Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

S. Benachour
P. Chassaing
B. Roynette
P. Vallois

Processus associés à l'équation des milieux poreux

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 23, nº 4 (1996), p. 793-832
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1996_4_23_4_793_0>

Processus associés à l'équation des milieux poreux

S. BENACHOUR - P. CHASSAING - B. ROYNETTE - P. VALLOIS

Introduction

1. L'équation des milieux poreux est l'équation aux dérivées partielles (E.D.P.):

$$(E_{m,\mu}) \qquad \begin{cases} u_t = \dfrac{1}{2}(u^{2m+1})_{xx} \\ u(0,.) = \mu \end{cases}$$

où $u : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, m est un réel positif; u_t (respectivement u_x) désigne la dérivée au sens des distributions de u par rapport à la première (respectivement seconde) variable.

L'équation des milieux poreux modélise de nombreux phénomènes, on peut citer en particulier: la filtration d'un gaz à travers un milieu poreux, la dynamique des populations, l'hydrologie, etc.. (cf [M], [GM], [OKC]). Elle a fait l'objet de nombreux travaux qui sont passés en revue dans [K1].

2. On observe que si u est une solution positive de $(E_{m,\mu})$, "régulière", en intégrant $(E_{m,\mu})$ par rapport à x, on obtient:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{\mathbf{R}} u(t,x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} u_t(t,x)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Par conséquent $\int_{\mathbf{R}} u(t,x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \mu(\mathrm{d}x)$. Si de plus μ est une probabilité, $u(t,.)$ est pour tout $t \geq 0$ une densité de probabilité (cf. [BCP]). Il est alors naturel d'associer à $(E_{m,\mu})$ un processus $(X_t; t \geq 0)$ tel que $P(X_t \in \mathrm{d}x) = u(t,x)\mathrm{d}x$. Plus précisément on considère:

$$(S_{m,\mu}) \qquad \begin{cases} X_t = X_0 + \displaystyle\int_0^t u^m(s, X_s)\mathrm{d}B_s\,, \\ X_t \quad \text{a comme densité} \quad u(t,.), \qquad t > 0 \end{cases}$$

où $(B_t; t \geq 0)$ un mouvement brownien réel, m est un nombre réel strictement positif et la donnée initiale X_0 suit une loi de probabilité μ. Les inconnues de

Pervenuto alla Redazione il 8 giugno 1995.

cette équation sont le processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles et la famille de densités de probabilité $(u(t, .); t > 0)$.

L'équation $(S_{m,\mu})$ est liée à l'équation des milieux poreux, en effet si (X, u) est solution de $(S_{m,\mu})$, une application de la formule d'Itô permet de montrer que u est solution de $(E_{m,\mu})$.

Le but de cet article est de montrer l'existence et l'unicité (en loi) de la solution de $(S_{m,\mu})$ pour une large classe de données initiales μ; par unicité en loi (ou faible) nous entendons que l'E.D.S., première ligne de $(S_{m,\mu})$, admet une unique solution faible. Plus précisément, nous montrerons que l'équation $(S_{m,\mu})$ "se découple": avec des hypothèses convenables u est l'unique solution de l'équation $(E_{m,\mu})$ et on reporte la valeur de u trouvée, dans la première ligne de $(S_{m,\mu})$, qui devient alors une E.D.S. ordinaire.

3. La modélisation stochastique de l'équation des mileux poreux $(E_{m,\mu})$, représentée par $(S_{m,\mu})$ intervient lorsque l'on considère un système de N particules en interaction et que l'on fait tendre N vers $+\infty$. En choisissant une interaction uniquement localisée sur le coefficient de diffusion brownien, on peut mettre en évidence un phénomène de propagation du chaos ([SV]), en particulier une particule donnée va admettre comme comportement limite celui décrit par $(S_{m,\mu})$ avec m entier. Cette approche est développée au Paragraphe I.

4. Revenons à $(S_{m,\mu})$. Nous commençons par étudier le cas où $\mu = \delta_0$, δ_0 désignant la mesure de Dirac en 0. Le processus X, associé à (S_{m,δ_0}) sera appelé le processus du "big-bang"; l'appelation choisie est justifiée par le fait que dans le système de N particules décrit précédemment, toutes les particules partent à l'instant initial du même point. Les propriétés concernant X sont énoncées au Théorème II.1, en particulier la densité $u(t, .)$ de X_t est l'unique solution de (E_{m,δ_0}) et est connue dans la littérature comme densité de Barenblatt-Pattle [Ba], [P1], rappelons:

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\beta}\varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad x \in \mathbf{R}, t > 0 \tag{1}$$

où $\beta = 1/(2m+2)$, $\varphi(x) = a'_m \left(1 - \left(\frac{x}{\gamma_m}\right)^2\right)_+^{1/2m}$, a'_m et γ_m sont des constantes strictement positives, et a_+ désigne la partie positive de a.

On montre que l'E.D.S. satisfaite par X admet une unique solution faible. Pour ce faire, on prouve que X s'exprime à l'aide d'un processus stationnaire $(Z_t; t \in \mathbf{R})$ (Z_t admettant pour densité φ); plus précisément:

$$X_t = t^\beta \, Z_{\ell n t} \quad t > 0 \tag{2}$$

et

$$Z_t = Z_s + \int_s^t \varphi^m(Z_r)\mathrm{d}B'_r - \beta \int_s^t Z_r \, \mathrm{d}r, \quad s < t \tag{3}$$

où $(B'_r; r \in \mathbf{R})$ est un mouvement brownien.

On déduit de (S_{m,δ_0}) et de (1) que pour tout $t > 0$, p.s.

$$|X_t| < \gamma_m t^\beta . \tag{4}$$

On peut renforcer (4) en montrant que p.s., pour tout t, (4) est réalisé et de plus

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{X_t}{t^\beta} = \gamma_m, \quad \underline{\lim_{t\to 0}} \frac{X_t}{t^\beta} = -\gamma_m .$$

Ce qui nous conduit à nous intéresser aux temps d'arrêt:

$$T_{y_0} = \inf\{t \geq s;\, X_t^{s,x} = y_0\, t^\beta\}\,, T_{z_0}^* = \inf\{t \geq s;\, |X_t^{s,x}| = z_0\, t^\beta\}$$

où $s > 0$, $0 < |y_0| < \gamma_m$, $0 < z_0 < \gamma_m$, $|x| < y_0 s^\beta$, $|x| < z_0 s^\beta$, et $X^{s,x}$ est la solution de

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t u^m(r, X_r^{s,x})\mathrm{d}B_r; \quad t \geq s .$$

Il est possible de calculer les moments de T_{y_0} et $T_{z_0}^*$ (voir Proposition II.7).

L'étude du processus du big-bang X et du processus Z fait l'objet du Paragraphe II.

5. Nous montrons au Paragraphe III (Théorème III.3) que $(S_{m,\mu})$ admet une unique solution forte pour une large classe de fonctions μ. Nous supposerons dans un premier temps que la donnée initiale μ est une fonction strictement positive, dérivable, d'intégrale 1 et que de plus μ et μ_x sont deux fonctions bornées. Dans ces conditions $(E_{m,\mu})$ admet une unique solution u qui est strictement positive, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et u^m est une fonction lipschitzienne [LUS]. On en déduit (Proposition III.1) que l'E.D.S. de $(S_{m,\mu})$ admet une unique solution forte.

La deuxième étape est l'étude du cas où μ est une fonction positive et d'intégrale 1. Nous supposerons de plus que μ n'est pas trop grande:

$$\int_{\mathbf{R}} |x|^n \mu(x)\mathrm{d}x < \infty \tag{5}$$

où $n > 2$ et que de plus, au sens des distributions:

$$-(\mu^{2m})'' \leq C . \tag{6}$$

Décrivons brièvement les résultats qui sont énoncés au Théorème (III.3). Comme nous l'avons fait pour le processus du big-bang, nous associons à X un second processus Y de la manière suivante:

$$Y_t = H(t, X_t) \tag{7}$$

où

$$H(t, x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{u(t, y)^m} .$$

On montre ensuite que Y est solution de:

$$Y_t = Y_0 + B_t + \int_0^t A(s, Y_s)\mathrm{d}s \quad t \geq 0 \tag{8}$$

où A est une fonction localement lipschitzienne.

Cette approche permet d'établir l'unicité forte. En ce qui concerne l'existence faible, on construit une suite de fonctions $(\mu_n)_{n\geq 1}$, telles que μ_n soit une fonction continue, strictement positive, bornée et à dérivée bornée. Il existe donc un processus X^n solution de (S_{m,μ_n}); on montre ensuite que la suite de processus $(X^n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers un processus X, solution de $(S_{m,\mu})$.

Enfin la dernière partie du Paragraphe III s'achève en montrant (Théorème III.10) que X^λ converge en loi vers le processus du big-bang (associé à $\mu = \delta_0$) lorsque X^λ est le processus solution de (S_{m,μ^λ}), μ^λ convergeant vers δ_0, lorsque $\lambda \to 0$.

Le processus du big-bang joue donc en quelque sorte le rôle de processus de référence pour la famille des processus solutions de $(S_{m,\mu})$.

1. – Systèmes particulaires associés à l'équation des mileux poreux

Soit N mouvements browniens unidimensionnels $(B_t^i; t \geq 0)$, $i = 1, \dots, N$ issus de 0, indépendants, μ une probabilité sur $\mathbf{R}$, et $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction régulière ayant son support dans un petit voisinage de l'origine. On considère l'E.D.S. N dimensionnelle:

$$(S_{1,\mu}^{\sigma,N}) \qquad \begin{cases} X_t^{i,N} = X_0^i + \displaystyle\int_0^t \frac{1}{N}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^N \sigma(X_s^{i,N} - X_s^{j,N})\right)\mathrm{d}B_s^i \\ X_0^i \quad \text{a pour loi} \quad \mu \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Si les $(X^{j,N})$ décrivent le mouvement de N particules dans $\mathbf{R}$, la particule n° i a donc une "intensité d'agitation brownienne" (égale à $\frac{1}{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^N \sigma(X_s^{i,N} - X_s^{j,N})$) qui dépend du "taux de présence " des autres particules autour d'elle. Fixons une particule, par exemple celle de numéro 1. Faisant tendre $N \to \infty$, il est intuitivement clair que l'action de n'importe quelle autre particule sur la particule n° 1 ne compte plus, à cause du terme de normalisation en $\frac{1}{N}$. Cette action est alors remplacée, intuitivement, par celle d'une particule fictive, de densité u, la densité commune à toutes les particules (chaque v.a. X_t^i a, pour $i = 1, 2, \dots, N$, la même densité, puisque l'équation $(S_{1,\mu}^{\sigma,N})$ est clairement symétrique en les différents indices). $X^{1,N}$ converge en loi, lorsque $N \to \infty$, vers $\bar{X}$; $\bar{X}$ est solution de l'équation non linéaire (à valeurs réelles):

$$(S^{\sigma}_{1,\mu}) \qquad \begin{cases} \bar{X}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t \left(\int_{\mathbf{R}} \sigma(\bar{X}_s - x) u(s,x) dx \right) \mathrm{d}B_s \\ \bar{X}_t \quad \text{a comme densité} \quad u(t,.) \,. \end{cases}$$

Lorsque l'on fait formellement $\sigma(x)\mathrm{d}x = \delta_0$, δ_0 désignant la measure de Dirac en 0, on retrouve l'équation $(S_{1,\mu})$.

En prenant plus généralement dans $(S^{\sigma,N}_{1,\mu})$ une intervention groupée de m particules, nous serions arrivés à l'équation $(S_{m,\mu})$ (voir par exemple, [RV] pour une approche utilisant une interaction avec plusieurs particules groupées). Bien que ce schéma heuristique conduise à des valeurs entières de m, nous prendrons m paramètre réel strictement positif. Lorsque σ est une fonction régulière, il est possible de justifier la convergence heuristique annoncée ci-dessus. C'est l'objet de la proposition ci-dessous, qui reprend des techniques voisines de celles utilisées dans [SV] et repose sur l'utilisation de la métrique de Kantorovitch-Rubinstein (cf. également [MR] et [S]).

