ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SYLVIE ROELLY
HANS ZESSIN

Grandes déviations spatiales pour un système gradient stochastique infini-dimensionnel

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 23, nº 2 (1996), p. 193-209

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1996_4_23_2_193_0>

Grandes déviations spatiales pour un système gradient stochastique infini-dimensionnel

SYLVIE ROELLY - HANS ZESSIN

1. – Introduction

Dans un travail précédent ([CRZ]) nous avons identifié les lois des solutions de Systèmes Gradients Stochastiques infini-dimensionnels —notés dorénavant SGS— comme les mesures de Gibbs sur l'espace des trajectoires $\Omega = \mathbf{C}(0, T; \mathbf{R})^{\mathbf{Z}^d}$ associés à des potentiels hamiltoniens d'une certaine forme, que nous avons explicitée. Nous nous intéressons ici aux principes de grandes déviations, principe de Boltzmann et principe variationnel induisants différentes interprétations de la propriété gibbsienne des SGS.

Plus précisément, dans la deuxième partie nous montrons comme quoi les solutions de SGS sont les états d'équilibre pour une certaine interaction entre les trajectoires, au sens où ce sont les lois sur Ω qui maximisent la fonctionnelle d'énergie libre associée à cette interaction. Cette propriété fournit ainsi une caractérisation de type variationnel des solutions de SGS. En appliquant le principe de Boltzmann, nous montrons alors l'existence d'un principe de grandes déviations pour la loi, sous une mesure produit de référence, du champ empirique restreint à un niveau d'énergie bien choisi. Dans le cas où il y a unicité de la mesure de Gibbs sur l'espace des trajectoires Ω nous prouvons la convergence dite "équivalence d'ensembles", qui permet d'approximer cette mesure de Gibbs par certaines probabilités conditionnées.

Dans la troisième partie nous nous intéressons aux grandes déviations du champ empirique autour de la solution d'un SGS. Les résultats généraux de Comets [Co] sur les grandes déviations autour de mesures gibsiennes s'appliquent à notre contexte. De plus, nous donnons ici une *expression explicite* et simple de la fonctionnelle d'action (ou entropie) en fonction de la dérive du SGS.

DÉFINITIONS et NOTATIONS

Rappelons brièvement comment, selon Dobrushin, l'on décrit un champ aléatoire sur un espace abstrait $X^{\mathbf{Z}^d}$ par ses caractéristiques locales (X sera tour à tour $\mathbf{R}$ ou l'espace des fonctions continues à valeurs réelles $\mathbf{C}(0, T; \mathbf{R})$).

Pervenuto alla Redazione il 5 luglio 1994.

DÉFINITION 1.1. *Une* interaction Ψ *sur un espace mesurable X est une famille* $(\Psi_\Lambda; \Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ *finie) de fonctions réelles sur* $X^{\mathbf{Z}^d}$ *telles ques, pour tout* Λ,

- Ψ_Λ *est* $\mathcal{F}_\Lambda$*-mesurable, où* $\mathcal{F}_\Lambda$ *est la tribu engendrée par les projections spatiales canoniques sur la* $i^{\text{ème}}$ *coordonnée quand i décrit* Λ, *et*
- *la série* $\sum_{\Lambda \cap \Lambda' \neq \phi} \Psi_{\Lambda'}$ *converge en tout point de* $X^{\mathbf{Z}^d}$.

Cette série définit alors une fonction $\mathcal{H}_\Lambda$ appelée *potentiel hamiltonien* sur Λ associé à Ψ.

DÉFINITION 1.2. *On appelle fonction d'énergie au site 0 la fonction* A_Ψ *définie par:*

$$A_\Psi = - \sum_{0 \in \Lambda \text{ finie} \subset \mathbf{Z}^d} \frac{1}{\operatorname{card} \Lambda} \Psi_\Lambda. \tag{1}$$

Nous supposerons toutes les interactions *invariantes par translation*, i.e.

$$\Psi_{\Lambda+i} = \Psi_\Lambda \circ \theta_i, \quad \forall \Lambda \subset \mathbf{Z}^d, \forall i \in \mathbf{Z}^d$$

où θ_i est la translation canonique de site i sur $X^{\mathbf{Z}^d}$.

Soit $\lambda = \otimes_{i \in \mathbf{Z}^d} \lambda_i$ le produit tensoriel infini de mesures de références λ_i sur X.

DÉFINITION 1.3. *Une probabilité Q sur* $X^{\mathbf{Z}^d}$ *est appelée une* (Ψ, λ)-mesure de Gibbs *si, pour Q-presque tout* $x \in X^{\mathbf{Z}^d}$ *et pour toute partie finie* Λ *de* $\mathbf{Z}^d$,

$$Q(dx_\Lambda / x_{\Lambda^c}) = \frac{1}{Z_\Lambda} \exp[-\mathcal{H}_\Lambda(x)] \, (\otimes_{i \in \Lambda} \lambda_i)(dx_\Lambda) \tag{2}$$

où x_Λ *est la projection de x sur* X^Λ, $Q(\,.\,/x_{\Lambda^c})$ *est une version régulière de la probabilité conditionnelle* $Q(\,.\,/\mathcal{F}_{\Lambda^c})$ *et* Z_Λ *est une constante de renormalisation.*

Rappelons enfin la notion d'entropie spécifique (ou entropie moyenne) par rapport à une mesure de Gibbs, obtenue comme limite thermodynamique d'entropies locales (cf [G]).

DÉFINITION 1.4. *L'*entropie spécifique *d'une probabilité* μ *sur* $X^{\mathbf{Z}^d}$ *par rapport à une probabilité gibbsienne* ν *sur* $X^{\mathbf{Z}^d}$ *est donnée par*

$$\mathbf{H}(\mu, \nu) = \lim_n \frac{1}{\operatorname{card} \Lambda_n} I(\mu_{\Lambda_n}, \nu_{\Lambda_n}) \tag{3}$$

où $\Lambda_n = \{i \in \mathbf{Z}^d, 0 \leq i_k \leq n, k = 1, \dots, d\}$, μ_{Λ_n} *(resp.* ν_{Λ_n}*) désigne la restriction de* μ *(resp.* ν*) à la tribu* $\mathcal{F}_{\Lambda_n}$, *et I est l'entropie relative usuelle (ou information de Kullback)*

$$I(\mu', \nu') = \int \log \frac{d\mu'}{d\nu'} \, d\mu'$$

si μ' *est absolument continue par rapport à* ν' *et sinon* $I(\mu', \nu') = +\infty$.

