n)$  sont dans  $\mathbb{C}^n$ ,  $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j w_j$ . Nous noterons  $B(a, r)$  la boule euclidienne de  $\mathbb{C}^n$  de centre  $a$  et de rayon  $r$ . Soient

$$\beta = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \|z\|^2, \quad \beta_k = \frac{1}{k!} \beta^k,$$

$$\alpha = i \partial \|z\|^2 \wedge \bar{\partial} \|z\|^2, \quad \gamma = i \partial \bar{\partial} \log \|z\|^2.$$

Si  $w$  est dans  $\mathbb{C}$ , nous noterons  $\Re w = \frac{w + \bar{w}}{2}$  et  $\Im w = \frac{w - \bar{w}}{2i}$ .

Pour une application holomorphe  $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , nous notons  $J_F(z)$  le Jacobiën de  $F$  au point  $z$ , pour  $a \in \mathbb{C}^n$ ,  $F^{-1}(a)$  l'image réciproque de  $a$  par  $F$  et

$$M_F(r) = \sup_{z \in B(0,r)} \|F(z)\|.$$

Nous noterons  $\mathcal{F}$  la famille  $\{F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \text{ holomorphe } J_F \neq 0\}$ .

Nous utiliserons également les notations suivantes:

$$e^{F(z)} = \left( e^{f_1(z)}, \dots, e^{f_n(z)} \right),$$

si  $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $F(N)(z) = (f_1(z) + 2\pi N_1, \dots, f_n(z) + 2\pi N_n)$ .

Si  $V : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction plurisousharmonique, nous notons

$$M_V(r) = \sup_{z \in B(0,r)} |V(z)|, \quad V^+(z) = \max(V(z), 0) \text{ et } V^-(z) = \max(-V(z), 0).$$

Nous avons donc  $V = V^+ - V^-$  et  $|V| = V^+ + V^-$ .

Nous noterons  $\mathbb{C}_0^n = \mathbb{C}^n \setminus \{z / \prod_{j=1}^n z_j = 0\}$ .

**DÉFINITION 0.1.** Soit  $\mathcal{C} = \{C^{(j)}, j = 1, \dots, 2n - 1\}$  une famille de  $2n - 1$  vecteurs de  $\mathbb{C}^n$ . Nous dirons que les vecteurs de  $\mathcal{C}$  sont **en position générale** si toute partie de  $n$  éléments de  $\mathcal{C}$  forme un système linéairement indépendant.  $\square$

**DÉFINITION 0.2.** Soit  $E$  un ensemble de  $\mathbb{C}^n$ . Nous dirons que  $E$  est un **ensemble  $\mathcal{F}$ -essentiel** pour tout  $F \in \mathcal{F}$ , pour tout  $r$  et  $r'$  dans  $\mathbb{R}^+$  nous avons

$$F(\{z / \|z\| \geq r\}) \cap E \cap \{z / \|z\| \geq r'\} \neq \emptyset. \quad \square$$

**1. – Résultats préliminaires**

On considère  $F \in \mathcal{F}$ . La difficulté par rapport au cas traité dans [9] réside dans le fait que le jacobien peut être très petit, nous allons donc introduire une fonction de troncature  $\chi$  qui sera nulle là où le jacobien est petit.

Pour  $j \in \mathbb{N}$ , soit  $\chi_j$  une fonction positive sur  $\mathbb{R}^+$ , de classe  $C^\infty$ , bornée par 1 et vérifiant

$$\begin{aligned} \chi_j(x) &= 0 && \text{si } x \leq j, \\ \chi_j(x) &= 1 && \text{si } x \geq j + 1. \end{aligned}$$

REMARQUE. Nous avons alors l'inégalité:  $\chi_j \leq \chi_{j-1}$ . Soit  $\gamma > 2n - 1$  et notons  $m_F(r) = \exp(\log M_F(r) [\log \log M_F(r)]^\gamma)$ .

LEMME 1. Soient  $r' > 0$  et  $r'' > r'$  tels que  $r'(r'' - r)^{-1} \geq 1$  et  $\varepsilon > 0$ . On note  $\varrho = \|z\|^2 - r'^2$ .

Soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_k, k < n$  des fonctions psh localement bornées sur  $B(0, r) \setminus K$ , ( $K$  compact dans  $B(0, r)$ ).

On note  $\theta = \bigwedge_{j=1}^k i \partial \bar{\partial} \varphi_j$ .