PROPOSITION I.1. *Soit σ une fonction de classe C^2, lipschitzienne et bornée.*
1. *L'équation $(S^{\sigma}_{1,\mu})$ possède une unique solution, de plus u est une solution de:*

$$(E^{\sigma}_{1,\mu}) \qquad \begin{cases} u_t = \frac{1}{2}(u(\sigma * u)^2)_{xx} \\ u(0,.) = \delta_0 \,. \end{cases}$$

2. *La suite de processus $(X^{1,N})_{N\geq 1}$ converge au sens de la topologie u.c.p. vers $\bar{X}^1$ solution de $S^{\sigma}_{1,\mu}$ avec $\bar{X}_0 = X^1_0$ et $B = B^1$.*

DÉMONSTRATION.
1. Soit $T > 0$ et Ω l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}$, m_1 et m_2 deux mesures de probabilité sur Ω. Définissons:

$$D_T(m_1, m_2) = \inf_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ p_1 \circ m = m_1 \\ p_2 \circ m = m_2}} \int \sup_{s \leq T} (|\omega^1_s - \omega^2_s| \wedge 1) \mathrm{d}m(\omega_1, \omega_2)$$

où $\mathcal{M}$ désigne l'ensemble des probabilités sur $\Omega \times \Omega$, et p_1 (respectivement p_2) désigne la projection sur le premier (respectivement le second) facteur, $\omega^1 = p_1(\omega)$, $\omega^2 = p_2(\omega)$ ω appartenant à $\Omega \times \Omega$, et où ω_s désigne la valeur en s de ω, pour $\omega \in \Omega$. Soit $m_1 \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ une mesure de probabilité sur Ω et X_t la solution de l'E.D.S.:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mathrm{d}B_s \left(\int_{\Omega} \sigma(X_s - \omega_s) \mathrm{d}m_1(\omega) \right) . \tag{I.1}$$

Puisque pour toute $m_1 \in \mathcal{M}_1(\Omega)$, la fonction $\hat{\sigma}(s, y) := \int_{\Omega} \sigma(y - \omega_s) \mathrm{d}m_1(\omega)$ est uniformément bornée et lipschitzienne, il est clair que (I.1) possède une solution unique. Désignons par $\phi(m_1)$ la loi, sur Ω, de $(X_t; 0 \leq t \leq T)$. Nous allons montrer que ϕ est une application contractante pour D_T, ce qui prouvera que ϕ admet un unique point fixe, qui est à l'évidence l'unique solution de $(S^{\sigma}_{1,\mu})$. Soit $m_2 \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ et Y la solution de:

$$Y_t = X_0 + \int_0^t \mathrm{d}B_s \left(\int_\Omega \sigma(Y_s - \omega_s) \mathrm{d}m_2(\omega) \right) . \tag{I.2}$$

Alors:

$$E\left(\sup_{s \leq T} |X_s - Y_s|^2\right) \leq C \int_0^T \mathrm{d}s \left(\int_\Omega \sigma(X_s - \omega_s^1) \mathrm{d}m_1(\omega_1) - \sigma(Y_s - \omega_s^2) dm_2(\omega_2) \right)^2$$
$$\leq C \int_0^T \mathrm{d}s \left(\int_\Omega |\sigma(X_s - \omega_s^1) - \sigma(Y_s - \omega_s^2)| \mathrm{d}m(\omega_1, \omega_2) \right)^2$$

où $m \in \mathcal{M}$, $p_1 \circ m = m_1$ et $p_2 \circ m = m_2$.

On écrit:

$$\sigma(X_s - \omega_s^1) - \sigma(Y_s - \omega_s^2) = \sigma(X_s - \omega_s^1) - \sigma(Y_s - \omega_s^1) + \sigma(Y_s - \omega_s^1) - \sigma(Y_s - \omega_s^2) .$$

On utilise le fait que σ est lipschitzienne et bornée, il vient:

$$E\left(\sup_{s \leq T} |X_s - Y_s|^2\right) \leq C \int_0^T \mathrm{d}s \{E(|X_s - Y_s| \wedge 1) + \int_\Omega |\omega_s^1 - \omega_s^2| \mathrm{d}m(\omega_1, \omega_2)\}^2$$

En utilisant d'une part: $|\omega_s^1 - \omega_s^2| \leq \sup_{u \leq s} |\omega_u^1 - \omega_u^2|$ et en prenant d'autre part le minimum par rapport à m, on obtient:

$$E\left(\sup_{s \leq T} |X_s - Y_s|^2 \wedge 1\right) \leq E\left(\sup_{s \leq T} |X_s - Y_s|^2\right)$$
$$\leq 2C \int_0^T \left\{ E(|X_s - Y_s|^2 \wedge 1) + 2C \int_0^T D_s^2(m_1, m_2) \right\} \mathrm{d}s .$$

Une application du lemme de Gronwall conduit à:

$$E\left[\sup_{s \leq T} |X_s - Y_s|^2 \wedge 1\right] \leq 2C \int_0^T e^{2C(T-u)} D_u(m_1, m_2)^2 \mathrm{d}u .$$

D'où:

$$D_T(\phi(m_1), \phi(m_2))^2 \leq K(T) \int_0^T D_u(m_1, m_2)^2 \mathrm{d}u .$$

Par itération, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a:

$$D_T(\phi^n(m_1), \phi^n(m_2))^2 \leq \frac{(K(T)T)^n}{n!} D_T(m_1, m_2)^2 .$$

Puisque ϕ^n est une contraction pour un certain n, il est classique d'en déduire que ϕ admet un unique point fixe.

Remarquons alors que, d'après la formule d'Itô (cf. démonstration du Théorème II.1), la densité $u(t,x)$ de la solution de $(S^{\sigma}_{1,\mu})$ satisfait à:

$$u_t = \frac{1}{2}(u(\sigma * u)^2)_{xx}\,. \tag{I.3}$$

2. Montrons à présent la convergence de $X^{1,N}$ vers $\bar{X}$, quand $N \to +\infty$, où $X^{1,N}$ est la première composante de la solution de $(S^{\sigma,N}_{1,\mu})$.

Rappelons que $X^{i,N}$ et $\bar{X}^i$ sont solutions des deux E.D.S. suivantes:

$$X^{i,N}_t = X^i_0 + \int_0^t \frac{1}{N}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \sigma(X^{i,N}_s - X^{j,N}_s)\right) \mathrm{d}B^i_s$$

et

$$\bar{X}^i_t = X^i_0 + \int_0^t (\sigma * u)(s, \bar{X}^i_s)\mathrm{d}B^i_s$$

où u est la solution de (I.3).

Notons que par définition $\bar{X}^i_0 = X^i_0$. Pour alléger les notations, on va omettre l'indice N dans $X^{i,N}$. On a:

$$\begin{aligned} X^i - \bar{X}^i_t = &\int_0^t \frac{1}{N}\Big\{\sum_j (\sigma(X^i_s - X^j_s) - \sigma(\bar{X}^i_s - X^j_s))\Big\}\mathrm{d}B^i_s \\ &+ \int_0^t \frac{1}{N}\Big\{\sum_j (\sigma(\bar{X}^i_s - X^j_s) - \sigma(\bar{X}^i_s - \bar{X}^j_s))\Big\}\mathrm{d}B^i_s \\ &+ \int_0^t \frac{1}{N}\Big\{\sum_j (\sigma(\bar{X}^i_s - \bar{X}^j_s) - (\sigma * u)(s, \bar{X}^i_s))\Big\}\mathrm{d}B_s\,. \end{aligned}$$

En utilisant d'une part la propriété de Lipschitz de σ et le fait que $(X^j, \bar{X}^j)$ a même loi que $(X^i, \bar{X}^i)$, on a:

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{t\leq T}|X^i_t - \bar{X}^i_t|^2\right) &\leq C\,E\int_0^T |X^i_s - \bar{X}^i_s|^2\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{N^2}E\int_0^T \sum_{jk}(\sigma(\bar{X}^i_s - \bar{X}^j_s) - (\sigma * u)(s, \bar{X}^i_s)) \\ &\cdot (\sigma(\bar{X}^i_s - \bar{X}^k_s) - (\sigma * u)(s, \bar{X}^i_s))\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{I.5}$$

Si $j \neq k$, les processus $\bar{X}^j$ et $\bar{X}^k$ sont indépendants, de plus pour tout ℓ, $\bar{X}^\ell_s$ a pour densité $u(s,.)$, par conséquent:

$$\text{(I.6)} \qquad \begin{aligned} &E\left[(\sigma(\bar{X}^i_s - \bar{X}^k_s) - \sigma * u(s, \bar{X}^i_s))\sigma(\bar{X}^j_u - \bar{X}^i_u); u \geq 0\right] \\ &\quad = \int_{\mathbf{R}} (\sigma(\bar{X}^i_s - x) - \sigma * u(s, \bar{X}^i_s))u(s,x)\mathrm{d}x = 0\,. \end{aligned}$$

Posons:

$$\varphi(T) := E\left[\sup_{s\leq T} |X^i_s - \bar{X}^i_s|^2\right] .$$

La fonction σ étant bornée, les relations (I.5) et (I.6) impliquent:

$$\varphi(T) \leq \int_0^T \varphi(s)\mathrm{d}s + \frac{C'T}{N} .$$

Une application du lemme de Gronwall conduit à:

$$\varphi(t) \leq \left(\frac{C'}{C}(e^{ct} - 1)\right)\frac{1}{N} .$$

Ce qui prouve que $\sup_{s\leq T} |X^{i,N}_s - \bar{X}^i_s| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans L^2 pour tout $T > 0$ (le processus $X^{i,N}$ converge vers $\bar{X}^i$ au sens u.c.p. [P]). □

2. – Le processus du big bang d'indice $m (m > 0)$

Nous nous intéressons donc à l'équation

$$\text{(BB)}_m \qquad \begin{cases} X_t = \displaystyle\int_0^t u^m(s, X_s)\mathrm{d}B_s \\ X_t \quad \text{admet comme densité} \quad u(t,.), t > 0\,. \end{cases}$$

Puisque $X_0 = 0$, la loi de X_0 est la mesure de Dirac en 0 et l'équation $(\text{BB})_m$ n'est autre que (S_{m,δ_0}).

NOTATIONS.

1. Pour tout $m > 0$, on introduit:

$$\text{(II.1)} \qquad \beta = \frac{1}{2m+2}$$

$$\text{(II.2)} \qquad a_m = \left\{\frac{m^{1/2}}{[(2m+1)(m+1)]^{1/2} B\left(\frac{2m+1}{2m}, \frac{1}{2}\right)}\right\}^{\frac{m}{m+1}}$$

où $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ et

$$\gamma_m = a_m \left(\frac{(2m+1)(m+1)}{m} \right)^{1/2} . \tag{II.3}$$

2. Pour tout réel x, x_+ désigne la partie positive de x.

3. On pose:

$$\varphi(x) = a_m^{1/m} \left(1 - \left(\frac{x}{\gamma_m} \right)^2 \right)_+^{1/2m} . \tag{II.4}$$

THÉORÈME II.1. *Soit m réel, $m > 0$.*

1. *L'équation* $(\mathrm{BB})_m$ *possède une solution faible* $(X_t, u(t,.); t \geq 0)$ *unique (ici, le qualificatif faible est relatif à X: X est solution faible de l'E.D.S. première ligne de* $(\mathrm{BB})_m$). *Le processus X est* p.s. *à trajectoires hölderiennes d'indice inférieur à* $1/(2m+2)$. *La densité $u(t,x)$ est celle de Barenblatt-Pattle. Elle vaut:*

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\beta} \left(a_m^2 - \frac{m}{(2m+1)(m+1)} \frac{x^2}{t^{2\beta}} \right)_+^{1/2m} = \frac{1}{t^\beta} \varphi \left(\frac{x}{t^\beta} \right) \tag{II.5}$$

Ainsi, la loi de $\frac{X_t}{t^\beta}$ ne dépend pas de t et est à support compact égal à $[-\gamma_m, \gamma_m]$.

2. (*Propriété d'échelle*) *Pour tout $\lambda > 0$, le processus X a même loi que le processus X^λ défini par $X_t^\lambda := \lambda X_{t/\lambda^{2m+2}} (t \geq 0)$.*

3. *Le processus X est récurrent et satisfait à:*

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{X_t}{t^\beta} = \gamma_m \quad \text{p.s.}; \ \underline{\lim_{t \to 0}} \frac{X_t}{t^\beta} = -\gamma_m \quad \text{p.s.} \tag{II.6}$$

et pour tout $s > 0$, $|X_s| < \gamma_m s^\beta$ p.s.

REMARQUE. En notant $T = \inf\{s > 0; \frac{X_s}{s^\beta} = \pm\gamma_m\}$, on a:

$$P\{T = +\infty\} = 1 \tag{II.7}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II.1.

1. Supposons que $(\mathrm{BB})_m$ possède une solution (X, u). Appliquant la formule d'Itô pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ régulière, on a:

$$f(X_t) = f(0) + \int_0^t f'(X_s) u^m(s, X_s) \mathrm{d}B_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) u^{2m}(s, X_s) \mathrm{d}s .$$

Prenant l'espérance et tenant compte que X_t a comme densité $u(t,.)$:

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)u(t,x)\mathrm{d}x = f(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbf{R}} f''(x)u^{2m+1}(s,x)\mathrm{d}s\ \mathrm{d}x\,.$$

On dérive par rapport à t et on intègre deux fois par parties à droite:

$$(E_{m,\delta_0}) \qquad \begin{cases} u_t = \frac{1}{2}(u^{2m+1})_{xx} \\ u(0,.) = \delta_0\,. \end{cases}$$

2. On sait que (E_{m,δ_0}) possède une solution positive unique, la solution de Barenblatt-Pattle (cf. par exemple [P] pour l'unicité dans un cadre plus général que ce qui est utilisé ici). On cherche une solution autosimilaire, i.e. de la forme:

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\rho}\varphi_0\left(\frac{x}{t^\rho}\right) \tag{II.8}$$

où φ_0 est une fonction positive, d'intégrale égale à 1. Reportant alors (II.8) dans (E_{m,δ_0}), on a:

$$-\frac{\rho}{t^{1+\rho}}\varphi_0\left(\frac{x}{t^\rho}\right) - \frac{\rho x}{t^{1+2\rho}}\varphi_0'\left(\frac{x}{t^\rho}\right) = \frac{1}{2t^{\rho(2m+3)}}(\varphi_0^{2m+1})''\left(\frac{x}{t^\rho}\right) \tag{II.9}$$

Choisissant alors ρ tel que $1+\rho = \rho(2m+3)$, i.e.:

$$\rho = \beta = \frac{1}{2m+2}$$

et posant $\frac{x}{t^\beta} = y$, on obtient:

$$-2\beta(\varphi_0 + y\varphi_0') = (\varphi_0^{2m+1})''\,. \tag{II.10}$$

Soit, après intégration, $-2\beta y\varphi_0 = (\varphi_0^{2m+1})' = (2m+1)\varphi_0^{2m}\varphi_0'$, la constante d'intégration étant nulle, puisque φ_0 est une densité de probabilité. D'où:

$$\varphi_0^{2m}(y;a) = a^2 - \frac{m}{(2m+1)(m+1)}y^2 \tag{II.11}$$

où a est un nombre réel. Donc:

$$\varphi_0(y;a) = \left(a^2 - \frac{m}{(2m+1)(m+1)}y^2\right)_+^{1/2m} \tag{II.12}$$

et a est choisi tel que:

$$\int \varphi_0(y)\mathrm{d}y = 1\,. \tag{II.13}$$

Un calcul élémentaire prouve que: $a = a_m$ où a_m est défini par (II.2).