CADRE du PROBLÈME

Sur l'espace des trajectoires $\Omega = \mathbf{C}(0, T; \mathbf{R})^{\mathbf{Z}^d}$, nous considérons le SGS

$$(4) \qquad \begin{cases} dX_i(t) = dW_i(t) - \frac{1}{2}\nabla_i h_i(X(t))dt, & \forall i \in \mathbf{Z}^d, t \in [0, T] \\ X(0) \overset{(\mathcal{L})}{=} \nu \end{cases}$$

où:

- $(W_i)_{i \in \mathbf{Z}^d}$ est une famille de mouvements browniens réels indépendants partants de l'origine;
- ν est une probabilité sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$, invariante sous la famille des translations $\theta_i, i \in \mathbf{Z}^d$, et portée par $\mathcal{S}'(\mathbf{Z}^d)$, le dual des suites tempérées sur $\mathbf{Z}^d$;
- $h = (h_i)_{i \in \mathbf{Z}^d}$ est le potentiel hamiltonien sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ associé à une *interaction par paires* $\varphi = (\varphi_{\{i\}} \equiv \varphi_0, \varphi_{\{i,j\}} \equiv \varphi_{|j-i|}, \forall i, j \in \mathbf{Z}^d, \varphi_\Lambda \equiv 0$ si card $\Lambda \geq 3)$:

$$(5) \qquad \forall z \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}, \ h_i(z) = \varphi_0(z_i) + \sum_{j \in \mathcal{V}(0)^*} \varphi_{|j|}(z_i, z_{i+j}) \qquad (= h_0 \circ \theta_i(z))$$

où $\mathcal{V}(0)$ est un voisinage symétrique de 0 dans $\mathbf{Z}^d$ et $\mathcal{V}(0)^*$ désigne ce voisinage privé du point 0. (Pour alléger les notations nous avons écrit h_i à la place $h_{\{i\}}$).

On suppose, de plus, que l'interaction φ est

$$(6) \qquad \begin{cases} \text{symétrique:} \forall j \in \mathbf{Z}^d, \forall z_1, z_2 \in \mathbf{R} : \varphi_{|j|}(z_1, z_2) = \varphi_{|j|}(z_2, z_1) \\ \text{à portée finie, i.e. } \mathcal{V}(0) \text{ fini} \\ \text{de classe } \mathcal{C}^2\text{, bornée et de dérivées bornées jusqu'à l'ordre 2.} \end{cases}$$

Les résultats de Shiga et Shimizu [SS] (cf. aussi [DR]) assurent, sous les hypothèses ci-dessus (en fait, sous des hypothèses plus générales), l'existence et l'unicité des solutions du SGS (4).

Nous noterons Q la loi de cette solution sur Ω.

Remarquons que l'hypothèse de stationnarité spatiale pour φ entraine que h, aussi, est stationnaire et donc Q est invariante par translation puisque ν l'est.

On notera $\mathcal{P}_s(\Omega)$ l'ensemble des probabilités spatialement stationnaires sur Ω.

2. – Propriété gibbsienne et principes d'équilibre

En reprenant et complétant une idée de Deuschel [De], nous avons montré dans [CRZ, Théorème 3.22] que la loi de la solution du SGS (4) est, si la condition initiale ν est gibbsienne, une mesure de Gibbs sur l'espace des trajectoires Ω au sens rappelé à la Définition 1.3. Nous citons notre résultat précis:

PROPOSITION 2.1. *Soit $\mu = \mu_0^{\otimes \mathbf{Z}^d}$ une mesure de référence sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ et, sur Ω, soit $P = P_0^{\otimes \mathbf{Z}^d}$ la probabilité égale au produit infini de la mesure de Wiener P_0 de répartition initiale μ_0. Alors Q est solution du système* (4), *où ν est une $(\tilde{\varphi}, \mu)$-mesure de Gibbs ($\tilde{\varphi}$ interaction bornée d'hamiltonien $\tilde{h}$), si et seulement si Q est une $(\tilde{\Phi}, P)$-mesure de Gibbs, où le potentiel hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}$ sur Ω associé à $\tilde{\Phi}$ est donné, pour tout $i \in \mathbf{Z}^d$, par*

$$\tilde{\mathcal{H}}_i(\omega) = \mathcal{H}_i(\omega) + \tilde{h}_i(\omega(0)) \tag{7}$$

et

$$\mathcal{H}_i(\omega) = \frac{1}{2} h_i(\omega(T)) - \frac{1}{2} h_i(\omega(0)) - \int_0^T \left[\frac{1}{2} \mathbf{A} h_i + \frac{1}{8} \sum_j (\nabla_j h_i)^2 \right] (\omega(t))\, dt$$

où $\mathbf{A}$ est le générateur infinitésimal associé au système (4).

Dans l'énoncé précédent nous avons explicité le potentiel hamiltonien $\tilde{\mathcal{H}}$ sur l'espace des trajectoires plutôt que l'interaction $\tilde{\Phi}$ qui l'engendre car celle-ci est peu maniable (et peu élégante). Nous la donnons ci-dessous par souci de complétude. $\tilde{\Phi}$ est la somme d'une interaction Φ provenant de la dynamique (générant l'hamiltonien $\mathcal{H}$) et de l'interaction initiale $\tilde{\varphi}$ entre les particules:

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \Phi(\omega) + \tilde{\varphi}(\omega(0)) \; ; \tag{8}$$

Φ, interaction par triplet (et non plus par paires), satisfait:

- $\Phi_{\{i\}}(\omega_i) = \frac{1}{2}\varphi_0(\omega_i(T)) - \frac{1}{2}\varphi_0(\omega_i(0)) - \int_0^T [\frac{1}{4}\Delta\varphi_0 - \frac{1}{8}(\nabla\varphi_0)^2](\omega_i(t))\, dt$
- pour $i \in \mathbf{Z}^d$, $j \in i + \mathcal{V}(0)^*$,

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\{i,j\}}(\omega_i, \omega_j) \\
&= \frac{1}{2}\varphi_{|i-j|}((\omega_i, \omega_j)(T)) - \frac{1}{2}\varphi_{|i-j|}((\omega_i, \omega_j)(0)) \\
&- \int_0^T \left(\frac{1}{4}(\Delta_i + \Delta_j)\varphi_{|i-j|}((\omega_i, \omega_j)(t)) \right. \\
&- \frac{1}{4}(\nabla\varphi_0(\omega_i(t))\nabla_i\varphi_{|i-j|}((\omega_i, \omega_j)(t)) + \nabla\varphi_0(\omega_j(t))\nabla_j\varphi_{|i-j|}((\omega_i, \omega_j)(t))) \\
&\left. + \frac{1}{8}((\nabla_i\varphi_{|i-j|})^2 + (\nabla_j\varphi_{|i-j|})^2)((\omega_i, \omega_j)(t)) \right) dt
\end{aligned}$$

- pour $i \in \mathbf{Z}^d$, $j \in i + \mathcal{V}(0)^*$, $k \in j + \mathcal{V}(0)^*$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\{i,j,k\}}(\omega_i, \omega_j, \omega_k) = \frac{1}{8} \int_0^T &\big(\nabla_i\varphi_{|i-j|}((\omega_i, \omega_j)(t))\nabla_i\varphi_{|i-k|}((\omega_i, \omega_k)(t)) \\
&+ 2\nabla_j\varphi_{|i-j|}((\omega_i, \omega_j)(t))\nabla_j\varphi_{|k-j|}((\omega_j, \omega_k)(t))\big)\, dt.
\end{aligned}$$

- $\Phi_\Lambda \equiv 0$ si card $\Lambda \geq 4$.