Soit  $\varphi$  une combinaison linéaire réelle des fonctions  $\varphi_j$ . Alors, pour  $j \in \mathbb{N}$ , si on pose  $\psi_r = m_F(r)^{2\varepsilon} |J_F|^2$ ,

i) 
$$\int_{B(0,r')} \varphi \theta \wedge i \partial \bar{\partial} (\varrho^2 \chi_j(\psi_r)) \wedge \beta_{n-k-1} = \int_{B(0,r')} (\varrho^2 \chi_j(\psi_r)) i \partial \bar{\partial} \varphi \wedge \theta \wedge \beta_{n-k-1}.$$

ii) il existe une constante  $C$  qui ne dépend que de  $n$  telle que, pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $r > 0$ ,

$$\begin{aligned} &\int_{B(0,r')} \varphi \theta \wedge i \partial \bar{\partial} (\varrho^2 \chi_j(\psi_r)) \wedge \beta_{n-k-1} \\ &\leq C \frac{r'^4}{(r'' - r')^{2n+2}} M_F(r'')^{2n} m_F(r)^{2\varepsilon} \int_{B(0,r')} (\chi_{j-1}(\psi_r)) |\varphi| \theta \wedge \beta_{n-k}. \quad \square \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.

i) C'est la même démonstration que dans le Lemme 1.2.2 dans [9] car

$$\bar{\partial}(\varrho^2 \chi_j(\psi_r)) = \varrho^2 \bar{\partial}(\chi_j(\psi_r)) + (\chi_j(\psi_r)) \bar{\partial} \varrho^2 = 0 \text{ sur } bB(0, r).$$

ii)

$$\int_{B(0,r')} \varphi \theta \wedge i \partial \bar{\partial} (\varrho^2 \chi_j(\psi_r)) \wedge \beta_{n-k-1} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

avec

$$I_1 = \int_{B(0,r')} \chi_j(\psi_r) \varphi \theta \wedge i \partial \bar{\partial} \varrho^2 \wedge \beta_{n-k-1},$$

$$|I_1| \leq C_1 r'^2 \int_{B(0,r')} \chi_j(\psi_r) |\varphi| \theta \wedge \beta_{n-k}.$$

Cette dernière inégalité provient du Lemme 1.2.2, ii) [9].

$$I_2 = \int_{B(0,r')} \varphi \theta \wedge i \partial \varrho^2 \wedge \bar{\partial}(\chi_j(\psi_r)) \wedge \beta_{n-k-1}$$

$$= \int_{B(0,r')} 2 \varrho \varphi \chi'_j(\psi_r) m_F(r)^{2\varepsilon} (J_F) \theta \wedge i \partial \varrho \wedge \bar{\partial} \overline{J_F} \wedge \beta_{n-k-1}.$$

En utilisant les formules intégrales de Cauchy pour majorer  $|\frac{\partial \overline{J_F}}{\partial \bar{z}_j}|$ , nous obtenons

$$|I_2| \leq C_2 r^3 \frac{M_F(r'')^n m_F(r)^\varepsilon}{(r'' - r')^{n+1}} \int_{B(0,r') \cap \{j \leq A^2 |J_F|^2\}} |\varphi| \theta \wedge \beta_{n-k}$$

$$\leq C_2 r^3 \frac{M_F(r'')^n m_F(r)^\varepsilon}{(r'' - r')^{n+1}} \int_{B(0,r')} \chi_{j-1}(\psi_r) |\varphi| \theta \wedge \beta_{n-k}.$$

Nous avons bien-sûr la même majoration en norme pour

$$I_3 = \int_{B(0,r')} \varphi \theta \wedge i \partial (\chi_j(\psi_r)) \wedge \bar{\partial} \varrho^2 \wedge \beta_{n-k-1}.$$

$$I_4 = \int_{B(0,r')} \varrho^2 \varphi \theta \wedge i \partial \bar{\partial} (\chi_j(\psi_r)) \wedge \beta_{n-k-1}$$

$$= \int_{B(0,r')} \varrho^2 \varphi m_F(r)^{2\varepsilon} [m_F(r)^{2\varepsilon} |J_F|^2 \chi''_j(\psi_r)$$

$$+ \chi'_j(\psi_r)] \theta \wedge i \partial J_F \wedge \bar{\partial} \overline{J_F} \wedge \beta_{n-k-1}.$$

$$\leq C_3 r^4 \frac{M_F(r'')^{2n} m_F(r)^{2\varepsilon}}{(r'' - r')^{2n+2}} \int_{B(0,r')} \chi_{j-1}(\psi_r) |\varphi| \theta \wedge \beta_{n-k}.$$