Ainsi, la solution positive de (E_{m,δ_0}) vaut:

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\beta}\left(a_m^2 - \frac{m}{(2m+1)(m+1)}\frac{x^2}{t^{2\beta}}\right)_+^{1/2m} = \frac{1}{t^\beta}\varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right). \tag{II.14}$$

3. Une fois u déterminé par (II.14), nous reportons sa valeur dans la première ligne de l'équation $(\mathrm{BB})_m$ qui devient ainsi une E.D.S. ordinaire (non homogène):

$$X_t = \int_0^t \frac{1}{s^{\beta m}}\left(a_m^2 - \frac{m}{(2m+1)(m+1)}\frac{X_s^2}{s^{2\beta}}\right)_+^{1/2} \mathrm{d}B_s. \tag{II.15}$$

Notons que, une fois trouvée la solution de (II.15), l'intégrale stochastique aura bien un sens dans $L^2(\Omega \times [0,t])$ puisque, φ étant bornée:

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t \frac{1}{s^{\beta m}}\varphi\left(\frac{X_s}{s^\beta}\right)\mathrm{d}B_s\right)^2 &= E\left(\int_0^t \frac{1}{s^{2\beta m}}\varphi^2\left(\frac{X_s}{s^\beta}\right)\mathrm{d}s\right) \\ &\le C\int_0^t \frac{1}{s^{2\beta m}}\mathrm{d}s < +\infty. \end{aligned}$$

Sachant que $2\beta m < 1$, la dernière intégrale est bien finie.

L'E.D.S. (II.15), non homogène, ayant ses coefficients non lipschitziens, n'entre pas tout à fait dans le cadre classique de la théorie des E.D.S. Pour prouver l'existence d'une solution (faible) de (II.15), nous allons faire un détour par une équation homogène stationnaire.

Pour ce faire, observons déjà que si X est solution de (II.15), alors $\frac{X_t}{t^\beta}$ a une loi qui ne dépend pas de t et la densité de cette v.a. vaut $t^\beta u(t, xt^\beta) = \varphi(x)$.

Par ailleurs si une diffusion Y est solution de:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s)\mathrm{d}B_s - \int_0^t b(Y_s)\mathrm{d}s \tag{II.16}$$

dire que α est la densité stationnaire de Y signifie que:

$$\frac{1}{2}(\alpha\sigma^2)'' + (b\alpha)' = 0. \tag{II.17}$$

Mais, d'après (II.10), φ est solution de:

$$\frac{1}{2}(\varphi \cdot \varphi^{2m})'' + \beta(x\varphi)' = 0. \tag{II.18}$$

Ce qui nous conduit à choisir $\sigma = \varphi^m$ et $b(x) = \beta x$.

4. Soit $s \in \mathbf{R}$ fixé. Considérons l'E.D.S. homogène:

$$Z_t = Z_s + \int_s^t \varphi^m(Z_r)\mathrm{d}B_r - \beta \int_s^t Z_r\,\mathrm{d}r \quad (t \geq s). \tag{II.19}$$

D'après le théorème d'Engelbert et Schmidt (cf. [KS]), p. 329 et suivantes), cette E.D.S. possède une solution faible unique à valeurs $\{x; \varphi(x) > 0\}$, i.e. $]-\gamma_m, \gamma_m[$.

Une autre démarche pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution de (II.19) est la suivante. Définissons:

$$\begin{aligned}\psi(x) &:= \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\varphi^m(y)} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{(a_m^2 - \frac{my^2}{(2m+1)(m+1)})_+^{1/2}} \quad (-\gamma_m \leq x \leq \gamma_m)\\ &= \frac{1}{c_m^{1/2}} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\gamma_m}\right)\end{aligned} \tag{II.20}$$

avec

$$c_m = \frac{m}{(2m+1)(m+1)}. \tag{II.21}$$

Admettons provisoirement que le processus Z n'atteint pas les bords $\pm\gamma_m$ (nous verrons cela au dernier point de la démonstration). La fonction ψ étant C^∞ sur $]-\gamma_m, \gamma_m[$, nous pouvons appliquer la formule d'Itô, pour $t > s$:

$$\psi(Z_t) = \psi(Z_s) + B_t - B_s - \int_s^t \beta \frac{Z_r}{\varphi^m(Z_r)}\mathrm{d}r - \frac{1}{2}\int_s^t m\varphi'\varphi^{m-1}(Z_r)\mathrm{d}r. \tag{II.22}$$

Compte tenu de $\varphi'(x) = \frac{-x}{(2m+1)(m+1)}\varphi(x)^{1-2m}$, on a:

$$\psi(Z_t) = \psi(Z_s) + B_t - B_s - \frac{1}{2(2m+1)} \int_s^t \frac{Z_r}{\varphi^m(Z_r)}\mathrm{d}r. \tag{II.23}$$

En écrivant $Z_s = \psi^{-1}(\psi(Z_s)) = \psi^{-1}(Y_t)$ avec $Y_t := \psi(Z_t)$ et

$$\psi^{-1}(z) = \frac{a_m}{c_m^{1/2}} \sin(c_m^{1/2} z),$$

on a,

$$Y_t = Y_s + B_t - B_s - \frac{1}{2(2m+1)a_m} \int_s^t \frac{\psi^{-1}(Y_r)}{(1 - \sin^2(c_m^{1/2} Y_r))^{1/2}}\mathrm{d}r,$$

$$Y_t = Y_s + B_t - B_s - \frac{1}{2(2m+1)c_m^{1/2}} \int_s^t \operatorname{tg}(c_m^{1/2} Y_r)\mathrm{d}r. \tag{II.24}$$

D'après [RY] (Chapitre VIII, p. 331, cas 3) on sait que (II.24) admet une solution; de plus le processus Y' défini par $Y'_t = \frac{\pi}{2}c_m^{-1/2} - Y_t$ est le processus de Legendre. Le processus Z n'atteignant pas $\pm\gamma_m$, il en est de même de Y: pour tout $t \geq s$, $|c_m^{1/2}Y_t| < \pi/2$. La fonction tangente étant localement Lipschitzienne sur $]-\pi/2, \pi/2[$, l'E.D.S. (II.24) possède la propriété d'unicité trajectorielle. En conlusion, il existe une et une seule solution forte de (II.24).

D'après (II.17) et (II.18) si Z_s a pour densité $\varphi(x)$, il en est de même de Z_t, $t \geq s$. La loi de Z_t, $t \geq s$, est bien stationnaire. Puisque $Y_t = \psi(Z_t)$, Y_t admet une loi stationnaire de densité ρ donnée par:

(II.25)
$$\rho(x) = \varphi(\psi^{-1}(x))\psi^{-1}(x)' = a_m^{\frac{m+1}{m}} \cos^{\frac{m+1}{m}}(c_m^{1/2}x); \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2\sqrt{c_m}}, \frac{\pi}{2\sqrt{c_m}}\right].$$

D'après (II.17), la fonction ρ est solution de l'équation:

(II.26)
$$\frac{1}{2}\rho''(x) + \frac{1}{2(2m+1)c_m^{1/2}}(\rho(x)\mathrm{tg}(c_m^{1/2}x))' = 0.$$

Il est donc équivalent de travailler avec le processus Z ou le processus Y.

5. On déduit de ce qui précède qu'il existe un processus $(Z_t; t \in \mathbf{R})$ solution de:

(II.27)
$$\begin{cases} Z_t = Z_s + \int_0^t \varphi^m(Z_r)\mathrm{d}B_r - \beta\int_s^t Z_r\,\mathrm{d}r; t \geq s \\ Z_s \quad \text{a comme densité} \quad \varphi \end{cases}$$

On définit alors le processus X par la relation:

(II.28)
$$\begin{cases} X_t = t^\beta Z_{\ell nt} \quad \text{si} \quad t > 0 \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

Nous allons vérifier que X est le processus cherché, solution de (II.15).

• Notons déja que X est continu en 0, en effet $|Z_t| \leq \gamma_m$ pour tout t, donc $t^\beta Z_{\ell nt} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Il est clair que les trajectoires de Z sont höldériennes d'indice $\beta < \frac{1}{2}$. Montrons que les trajectoires de X sont höldériennes d'indice $\gamma < \beta$. Soit $s < t < 1$, on a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|t-s|^\gamma}|t^\beta Z_{\ell nt} - s^\beta Z_{\ell ns}| &\leq \frac{|t^\beta - s^\beta|\,|Z_{\ell nt}|}{|t-s|^\gamma} + s^\beta\frac{|Z_{\ell nt} - Z_{\ell ns}|}{|\ell nt - \ell ns|^\gamma}\frac{|\ell nt - \ell ns|^\gamma}{|t-s|^\gamma} \\ &\leq C\frac{|t-s|^\beta}{|t-s|^\gamma} + C's^\beta\frac{|\ell nt - \ell ns|^\gamma}{|t-s|^\gamma}.\end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis:

$$|\ell nt - \ell ns| = \frac{|t-s|}{\rho} \leq \frac{|t-s|}{s}$$

où $s < \rho < t$, D'où

$$\frac{1}{|t-s|^{\gamma}}|X_t - X_s| \leq C'', \quad s < t < 1\,.$$

• Prouvons maintenant que X satisfait à $(\mathrm{BB})_m$. D'après (II.27) et (II.28), on a:

$$\mathrm{d}X_t = \beta t^{\beta-1} Z_{\ln t}\,\mathrm{d}t + t^{\beta}\,\mathrm{d}Z_{\ln t}$$
$$\mathrm{d}X_t = \beta t^{\beta-1} Z_{\ln t}\,\mathrm{d}t + t^{\beta}\left(-\beta Z_{\ln t}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right) + t^{\beta}\,\mathrm{d}\left(\int_0^{\ln t}\varphi^m(Z_s)\mathrm{d}B_s\right)\,.$$

Posons: $M_t := \int_0^{\ln t}\varphi^m(Z_s)\mathrm{d}B_s$, il reste à voir que:

$$t^{\beta}\,\mathrm{d}M_t = \frac{1}{t^{\beta m}}\varphi^m(Z_{\ln t})\mathrm{d}B'_t\,,$$

où $(B'_t; t \geq 0)$ est un mouvement brownien. Mais on a:

$$\mathrm{d}B'_t = t^{\beta(1+m)}\varphi^{-m}(Z_{\ln t})\mathrm{d}M_t\,.$$

B' est une martingale locale continue, nulle en 0, calculons son processus croissant. On a

$$\langle B', B'\rangle_t = \int_0^t s^{2\beta(1+m)}\varphi^{-2m}(Z_{\ln s})\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s$$
$$= \int_0^t s^{2\beta(1+m)}\varphi^{-2m}(Z_{\ln s})\varphi^{2m}(Z_{\ln s})\frac{\mathrm{d}s}{s} = t$$

puisque $2\beta(1+m) = \frac{2m+2}{2m+2} = 1$.

B' est bien un mouvement brownien.

Remarquons que la v.a. X_t a bien pour densité $u(t,.)$, ce qui est une conséquence immédiate de (II.27) et (II.28).

6. L'unicité en loi de la solution de $(\mathrm{BB})_m$ résulte des deux propriétés suivantes:

– la fonction $u(t,x)$ donnée par (II.5) est l'unique solution de (E_{m,δ_0}),

– si $(X_t; t \geq 0)$ est solution de $(\mathrm{BB})_m$, alors:

$$Z_t := e^{-t\beta}X_{e^t}$$

est l'unique processus stationnaire de probabilité invariante $\varphi(x)\mathrm{d}x$, satisfaisant à (II.19).

7. Prouvons la propriété d'échelle. Soit $\lambda > 0$ et $X_t^\lambda := \lambda X_{t/\lambda^{2m+2}}$, avec X solution de $(\mathrm{BB})_m$. Notons $v_\lambda(t,.)$ la densité de la v.a. X_t^λ. Il est clair que:

$$v_\lambda(t,x) = \frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{x}{\lambda}\right) \tag{II.29}$$

où u est donnée par (II.15). Par ailleurs, d'après $(\mathrm{BB})_m$, on a:

$$X_t^\lambda = \lambda X_{t/\lambda^{2m+2}} = \lambda \int_0^{t/\lambda^{2m+2}} u^m(s, X_s) \mathrm{d}B_s \,.$$

Faisant le changement de variable: $s = \frac{r}{\lambda^{2m+2}}$:

$$\begin{aligned} X_t^\lambda &= \lambda \int_0^t u^m \left(\frac{r}{\lambda^{2m+2}}, \frac{\lambda}{\lambda} X_{r/\lambda^{2m+2}}\right) \mathrm{d}B_{r/\lambda^{2m+2}} \\ &= \int_0^t v_\lambda^m(r, X_r^\lambda) \lambda^{m+1} \mathrm{d}B_{r/\lambda^{2m+2}} \,. \end{aligned}$$

Observant que $\lambda^{m+1}\mathrm{d}B_{r/\lambda^{2m+2}} = \mathrm{d}B'_r$ est un mouvement brownien:

$$X_t^\lambda = \int_0^t v_\lambda^m(r, X_r^\lambda) \mathrm{d}B'_r$$

Il reste à observer, pour conclure, que $X_0^\lambda = 0$, v_λ est la densité de X^λ et que $(\mathrm{BB})_m$ possède une unique solution en loi.