Une interaction $\tilde{\Phi}$ étant ainsi construite sur l'espace des trajectoires Ω la question naturelle suivante se pose: Quels sont les états du système, i.e. les éléments de $\mathcal{P}_s(\Omega)$, qui représentent un *équilibre pour l'interaction* $\tilde{\Phi}$ au sens où ils maximisent la fonction d'énergie libre:

$$\mathcal{P}_s(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$S \longrightarrow S(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(S, P)$$

où $A_{\tilde{\Phi}}$ est l'énergie au site 0 induite par $\tilde{\Phi}$ (définie en (1)) et $\mathbf{H}$ est l'entropie spécifique (définie en (3))?

Le théorème suivant répond à cette question.

THÉORÈME 2.2. *Il y a bijection entre l'ensemble des états d'équilibre sur l'espace des trajectoires* $\Omega = \mathbf{C}(0, T; \mathbf{R})^{\mathbf{Z}^d}$ *pour l'interaction* $\tilde{\Phi}$ *décrite en* (8) *et l'ensemble des* $(\tilde{\varphi}, \mu)$*-mesures de Gibbs sur* $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ *; en particulier, tout état d'équilibre pour* $\tilde{\Phi}$ *est solution du système* (4) *dans lequel* ν*, la condition initiale, est une* $(\tilde{\varphi}, \mu)$*-mesure de Gibbs.*

PREUVE. Le premier argument est l'équivalence entre le concept de mesure de Gibbs au sens défini en (2) par les caractéristiques locales dans l'espace, et celui de mesure d'équilibre pour la mécanique statistique. Nous le précisons dans la proposition suivante. Soit ν une $(\tilde{\varphi}, \mu)$-mesure de Gibbs fixée et Q la solution de (4) de condition initiale ν. Notons e son énergie définie par: $e = Q(A_{\tilde{\Phi}})$.

PROPOSITION 2.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour* $Q' \in \mathcal{P}_s(\Omega)$

(i) $Q'(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(Q', P) = \sup_{S \in \mathcal{P}_s(\Omega)} \big(S(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(S, P)\big)$

(ii) *si* $Q'(A_{\tilde{\Phi}}) = e$, $\mathbf{H}(Q', P) = \inf_{S, S(A_{\tilde{\Phi}})=e} \mathbf{H}(S, P)$

(iii) Q' *est une* $(\tilde{\Phi}, P)$*-mesure de Gibbs.*

PREUVE.
$(i) \Leftrightarrow (iii)$: C'est le principe variationnel de la mécanique statistique: les mesures de Gibbs sont les états qui maximisent l'énergie libre (cf. par exemple [G]).
$(i) \Rightarrow (ii)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(Q', P) &= Q'(A_{\tilde{\Phi}}) - \sup_{S \in \mathcal{P}_s(\Omega)} \big(S(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(S, P)\big)\\ &\leq Q'(A_{\tilde{\Phi}}) - \sup_{S, S(A_{\tilde{\Phi}})=e} \big(S(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(S, P)\big)\\ &\leq Q'(A_{\tilde{\Phi}}) - Q(A_{\tilde{\Phi}}) + \inf_{S, S(A_{\tilde{\Phi}})=e} \mathbf{H}(S, P).\end{aligned}$$

Donc si Q et Q' ont même énergie

$$\mathbf{H}(Q', P) \leq \inf_{S, S(A_{\tilde{\Phi}})=e} \mathbf{H}(S, P)$$

ce qui entraine l'égalité.
$(ii) \Rightarrow (i)$:

$$\begin{aligned} Q'(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(Q', P) &= Q(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(Q', P) \\ &= Q(A_{\tilde{\Phi}}) - \inf_{S, S(A_{\tilde{\Phi}})=e} \mathbf{H}(S, P) \\ &\geq Q(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(Q, P). \end{aligned}$$

Mais Q est une $(\tilde{\Phi}, P)$-mesure de Gibbs, donc elle maximise l'énergie libre. Ainsi la dernière inégalité est une égalité et Q' maximise aussi l'énergie libre. □

REMARQUE. Nous avons introduit dans la proposition précédente la formulation (ii) pour mettre en évidence le fait que, si Q' est un état d'équilibre d'énergie e, Q' minimise l'entropie spécifique sur son niveau d'énergie; ceci suscite l'idée de conditionner par rapport aux niveaux d'énergie, ce que nous ferons au Théorème 2.4.

Reprenons maintenant la preuve du Théorème 2.2 qui devient immédiate. Les états d'équilibre pour $\tilde{\Phi}$ sont, d'après la Proposition 2.3, les $(\tilde{\Phi}, P)$-mesures de Gibbs, qui d'après la Proposition 2.1, sont les solutions du SGS (4) quand la condition initiale ν décrit l'ensemble des $(\tilde{\varphi}, \mu)$-mesures de Gibbs. □

Nous appliquons les résultats précédents à l'étude du comportement du champ empirique sur le niveau d'énergie

$$\mathcal{E}(e) = \{S \in \mathcal{P}_s(\Omega), S(A_{\tilde{\Phi}}) = e\}.$$

THÉORÈME 2.4. *Soit $R_{n,\omega} \in \mathcal{P}_s(\Omega)$ le champ empirique de $\omega \in \Omega$ dans le cube Λ_n défini par*

$$R_{n,\omega} = \frac{1}{\operatorname{card} \Lambda_n} \sum_{i \in \Lambda_n} \delta_{\theta_i \omega^{(n)}}$$

où $\omega^{(n)}$ désigne l'élément Λ_n-périodique de Ω qui coincide avec ω sur Λ_n. Alors, pour tout sous-ensemble mesurable Γ de $\mathcal{P}_s(\Omega)$,

$$\begin{aligned} &- \inf_{Q' \in \overset{\circ}{\Gamma}} \Big(\mathbf{H}(Q', P) - \inf_{S \in \mathcal{E}(e)} \mathbf{H}(S, P)\Big) \\ &\leq \lim_{\eta \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{\operatorname{card} \Lambda_n} \log P(R_{n,\omega} \in \Gamma / \, R_{n,\omega} \in \mathcal{E}(e)^\eta) \\ &\leq \lim_{\eta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\operatorname{card} \Lambda_n} \log P(R_{n,\omega} \in \Gamma / \, R_{n,\omega} \in \mathcal{E}(e)^\eta) \\ &\leq - \inf_{Q' \in \bar{\Gamma}} \Big(\mathbf{H}(Q', P) - \inf_{S \in \mathcal{E}(e)} \mathbf{H}(S, P)\Big) \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}(e)^\eta = \{S \in \mathcal{P}_s(\Omega), d(S, \mathcal{E}(e)) < \eta\}$ et d est une distance induisant la topologie étroite sur $\mathcal{P}_s(\Omega)$.