## 2. – Résultat principal

Gruman [7] a donné une condition suffisante pour qu'un ensemble soit  $\mathcal{F}$ -essentiel et a donné une construction de tels ensembles:

THÉORÈME 2.1 [7].  $\beta > 1$  et  $E \in \mathbb{C}^n$  un ensemble qui vérifie la propriété suivante:

$$(*) \quad \forall x \in B(0, m) \setminus B(0, m-1), \quad \exists y \in E / \|x - y\| \leq \frac{1}{m(\log \log m)^\beta}.$$

Alors  $E$  est un ensemble essentiel pour  $\mathcal{F}$ . □

Rappelons la construction de ces ensembles:

Pour  $\gamma > 2n - 1$ , soit la fonction d'une variable définie par

$$h(w) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + (w/(\exp \exp j^{1/\gamma}))).$$

Soit  $\mathcal{C} = \{C^{(j)}, j = 1, \dots, n\}$  une famille de vecteurs en position générale.

Soit  $\mathcal{T}$  l'ensemble de tous les  $n$ -uplets  $T = (t_1, \dots, t_n)$  où  $t_j = \pm 1, j = 1, \dots, n$ .

Pour tout  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathcal{L}$ , pour tout  $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{Z}^n$  et tout  $T \in \mathcal{T}$ , on définit sur  $\mathbb{C}^n$  l'application

$$G(\Lambda, N, T)(w) = (h(t_1 \langle C^{(\lambda_1)}, w \rangle) + 2\pi N_1, \dots, h(t_n \langle C^{(\lambda_n)}, w \rangle) + 2\pi N_n).$$

Pour tout  $a \in \mathbb{C}_0^n$  on pose

$$\begin{aligned} E_a &= \bigcup_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ N \in \mathbb{Z}^n \\ T \in \mathcal{T}}} \{(\exp G(\Lambda, N, T))^{-1}(a)\} \\ &= \bigcup_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ N, N' \in \mathbb{Z}^n \\ T \in \mathcal{T}}} \{w \in \mathbb{C}^n / h(t_j \langle C^{(\lambda_j)}, w \rangle) \\ &= \log a_j + 2\pi N_j + 2i\pi N'_j, j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Notons  $m_F(r) = \exp(\log M_F(r) [\log \log M_F(r)]^\gamma)$ . L. Gruman a montré le

THÉORÈME 2.2 [7].

i) Pour  $a \in \mathbb{C}_0^n$ ,  $E_a$  est  $\mathcal{F}$ -essentiel.

ii) Soit  $F \in \mathcal{F}$ . Pour tout  $a \in \mathbb{C}_0^n \setminus \psi_F$  avec  $\psi_F$  pluripolaire dans  $\mathbb{C}^n$  on a,

$$\forall \varepsilon > 0, \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)}{m_F(r)^{n-\varepsilon}} = +\infty. \quad \square$$

Notre but est de montrer que l'ensemble  $\psi_F$  est vide.

Rappelons les résultats suivants qui sont démontrés dans [7]: Soit  $F \in \mathcal{F}$ , si on pose

$$S_F(r) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ N \in \mathbb{Z}^n \\ T \in \mathcal{T}}} \int_{B(0,r)} (r^2 - \|z\|^2)^2 (i\partial\bar{\partial} \log^+ [\exp(G(\Lambda, N, T) \circ F(z))])^n$$

et pour  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 T_F(r, \varepsilon) &= \int_{B(0,r)} \varrho^2 \exp((2n - \varepsilon) \log(\|F(z)\| + 1)) \\
 &\quad \cdot [\log \log(\|F(z)\| + 1)]^\gamma |J_F|^2 d\lambda(z), \\
 \tilde{T}_F(r, \varepsilon) &= \int_{B(0,r)} \varrho^2 \exp((2n + \varepsilon) \log(\|F(z)\| + 1)) \\
 &\quad \cdot [\log \log(\|F(z)\| + 1)]^\gamma |J_F|^2 d\lambda(z).
 \end{aligned}$$