8. La récurrence du processus X résulte du fait que Z est lui-même récurrent. En effet la loi de Z étant stationnaire sur $]-\gamma_m, \gamma_m[$, on a:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} Z_t = \gamma_m \quad \text{p.s.} \quad , \underline{\lim_{t\to\infty}} Z_t = -\gamma_m \quad \text{p.s.}$$

et donc, d'après (II.28):

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} X_t = +\infty \quad \text{p.s.,} \quad \underline{\lim_{t\to\infty}} X_t = -\infty \quad \text{p.s.}$$

X étant continu, est alors récurrent.

De plus:

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{X_t}{t^\beta} = \gamma_m \quad \text{p.s.,} \quad \underline{\lim_{t\to 0}} \frac{X_t}{t^\beta} = -\gamma_m \quad \text{p.s.}$$

9. Reste alors à prouver que $T = +\infty$ p.s., où T est le temps d'arrêt:

$$T = \inf\{s > 0; X_s = \pm\gamma_m s^\beta\} \,. \tag{II.30}$$

Pour tout x de $]-\gamma_m, \gamma_m[$, notons Z^x la solution sur $\mathbf{R}_+$, de (II.19) avec donnée initiale $Z_0^x = x$, c'est-à-dire:

$$Z_t^x = x + \int_0^t \varphi^m(Z_r)\mathrm{d}B_r - \beta \int_0^t Z_r\,\mathrm{d}r; \quad t \geq 0.$$

On associe à Z^x le temps d'arrêt S:

$$S = \inf\{t \geq 0, Z_t = \pm\gamma_m\}.$$

On a bien sûr l'équivalence: $T = +\infty$ p.s. si et seulement si

$$P_x(S = +\infty) = 1 \quad \forall x \in]-\gamma_m, \gamma_m[.$$

Appliquant la théorie classique du test de Feller, (II.31) sera prouvé si nous montrons que $p(\gamma_{m-}) = +\infty$, $p((-\gamma_m)_+) = -\infty$ (cf. [KS], Proposition 5.22, p. 345) avec:

(II.31)
$$p(x) := \int_0^x \mathrm{d}y \exp\left(2\beta \int_0^y \frac{z}{\varphi^{2m}(z)}\mathrm{d}z\right).$$

Soit, après un calcul élémentaire:

$$p(x) = C(m) \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{[(\gamma_m - y)(\gamma_m + y)]^{\frac{2m+1}{2m}}}$$

et donc: $p(\gamma_{m-}) = +\infty$ et $p((-\gamma_m)_+) = -\infty$ puisque $\frac{2m+1}{2m} > 1$ ($C(m)$ vaut $\gamma_m^{\frac{2m+1}{m}}$). □

Soit X le processus du big-bang d'indice m et issu de 0, X est solution de $(\mathrm{BB})_m$:

$$X_t = \int_0^t u^m(s, X_s)\mathrm{d}B_s.$$

Au processus X, nous avons associé bijectivement un processus Z par la relation (II.28):

$$X_t = t^\beta Z_{\ell n t}.$$

Z est solution de (II.27).

X est un processus de Markov inhomogène; considérons $X^{s,x}$ la solution de l'E.D.S.:

(II.32)
$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t u^m(r, X_r^{s,x})\mathrm{d}B_r,$$

où $x \in \mathbf{R}$ et $t \geq s$.

En particulier

$$E(F(X_t; t \geq s)|\sigma(X_r; r \leq s)) = E(F(X_t^{s,x}; t \geq s))|_{x=X_s} \tag{II.33}$$

où F est une fonction borélienne bornée définie sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

D'après le Théorème II.1, pour tout $t > 0$, $|X_t| \leq \gamma_m t^\beta$, par conséquent pour tout $t > s$, et $|x| < \gamma_m s^\beta$, on a:

$$|X_t^{s,x}| < \gamma_m t^\beta .$$

Nous nous intéressons à présent aux deux familles de temps d'arrêt:

$$T_{y_0} = \inf\{t > s, X_t^{s,x} = y_0 t^\beta\} \tag{II.34}$$

où

$$0 < |y_0| < \gamma_m; |x| < |y_0| s^\beta \tag{II.35}$$

et

$$T_{z_0}^* = \inf\{t > s; |X_t^{s,x}| = z_0 t^\beta\} \tag{II.36}$$

où

$$0 < z_0 < \gamma_m; |x| < z_0 s^\beta . \tag{II.37}$$

Il est clair que

$$T_{z_0}^* = T_{z_0} \wedge T_{-z_0} . \tag{II.38}$$

On déduit de (II.28) et (II.33):

$$X_t^{s,x} = t^\beta \quad Z_{\ell n(t/s)}^{x/s^\beta}; t \geq s \tag{II.39}$$

où le processus Z^y est défini comme solution de:

$$Z_t^y = y + \int_0^t \varphi^m(Z_r^y) \mathrm{d}B_r - \beta \int_0^t Z_r^y \, \mathrm{d}r; \quad t \geq 0 . \tag{II.40}$$

Par conséquent:

$$S_{x/s^\beta, y_0} = \ell n(T_{y_0}/s) \tag{II.41}$$

où S_{x_0,y_0} est le temps d'arrêt:

$$S_{x_0,y_0} = \inf\{t \geq 0, Z_t^{x_0} = y_0\} . \tag{II.42}$$

La relation (II.41) nous conduit naturellement à déterminer la loi des familles de temps d'arrêt $(S_{x,y}; x, y \in]-\gamma_m, \gamma_m[)$. Fixons auparavant quelques notations.

(II.43) $$\lambda_m = \frac{m+1}{8m(2m+1)}$$

(II.44) $$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8(m+1)(2m+1)}{m}}\sqrt{|\lambda - \lambda_m|}; \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Lorsque $\lambda > \lambda_m$, on note:

(II.45) $$\xi_m = \frac{m+1}{2m} + i\rho; \quad b_m = \frac{m+1}{2m} - i\rho.$$

Quand $0 \leq \lambda \leq \lambda_m$, on pose:

(II.46) $$\xi_m = \frac{m+1}{2m} + \rho; \quad b_m = \frac{m+1}{2m} - \rho.$$

On rappelle (cf. [WW]) que $F(\xi, b; c; z)$ est la fonction hypergéométrique définie par:

$$F(\xi, b; c; z) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\xi(\xi+1)\dots(\xi+k-1)b(b+1)\dots(b+k-1)}{c(c+1)\dots(c+k-1)k!} z^k.$$

Pour tout $\lambda \geq 0$, on introduit les deux fonctions:

(II.47) $$h_\lambda(x) : = F\left(\xi_m, b_m; \frac{2m+1}{2m}; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\gamma_m}\right)\right)$$

(II.48) $$k_\lambda(x) : = F\left(\xi_m, b_m; \frac{2m+1}{2m}; \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\gamma_m}\right)\right)$$

Pour les valeurs de ξ_m, b_m choisies précédemment, notons que pour $\lambda > \lambda_m$, on a:

(II.49) $$h_\lambda(x) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{|\xi_m|^2 |\xi_m + 1|^2 \dots |\xi_m + k - 1|^2}{c(c+1)\dots(c+k-1)k!} \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\gamma_m}\right)\right)^k,$$

(II.50) $$k_\lambda(x) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{|\xi_m|^2 |\xi_m + 1|^2 \dots |\xi_m + k - 1|^2}{c(c+1)\dots(c+k-1)k!} \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\gamma_m}\right)\right)^k.$$

avec $c = 1 + 1/2m$. Lorsque $0 \leq \lambda < \lambda_m$, on vérifie aisément que $(\xi_m + k)(b_m + k) \geq 0$, par conséquent pour tout $x \in]-\gamma_m, \gamma_m[$, $h_\lambda(x) > 0$ et $k_\lambda(x) > 0$.

Dans ces conditions:

THÉORÈME II.2. *Pour tout* $\lambda \geq 0$, $-\gamma_m < x < \gamma_m$ *et* $-\gamma_m \leq y \leq x \leq z \leq \gamma_m$, *on a:*

$$E[\exp -\lambda\, S_{x,y}] = \frac{h_\lambda(x)}{h_\lambda(y)} \tag{II.51}$$

$$E[\exp -\lambda S_{x,z}] = \frac{k_\lambda(x)}{k_\lambda(z)} = \frac{h_\lambda(-x)}{h_\lambda(-z)}\,. \tag{II.52}$$

REMARQUES II.3.

1. Ecrivons $F\left(\xi_m, b_m; \frac{2m+1}{2m}; z\right) = \sum_{k\geq 0} \theta_k z^k$. Un calcul immédiat conduit à:

$$\frac{\theta_{k+1}}{\theta_k} = 1 - \left(\frac{2m-1}{2m}\right)\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right); \quad k \to +\infty\,.$$

D'où:

$$F\left(\xi_m, b_m, \frac{2m+1}{2m}, 1\right) = +\infty\,.$$

Si on fait tendre $y \to -\gamma_m$ et $z \to \gamma_m$, (II.51) et (II.52) impliquent que $S_{x,\gamma_m} = +\infty$ et $S_{x,-\gamma_m} = +\infty$. Ce qui signifie que Z n'atteint pas les extrémités de $]-\gamma_m, \gamma_m[$. Nous retrouvons ainsi le point 3 du Théorème II.1.

2. En revanche d'après Itô-Mc Kean, on peut prendre $x = \gamma_m$ et $y \in]-\gamma_m, \gamma_m[$ ou $x = -\gamma_m$ et $z \in]-\gamma_m, \gamma_m[$, (II.51) et (II.52) deviennent:

$$E[\exp -\lambda S_{\gamma_m,y}] = \frac{1}{h_\lambda(y)}, \quad E[\exp -\lambda S_{-\gamma_m,z}] = \frac{1}{k_\lambda(z)}\,. \tag{II.53}$$

3. En fait les formules (II.51) et (II.52) sont équivalentes.

Remarquons à cet effet:

$$-Z_t^y = -y + \int_0^t \varphi^m(Z_s^y)\mathrm{d}(-B_s) - \beta \int_0^t (-Z_s^y)\mathrm{d}s\,.$$

Puisque φ^m est une fonction paire, on en déduit que les deux processus $(-Z_t^y; t \geq 0)$ et $(Z_t^{-y}; t \geq 0)$ ont même loi.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II.2.

1. On commence par étudier le cas où $x \geq y > -\gamma_m$.

D'après la remarque précédente,

$$\begin{cases} \text{(i) } h_\lambda \text{ est une fonction décroissante et à valeurs strictement positives} \\ \text{(ii) } h_\lambda(\gamma_m) = 1, \quad h_\lambda(-\gamma_m) = +\infty\,. \end{cases} \tag{II.54}$$

La fonction hypergéométrique $F(A, B, C, z)$ satisfait à ([WW], p. 283):

$$z(1-z)F''(z) + (C - (A+B+1)z)F'(z) - ABF(z) = 0\,. \tag{II.55}$$

On en déduit alors que h_λ est solution de:

$$(\text{II}.56)\quad (\gamma_m^2 - x^2)h_\lambda''(x) - \frac{(2m+1)}{m}xh_\lambda'(x) - \frac{2(m+1)(2m+1)}{m}\lambda h_\lambda(x) = 0.$$

D'après (II.19), le générateur infinitésimal L de Z est égal à:

$$(\text{II}.57)\qquad LK(y) = \frac{1}{2}\varphi^{2m}(y)K''(y) - \beta yK'(y), \quad y \in]-\gamma_m, \gamma_m[.$$

Mais $\beta = 1/2(m+1)$ et

$$\varphi^{2m}(y) = a_m^2\left(1 - \left(\frac{y}{\gamma_m}\right)^2\right) = \frac{m}{(2m+1)(m+1)}(\gamma_m^2 - y^2);\ y \in]-\gamma_m, \gamma_m[.$$

On déduit de (II.56) que h_λ est une fonction propre de L associée à la valeur propre λ (i.e. $Lh_\lambda = \lambda h_\lambda$). De plus d'après (II.54), h_λ est une fonction bornée sur $[y, \gamma_m]$. Le théorème d'arrêt conduit à (II.51).

2. Examinons à présent le cas où $-\gamma_m < x < z < \gamma_m$. A l'évidence $k_\lambda(x) = h_\lambda(-x)$. On en déduit que k_λ est solution de (II.56). k_λ est une fonction propre de L, associée à la valeur propre λ, de plus k_λ est croissante, à valeurs positives et $k_\lambda(-\gamma_m) = 1$, $k_\lambda(\gamma_m) = +\infty$. (II.52) est alors une conséquence immédiate du théorème d'arrêt.

Remarquons que d'après [WW], p. 287 (formule donnant y_{17}), $F(A, B, A+B-C+1, 1-z)$ est aussi solution de (II.55).

On a: $k_\lambda(x) = F\left(A, B, A+B+C-1, 1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\gamma_m}\right)\right)$ où $A = \xi_m$, $B = b_m$, $C = (2m+1)/2m$. □

On s'intéresse à présent à l'existence de moments exponentiels pour $S_{x,y}$.

PROPOSITION II.4. *Pour tout $\mu < 0$, il existe un réel μ_* appartenant à $]-\gamma_m, \gamma_m[$ tel que pour tout x et y de $]-\gamma_m, \gamma_m[$, $x > y$ (respectivement $x < y$) on ait:*

$$E[\exp -\mu S_{x,y}] < \infty \iff x > y > \mu_* \quad (\textit{respectivement } x < y < -\mu_*).$$

Lorsqu'il en est ainsi

$$E[\exp -\mu S_{x,y}] = \frac{h_\mu(x)}{h_\mu(y)} \quad \left(\textit{respectivement } \frac{k_\mu(x)}{k_\mu(y)}\right).$$

PREUVE.

