Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Jean-Paul Brasselet
André Legrand

Un complexe de formes différentielles à croissance bornée sur une variété stratifiée

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 21, nº 2 (1994), p. 213-234
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1994_4_21_2_213_0>

Un complexe de formes différentielles à croissance bornée sur une variété stratifiée

JEAN-PAUL BRASSELET - ANDRE LEGRAND

Introduction

Sur une variété différentielle lisse, de classe $\mathcal{C}^\infty$, le théorème classique de de Rham affirme que la cohomologie des formes différentielles est isomorphe à l'homologie de la variété. Dans le cas de singularités isolées, Cheeger ([Ch], 1980) a considéré un complexe de formes différentielles définies sur la partie lisse de la variété singulière et de type $\mathcal{L}^2$ relativement à une métrique localement conique. Il a montré que la cohomologie de ce complexe est isomorphe à l'homologie d'intersection de la variété singulière. Un tel isomorphisme a ensuite été étendu, pour d'autres singularités et toujours dans le cadre des formes de type $\mathcal{L}^2$, par Cheeger, Goresky et MacPherson ([CGM], 1982). Ce résultat a été généralisé par Nagase ([Na], 1987) et, pour les formes de type $\mathcal{L}^p$, par Youssin ([Yo], 1992). Par ailleurs, un isomorphisme avec l'homologie d'intersection d'une variété singulière a été obtenu par Brylinski en considérant des formes nulles sur certains champs de vecteurs (formes de Brylinski-Goresky-MacPherson [Bry], 1986). Dans ces différents cas, les formes différentielles "permises" sont soumises à certaines contraintes au voisinage de la partie singulière.

On peut définir de telles contraintes à partir du comportement asymptotique des formes différentielles. Etant donnée une variété algébrique, Grothendieck ([Gr], 1966) et Deligne ([Ha], 1975) ont obtenu la cohomologie de de Rham du complémentaire d'un diviseur à partir du complexe des formes différentielles algébriques à singularités polaires sur ce diviseur. Sasakura ([Sa], 1981) a utilisé la cohomologie des formes à croissance polynomiale pour obtenir des résultats de ce type.

Plus généralement, on sait par ([BGM], 1991) que la cohomologie d'intersection d'un polyèdre d'un espace euclidien peut être donnée par les formes ombre, formes analytiques à pôles (d'ordre convenable).

Revenons au cas général d'une variété stratifiée, dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$. Verona ([Ve1], 1971) et Ferrarotti ([Fe], 1991) ont considéré les formes plates au voisinage des strates singulières; elles donnent la cohomologie de la variété.

Pervenuto alla Redazione il 23 Dicembre 1992 e in forma definitiva il 25 Ottobre 1993.

Pour obtenir la cohomologie d'intersection à partir du comportement asymptotique, il est nécessaire de pouvoir reconnaître la partie singulière sur ce comportement asymptotique. Pour ceci, on a besoin d'une estimation plus précise de ce comportement au voisinage des strates singulières. Nous utiliserons un complexe de formes différentielles à coefficients dans des espaces de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur la partie lisse et à singularités de type polaire contrôlé sur la partie singulière (Définition 3.2). Ce contrôle est effectué au moyen de deux paramètres associés à chacune des strates:

- le premier, β, ordre intrinsèque du pôle des fonctions (formes de degré 0);
- le second, c, fournit, au voisinage de la strate singulière, un "module d'applatissement" r^c (Remarque 3.3). Il intervient en correction de β pour les formes de degré supérieur (on pourrait plus généralement le remplacer par une fonction convenable $\phi(r)$).

Ce contrôle porte sur les coefficients des formes ainsi que sur leurs dérivées de tous ordres. En effet, pour établir un lemme de Poincaré, nous aurons besoin d'une notion de convergence en $\mathcal{C}^\infty$ pour intégrer sur des chemins allant jusqu'aux strates singulières.