Il existe une constante  $C_\varepsilon$  qui ne dépend que de  $n$  et  $\varepsilon$  telle que

$$(2.3) \quad C_\varepsilon^{-1} T_F(r, \varepsilon) - D'_7 r^{2n+2} (r' - r)^{-2(n-1)} m_F(r')^{2(n-1)(1+\varepsilon)} \leq S_F(r).$$

De plus, il existe une suite  $r_\mu \nearrow +\infty$ , associée à  $\varepsilon$ , telle que, si  $1 < \beta < \frac{\gamma}{2n-1}$  et  $r'_\mu = r_\mu + r_\mu [\log \log M_F(r_\mu)]^{-\beta}$  alors, pour  $\mu$  assez grand, on a

$$(2.4) \quad T_F(r_\mu, \varepsilon) \geq r_\mu^{4+2n} m_F(r'_\mu)^{2n-2\varepsilon}.$$

Nous savons d'après les propriétés de  $h$  (cf. [7]) qu'il existe  $R_\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $R \geq R_\varepsilon$ , si  $|w| < R$ , alors

$$(2.5) \quad |h(w)| \leq C_1 \exp((1 + \varepsilon) \log R [\log \log R]^\gamma).$$

On suppose que pour tout  $N \in \mathbb{C}^n$ ,  $\Lambda \in \mathcal{L}$  et  $T \in \mathcal{T}$ , les zéros de  $e^{G(\Lambda, N, T) \circ F} - a$  sont isolés. Dans le cas contraire, le cardinal de  $F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)$  est infini et il n'y a rien à montrer.

Nous pouvons donc définir  $(i\partial\bar{\partial} \log \|\exp(G(\Lambda, N, T) \circ F) - a\|)^n$ . Posons

$$n_F(r, a) = \frac{1}{(4\pi)^n} \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ N \in \mathbb{Z}^n \\ T \in \mathcal{T}}} \int_{B(0,r)} (i\partial\bar{\partial} \log \|\exp(G(\Lambda, N, T) \circ F(z)) - a\|)^n,$$

Avec la formule de E. Bedford [1],

$$\begin{aligned}
 n_F(r, a) &= \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ N \in \mathbb{Z}^n \\ T \in \mathcal{T}}} \sum_{\substack{w \in B(0,r)/F(w) \in \\ \exp(G(\Lambda, N))^{-1}(a)}} \deg_{(\exp(G(\Lambda, N, T)))} (F(w)) \deg_F(w) \\
 &\leq \tilde{C} (\log m_F(r))^n \sum_{w \in B(0,r)/F(w) \in E_a} \deg_F(w),
 \end{aligned}$$

Si  $r$  est assez grand, avec  $\tilde{C}$  ne dépendant que de  $n, \gamma$  et  $C$ . En effet, la multiplicité de la fonction  $h$  en un point  $w$  dans le disque de rayon  $R$  est majorée par  $C_1 \log M_h(2R)$  (cf. Lemme 1.3.1,i) [9]).  $h$  est prise ici en des points  $w_j = t_j \langle C^{(\lambda_j)}, F(z) \rangle$  avec  $|z| < r$ .

Nous avons donc, pour  $\varepsilon > 0$  et pour  $r$  assez grand,

$$n_F(r, a) \leq \tilde{C} m_F(r)^\varepsilon \text{card } {}_m F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)$$

avec

$$(2.6) \quad \text{card}_m F^{-1}(E_a) \cap B(0, r) = \sum_{w \in F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)} \text{deg}_F(w).$$

C'est le nombre de solutions de l'équation  $F(z) \in E_a$  dans la boule  $\|z\| < r$  comptées avec multiplicité. Notons

$$N_F(r, a) = \frac{1}{(4\pi)^n} \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ N \in \mathbb{Z}^n \\ T \in \mathcal{T}}} \int_{B(0, r)} (r^2 - \|z\|^2)^2 \cdot (i\partial\bar{\partial} \log \|\exp(G(\Lambda, N, T) \circ F(z)) - a\|^2)^n,$$

REMARQUE. C.S. Cornalba et M. Shiffman [4] ont montré qu'il n'existe pas en général de borne supérieure de  $G^{-1}(a) \cap B(0, r)$  par une fonction (indépendante de  $G$ ) de  $a, r$  et  $\|G\|$ , pour une application holomorphe  $G$ .

Il est par conséquent clair qu'on ne peut pas comme dans [9] obtenir une majoration de  $|N_F(r, a) - S_F(r)|$ .