1. Soit $y \in]-\gamma_m, \gamma_m]$, on commence par montrer que $\lambda \to h_\lambda(y)$ est analytique dans un voisinage de 0. Soit $0 \le \lambda \le \lambda_m$, on a

$$(\text{II}.58)\qquad h_\lambda(y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\lambda)$$

avec

$$\begin{aligned}
\gamma_k(\lambda) &= \tilde{\gamma}_k \left(\prod_{\ell=0}^{k-1} \theta_\ell(\lambda) \right) \\
\tilde{\gamma}_k &= \frac{1}{k!c(c+1)\dots(c+k-1)} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{\gamma_m} \right) \right)^k , \quad c = \frac{2m+1}{2m} \\
\theta_\ell(\lambda) &= \left(\frac{m+1}{2m} + \ell \right)^2 - \frac{2(m+1)(2m+1)}{m} (\lambda_m - \lambda) \\
&= \ell^2 + \frac{(m+1)}{m} \ell + \frac{2(m+1)(2m+1)}{m} \lambda .
\end{aligned}$$

γ_k est un polynôme en λ, de plus pour tout $\ell_0 \geq 2$,

$$h_\lambda(y) = 1 + \sum_{k=1}^{\ell_0 - 1} \gamma_k(\lambda) + \left(\prod_{\ell=0}^{\ell_0 - 1} \theta_\ell(\lambda) \right) \psi(\ell_0, y, \lambda) \tag{II.59}$$

avec

$$\psi(\ell_0, y, \lambda) = \sum_{k=\ell_0}^{\infty} \tilde{\gamma}_k \left(\prod_{\ell=\ell_0}^{k-1} \theta_\ell(\lambda) \right) . \tag{II.60}$$

Soit λ complexe, $|\lambda| \leq K$. On choisit ℓ_0 tel que pour tout $\ell \geq \ell_0$ on ait:

$$|\theta_\ell(\lambda)| \geq 1 .$$

Posons

$$\zeta_k(\lambda) = \tilde{\gamma}_k \left(\prod_{\ell=\ell_0}^{k-1} \theta_\ell(\lambda) \right) .$$

On a successivement:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_k}{\partial \lambda}(\lambda) &= \frac{2(m+1)(2m+1)}{m} \zeta_k(\lambda) \left(\sum_{\ell=\ell_0}^{k-1} \frac{1}{\theta_\ell(\lambda)} \right) \\
\left| \frac{\partial \zeta_k}{\partial \lambda}(\lambda) \right| &\leq \frac{2(m+1)(2m+1)}{m} k |\zeta_k(\lambda)| .
\end{aligned}$$

On vérifie que, uniformément par rapport à λ appartenant au disque de centre 0 et de rayon K:

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{(k+1)\zeta_{k+1}(\lambda)}{k \zeta_k(\lambda)} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{\gamma_m} \right) < 1 .$$

Ce qui prouve que la série $\sum_{k\geq\ell_0} \frac{\partial\zeta_k}{\partial\lambda}(\lambda)$ est uniformément convergente pour tout $|\lambda| \leq K$, par conséquent, $\lambda \to \sum_{k\geq\ell_0} \zeta_k(\lambda)$ est analytique.

On déduit de (II.59) et (II.60) que $\lambda \to h_\lambda(y)$ est analytique dans un voisinage de 0.

2. Soit μ_ℓ le réel négatif solution de $\theta_\ell(\mu_\ell) = 0$. Supposons que $\mu \in]\mu_{\ell_0}, \mu_{\ell_0-1}]$. On remarque que $\ell \to \mu_\ell$ est décroissante et

$$\theta_\ell(\mu) = \frac{2(m+1)(2m+1)}{m}(\mu - \mu_\ell).$$

Par conséquent si $\ell \geq \ell_0$, $\theta_\ell(\mu) \geq 0$, donc $\psi(\ell_0, y, \mu)$ est la somme d'une série à termes positifs et $y \to \psi(\ell_0, y, \mu)$ est une fonction décroissante. Il est clair que $\psi(\ell_0, \gamma_m, \mu) = 0$ si $\ell_0 \geq 1$.

a. Supposons ℓ_0 impair. Alors $\prod_{\ell=0}^{\ell_0-1} \theta_\ell(\mu) < 0$. Un raisonnement analogue à celui développé dans la Remarque II.3 montre que $\psi(\ell_0, -\gamma_m, \mu)$ est une série divergente, par conséquent $h_\mu(-\gamma_m) = -\infty$; mais $h_\mu(\gamma_m) = 1$, par conséquent h_μ admet au moins un zéro. Désignons par μ_* le dernier zéro:

$$\mu_* = \sup\{y \in]-\gamma_m, \gamma_m[;\ h_\mu(y) = 0\}. \tag{II.61}$$

Par analyticité il existe $\eta(x, y) > 0$, tel que pour tout $-\eta(x, y) < \mu < 0$,

$$E[\exp -\mu S_{x,y}] = \frac{h_\mu(x)}{h_\mu(y)}; \quad x \geq y. \tag{II.62}$$

Si $x \geq y > \mu_*$ et $\mu > \mu_*$, alors $h_\mu(y) > 0$; l'égalité (II.62) a encore lieu.

En faisant tendre y vers μ_*, on obtient:

$$E[\exp -\mu S_{x,\mu_*}] = +\infty.$$

Lorsque $x \geq \mu_* \geq y$, on remarque que $S_{x,y} \geq S_{x,\mu_*}$, donc

$$E[\exp -\mu S_{x,y}] = +\infty. \tag{II.63}$$

Il reste à étudier le cas où $y < x < \mu_*$. On sait qu'avec une probabilité strictement positive, le processus Z^x va atteindre μ_* avant d'atteindre y, donc à nouveau (II.63) est réalisé.

b. Etudions à présent le cas où ℓ_0 est pair. Si μ_* existe, l'analyse précédente s'applique. Dans le cas contraire, $h_\mu(y) > 0$ pour tout $y \in]-\gamma_m, \gamma_m[$ et alors

$$E[\exp -\mu S_{x,y}] < \infty \tag{II.64}$$

pour tout x et y de $]-\gamma_m, \gamma_m[$, $x > y$.

Rappelons que $\mu \in]\mu_{\ell_0}, \mu_{\ell_0-1}]$; (II.64) implique

$$E[\exp -\mu_{\ell_0-1} S_{x,y}] < +\infty, \quad \forall x, y \in]-\gamma_m, \gamma_m[, x > y. \tag{II.65}$$

Mais $\ell_0 - 1$ est impair, (II.65) ne peut avoir lieu d'après ce qui précède.

3. Le cas où $x > y$ se traite d'une manière analogue. □

REMARQUE II.5. Le résultat de la Proposition II.4 est incomplet. Nous aurions voulu montrer que pour tout x et y de $]-\gamma_m, \gamma_m[$, il existe un réel $\lambda_{x,y}$ strictement négatif tel que

$$E[\exp -\lambda S_{x,y}] < \infty \Leftrightarrow \lambda > \lambda_{x,y} .$$

La difficulté consiste à montrer que pour tout y fixé, la fonction $\lambda \to h_\lambda(y)$ admet au moins un zéro sur $\mathbf{R}$.

COROLLAIRE II.6. *Soit x, y, z trois réels appartenant à $]-\gamma_m, \gamma_m[$, $y < x < z$. Alors:*

$$E[\exp -\lambda(S_{x,y} \wedge S_{x,z})] = \frac{h_\lambda(x)(k_\lambda(z) - k_\lambda(y)) - k_\lambda(x)(h_\lambda(z) - h_\lambda(y))}{h_\lambda(y)k_\lambda(z) - k_\lambda(y)h_\lambda(z)}; \lambda \geq 0 .$$

En particulier si $y = -z$ et $z > 0$, on a

$$E[\exp -\lambda(S_{x,-z} \wedge S_{x,z})] = \frac{h_\lambda(x) + h_\lambda(-x)}{h_\lambda(z) + h_\lambda(-z)} .$$

PREUVE. Soit f_λ la fonction: $f_\lambda(w) = h_\lambda(y)k_\lambda(w) - k_\lambda(y)h_\lambda(w)$. f_λ est une fonction propre du générateur de Z et $f_\lambda(y) = 0$.

Le processus $(f_\lambda(Z^x(t \wedge S_{x,y} \wedge S_{x,z})) \exp -\lambda(t \wedge S_{x,y} \wedge S_{x,z});\ t \geq 0)$ est une martingale bornée, une application du théorème d'arrêt conduit à:

$$E[1_{\{S_{x,z} < S_{x,y}\}} \exp -\lambda(S_{x,z} \wedge S_{x,y})] = \frac{f_\lambda(x)}{f_\lambda(z)} = \frac{h_\lambda(y)k_\lambda(x) - k_\lambda(y)h_\lambda(x)}{h_\lambda(y)k_\lambda(z) - k_\lambda(y)h_\lambda(z)} .$$

Par symétrie on a:

$$E[1_{\{S_{x,y} < S_{x,z}\}} \exp -\lambda(S_{x,z} \wedge S_{x,y})] = \frac{k_\lambda(z)h_\lambda(x) - h_\lambda(z)k_\lambda(x)}{h_\lambda(y)k_\lambda(z) - k_\lambda(y)h_\lambda(z)} .$$

Il suffit alors d'ajouter membre à membre les deux expressions obtenues pour obtenir le résultat annoncé.

La deuxième formule est obtenue en utilisant: $k_\lambda(w) = h_\lambda(-w)$. □

Revenons à présent aux temps d'arrêt T_{y_0} et $T^*_{z_0}$ définis par (II.34) et (II.36):

$$T_{y_0} = \inf\{t > s, X_t^{s,x} = y_0 t^\beta\}, \quad T^*_{z_0} = \inf\{t > s, |X_t^{s,x}| = z_0 t^\beta\}$$

oú $X^{s,x}$ est le processus solution de (II.32), $0 < |y_0| < \gamma_m$, $s > 0$, $|x| < |y_0| s^\beta$, $0 < z_0 < \gamma_m$, $|x| < z_0 s^\beta$.

Compte tenu de (II.41), une application directe de la Proposition II.4 et du Corollaire II.6 permet le calcul des moments des temps d'arrêt T_{y_0} et $T^*_{z_0}$.

PROPOSITION II.7. *Pour tout $\lambda \geq 0$, on a:*

$$E[T_{y_0})^{-\lambda}] = \begin{cases} s^{-\lambda} \dfrac{h_\lambda(xs^{-\beta})}{h_\lambda(y_0)} & si \quad x < y_0 s^\beta \\ s^{-\lambda} \dfrac{k_\lambda(xs^{-\beta})}{k_\lambda(y_0)} & si \quad x > y_0 s^\beta , \end{cases}$$

$$E[(T^*_{y_0})^{-\lambda}] = s^{-\lambda} \frac{h_\lambda(xs^{-\beta}) + h_\lambda(-xs^{-\beta})}{h_\lambda(y_0) + h_\lambda(-y_0)} .$$

REMARQUE II.8. Il est clair que la première partie de l'énoncé du Corollaire II.6 et la Proposition II.4 impliquent des propriétés correspondantes pour les temps d'arrêt relatifs à X.

3. – Le processus poreux avec une donnée initiale fonction

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'équation $(S_{m,\mu})$ où μ est une fonction positive, bornée et d'intégrale 1. Rappelons qu'il s'agit de trouver un couple (X, u) où X est un processus, u une fonction, tel que:

$$(S_{m,\mu}) \qquad \begin{cases} X_t = X_0 + \displaystyle\int_o^t u^m(s, X_s) \mathrm{d}B_s & t \geq 0 \\ P(X_t \in \mathrm{d}x) = u(t,x)\mathrm{d}x & t > 0 \end{cases}$$

où μ est la densité de X_0.

Nous souhaitons montrer que $(S_{m,\mu})$ possède une unique solution pour une large classe de fonction μ. Nous commencerons par étudier le cas où μ est une fonction continue et strictement positive. Le cas général sera obtenu en approchant μ par une suite (μ_n) de fonctions strictement positives et continues.

PROPOSITION III.1. *Soit μ une fonction continue, bornée, d'intégrale 1 et strictement positive. On suppose que μ est dérivable et μ_x est bornée, alors $(S_{m,\mu})$ admet une unique solution forte.*

REMARQUES III.2.

1. Comme nous l'avons déja signalé, dire que $(S_{m,\mu})$ admet une unique solution forte signifie que $(S_{m,\mu})$ admet une unique solution (X, u) et que de plus l'E.D.S., première ligne de $(S_{m,\mu})$, possède une unique solution forte.

2. Rappelons [LSU] que sous les hypothèses de la Proposition III.1, l'équation:

$$(E_{m,\mu}) \qquad \begin{cases} u_t = \dfrac{1}{2}(u^{2m+1})_{xx} \\ u(0,.) = \mu \end{cases}$$

admet une unique solution u, strictement positive, et de plus u est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. Par ailleurs [A], [Kn] on a l'implication:

$$\text{(III.1)} \qquad \sup_{x\in\mathbf{R}} |(u(0,x)^{2m})_x| \le c \Rightarrow \sup_{t\ge 0, x\in\mathbf{R}} |((u(t,x))^{2m})_x| < \infty\,.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION III.1.

1. Comme nous l'avons fait à la première étape de la démonstration du Théorème II.1, on montre que si (X,u) est une solution de $(S_{m,\mu})$, u est solution de $(E_{m,\mu})$. La fonction u est donc unique. Il s'agit alors de montrer que l'E.D.S. définie par la première ligne de $(S_{m,\mu})$ possède une unique solution forte.