PREUVE. C'est une application directe du *Principe de Boltzmann* abstrait démontré dans l'Appendice de [RZ], qui assure l'existence d'un principe de grandes déviations pour une famille de mesures conditionnées sur un espace très général et exhibe la fonctionnelle d'action, quand l'on sait que ces mesures non conditionnées satisfont déjà à un principe de grandes déviations. Or, d'après Comets [Co] (cf. aussi [Ol]), c'est le cas pour la suite de mesures $(P \circ R_{n,\omega}^{-1})_n$, et la fonctionnelle d'action associée est $\mathbf{H}(\, . \, , P)$. D'où le résultat. □

Donc, d'après le théorème précédent, la loi, sous la mesure produit P, du champ empirique $R_{n,\omega}$ restreint au niveau d'énergie $\mathcal{E}(e)$ satisfait à un principe de grandes déviations dont la fonctionnelle d'action est

$$\mathbf{H}(\, . \, , P) - \inf_{S \in \mathcal{E}(e)} \mathbf{H}(\, . \, , P) \, .$$

Cela signifie que, sous cette loi conditionnée, $R_{n,\omega}$ réalise asymptotiquement typiquement les états qui minimisent l'entropie spécifique sur $\mathcal{E}(e)$, qui ne sont autres, d'après la Proposition 2.3 et le Théorème 2.2, que les solutions du SGS (4) de condition initiale une $(\tilde{\varphi}, \mu)$-mesure de Gibbs.

Dans le cas où l'ensemble des $(\tilde{\varphi}, \mu)$-mesures de Gibbs se réduit à un seul élément ν, l'ensemble des mesures d'équilibre pour $\tilde{\Phi}$ se réduit à l'élément Q et l'on peut préciser les résultats du Théorème 2.4.

THÉORÈME 2.5. *Quand l'ensemble des $(\tilde{\varphi}, \mu)$-mesures de Gibbs est le singleton $\{\nu\}$ alors on a l'"équivalence d'ensembles" suivante:*

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{n \to \infty} P(\, . \, / R_{n,\omega} \in \mathcal{E}(e)^\eta) = Q.$$

PREUVE. Quand Q est le seul élément de $\mathcal{E}(e)$ qui y minimise l'entropie, il découle directement du Théorème 2.4 que

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{n \to \infty} P(R_{n,\omega} \in . / R_{n,\omega} \in \mathcal{E}(e)^\eta) = \delta_Q.$$

Mais, pour tout fonction F bornée mesurable sur Ω,

$$\int_{\{R_{n,\omega} \in \mathcal{E}(e)^\eta\}} R_{n,\omega}(F) \; P(d\omega) = \int_{\{R_{n,\omega} \in \mathcal{E}(e)^\eta\}} F(\omega^{(n)}) \; P(d\omega)$$

car l'image de P par l'application $\omega \longrightarrow \omega^{(n)}$ est invariante par translation spatiale. Donc

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\displaystyle\int_{\{R_{n,\omega} \in \mathcal{E}(e)^\eta\}} F(\omega^{(n)}) \; P(d\omega)}{P(R_{n,\omega} \in \mathcal{E}(e)^\eta)} = Q(F)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Cela s'interprète de la façon suivante: on crée *une interaction forte* de type gradient entre des particules *initialement indépendantes* en forçant leur champ empirique à appartenir à un niveau d'énergie bien choisi.

3. – Grandes déviations autour de la mesure gibbsienne d'équilibre

Dans la partie précédente nous avons rappelé (respectivement établi) l'existence d'un principe de grandes déviations pour le champ empirique $R_{n,\omega}$ sous la mesure produit P (resp. sous la mesure P conditionnée); nous avons de plus montré au Théorème 2.5 la convergence, sous certaines hypothèses, des mesures aléatoires $R_{n,\omega}$ vers la mesure déterministe Q, loi du SGS (4) de condition initiale ν, une $(\tilde{\varphi}, \mu)$-mesure de Gibbs sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$. Il est maintenant naturel d'analyser les grandes déviations éventuelles de $R_{n,\omega}$ sous la $(\tilde{\Phi}, P)$-mesure de Gibbs Q. En appliquant à notre contexte les résultats généraux de Comets [Co] sur les champs gibbsiens d'un espace $\Omega = X^{\mathbf{Z}^d}$ où X est polonais (quand Ω est moins général voir [Ol] ou [FO]), l'on obtient la

Proposition 3.1. *Le champ empirique $R_{n,\omega}$ satisfait sous Q à un principe de grandes déviations dont la fonctionnelle d'action $\mathbf{H}(\,.\,, Q)$ vérifie:*

$$\mathbf{H}(S, Q) = \mathbf{H}(S, P) - S(A_{\tilde{\Phi}}) + p(\tilde{\Phi}), \qquad S \in \mathcal{P}_s(\Omega), \tag{9}$$

où $p(\tilde{\Phi})$, la "pression" associée à l'interaction $\tilde{\Phi}$, vaut

$$p(\tilde{\Phi}) = \sup_{S \in \mathcal{P}_S(\Omega)} [S(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(S, P)].$$

Remarquons de suite que, puisque $\mathbf{H}(Q, Q) = 0$,

$$p(\tilde{\Phi}) = Q(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(Q, P). \tag{10}$$

L'expression (9) ne nous satisfait pas entièrement dans ce contexte car l'expression de $\tilde{\Phi}$ donnée en (8) (et à fortiori $A_{\tilde{\Phi}}$ et $p(\tilde{\Phi})$) est très compliquée. Notre but est donc de calculer directement $\mathbf{H}(\,.\,, Q)$ d'après la Définition 1.4 afin d'obtenir une expression plus explicite où apparaissent directement les données du problème, i.e. les interactions φ et $\tilde{\varphi}$.

Tout d'abord, analysons le cas particulier fondamental où l'interaction par paires φ induisant la dynamique Q est triviale, c'est-à-dire qu'elle se réduit à l'interaction propre φ_0.