Nous allons ici majorer  $S_F(r) - N_F(r, a)$  par un terme qui croît plus vite que  $S_F(r)$ .

Nous fixons maintenant  $\Lambda \in \mathcal{L}, T \in \mathcal{T}$  et  $N \in \mathbb{Z}^n$  tels que

$$\|N\| \leq C_4 m_F(r)^{(1+\varepsilon)} \text{ avec } C_4 = C_4(a, \mathcal{C}).$$

Notons comme dans le paragraphe précédent

$$\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n) \text{ avec } \tilde{f}_j = \langle C^{\lambda_j}, f \rangle$$

et, pour  $w \in \mathbb{C}^n, h_j(w) = h(t_j w) + 2\pi N_j, j = 1, \dots, n$ .

$$G = \exp(G(\Lambda, N, T) \circ F) = (g_1, \dots, g_n) \text{ avec } g_j = \exp(h_j \circ \tilde{f}_j).$$

$$\varphi = \log(\|G\|^2 + 1), \quad \psi = \log \|G(z) - a\|^2.$$

Appliquons une fois encore le Lemme 1.3.2 de [9] avec  $A = K m_F(r)^\varepsilon$  où  $K$  est une constante qui ne dépend que de  $n$ .

Pour tout  $p > 1$ , il existe  $r_{p,\varepsilon}$  et il existe une constante  $C_5 = C_5(a, n, p, \mathcal{C}, \varepsilon, \gamma)$  telle que, si  $r > r_{p,\varepsilon}$  et  $r' = r + r[\log \log M_F(r)]^{-\beta}$ , alors nous avons la relation

$$(2.7) \quad \int_{B(0, r) \cap \Sigma_A} \left( \log^+ \frac{\eta_a}{\|G - a\|} \right)^p (i\partial\bar{\partial}\psi)^l \wedge (i\partial\bar{\partial}\varphi)^k \wedge \beta_{n-k-l} \leq C_5 \frac{r'^{2n}}{(r' - r)^{2(k+l)}} m_F(r')^{(1+3\varepsilon)(1+n)} m.$$



LEMME 2.8. Soit  $\varepsilon > 0$ .

Il existe des constantes  $K_1$  et  $K_2$  (dépendant de  $a, n, C, \varepsilon$  et  $\gamma$ ), il existe  $r_\varepsilon > 0$  tel que si  $r > r_\varepsilon$  et  $r' = r + r[\log \log M_F(r)]^{-\beta}$ , alors, pour tout  $k/0 \leq k \leq n - 1$

$$\int_{B(0,r)} \chi_n(m_F(r)^{2\varepsilon}|J_F|^2)(i\partial\bar{\partial}\psi)^{n-1-k} \wedge (i\partial\bar{\partial}\varphi)^k \wedge \beta \leq K_1 \frac{r'^{2n}}{(r' - r)^{2(n-1)}} m_F(r')^{(n-1)(1+4\varepsilon)},$$

$$\int_{B(0,r)} \chi_n(m_F(r)^{2\varepsilon}|J_F|^2) \log^+ \frac{\eta_a}{\|G - a\|} (i\partial\bar{\partial}\psi)^{n-1-k} \wedge (i\partial\bar{\partial}\varphi)^k \wedge \beta \leq K_2 \frac{r'^{2n}}{(r' - r)^{2(n-1)}} m_F(r')^{(n-1)(1+4\varepsilon)+\varepsilon}.$$

□

DÉMONSTRATION. Les constantes  $C_i$  et  $\tilde{C}_i$  ne dépendront que de  $a, n, C, \varepsilon$  et  $\gamma$ .

Soit  $r'' = \frac{r' + r}{2}$ . Fixons  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ .

Pour  $0 \leq l \leq n - 1 - k$ , nous utiliserons les notations suivantes,

$$r_l = r'' - l \frac{r'' - r}{n - 1 - k}, \quad \xi_l^r = \chi_{l+k+1}(m_F(r)^{2\varepsilon}|J_F|^2),$$

$$\mu_l = (i\partial\bar{\partial}\psi)^l \wedge (i\partial\bar{\partial}\varphi)^k \wedge \beta_{n-k-l},$$

$$I_l = \int_{B(0,r_l)} \xi_l^r d\mu_l, \quad \tilde{I}_l = \int_{B(0,r_l)} \xi_l^r \log^+ \frac{\eta_a}{\|G - a\|} d\mu_l.$$