2. Montrons que u^m est une fonction à dérivée localement bornée. En effet

$$(u^m)_x = \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^m}(u^{2m})_x\,.$$

En utilisant d'une part (III.1) et d'autre part le fait que u est continue et strictement positive (cf. [A], [Kn]), on a:

$$|u^m(t,x) - u^m(t,y)| \le K_{T,N}|x-y|$$

pour $t \in [0,T]$, x et y bornés par N.

L'E.D.S. associée à $(S_{m,\mu})$ possède alors une unique solution forte.

Remarquons que d'après le principe du maximum:

$$\text{(III.2)} \qquad \|u(t,.)\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} u(t,x) \le \|u(0,.)\|_\infty = \|\mu\|_\infty\,.$$

Par conséquent, u^m est une fonction bornée. On déduit alors de l'exercice (2.10), p. 354-355, [RY], que cette E.D.S. admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ (le temps d'explosion est infini). □

Venons-en à présent au cas général. La donnée initiale μ est une fonction continue, positive, bornée et d'intégrale 1. Nous savons d'après [B] que $(E_{m,\mu})$ admet une unique solution positive u qui est continue, de plus [A], u est une fonction C^∞ sur $\{(t,x); t>0, u(t,x)>0\}$.

Nous ne supposons plus que μ est strictement positive et dérivable, nous serons toutefois conduits à introduire les hypothèses:

$$\text{(III.3)} \qquad \int_{\mathbf{R}} |x|^n \mu(x)\mathrm{d}x < \infty, \quad n \ge 2$$

et

$$\text{(III.4)} \qquad -(\mu^{2m})'' \le c$$

au sens des distributions.

THÉORÈME III.3. *Soit μ est une fonction continue, positive, bornée, d'intégrale 1 et vérifiant les hypothèses* (III.3) *et* (III.4). *Alors l'équation* $(S_{m,\mu})$ *possède une unique solution faible* (X, u). *De plus*

(i) *les trajectoires du processus X sont höldériennes d'indice α, pour tout $\alpha < 1/2$;*

(ii) *pour tout $t > 0$, $u(t, X_t) > 0$.*

REMARQUE III.4. Soit h une fonction continue sur une intervalle $[\alpha, \beta]$, nulle sur $]-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty[$, de classe C^2 et strictement positive sur $]\alpha, \beta[$. On suppose de plus que h est d'intégrale 1. Il est clair que (III.3) est réalisée. Quant à (III.4) on remarque que $h'(\alpha_+) \geq 0$, $h'(\beta_-) \leq 0$ et $h'' = h'(\alpha_+)\delta_\alpha + h''(x)1_{\{\alpha<x<\beta\}} - h'(\beta_-)\delta_\beta$. h'' est bien majorée au sens des distributions. Par conséquent h vérifie les conditions du Théorème III.3.

Avant de commencer la preuve du Théorème III.3, nous établirons quatre résultats préliminaires: les Lemmes III.5-III.8.

LEMME III.5. *Soit u une solution de $(E_{m,\mu})$ et $v(t, x) = \frac{2m+1}{2m}(u(t, x))^{2m}$; on suppose que μ est une fonction vérifiant les conditions de Théorème* III.3. *Alors $-v_{xx} \leq c$ (au sens des distributions).*

PREUVE. Comme dans [AB], il suffit de montrer ce lemme pour les solutions régulières de l'équation de milieux poreux. D'après la définition de v, $u = kv^{1/2m}$ avec $k = \left(\frac{2m}{2m+1}\right)^{1/2m}$. Sachant que u est solution de $(S_{m,\mu})$, on a:

$$\begin{aligned}\frac{k}{2m} v^{-1+1/2m} v_t &= \frac{k^{2m+1}}{2} (v^{(2m+1)/2m})_{xx} = \frac{k}{2} (v^{1/2m} v_x)_x \\ &= \frac{k}{2} \left(\frac{1}{2m} v^{-1+1/2m} v_x^2 + v^{1/2m} v_{xx} \right).\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient:

$$2v_t = 2m\, v\, v_{xx} + v_x^2. \tag{III.5}$$

On dérive deux fois (III.5) par rapport à x, il vient

$$\begin{aligned}2v_{tx} &= 2mvv_{xxx} + 2(m+1)v_x v_{xx} \\ 2v_{txx} &= 2mvv_{xxxx} + (4m+2)v_x v_{xxx} + 2(m+1)v_{xx}^2.\end{aligned}$$

Posons $h(t, x) = -v_{xx}(t, x)$.

h vérifie alors l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\mathcal{L}(h) = 0 \tag{III.6}$$

où

$$\mathcal{L}(f) = 2f_t - (2mv\, f_{xx} + (4m+2)v_x\, f_x - 2(m+1)f^2).$$

Compte tenu de $(E_{m,\mu})$ et (III.4):

$$h(0,x) = -v_{xx}(0,x) = -\frac{2m+1}{2m}(\mu(x)^{2m})''.$$

Soit h_0 la fonction: $h_0(t,x) = \frac{1}{(m+1)t+1/c}$. Il est clair que

$$\mathcal{L}(h_0) = 0 \tag{III.7}$$

et

$$h_0(0,x) = c \geq h(0,x). \tag{III.8}$$

En utilisant (III.6), (III.7), (III.8) et le principe du maximum parabolique, on peut affirmer que:

$$h(t,x) \leq h_0(t,x); \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}. \tag{III.9}$$

Ce qui achève la preuve du lemme. Notons que (III.9) permet d'obtenir en plus la décroissance par rapport au temps. □

LEMMA III.6. *Soit b une fonction définie sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, localement bornée telle que pour tout $t > 0$, $x \to b(t,x)$ est dérivable et*

$$b_x(t,x) \leq c \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbf{R}. \tag{III.10}$$

Alors l'équation différentielle stochastique:

$$\xi_t = \xi_0 + \beta_t + \int_0^t b(s,\xi_s)\mathrm{d}s \tag{III.11}$$

possède la propriété d'unicité trajectorielle.

PREUVE. Soit ξ et ξ' deux solutions de (III.11). Alors

$$\xi_t - \xi'_t = \int_0^t (b(s.\xi_s) - b(s,\xi'_s))\mathrm{d}s.$$

On en déduit:

$$(\xi_t - \xi'_t)^2 = 2\int_0^t (\xi_s - \xi'_s)(b(s,\xi_s) - b(s,\xi'_s))\mathrm{d}s.$$

Une application du théorème des accroissements finis conduit à:

$$b(s,\xi_s) - b(s,\xi'_s) = (\xi_s - \xi'_s)b_x(s,\xi''_s).$$

Mais alors

$$(\xi_s - \xi'_s)(b(s,\xi_s) - b(s,\xi'_s)) = (\xi_s - \xi'_s)^2 b_x(s,\xi''_s) \leq c(\xi_s - \xi'_s)^2.$$

Par conséquent

$$(\xi_t - \xi'_t)^2 \leq 2c\int_0^t (\xi_s - \xi'_s)^2\mathrm{d}s.$$

On remarque que $(\xi_0 - \xi'_0)^2 = 0$, il suffit alors d'appliquer le lemme de Gronwall. □

LEMME III.7. *Soit μ une densité de probabilité sur* **R**, *bornée vérifiant* (III.3), *alors*

$$\int_{\mathbf{R}} \mu(x)|\ell n\, \mu(x)|\mathrm{d}x < \infty .$$

PREUVE. Posons $I = \int_{\mathbf{R}} \mu(x)|\ell n(\mu(x))|\mathrm{d}x$.

On découpe cette intégrale en trois parties I_1, I_2, I_3 en intégrant respectivement sur $\{\ell n|\mu(x)| \le x^2\}$, $\{\mu(x) \ge 1, |\ell n(\mu(x))| > x^2\}$ et $\{\mu(x) < 1, |\ell n(\mu(x))| > x^2\}$.

Il est clair que: $I_1 \le \int_{\mathbf{R}} x^2\mu(x)\mathrm{d}x < \infty$.

Puisque $\mu(x) \le c$,

$$\{\mu(x) > 1, |\ell n(\mu(x))| > x^2\} \subset \{x^2 \le \ell nc, \mu(x) > 1\} .$$

On déduit:

$$I_2 \le 2c(\ell nc)^{3/2} < \infty .$$

Il reste à montrer que $I_3 < \infty$.

On a:

$$I_3 = \int_{\mathbf{R}} [-\mu(x)\ell n(\mu(x))] 1_{\{\mu(x)<1, \mu(x)<e^{-x^2}\}} \mathrm{d}x .$$

Or si $0 < y < 1$, $-y\ell ny \le c'\sqrt{y}$; d'où

$$I_3 \le c' \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x < \infty . \qquad \square$$

LEMME III.8. *Soit (X, u) une solution de $(S_{m,\mu})$, μ vérifiant les hypothèses du Théorème* III.3. *Alors* p.s.*:* $u(t, X_t) > 0\ \forall t > 0$.

PREUVE. On introduit T le temps d'arrêt:

$$T = \inf\{t > 0; u(t, X_t) = 0\} .$$

Il s'agit de montrer que $P(T = \infty) = 1$.

Comme nous l'avons fait à la première étape de la démonstration du Théorème II.1, on montre que si (X, u) est solution de $(S_{m,\mu})$, alors u est l'unique solution de $(E_{m,\mu})$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on note:

$$T^\varepsilon = \inf\{s \ge 0; u(s, X_s) \le \varepsilon\} .$$

On se place sur $\{T^\varepsilon > 0\}$, on prend $0 \le t \le T^\varepsilon$ et on applique la formule d'Itô:

$$\begin{aligned} -\ell n\, u(t, X_t) &= -\ell n\, u(0, X_0) \\ &\quad - \int_0^t (u_x u^{m-1})(s, X_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t D(s, X_s)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{III.12}$$

où

$$D(s,x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{u_{xx}u - u_x^2}{u^2}\right)u^{2m}(s,x) - \frac{u_t}{u}(s,x)\,.$$

Mais u est solution de $(E_{m,\mu})$:

$$D(s,x) = -\frac{1}{2}\left(u_{xx}u^{2m-1} - u_x^2 u^{2m-2} + \frac{(2m+1)}{u}(u^{2m}u_{xx} + 2mu^{2m-1}u_x^2)\right)$$

$$D(s,x) = -\frac{1}{2}(2(m+1)u^{2m-1}u_{xx} + (4m^2+2m-1)u^{2m-2}u_x^2)(s,x)\,.$$

Rappelons que $v(t,x) = \frac{2m+1}{2m}(u(t,x))^{2m}$. On dérive deux fois par rapport à x, il vient:

$$\text{(III.13)} \qquad u^{2m-1}u_{xx} = \frac{1}{2m+1}v_{xx} - (2m-1)u^{2m-2}u_x^2\,.$$

Par conséquent,

$$D(s,x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{2(m+1)}{2m+1}v_{xx} - u^{2m-2}u_x^2\right](s,x)\,.$$

Mais d'après le Lemme III.5, $-v_{xx}$ est majoré, de plus $u^{2m-2}u_x^2 \geq 0$, donc

$$D(s,x) \leq c\,.$$

Soit $(\sigma_n; n \geq 1)$ une suite de temps d'arrêt, tendant vers $+\infty$, telle que les processus figurant dans l'égalité (III.12) soient bornés par n. On applique le théorème d'arrêt, il vient:

$$-E[\ell n(u(t\wedge T^\varepsilon \wedge \sigma_n, X(t\wedge T^\varepsilon \wedge \sigma_n)))1_{\{T^\varepsilon>0\}}] \leq \int_{\mathbf{R}} |\ell n\,\mu(x)|\mu(x)\mathrm{d}x + ct\,.$$

Puisque u est uniformément bornée par une constante c, quitte à écrire $u(t,x)= \frac{u(t,x)}{c}c$, on peut supposer $c=1$, alors

$$-\ell n(u(t\wedge T^\varepsilon \wedge \sigma_n, X(t\wedge T^\varepsilon \wedge \sigma_n)) \geq 0\,.$$

On fait tendre $n \to \infty$, puis $\varepsilon \to 0$ et on utilise le lemme de Fatou

$$\text{(III.14)} \qquad -E[\ell n(u(t\wedge T, X(t\wedge T)))1_{\{T>0\}}] \leq \int |\ell n(\mu(x))|\mu(x)\mathrm{d}x + ct\,.$$

Supposons que $P(T<\infty) > 0$. Il existe $t>0$ tel que $P(T<t)>0$; sachant que $u(T, X_T) = 0$, le membre de gauche de (III.14) est alors infini, ce qui contredit le résultat du Lemme III.7. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III.3.

1. Nous commençons par montrer que $(S_{m,\mu})$ possède une unique solution forte. Nous avons déjà observé que u est l'unique solution de $(E_{m,\mu})$. On introduit:

$$\Gamma = \{(t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}, u(t,x) > 0, \quad \Gamma_0 = \{x \in \mathbf{R}; \mu(x) > 0\}.$$

La fonction μ étant continue sur $\mathbf{R}$, Γ_0 est un ensemble ouvert, Γ_0 s'écrit comme une réunion de ses composantes connexes ouvertes deux à deux disjointes: $\Gamma_0 = \bigcup_{i \in I} \Gamma^{(i)}$.

En vertu du principe de comparison (cf. [OKC]:

$$\text{(III.15)} \qquad \text{si} \quad x_0 \in \Gamma^{(i_0)} \quad \text{alors} \quad (t, x_0) \in \Gamma.$$

Afin de simplifier l'exposé on va se placer dans le cas où:

$$\Gamma_0 =]a, b[.$$

Dans ce cas on sait, (cf. [K2]), qu'il existe deux fonctions $t \to \xi(t)$ décroissante et $t \to \eta(t)$ croissante telles que pour tout $t > 0$:

$$u(t,x) > 0 \Leftrightarrow \xi(t) < x < \eta(t).$$

Posons:

$$P^+ = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+; u(x,t) > 0\}.$$

Considérons la fonction:

$$H : P^+ \to \mathbf{R}$$

définie par:

$$H(t,x) = \int_c^x \frac{\mathrm{d}y}{u^m(t,y)}$$

où c est dans $]a, b[$.