L'hamiltonien h associé à φ sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ devient:

$$\forall i \in \mathbf{Z}^d, z \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}, \quad h_i(z) = \varphi_0(z_i),$$

et le SGS (4) a, pour chaque coordonnée, une dynamique de type brownienne avec dérive $(= -\frac{1}{2}\nabla\varphi_0)$ *indépendante* des dynamiques des autres coordonnées. Seule une interaction initiale $\tilde{\varphi}$ (dans ν) est possible. Nous obtenons le résultat suivant:

PROPOSITION 3.2. *Quand l'interaction φ induisant la dynamique du SGS* (4) *est dégénérée en une seule interaction propre φ_0 alors l'interaction au niveau des trajectoires $\tilde{\Phi}$ est aussi dégénérée et l'entropie par rapport à Q devient pour $S \in \mathcal{P}_s(\Omega)$,*

$$\mathbf{H}(S, Q) = \mathbf{H}(S, P) + S_0(F_0) + \mathbf{H}(S(0), Q(0)) - \mathbf{H}(S(0), P(0)), \tag{11}$$

où S_0 est la marginale spatiale de S sur $\mathbf{C}(0, T; \mathbf{R})$, $S(0)$ est la projection au temps 0 de S sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ et F_0 est la fonctionnelle suivante sur $\mathbf{C}(0, T; \mathbf{R})$:

$$F_0(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x(T)) - \frac{1}{2}\varphi_0(x(0)) + \int_0^T \left[\frac{1}{8}(\nabla\varphi_0)^2 - \frac{1}{4}\Delta\varphi_0\right](x(t))\, dt\,. \tag{12}$$

PREUVE. Revenons à la définition de $\mathbf{H}$ donnée en (3):

$$\mathbf{H}(S, Q) = \lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n} \int \log \frac{dS_{\Lambda_n}}{dQ_{\Lambda_n}}\, dS$$

Mais

$$\int \log \frac{dS_{\Lambda_n}}{dQ_{\Lambda_n}}\, dS = \int \log \frac{dS_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}\, dS - \int \log \frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}\, dS.$$

Nous cherchons à identifier $\frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n} \int \log \frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}\, dS$. Par le théorème de Girsanov, pour $\omega \in \Omega$,

$$\frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}(\omega) = \frac{d\nu_{\Lambda_n}}{d\mu_{\Lambda_n}}(\omega(0))\ \exp - \sum_{i \in \Lambda_n} \left(\int_0^T \frac{1}{2}\nabla\varphi_0(\omega_i(t)) d\omega_i(t) + \int_0^T \frac{1}{8}(\nabla\varphi_0)^2(\omega_i(t))\ dt \right).$$

En appliquant la formule d'Itô à $\varphi_0(\omega_i(T)), i \in \Lambda_n$, on élimine l'intégrale stochastique de l'exponentielle:

$$\frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}(\omega) = \frac{d\nu_{\Lambda_n}}{d\mu_{\Lambda_n}}(\omega(0)) \exp - \sum_{i \in \Lambda_n} \left(\frac{1}{2}\varphi_0(\omega_i(T)) - \frac{1}{2}\varphi_0(\omega_i(0)) + \int_0^T [\frac{1}{8}(\nabla\varphi_0)^2 - \frac{1}{4}\Delta\varphi_0](\omega_i(t))\ dt \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} &\lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n} \int \log \frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}\ dS \\ &= \mathbf{H}(S(0), P(0)) - \mathbf{H}(S(0), Q(0)) - \lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n} \sum_{i \in \Lambda_n} S(F_0(\omega_i)) \end{aligned} \tag{13}$$

où la fonctionnelle F_0 sur $\mathbf{C}(0,T;\mathbf{R})$ est celle de l'expression (12), et $\mathbf{H}(S(0),\mu)-\mathbf{H}(S(0),\nu)=+\infty$ si $\lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n}\int \log \frac{d\nu_{\Lambda_n}}{d\mu_{\Lambda_n}}\, dS(0)=+\infty$. Puisque S est stationnaire

$$\forall i \in \mathbf{Z}^d,\quad S(F_0(\omega_i)) = S(F_0(\omega_0)) = S_0(F_0).$$

Donc (13) devient

$$\lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n}\int \log \frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}\, dS = \mathbf{H}(S(0),P(0)) - \mathbf{H}(S(0),Q(0)) - S_0(F_0),$$

ce qui est l'expression recherchée. □

REMARQUE 3.3. On vérifie que l'expression (9) est bien équivalente à l'expression (11); dans ce cas dégénéré, l'énergie au site 0 associée à Φ n'est une fonction que de la coordonnée du site 0: pour $\omega \in \Omega$, d'après (7),

$$A_\Phi(\omega) = -\Phi_0(\omega_0) = -\mathcal{H}_0(\omega) = -F_0(\omega_0),$$

cette dernière égalité permettant d'interpréter F_0 comme une fonctionnelle d'énergie.

D'autre part, puisque

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \Phi(\omega) + \tilde{\varphi}(\omega(0)),$$

l'on a

$$A_{\tilde{\Phi}}(\omega) = A_\Phi(\omega) + A_{\tilde{\varphi}}(\omega(0)).$$

Donc, dans l'expression (9),

$$-S(A_{\tilde{\Phi}}) + p(\tilde{\Phi}) = -S(A_\Phi) - S(0)(A_{\tilde{\varphi}}) + p(\tilde{\Phi}).$$

Mais, d'après (10),

$$\begin{aligned} p(\tilde{\Phi}) &= Q(A_{\tilde{\Phi}}) - \mathbf{H}(Q,P) \\ &= Q(A_\Phi) + \nu(A_{\tilde{\varphi}}) - \mathbf{H}(Q,P) \\ &= Q(A_\Phi) + \nu(A_{\tilde{\varphi}}) - (-Q_0(F_0)) + \mathbf{H}(\nu,\mu)) \\ &= \nu(A_{\tilde{\varphi}}) - \mathbf{H}(\nu,\mu) \ \ (= p(\tilde{\varphi})). \end{aligned}$$

Mais, puisque ν est une $(\tilde{\varphi},\mu)$-mesure de Gibbs, pour $S \in \mathcal{P}_s(\Omega)$,

$$\mathbf{H}(S(0),\nu) = \mathbf{H}(S(0),\mu) - S(0)(A_{\tilde{\varphi}}) + \nu(A_{\tilde{\varphi}}) - \mathbf{H}(\nu,\mu).$$

Donc (9) devient:

$$\mathbf{H}(S,Q) = \mathbf{H}(S,P) - S(A_\Phi) - (\mathbf{H}(S(0),\mu) - \mathbf{H}(S(0),\nu))$$

ce qui est égal à (11).