Nous allons montrer par récurrence que

$$I_l \leq C_l \frac{r'^{2n}}{(r' - r)^{2(k+l)}} m_F(r')^{(k+l)(1+4\varepsilon)}$$

et

$$\tilde{I}_l \leq \tilde{C}_l \frac{r'^{2n}}{(r' - r)^{2(k+l)}} m_F(r')^{(k+l)(1+4\varepsilon)+\varepsilon},$$

Soient  $p > \frac{(1+3\varepsilon)(1+n)}{\varepsilon}$ ,  $q > 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

D'après le Lemme 1.2.2, iii) de [9],

$$I_0 \leq \int_{B(0,r'')} (i\partial\bar{\partial}\varphi)^k \wedge \beta_{n-k} \leq C_0 r'^{2n} (r' - r'')^{-2k} m_F(r')^{(1+\varepsilon)k}.$$

D'après l'inégalité de Hölder, avec  $A = (k + 1)^{-1/2} m_F(r)^\varepsilon$ ,

$$\tilde{I}_0 = \int_{B(0,r'') \cap \Sigma_A} (\xi_0^r \circ |J_F|^2) \log^+ \frac{1}{\|G - a\|} d\mu_0 \leq (\tilde{I}_{0,p})^{\frac{1}{p}} I_0^{\frac{1}{q}},$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{0,p} &= \int_{B(0,r'') \cap \Sigma_A} \left( \log^+ \frac{\eta_a}{\|G - a\|} \right)^p d\mu_0 \\ &\leq C_0^1 \frac{r'^{2n}}{(r' - r)^{2k}} m_F(r')^{(1+3\varepsilon)(1+n)}. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\tilde{I}_0 \leq \tilde{C}_0 \frac{r'^{2n}}{(r' - r)^{2k}} m_F(r')^{(1+\varepsilon)k+\varepsilon}.$$

Supposons les inégalités vraies pour  $l - 1$ .

$$I_l \leq \frac{1}{(r_{l-1}^2 - r_l^2)^2} \int_{B(0,r_{l-1})} (r_{l-1}^2 - \|z\|^2)^2 \xi_{l-1}^r d\mu_{l-1}.$$

Avec le Lemme 1,

$$I_l \leq \frac{C_l^2 r^2}{(r' - r)^{2n+4}} M_F(r')^{2n} m_F(r)^{2\varepsilon} \int_{B(0,r_{l-1})} \xi_{l-1}^r |\log \|G - a\|| d\mu_{l-1}.$$

En écrivant  $\|G - a\| = \log^+ \frac{1}{\|G-a\|} + \log^+ \|G - a\|$ , nous avons alors

$$I_l \leq \frac{C_l}{(r' - r)^2} m_F(r')^{3\varepsilon} \left[ m_F(r')^{1+\varepsilon} I_{l-1} + \tilde{I}_{l-1} \right].$$

Nous obtenons la majoration voulue en appliquant l'hypothèse de récurrence. La majoration de  $\tilde{I}_l$  s'obtient encore grâce à l'inégalité de Hölder et (2.7), comme pour  $\tilde{I}_0$ .

PROPOSITION 2.9. Soit  $F$  dans  $\mathcal{F}$  et  $a$  dans  $\mathbb{C}_0^n$ .

Pour tous  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ ,  $\varepsilon < \frac{1}{2+4n}$ , il existe des constantes  $K > 0$  (dépendant de  $a, n, \mathcal{C}, \varepsilon$  et  $\gamma$ ),  $C_{\varepsilon'}$  qui ne dépend que de  $\mathcal{C}$  et de  $\varepsilon'$  et un rayon  $r_{\varepsilon, \varepsilon'}$  tels que, si  $r > r_{\varepsilon, \varepsilon'}$  alors

$$C_{\varepsilon'} T_F(r, \varepsilon') - N_F(r, a) \leq K r^{4+2n} m_F(r')^{2n-\varepsilon}. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Prenons  $r$  assez grand pour que,

$$\forall w \in B(0, m_F(r)), \quad |h(w)| \leq m_F(r)^{1+(\varepsilon/2n)}.$$

Nous noterons

$$\varrho = r^2 - \|z\|^2, \quad \psi_j = \chi_j(m_F(r)^{2\varepsilon} |J_F|^2) \text{ pour } j \in \mathbb{N}.$$

les constantes  $C_j$  ne dépendront que de  $a, n, \mathcal{C}, \varepsilon$  et  $\gamma$ .