Pour tout $t > 0$, la fonction:

$$x \to H(t,x)$$

est strictement croissante sur $]\xi(t), \eta(t)[$ et par conséquent elle admet une fonction réciproque qui sera notée par $H^{-1}(t, .)$.

Soit (X, u) une solution de $(S_{m,\mu})$.

On a:

$$\text{(III.19)} \qquad P(X_0 \notin \Gamma_0) = P(\mu(X_0) = 0) = \int_{\mathbf{R}} \mu(x) 1_{\{\mu(x)=0\}} \mathrm{d}x = 0.$$

Ce qui signifie que p.s., $X_0 \in \Gamma_0$. On peut alors conditionner par $\{X_0 \in \Gamma^{(i_0)}\}$, évènement $\mathcal{F}_0$-mesurable. La propriété (III.15) permet alors d'appliquer la formule d'Itô au processus:

$$\text{(III.20)} \qquad Y_t = H(t, X_t) \quad t \geq 0.$$

Utilisons de plus le fait que u est solution de $(E_{m,\mu})$, il vient:

$$H(t, X_t) = H(0, X_0) + B_t - \frac{m}{2}\int_0^t \{(u_x u^{m-1})(s, X_s) + \int_0^{X_s} \frac{(u^{2m+1})_{xx}}{u^{m+1}}(s, y)\mathrm{d}y\}\mathrm{d}s\,.$$

En posant:

$$A(t, x) = -\frac{m}{2}\left[(u_x u^{m-1})(t, H^{-1}(t, x)) + \int_0^{H^{-1}(t,x)} \frac{(u^{2m+1})_{xx}}{u^{m+1}}(t, y)\mathrm{d}y\right]\,.$$

Nous avons montré que Y est solution de:

(III.21) $$Y_t = Y_0 + B_t + \int_0^t A(s, Y_s)\mathrm{d}s\,.$$

On a:

$$H_x^{-1}(t, x) = u^m\Big(t, H^{-1}(t, x)\Big)\,.$$

Par conséquent,

$$-\frac{2}{m}A_x(t, x) = (u_{xx}u^{2m-1} + (m-1)u^{2m-2}u_x^2 + u^{-1}(u^{2m+1})_{xx}(t, H^{-1}(t, x))\,.$$

Mais

$$(u^{2m+1})_{xx} = (2m+1)(u^{2m}u_x)_x = (2m+1)(2mu^{2m-1}u_x^2 + u^{2m}u_{xx})\,.$$

On en déduit:

$$-\frac{2}{m}A_x(t, x) = \{2(m+1)u^{2m-1}u_{xx} + (4m^2 + 3m - 1)u^{2m-2}u_x^2\}(t, H^{-1}(t, x))\,.$$

La relation (III.13) implique:

$$-\frac{2}{m}A_x(t, x) = \left\{\frac{2(m+1)}{2m+1}v_{xx} + (m+1)u^{2m-2}u_x^2\right\}(t, H^{-1}(t, x))\,.$$

Puisque $(m+1)u^{2m-2}u_x^2 \geq 0$, une application du Lemme III.5 conduit à:

$$A_x(t, x) \leq c_1\,.$$

D'après le Lemme III.6, l'E.D.S. (III.21) possède une unique solution forte. Remarquons que grâce à (III.20):

$$X_t = H^{-1}(t, Y_t)\,,$$

par conséquent l'E.D.S. associée à $(S_{m,\mu})$ possède une unique solution forte.

2. Pour montrer l'existence pour $(S_{m,\mu})$, l'idée de la preuve consiste à approcher μ par une famille $(\mu_\varepsilon; \varepsilon > 0)$, convergeant vers μ et vérifiant les hypothèses de la Proposition III.1.

On note $(X^\varepsilon, u^\varepsilon)$ la solution de (S_{m,μ_ε}). Il s'agit ensuite de montrer que u^ε converge vers u et X^ε converge en loi vers un processus X et que (X, u) est solution de $(S_{m,\mu})$.

Soit $(g_\varepsilon; 0 < \varepsilon \leq 1)$ une famille de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, strictement positives, d'intégrale 1, convergeant au sens des distributions vers δ_0, lorsque $\varepsilon \to 0$; on suppose de plus qu'il existe $n \geq 2$ tel que:

(III.22) $$\forall \varepsilon > 0, \quad \int_{\mathbf{R}} |x|^n g_\varepsilon(x) \mathrm{d}x \leq c_n \,.$$

On peut choisir par exemple $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp -\frac{x^2}{2\varepsilon}$.

Nous supposerons de plus que pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction g'_ε est bornée.

On note:

(III.23) $$\mu_\varepsilon = \mu * g_\varepsilon \,.$$

Il est clair que:

(III.24) pour tout $0 < \varepsilon < 1$, $\mu_\varepsilon$est de classe C^∞ et strictement positive

(III.25) $$\|\mu_\varepsilon\|_1 = \int_{\mathbf{R}} \mu_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \|\mu_\varepsilon\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} \mu_\varepsilon(x) \leq c, \quad \mu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^1} \mu \,.$$

D'après (III.3) et (III.22), on établit sans peine que

(III.26) $$\int |x|^n \mu_\varepsilon(x)\mathrm{d}x \leq c'_n \quad \forall \varepsilon \in]0, 1] \,.$$

Par ailleurs:

$$(\mu_\varepsilon)' = \mu * g'_\varepsilon \,.$$

Puisque g'_ε et μ sont deux fonctions bornées, la fonction μ'_ε est aussi bornée.

3. La fonction μ_ε vérifie les conditions de la Proposition III.1, soit $(X^\varepsilon, u^\varepsilon)$ la solution de (S_{m,μ_ε}).

Rappelons que d'après (III.2) on a:

(III.27) $$\sup_{t>0, 0<\varepsilon\leq 1} \|u^\varepsilon(t, .)\|_\infty \leq c \,.$$

Puisque μ_ε converge vers μ dans L^1, lorsque $\varepsilon \to 0$, d'après [BC], u^ε converge vers u, plus précisément pour tout $T > 0$:

(III.28) $$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{s\leq T} \int_{\mathbf{R}} |u^\varepsilon(s, x) - u(s, x)|\mathrm{d}x = 0 \,.$$

Soit Ω_T l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Pour simplifier, nous prendrons $T = 1$ et nous notons $\Omega = \Omega_1$. Soit P_ε la loi du processus $(X_t^\varepsilon; 0 \leq t \leq 1)$, P_ε est une probabilité sur Ω. L'espace des probabilités sur Ω est muni de la topologie faible. Montrons que la famille $(P_\varepsilon; 0 < \varepsilon \leq 1)$ est relativement compacte.

On a:

$$X_t^\varepsilon = X_0^\varepsilon + \int_0^t (u^\varepsilon)^m(s, X_s^\varepsilon)\mathrm{d}B_s \,. \tag{III.29}$$

Soit $0 \leq s \leq t$; une application de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy conduit à:

$$E\left[|X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon|^{2p}\right] \leq c_p E\left[\left(\int_s^t (u^\varepsilon)^{2m}(r, X_r^\varepsilon)\mathrm{d}r\right)^p\right] .$$

D'après (III.27) on a:

$$E[|X_t^\varepsilon - X_s^\varepsilon|^{2p}] \leq c_{p,m}|t - s|^p \,. \tag{III.30}$$

D'autre part:

$$E[|X_0^\varepsilon|^n] = \int |x|^n \mu_\varepsilon(x)\mathrm{d}x < +\infty \,. \tag{III.31}$$

D'après [KS], p. 64, la famille $(P_\varepsilon; 0 < \varepsilon \leq 1)$ est tendue. Elle possède donc un point adhérent P et sous P le processus des coordonnées est une martingale. En fait, on peut montrer un peu mieux. Il est montré dans [KR] que les relations (III.30) et (III.31) entraînent que $(P_\varepsilon; 0 < \varepsilon \leq 1)$ est une famille relativement compacte lorsque l'on munit Ω de la topologie höldérienne d'indice α, avec $\alpha < (p-1)/2p$. Etant donné que l'on peut choisir $p > 0$ quelconque, P ne charge que les fonctions höldériennes d'indice α, avec $\alpha < 1/2$.

4. Nous montrons à présent que le processus des coordonnées $(X_t; 0 < t \leq 1)$ est solution d'un problème de martingales. On applique la formule d'Itô:

$$(X_t^\varepsilon)^2 = (X_0^\varepsilon)^2 + 2\int_0^t (u^\varepsilon)^m(s, X_s^\varepsilon)X_s^\varepsilon\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t (u^\varepsilon)^{2m}(s, X_s^\varepsilon)\mathrm{d}s \,.$$

Posons:

$$M_t^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)^2 - \int_0^t (u^\varepsilon)^{2m}(s, X_s^\varepsilon)\mathrm{d}s \,. \tag{III.32}$$

$(M_t^\varepsilon; 0 \leq t \leq 1)$ est une martingale locale continue.

On déduit de (III.26), (III.27) et de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy:

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq 1} |X_t^\varepsilon|^n\right] \leq c'_n \,. \tag{III.33}$$

Pour tout $0 \leq s \leq t$ on a:

$$M_t^\varepsilon - M_s^\varepsilon = 2\int_s^t (u^\varepsilon)^m(r, X_r^\varepsilon) X_r^\varepsilon \mathrm{d}B_r .$$

Soit $1 < p = n/2$, on a:

$$\begin{aligned} E\left[|M_t^\varepsilon - M_s^\varepsilon|^{2p}\right] &\leq E\left[\sup_{s\leq u\leq t} |M_u^\varepsilon - M_s^\varepsilon|^{2p}\right] \\ &\leq c_p\, E\left[\left(\int_s^t (u^\varepsilon)^{2m}(r, X_r^\varepsilon)(X_r^\varepsilon)^2 \mathrm{d}r\right)^p\right] . \end{aligned}$$

En utilisant (III.33) et à nouveau (III.27), on a:

$$E(|M_t^\varepsilon - M_s^\varepsilon|^{2p}) \leq E\left[\sup_{s\leq u\leq t} |M_u^\varepsilon - M_s^\varepsilon|^{2p}\right] \leq c_{p,n}|t-s|^p . \tag{III.34}$$

$(M_t^\varepsilon; 0 \leq t \leq 1)$ est une martingale, de plus

$$E(|M_0^\varepsilon|^{n/2}) = E(|X_0^\varepsilon|^n) < \infty .$$

Soit Q^ε la loi de $(M_t^\varepsilon; 0 \leq t \leq 1)$. Nous venons de montrer ([KS], p. 64) que la famille de probabilités $(Q^\varepsilon; 0 < \varepsilon \leq 1)$ sur Ω est faiblement relativement compacte.

5. Nous allons montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P^\varepsilon\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\int_0^t (u^\varepsilon)^{2m}(s, X_s)\mathrm{d}s - \int_0^t u^{2m}(s, X_s)\mathrm{d}s\right| > \alpha\right) = 0 . \tag{III.35}$$

Posons:

$$\xi_\varepsilon = \sup_{0\leq t\leq 1}\left|\int_0^t (u^\varepsilon)^{2m}(s, X_s)\mathrm{d}s - \int_0^t u^{2m}(s, X_s)\mathrm{d}s\right| .$$

Rappelons que sous P_ε, X_t a pour densité $u^\varepsilon(t, .)$, par conséquent, si E^ε désigne l'espérance sous P_ε, on a:

$$E^\varepsilon(\xi_\varepsilon) \leq \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{R}} |(u^\varepsilon)^{2m}(s,x) - u^{2m}(s,x)| u^\varepsilon(s,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s .$$

Supposons $2m \geq 1$. Pour tout $k > 0$, il existe une constante c_k telle que:

$$|R_1^{2m} - R_2^{2m}| \leq c_k|R_1 - R_2|, \quad 0 \leq R_1 \leq k, \quad 0 \leq R_2 \leq k .$$

Utilisons de plus (III.27) et (III.28), il vient:

$$E^\varepsilon(\xi_\varepsilon) \leq c_1 \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{R}} |u^\varepsilon(s,x) - u(s,x)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s .$$

L'inégalité (III.28) implique: $\lim_{\varepsilon \to 0} E^\varepsilon(\xi_\varepsilon) = 0$.

Lorsque $2m < 1$, on pose $q = 1/2m > 1$. On utilise l'inégalité de Jensen:

$$E^\varepsilon(\xi_\varepsilon^q) \leq E^\varepsilon \left[\int_0^1 |(u^\varepsilon)^{2m}(s, X_s)\mathrm{d}s - u^{2m}(s, X_s)|^q \mathrm{d}s \right]$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{R}} |(u^\varepsilon)^{2m}(s, x) - u^{2m}(s, x)|^q u^\varepsilon(s, x)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s\,.$$

Mais:

$$|R_1 - R_2|^q \leq c_q |R_1^q - R_2^q|, \quad R_1 \geq 0, \quad R_2 \geq 0\,.$$

A nouveau une application de (III.28) conduit à: $\lim_{\varepsilon \to 0} E^\varepsilon(\xi_\varepsilon^q) = 0$.

Il est à présent clair que (III.35) est satisfaite.

Mais alors sous P^ε, les lois des deux processus

$$\left(X_t^2 - \int_0^t (u^\varepsilon)^{2m}(s, X_s)\mathrm{d}s; 0 \leq t \leq 1 \right)$$

et

$$\left(X_t^2 - \int_0^t u^{2m}(s, X_s)\mathrm{d}s; 0 \leq t \leq 1 \right)$$

ont les mêmes points adhérents, lorsque $\varepsilon \to 0$.