Au passage, nous avons prouvé que dans le cas où l'interaction dynamique φ est dégénérée

$$p(\tilde{\Phi}) = p(\tilde{\varphi}). \qquad \square$$

Dans (11) l'on identifie clairement les rôles distincts d'une part de la dynamique du SGS ($S_0(F_0)$ ne dépendant que de φ), d'autre part de la condition initiale. En particulier, si la condition initiale ν est égale à la mesure produit μ, c'est-à-dire si l'interaction initiale $\tilde{\varphi}$ entre les particules est nulle , alors Q est la mesure produit de marginale spatiale Q_0, la loi du mouvement brownien de dérive $-\frac{1}{2}\nabla\varphi_0$, et l'égalité (11) devient:

$$\mathbf{H}(S, Q) = \mathbf{H}(S, P) + S_0(F_0), \quad \forall S \in \mathcal{P}_s(\Omega),$$

qui s'écrit, si S est de marginale S_0 égale à Q_0,

$$\mathbf{H}(S, Q) = \mathbf{H}(S, P) - I(S_0, P_0)$$

où nous rappelons que P_0, marginale de P, est la mesure de Wiener de condition initiale μ_0.

Cette dernière "formule de translation" est identique à la formule (5.8) de [RZ], que nous avions établie pour montrer que la mesure produit $Q_0^{\otimes \mathbf{Z}^d}$ est l'unique mesure de $\mathcal{P}_s(\Omega)$ parmi les mesures de marginale Q_0 qui minimise l'entropie spécifique $\mathbf{H}(\, . \, , P)$.

Nous nous replaçons maintenant dans le cadre d'une interaction φ non triviale satisfaisant les hypothèses (5) et (6) et induisant une dynamique de type gradient. Notre théorème principal est le suivant:

THÉORÈME 3.4. *La fonctionnelle* $\mathbf{H}(\, . \, , Q)$ *des grandes déviations du champ empirique sous la loi* Q *solution de* (4) *satisfait:*

$$\text{(14)} \quad \mathbf{H}(S, Q) = \mathbf{H}(S, P) + S(F) + \mathbf{H}(S(0), Q(0)) - \mathbf{H}(S(0), P(0)), \qquad S \in \mathcal{P}_s(\Omega)$$

où $S(0)$ *est la projection au temps* 0 *de* S *sur* $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ *et* F *est la fonctionnelle locale suivante sur* Ω*:*

$$\text{(15)} \quad F(\omega) = -\frac{1}{2}A_\varphi(\omega(T)) + \frac{1}{2}A_\varphi(\omega(0)) + \int_0^T \left[\frac{1}{8}(\nabla_0 h_0)^2 - \frac{1}{4}\Delta_0 h_0\right](\omega(t))dt.$$

REMARQUE 3.5.

1. On retrouve immédiatement que, si l'interaction φ est dégénérée en une unique interaction propre, $F = F_0$.
2. F est une fonctionnelle locale au sens où elle ne dépend que des coordonnées $i, i \in \mathcal{V}(0)$, interagissant avec le site 0.

PREUVE DU THÉORÈME 3.4. Comme à la Proposition 3.2,

$$\mathbf{H}(S,Q) = \mathbf{H}(S,P) - \lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n} \int \log \frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}\, dS$$

$$= \mathbf{H}(S,P) + \mathbf{H}(S(0),\nu) - \mathbf{H}(S(0),\mu)$$

$$- \lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n} \int \log \frac{dQ(\ /\omega(0))_{\Lambda_n}}{dP(\ /\omega(0))_{\Lambda_n}}(\omega)\ S(d\omega)$$

Nous cherchons donc à identifier ce dernier terme.
Puisque nous nous sommes ramenés à l'étude des lois Q et P conditionnées par leur valeur initiale, nous fixons dorénavant, sans changer les notations, les conditions initiales de Q, P et des autres lois sur Ω en une valeur déterministe donnée.
A cause de l'interaction sous Q de particules extérieures à Λ_n avec les particules de Λ_n, on ne peut plus simplement appliquer le théorème de Girsanov fini-dimensionnel sur Λ_n comme précédemment. En suivant une idée de Dai Pra, Corollary 4.4 de [Da], nous allons alors exhiber un encadrement de $\frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}$ par des densités de lois de SGS fini-dimensionels (auxquelles le théorème de Girsanov s'applique) approximants le SGS (4).

Soit ξ un élément fixé de Ω et $Q^{\xi_{\Lambda_n^c}}$ la loi sur $\mathbf{C}(0,T;\mathbf{R})^{\Lambda_n}$ de la solution du SGS suivant (les coordonnées extérieures à Λ_n sont gelées en $\xi_{\Lambda_n^c}$):

$$dX_i(t) = dW_i(t) - \frac{1}{2}\ \nabla_i h_i(X(t)_{\Lambda_n}\xi(t)_{\Lambda_n^c})dt, \quad i \in \Lambda_n,\ t \in [0,T],$$

si l'on note $X(t)_{\Lambda_n}\xi(t)_{\Lambda_n^c}$ l'élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ qui est la juxtaposition de $X(t)$ sur $\mathbf{R}^{\Lambda_n}$ et de $\xi(t)$ sur $\mathbf{R}^{\Lambda_n^c}$.

LEMME 3.6. *$Q^{\xi_{\Lambda_n^c}}$ est absolument continue par rapport à $P_0^{\otimes\Lambda_n}$, de densité notée $M_{n,\xi}$. De plus, pour tout $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbf{Z}^d$, il existe ζ et $\eta \in \Omega$ tels que*

$$M_{n,\zeta}(\omega_{\Lambda_n}) \leq \frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}(\omega) \leq M_{n,\eta}(\omega_{\Lambda_n}). \tag{16}$$

PREUVE. On peut appliquer à $Q^{\xi_{\Lambda_n^c}}$ le théorème de Girsanov:

$$M_{n,\xi}(\omega_{\Lambda_n}) = exp - \sum_{i\in\Lambda_n} \left(\int_0^T \frac{1}{2}\nabla_i h_i(\omega(t)_{\Lambda_n}\xi(t)_{\Lambda_n^c})d\omega_i(t) \right.$$
$$\left. + \int_0^T \frac{1}{8}(\nabla_i h_i)^2(\omega(t)_{\Lambda_n}\xi(t)_{\Lambda_n^c})\, dt \right).$$

Supposons avoir démontré l'égalité suivante:

$$\frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}(\omega) = \int_\Omega M_{n,\xi}(\omega_{\Lambda_n}) Q^{\omega_{\Lambda_n}}(d\xi_{\Lambda_n^c}) \tag{17}$$

où $Q^{\omega_{\Lambda_n}}$ est, cette fois, la loi sur $\mathbf{C}(0,T;\mathbf{R})^{\Lambda_n^c}$ de la solution du SGS suivant (dans lequel on a gelé les conditions *intérieures* à Λ_n en ω_{Λ_n}):

$$dX_j(t) = dW_j(t) - \frac{1}{2}\ \nabla_j h_j(\omega(t)_{\Lambda_n} X(t)_{\Lambda_n^c})dt,\ \ j \in \Lambda_n^c,\ \ t \in [0,T].$$