Il s'agit d'estimer  $S_F(r) - N_F(r, a) = \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ T \in \mathcal{T}}} (I_1^{\Lambda, T} + I_2^{\Lambda, T})$  avec

$$\begin{aligned} I_1^{\Lambda, T} &= \int_{B(0, r)} \varrho^2 (1 - \psi_{n+1})(\mu - \lambda_a), \quad I_2^{\Lambda, T} = \int_{B(0, r)} \varrho^2 \psi_{n+1}(\mu - \lambda_a), \\ \mu &= \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} (i\partial\bar{\partial} \log^+ \|\exp(G(\Lambda, N, T))\|^2)^n, \\ \lambda_a &= \sum_{N \in \mathbb{Z}^n} (i\partial\bar{\partial} \log \|\exp(G(\Lambda, N, T) - a)\|^2)^n. \end{aligned}$$

Nous noterons  $G(\Lambda, T) = (g_1, \dots, g_n)$ ,  $v_j = (|\Im e^{i/4g_j}| + |\Re e^{i/4g_j}|$ .

En reprenant la démonstration du Théorème 1 de [6] (avec  $\tilde{G} = (e^{i/4g_1}, \dots, e^{i/4g_n})$ ), mais en utilisant le Lemme 1, nous avons

$$\left| \int_{B(0, r)} \varrho^2 (1 - \psi_{n+1}) \left[ \prod_{j=1}^n \frac{i\partial\bar{\partial} v_j}{\prod_{j=1}^n v_j} - \frac{|J_{\tilde{G}}|^2}{\prod_{j=1}^n v_j^2} d\lambda(z) \right] \right| \leq C_n r^4 m_F(r')^{2(n-1)(1+\varepsilon)+3\varepsilon}.$$

Sachant de plus (cf. [7], p. 88) qu'il existe une constante  $C'_n$  telle que

$$\mu = C'_n \bigwedge_{j=1}^n \frac{i\partial\bar{\partial} v_j}{\prod_{j=1}^n |e^{i/4g_j}|},$$

nous obtenons alors,

$$\begin{aligned} I_1^{\Lambda, T} &\leq \int_{B(0, r)} \varrho^2 (1 - \psi_{n+1}) \mu \\ &\leq C_1 \int_{B(0, r)} \varrho^2 (1 - \psi_{n+1}) |J_{G(\Lambda, T)}|^2 d\lambda(z) + C_2 r^4 m_F(r')^{2(n-1)(1+\varepsilon)+3\varepsilon}. \end{aligned}$$

Mais  $|J_G(\Lambda, T)| = \prod_{j=1}^n |h'(t_j < C^{(\lambda_j)}, F >)| |\det C^\Lambda| |J_F|$ . D'où, en majorant (grâce aux formules de Cauchy) chaque  $|h'(t_j < C^{(\lambda_j)}, F >)|$  par  $C_2 m_F(r')^{1+\varepsilon/2n}$ ,

$$I_1 \leq C_3 r^{4+2n} m_F(r')^{2n-\varepsilon}.$$

Regardons maintenant l'intégrale  $I_2^{\Lambda, T}$ .

Fixons  $N$  tel que  $\|N\| \leq D m_F(r)^{1+(\varepsilon/2n)}$ ,  $D = D(a, C)$ .

$$\begin{aligned} \text{Posons } G &= \exp(G(\Lambda, N, T) \circ F), \\ \varphi &= \log(\|G\|^2 + 1), \phi = \log \|G - a\|^2, \zeta = \log^+ \frac{\eta_a}{\|G - a\|^2}. \end{aligned}$$

Nous voulons estimer

$$\begin{aligned} I &= \int_{B(0,r)} \varrho^2 \psi_{n+1} [(i\partial\bar{\partial}\varphi)^n - (i\partial\bar{\partial}\phi)^n]. \\ I &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{B(0,r)} \varrho^2 \psi_{n+1} i\partial\bar{\partial}(\varphi - \psi) \wedge (i\partial\bar{\partial}\varphi)^{n-1-k} \wedge (i\partial\bar{\partial}\phi)^k. \end{aligned}$$