On choisit une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers 0, telle que P^{ε_n} et Q^{ε_n} convergent vers respectivement P et Q. D'après ce qui précède, sous P, $(X_t; 0 \leq t \leq 1)$ et $\left(X_t^2 - \int_0^t u^{2m}(s, X_s)\mathrm{d}s; 0 \leq t \leq 1 \right)$ sont deux martingales.

On note

$$B'_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}X_s}{u^m(s, X_s)} \qquad 0 \leq t \leq 1\,.$$

B' est une martingale locale dont le processus croissant associé vaut:

$$\langle B', B' \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{u^{2m}(s, X_s)} \mathrm{d}\langle X, X \rangle_s = \int_0^t \frac{1}{u^{2m}(s, X_s)} u^{2m}(s, X_s)\mathrm{d}s = t\,.$$

B' est un P-mouvement brownien et

(III.36) $$X_t = X_0 + \int_0^t u^m(s, X_s)\mathrm{d}B'_s \qquad 0 \leq t \leq 1\,.$$

Nous avons montré que (X, u) est une solution de $(S_{m,\mu})$.

REMARQUE III.9. Dans notre démonstration du Théorème (III.3), les hypothèses (III.3) et (III.4) sont nécessaires pour montrer que l'E.D.S. associée à $(S_{m,\mu})$ possède la propriété d'unicité trajectorielle. En revanche, pour montrer que cette E.D.S. admet une solution faible (en loi), l'hypothèse (III.3) suffit.

Nous nous intéressons à présent à la convergence du processus poreux vers le processus du big-bang d'indice m. Soit μ une fonction continue à support dans l'intervalle compact $[\alpha, \beta]$, nulle en α et β, de classe C^2 et strictement positive sur $]\alpha, \beta[$. On suppose de plus que μ est d'intégrale égale à 1. μ vérifie les conditions du Théorème III.3 (voir Remarque III.4). Soit (X, u) l'unique solution de $(S_{m,\mu})$.

Pour tout $\lambda > 0$, on note:

(III.37) $$\mu_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\mu(x/\lambda) \quad x \in \mathbf{R}.$$

Il est clair que μ_λ vérifie les conditions du Théorème III.3 et que de plus μ_λ converge vers δ_0, lorsque $\lambda \to 0$. Notons (X^λ, u^λ) la solution de (S_{m,μ_λ}).

Le processus du big-bang d'indice m (c'est-à-dire le processus stochastique associé à S_{m,δ_0}) joue le rôle d'attracteur au sens suivant:

THÉORÈME III.10. *Le processus stochastique X^λ associé à (S_{m,μ_λ}) converge en loi, lorsque $\lambda \to 0$, vers le processus du big-bang d'indice m.*

DÉMONSTRATION.

1. Soit Y le processus défini par:

$$Y_t = \lambda X_{t/\lambda^{2m+2}} \quad t \geq 0.$$

Puisque la v.a. X_t admet pour densité $u(t, .)$, Y_t admet pour densité $u^\lambda(t, .)$, où:

(III.38) $$u^\lambda(t, x) = \frac{1}{\lambda}u(t/\lambda^{2m+2}, x/\lambda) \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}.$$

En particulier $Y_0 = \lambda X_0$ a pour densité μ_λ. De plus

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (u^\lambda)^m(s, Y_s) \mathrm{d}B_s^{(\lambda)}$$

où

(III.39) $$B_s^{(\lambda)} = \lambda^{m+1} B_{s/\lambda^{2m+2}}.$$

Mais $B^{(\lambda)}$ est un mouvement brownien, en utilisant l'unicité de (E_{m,μ_λ}), on peut affirmer que $(X_t^\lambda; t \geq 0)$ a même loi que $(\lambda X_{t/\lambda^{2m+2}}; t \geq 0)$.

2. Soit P^λ la loi du processus X^λ; P^λ est une probabilité sur l'espace canonique Ω. Nous allons montrer que la famille $(P^\lambda; 0 < \lambda \leq 1)$ est tendue. Nous allons établir au préalable que u^λ est uniformément bornée.

On note u^0 la densité du processus du big-bang. Rappelons que le support de $u^0(t,.)$ est $[-\gamma_m t^\beta, \gamma_m t^\beta]$. Puisque μ est continue et à support compact, il existe $t_0 > 0$ et $a > 0$ tels que:

$$\mu(x) \le u^0(t_0, x) = \frac{1}{t_0^\beta}\varphi_0\left(\frac{x}{t_0^\beta}, a\right), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

(cf. II.11 et II.12).

D'après le principe de comparaison:

$$u(t,x) \le u^0(t_0+t, x) \quad \forall t \ge 0, \forall x \in \mathbf{R}. \tag{III.40}$$

Mais $u^0(t_0+t,x) \le \frac{a_m^{1/m}}{(t_0+t)^\beta}$, $\beta = 1/2(m+1)$, on en déduit alors: il existe une constante $c_m > 0$ telle que:

$$u(t,x) \le \frac{c_m}{t^\beta}; \quad t \ge 0, x \in \mathbf{R}. \tag{III.41}$$

On sait que X^λ est solution de

$$X_t^\lambda = X_0^\lambda + \int_0^t (u^\lambda)^m(s, X_s^\lambda)\mathrm{d}B_s.$$

Par conséquent si $0 \le s \le t$, $p > 1$, on a:

$$E[|X_t^\lambda - X_s^\lambda|^{2p}] \le c_p E\left[\left|\int_s^t (u^\lambda)^{2m}(r, X_r^\lambda)\mathrm{d}r\right|^p\right]. \tag{III.42}$$

On utilise (III.41):

$$E[|X_t^\lambda - X_s^\lambda|^{2p}] \le c_{p,m}|t^{1/m+1} - s^{1/m+1}|^p \le c_{p,m,T}|t-s|^{p/(m+1)} \tag{III.43}$$

pour $0 \le s \le t \le T$.

Observons de plus que pour tout $\lambda \le 1$,

$$E[|X_0^\lambda|^{2p}] = \lambda^{2p}E[|X_0|^{2p}] \le E[|X_0|^{2p}] < \infty. \tag{III.44}$$

Si l'on choisit $p > m+1$, d'après [KS], p. 64, (III.43) et (III.44) impliquent que $(P^\lambda; 0 < \lambda \le 1)$ est une famille tendue.

3. Soit Q^λ la loi du processus $\left((X_t^\lambda)^2 - \int_0^t (u^\lambda)^{2m}(s, X_s^\lambda)\mathrm{d}s; t \ge 0\right)$. On montre comme nous l'avons fait dans le point 4 de la preuve du Théorème III.3 que la famille de probabilitiés $(Q^\lambda; 0 < \lambda \le 1)$ est tendue.

4. D'une manière analogue à la démonstration du Théorème III.3 (point 5), la convergence en loi du processus X^λ vers le processus du big-bang d'indice m sera établie si pour tout $\alpha > 0$ on a:

$$\text{(III.45)} \quad \lim_{\lambda \to 0} P^\lambda \left(\sup_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^t (u^\lambda)^{2m}(s, X_s) \mathrm{d}s - \int_0^t (u^0)^{2m}(s, X_s) \mathrm{d}s \right| > \alpha \right) = 0 .$$

Nous sommes conduits à examiner la convergence de u^λ vers u. Posons:

$$\rho = \inf \left\{ \frac{1}{m+1}, \frac{2m+1}{4m(m+1)} \right\}$$

$$\text{(III.46)} \qquad \theta(t, x) = t^\rho (u(t, x) - u^0(t, x)) 1_{\{x ; |x| \le t^\beta\}} .$$

Rappelons que d'après ([K1], p. 201):

$$\text{(III.47)} \qquad \lim_{t \to +\infty} \|\theta(t, .)\|_\infty = 0 .$$

En utilisant la définition de u^λ et (III.46), on obtient:

$$\text{(III.48)} \qquad u^\lambda(t, x) = u^0(t, x) + \frac{\lambda^{2(m+1)\rho - 1}}{t^\rho} \theta \left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}} . \frac{x}{\lambda} \right) .$$

On pose:

$$\xi_\lambda = \sup_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^t (u^\lambda)^{2m}(s, X_s) \mathrm{d}s - \int_0^t (u^0)^{2m}(s, X_s) \mathrm{d}s \right| .$$

Alors

$$\text{(III.49)} \qquad E^\lambda(\xi_\lambda) \le \hat{\xi}_\lambda$$

où E^λ désigne l'espérance sous P^λ avec

$$\hat{\xi}_\lambda = \int_0^1 \int_{\mathbf{R}} |(u^\lambda)^{2m}(s, x) - (u^0)^{2m}(s, x)| u^\lambda(s, x) \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x .$$

Puisque $2(m+1)\rho - 1 > 0$, on déduit de (III.47) et (III.48) que pour tout (t, x) fixé de $[0, 1] \times \mathbf{R}$, $\lim_{\lambda \to 0} u^\lambda(t, x) = u^0(t, x)$.

Appliquons (II.5) et (III.41), il vient:

$$|(u^\lambda)^{2m}(t, x) - (u^0)^{2m}(t, x)| u^\lambda(t, x) \le \frac{c}{t^{(2m+1)\beta}} 1_{\{|x| \le \gamma_m (t_0 + t)^\beta\}} .$$

Puisque $(2m+1)\beta = (2m+1)/2(m+1) < 1$, la fonction figurant au membre de droite de l'inégalité précédente est intégrable par rapport à la mesure de

Lebesgue sur $[0, 1] \times \mathbf{R}$. Une application du théorème de Lebesgue permet d'affirmer que $\lim_{\lambda \to 0} \hat{\xi}_\lambda = 0$. L'inégalité (III.49) implique: $\lim_{\lambda \to 0} E^\lambda(\xi_\lambda) = 0$; (III.45) en résulte immédiatement. □

REFERENCES

[A] D.J. ARONSON, *Regularity properties of flows through porous media*, SIAM J. Appl. Math. **17** (1969), 461-467.

[AB] D.J. ARONSON - P. BENILAN, *Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans* $\mathbf{R}^N$, C.R. Acad. Sci. Paris.Sér. I A **288** (1979), 103-105.

[B1] G.I. BARENBLATT, *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium*, Prikl. Mat. Mekh. **16** (1952), 67-78.

[B2] P. BENILAN, A strong regularity L^p for solution of the porous media equation, Research notes Math. 89, Pitman, London, 1983.

[BC] P.BENILAN - M.G. CRANDAL, *The continuous dependence on* φ *of solutions of* $u_t = \Delta\varphi(u)$, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 161-177.

[BCP] P. BENILAN - M.G. CRANDAL - M. PIERRE, *Solutions of the porous medium equation in* $\mathbf{R}^N$ *under optimal conditions on initial values*, Indiana Univ. Math. J. **33** (1984), 51-87.

[BM] S. BENACHOUR - M.S. MOULAY, *Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux en une dimension d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. IA **298** (1984), 107-110.

[GM] M.E. GURTIN - R.C. MAC CAMY, *On the diffusion of biological populations*, Math. Biosci. **33** (1977), 35-49.

[K1] A.S. KALASHNIKOV, *Some problems of the qualitative theory of non linear degenerate second order parabolic equations*, Russ. Math. Surv. **42** (1987), 169-222.

[K2] B.F. KNEER, *The porous medium equation in one dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), 381-415.

[KR] G. KERKYACHARIAN - B. ROYNETTE, *Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Itô Nisio*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. IA **312** 1991, 877-882.

[KS] J. KARATZAS - S.E. SHREVE, Brownian motion and stochastic calculus, Graduate Texts in Math., second edition, Springer Verlag, New York, 1991.

[LSU] O.A. LADYZHENSKAYA - V.A. SOLONNIKOV - N.N URAL'CEVA, Linear and quasilinear equation of parabolic type, Translation of Mathematical monographs 23, AMS, Providence R.I., 1968.

[M] M. MUSKAT, The flow of homogeneous fluids through porous media, Mc Graw-Hill, New York, 1977.

[MR] S. MELEARD - ROELLY-COPPOLETTA, *A propagation of chaos result for a system of particules with moderate interaction*, Stochastic Process. Appli. **26** (1987), 317-332.

[OKC] O.A. OLEINIK - A.S. KALASHINIKOV - CHZOU YUI-LIN, *The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of nonstationary filtration*, Izv. Akad. Nauk. USSR Ser. Mat. **22** (1958), 667-704.

[P1] R.E. PATTLE, *Diffusion from an instantaneous point with concentration dependent coefficent*, Quart. Mech. Appl. Math. **12** (1959), 407- 409.

[P2] P. PROTTER, *Stochastic integration and differential equations*, Appl. of Math., Springer, 1990.

[RV] B. ROYNETTE - P. VALLOIS, *Instabilité de certaines équations différentielles stochastiques non linéaires*, J. Funct. Anal. **130** (2) (1995), 477-523.

[RY] D. REVUZ - M YOR, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundl. der Math. Wiss. 293, Springer Verlag, 1991.

[SV] A.S. SZNITMAN - S.R.S. VARADHAN, *A multidimensional process involving local time*, Probab. Theory Relat. Fields **71** (4) (1986), 553-579.

[WW] E.T. WHITTAKER - G.N. WATSON, A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1990.

[S] A.S. SZNITMAN, *Topics in propagation of chaos*, In P.L. Hennequin Editor, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX, vol. 1464, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.

U.R.A. n° 750
Institut E. Cartan
Département de Mathématiques
Université de Nancy 1
BP 259,
54506 Vandœuvre les Nancy Cedex
France