Le membre de gauche de (17) étant une combinaison convexe de $M_{n,\xi}$, l'encadrement (16) devient immédiat. Montrons donc l'égalité (17). Elle résulte d'une part du fait que, par construction (d'après [SS], par exemple), Q est limite pour m infini de $Q^{\theta_{\Lambda_m^c}}$, d'autre part du fait que $M_{m,\theta}, m > n$, a comme fonction de $\Lambda_m = \Lambda_n \cup (\Lambda_m \backslash \Lambda_n)$ une structure multiplicative.
Donc soit F une fonction continue bornée sur $\mathbf{C}(0,T;\mathbf{R})^{\Lambda_n}$.

$$\begin{aligned}
&\int F(\omega_{\Lambda_n}) \frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}(\omega) P_0^{\otimes\Lambda_n}(d\omega_{\Lambda_n}) \\
&\quad = \int F(\omega_{\Lambda_n})\ Q(d\omega) \\
&\quad = \lim_{m\to\infty} \int F(\omega_{\Lambda_n})\ \ Q^{\theta_{\Lambda_m^c}}(d\omega) \\
&\quad = \lim_{m\to\infty} \int F(\omega_{\Lambda_n}) \int M_{m,\theta}(\omega_{\Lambda_m})\ \ P_0^{\otimes\Lambda_m\backslash\Lambda_n}(d\omega_{\Lambda_m\backslash\Lambda_n})\ \ P_0^{\otimes\Lambda_n}(d\omega_{\Lambda_n}).
\end{aligned}$$

D'où, $P_0^{\otimes\Lambda_n}$-p.s.,

$$\frac{dQ_{\Lambda_n}}{dP_{\Lambda_n}}(\omega) = \lim_{m\to\infty} \int M_{m,\theta}(\omega_{\Lambda_n}\xi_{\Lambda_m\backslash\Lambda_n})\ \ P_0^{\otimes\Lambda_m\backslash\Lambda_n}(d\xi_{\Lambda_m\backslash\Lambda_n}).$$

Nous utilisons alors la structure multiplicative de $M_{m,\theta}$:

$$M_{m,\theta}(\omega_{\Lambda_n}\xi_{\Lambda_m\backslash\Lambda_n}) = M_{n,\xi_{\Lambda_m}\theta_{\Lambda_m^c}}(\omega_{\Lambda_n}) \frac{d(Q^{\theta_{\Lambda_m^c}})^{\omega_{\Lambda_n}}}{dP_0^{\otimes\Lambda_m\backslash\Lambda_n}}(\xi_{\Lambda_m\backslash\Lambda_n}).$$

D'où l'égalité (17). □

Nous nous attachons maintenant à calculer $\log M_{n,\xi}$ pour un ξ fixé de Ω à trajectoires constantes: $\xi(t) \equiv \xi \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$, et noterons h_i^ξ la fonction définie par:

$$h_i^\xi(z) = h_i(z_{\Lambda_n}\xi_{\Lambda_n^c}),\ \ z \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}.$$

La difficulté essentielle est la présence de l'intégrale stochastique dans l'égalité

$$(18)\quad M_{n,\xi}(\omega_{\Lambda_n}) = \exp - \sum_{i\in\Lambda_n}\left(\int_0^T \frac{1}{2}\nabla_i h_i^\xi(\omega(t))d\omega_i(t) + \int_0^T \frac{1}{8}(\nabla_i h_i^\xi)^2(\omega(t))\,dt\right)$$

que l'on veut éliminer en appliquant la formule d'Itô à une fonction bien choisie. Pour ceci, il faut exprimer $\nabla_i h_i^\xi$ comme le gradient dans la direction i d'une fonction (sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$) ne dépendant pas de i.
D'après les hypothèses (5) sur l'interaction φ la fonction d'énergie A_φ sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ définie en (1) vaut, pour $z \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$:

$$A_\varphi(z) = -\Big(\varphi_0(z_0) + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}(0)^*}\varphi_{|j|}(z_0, z_j)\Big).$$

Soit A_φ^n définie sur $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$ par:

$$(19)\qquad A_\varphi^n = \sum_{k\in\Lambda_n^+} A_\varphi \circ \theta_k,$$

où Λ_n^+ est le cube Λ_n "épaissi" par $\mathcal{V}(0)$, i.e.

$$\Lambda_n^+ = \{k \in \mathbf{Z}^d \text{ tels que } \exists j \in \mathcal{V}(0) \text{ pour lequel } k - j \in \Lambda_n\}.$$

On note enfin A_φ^ξ, par analogie avec h^ξ, la fonction définie par

$$A_\varphi^\xi(z) = A_\varphi(z_{\Lambda_n}\xi_{\Lambda_n^c}),\ \ z \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}.$$

Et similairement pour $A_\varphi^{n,\xi}$. Montrons le

LEMME 3.6. $\forall i \in \Lambda_n,\ \ \nabla_i h_i^\xi = -\nabla_i A_\varphi^{n,\xi}$.

PREUVE.

$$A_\varphi^n(z) = -\sum_{k\in\Lambda_n^+}\varphi_0(z_k) - \frac{1}{2}\sum_{k\in\Lambda_n^+}\sum_{j\in\mathcal{V}(0)^*}\varphi_{|j|}(z_k, z_{j+k}).$$

Donc, pour $i \in \Lambda_n$,

$$(20)\qquad \begin{aligned} -\nabla_i A_\varphi^n(z) &= \nabla\varphi_0(z_i) + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}(0)^*}\nabla_1\varphi_{|j|}(z_i, z_{j+i}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}(0)^*}\nabla_2\varphi_{|j|}(z_{i-j}, z_i), \end{aligned}$$

où ∇_1 (resp. ∇_2) signifie que le gradient se rapporte à la 1ère (resp. 2ème) variable. D'après l'hypothèse (6), $\varphi_{|j|}$ est symétrique. Donc

$$\nabla_2\varphi_{|j|}(z_{i-j}, z_i) = \nabla_1\varphi_{|j|}(z_i, z_{i-j})$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}(0)^*} \nabla_2\varphi_{|j|}(z_{i-j}, z_i) &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}(0)^*} \nabla_1\varphi_{|j|}(z_i, z_{i-j})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{V}(0)^*} \nabla_1\varphi_{|j|}(z_i, z_{i+j})\end{aligned}$$