En utilisant d'abord le Lemme 1, ensuite la relation

$$|\varphi - \phi| \leq C_a + \log^+ \frac{\eta_a}{\|G - a\|^2} = C_a + \zeta$$

et enfin le Lemme 2.7, nous avons

$$\begin{aligned} I &\leq C_4 \frac{r'^4 M_F(r')^{2n} m_F(r')^{2\varepsilon}}{(r' - r)^{2+2n}} \sum_{k=0}^n \int_{B(0,r)} \psi_n (C_a + \zeta) (i\partial\bar{\partial}\varphi)^{n-1-k} \wedge (i\partial\bar{\partial}\phi)^k \\ &\leq C_5 r'^4 m_F(r')^{(1+4\varepsilon)(n-1)+4\varepsilon}. \end{aligned}$$

En sommant sur  $N$  /  $\|N\| \leq D m_F(r')^{1+\varepsilon/2n}$ , nous obtenons

$$I_2 \leq C_6 r'^4 m_F(r')^{2n-1+(4n+1)\varepsilon}.$$

Le résultat en découle en utilisant la relation 2.3.

THÉORÈME 2.10. Soit  $F \in \mathcal{F}$ . Pour tout  $a \in \mathbb{C}_0^n$  et pour  $\varepsilon > 0$ , nous avons

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_F(r, a)}{T_F(r, \varepsilon)} = +\infty. \quad \square$$

DÉMONSTRATION. Soit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{3(2+4n)}$ . D'après Prop. 2.9 et 2.4, il existe une suite  $r_\mu \nearrow +\infty$  telle que, pour  $\mu$  assez grand,

$$C_\varepsilon T_F(r_\mu, \varepsilon/8) - N_F(r_\mu, a) \leq K r_\mu^{4+2n} m_F(r'_\mu)^{2n-3\varepsilon}.$$

En divisant par  $T_F(r_\mu, \varepsilon)$  et en utilisant 2.4, nous avons

$$\frac{N_F(r_\mu, a)}{T_F(r_\mu, \varepsilon)} \geq C_\varepsilon m_F(r'_\mu)^{\varepsilon/4} - K m_F(r'_\mu)^{-\varepsilon}.$$

On obtient le résultat en faisant  $\mu \rightarrow +\infty$ .

COROLLAIRE 2.11. *Si  $F \in \mathcal{F}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $a \in \mathbb{C}_0^n$ , nous avons*

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}_m F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)}{m_F(r)^{n-\varepsilon}} = +\infty. \quad \square$$

La démonstration est la même que la précédente mais en utilisant l'inégalité 2.6.

## RÉFÉRENCES

- [1] E. BEDFORD, *Survey of pluripotential theory*, Several complex variables: Proc. Mittag-Leffler Inst., 1987-88, edited by J. E. Fornæss, Math. Notes **38** (1993), 48-97.
- [2] L. BIEBERBACH, *Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des  $\mathbb{R}^4$  auf einen Teil seiner selbst vermitteln*, S.B. Preuss Akad. Wiss. **14/15** (1933), 476-479.
- [3] S. BOCHNER – W. T. MARTIN, “Several complex variables”, Princeton University Press, 1948.
- [4] M. CORNALBA – B. SHIFFMAN, *A counterexample to the “Transcendental Bezout problem”*, Ann. of Math. **96**, 2 (1972), 402-406.
- [5] P. G. DIXON – J. ESTERLE, *Michael’s problem and the Poincaré-Fatou-Bieberbach phenomenon*, Bull. Amer. math. Soc (N.S) **15** (1986), 127-187.
- [6] L. GRUMAN, *Value distribution for holomorphic maps in  $\mathbb{C}^n$* , Math. Ann. **245** (1978), 199-218.
- [7] L. GRUMAN, *L’image d’une application holomorphe*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **12** (1991), 75-100.
- [8] R. NEVANLINNA, “Analytic functions”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York.
- [9] M. OUNAÏES, *Estimations du type Nevanlinna pour les applications holomorphes de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$* , Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **30** (1997), 797-819.
- [10] J. P. ROSAY – W. RUDIN, *Holomorphic maps from  $\mathbb{C}^n$  to  $\mathbb{C}^n$* , Trans. Amer. math. Soc. **310** (1988), 47-86.
- [11] J. L. STEHLÉ, *Plongements du disque dans  $\mathbb{C}^2$* , Séminaire P. Lelong (Analyse) Lecture Notes in Math. **275** (1970), 119-130.

Université Louis Pasteur  
 UFR de mathématiques et d’informatique  
 7 Rue René Descartes  
 67084 Strasbourg Cedex, France  
 ounaies@math.u-strasbg.fr