(car par symétrie de $\mathcal{V}(0)$: $j \in \mathcal{V}(0) \Leftrightarrow -j \in \mathcal{V}(0)$). (20) devient donc

$$\begin{aligned}-\nabla_i A_\varphi^n(z) &= \nabla\varphi_0(z_i) + \sum_{j\in\mathcal{V}(0)^*} \nabla_1\varphi_{|j|}(z_i, z_{j+i})\\ &= \nabla_i h_i(z),\end{aligned}$$

et si $i \in \Lambda_n$,

$$\begin{aligned}\nabla_i h_i^\xi(z) &= \nabla_i h_i(z_{\Lambda_n}\xi_{\Lambda_n^c})\\ &= -\nabla_i A_\varphi^n(z_{\Lambda_n}\xi_{\Lambda_n^c})\\ &= -\nabla_i A_\varphi^{n,\xi}(z).\end{aligned}$$

□

Donc, d'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned}&-\sum_{i\in\Lambda_n}\int_0^T \frac{1}{2}\nabla_i h_i^\xi(\omega(t))d\omega_i(t)\\ &= \sum_{i\in\Lambda_n}\int_0^T \frac{1}{2}\nabla_i A_\varphi^{n,\xi}(\omega(t))d\omega_i(t)\\ &= \frac{1}{2}A_\varphi^{n,\xi}(\omega(T)) - \frac{1}{2}A_\varphi^{n,\xi}(\omega(0)) - \frac{1}{4}\sum_{i\in\Lambda_n}\int_0^T \Delta_i A_\varphi^{n,\xi}(\omega(t))dt\\ &= \frac{1}{2}A_\varphi^{n,\xi}(\omega(T)) - \frac{1}{2}A_\varphi^{n,\xi}(\omega(0)) + \frac{1}{4}\sum_{i\in\Lambda_n}\int_0^T \Delta_i h_i^\xi(\omega(t))dt\end{aligned}$$

et (18) devient

$$\begin{aligned}\log M_{n,\xi}(\omega_{\Lambda_n}) = \frac{1}{2}A_\varphi^{n,\xi}(\omega(T)) - \frac{1}{2}A_\varphi^{n,\xi}(\omega(0))&\\ + \sum_{i\in\Lambda_n}\int_0^T \left[\frac{1}{4}\Delta_i h_i^\xi - \frac{1}{8}(\nabla_i h_i^\xi)^2\right](\omega(t))\, dt.&\end{aligned}$$

D'où, pour $S \in \mathcal{P}_s(\Omega)$, en utilisant la stationnarité,

$$\lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n} \int \log M_{n,\xi}\, dS = \lim_n \frac{\operatorname{card}\Lambda_n^+}{\operatorname{card}\Lambda_n} \int \left[\frac{1}{2}A_\varphi^\xi(\omega(T)) - \frac{1}{2}A_\varphi^\xi(\omega(0))\right] S(d\omega)$$

$$+ \lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n} \int \sum_{i\in\Lambda_n} \int_0^T \left[\frac{1}{4}\Delta_i h_i^\xi - \frac{1}{8}(\nabla_i h_i^\xi)^2\right](\omega(t))\, dt\, S(d\omega).$$

Puisque $\mathcal{V}(0)$ est borné, $\lim_n \frac{\operatorname{card}\Lambda_n^+}{\operatorname{card}\Lambda_n} = 1$; d'autre part, puisque A_φ n'est fonction que des coordonnées dans $\mathcal{V}(0)$, pour n assez grand, $A_\varphi^\xi = A_\varphi$ et la première limite du membre de droite ci-dessus est uniforme en ξ. Pour la deuxième limite, l'on scinde la somme sur Λ_n en une somme sur Λ_n^- et une somme sur $\Lambda_n \backslash \Lambda_n^-$ où Λ_n^- est le cube Λ_n "amaigri" de $\mathcal{V}(0)$:

$$\Lambda_n^- = \{k \in \Lambda_n \text{ tels que } \forall j \in \mathcal{V}(0),\ k + j \in \Lambda_n\}.$$

Par bornitude de $\Delta_i h_i$ et $\nabla_i h_i$, la somme sur $\Lambda_n \backslash \Lambda_n^-$ disparait à la limite. On remarque que $\lim_n \frac{\operatorname{card}\Lambda_n^-}{\operatorname{card}\Lambda_n} = 1$ et, pour $i \in \Lambda_n^-$, $h_i^\xi = h_i = h_0 \circ \theta_i$. Par localité de h_0, cette deuxième limite est aussi uniforme en ξ et vaut

$$\iint_0^T \left[\frac{1}{4}\Delta_0 h_0 - \frac{1}{8}(\nabla_0 h_0)^2\right](\omega(t))\, dt\, S(d\omega).$$

Cette uniformité et l'encadrement du Lemme 3.6 permettent de déduire que

$$-\lim_n \frac{1}{\operatorname{card}\Lambda_n} \int \log \frac{dQ(\ /\omega(0))_{\Lambda_n}}{dP(\ /\omega(0))_{\Lambda_n}}(\omega)\ S(d\omega) = S(F)$$

où F est bien donnée par l'expression (15). □

RÉFÉRENCES

[CRZ] P. CATTIAUX - S. ROELLY - H. ZESSIN, *Une approche gibsienne des diffusions browniennes infini-dimensionelles*, Probab. Theory Related Fields **104** (1996), 147-179.

[Co] F. COMETS, *Grandes déviations pour des champs de Gibbs sur $\mathbf{Z}^d$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I (Math) **303** (1986), 511-514.

[Da] P. DAI PRA, *Large deviations and stationnary measures for interacting particle systems*, Preprint 1992.

[De] J.D. DEUSCHEL, *Non linear smoothing of infinite dimensional diffusion processes*, Stochastics **19** (1986), 237-261.

[FO] H. FÖLLMER - S. OREY, *Large deviations for the empirical field of a Gibbs measure*, Ann. Probab. **16** (1988), 961-977.

[G] H.O. GEORGII, Gibbs measures and phase transitions, Studies in Math. 9, de Gruyter, Berlin New York, 1988.

[Ol] S. OLLA, *Large deviations for Gibbs random fields*, Probab. Theory Related Fields **77** (1988), 343-357.

[RZ] S. ROELLY - H. ZESSIN, *The equivalence of equilibrium principles in Statistical Mechanics and some applications to large particle systems*, Exposition Math. **11** (1993), 385-405.

[SS] T. SHIGA - A. SHIMIZU, *Infinite dimensional stochastic differential equations and their applications*, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), 395-416.

Laboratoire de Géométrie, Analyse et Topologie
URA C.N.R.S. 751
U.F.R. de Mathématiques
Université Lille 1
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cédex

Laboratoire de Statistique et Probabilités
U.F.R. de Mathématiques
Université Lille 1
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cédex