Considérons l'exemple d'un cône: en homologie d'intersection, les chaînes qui passent par le sommet sont permises si et seulement si leur dimension est suffisamment grande. L'homologie du complexe des chaînes permises est l'homologie d'intersection du cône. Le complexe de formes différentielles contrôlées est dual du précédent: une forme différentielle permise peut admettre un pôle au sommet du cône, mais l'ordre de celui-ci ne doit pas être trop grand de façon à ce que le lemme de Poincaré soit vérifié à partir d'un certain degré.

De manière précise, on sait que l'homologie d'intersection d'un cône cL sur une variété L de dimension n (le link), pour la perversité $\bar{p}$ (déterminée par p_{n+1}), est égale à

$$IH_k^{\bar{p}}(cL) = \begin{cases} H_k(L) & \text{si } k < n - p_{n+1}, \\ 0 & \text{si } k \geq n - p_{n+1}. \end{cases}$$

Les coefficients d'une k-forme du link étendue au cône admettent au sommet un "pôle d'ordre $\beta - kc$". Les formes permises sur le cône, pour la perversité $\bar{p}$, seront celles dont les coefficients ont un pôle d'ordre au plus $\beta - kc$ où β et c satisfont à $\left[\dfrac{\beta}{c}\right] \leq n - p_{n+1} - 1$ et où [ ] désigne la fonction "partie entière" (Théorème 2.4).

Plus généralement, les k-formes différentielles permises seront celles qui au voisinage d'une strate de codimension j admettent un "pôle d'ordre au plus $\beta_j - kc_j$" dans tout voisinage distingué. Pour toute perversité $\bar{p}$, lorsque, pour tout j, on a la relation

$$p_j = j - 2 + \left[\frac{\beta_j}{c_j}\right]$$

le complexe $\Omega^\bullet_{\bar\beta}$ des formes permises vérifie (Théorème 3.5):

$$H^k(\Omega^\bullet_{\bar\beta}) \cong \mathrm{Hom}(IH^{\bar p}_k(X);\mathbb{R})$$

Le complexe ainsi défini sur une pseudovariété stratifiée est lié aux complexes précédemment construits dans la littérature. Par exemple, dans le cas d'un polyèdre dans un espace euclidien, stratifié par les squelettes, les formes ombre de [BGM] (extension des formes classiques de Whitney) correspondant à la perversité $\bar p$ ont des coefficients analytiques sur la partie lisse et ont, sur les strates singulières, des pôles dont l'ordre maximum vérifie la relation précédente, avec $c = 1$. Les formes différentielles permises sont une généralisation des formes ombres au cas $\mathcal{C}^\infty$, et pour une variété stratifiée non nécessairement plongée dans un espace euclidien (Proposition 4.2).

D'autre part, le complexe des formes permises de pôle d'ordre maximum β_j relativement à des métriques (locales) $dr^2 + r^{2c_j}g$ telles que $\left[\frac{\beta_j}{c_j}\right]$ soit une perversité et telles que $\left[\frac{\beta_j}{c_j}\right] < \frac{j}{2}$ est un sous-complexe quasi-isomorphe au complexe des formes différentielles de type $\mathcal{L}^2$ de Cheeger [Ch] (Remarque 3.3). Plus généralement, par un choix convenable des paramètres β_j et c_j, on a le même résultat pour le complexe des formes de type $\mathcal{L}^p$. B. Youssin a montré que celles-ci vérifient également un théorème de de Rham en relation avec la cohomologie d'intersection pour une perversité donnée [Yo].

1. - Rappels sur l'homologie d'intersection [GM1]

Pour tout espace L, on note cL le cône de base L, obtenu comme le quotient $cL = [0,1[\times L/\sim$ où l'on a identifié $\{0\}\times L$ en un point noté $\{s\}$. On appelle L le "link" du cône, et le point $\{s\}$ le sommet du cône.

Soit X une pseudovariété munie d'une *stratification topologique*. Rappelons que cela signifie qu'on s'est donné une filtration en sous-espaces fermés:

$$X = X_n \supset X_{n-1} = X_{n-2} \supset \cdots \supset X_1 \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset \tag{1}$$

telle que $X - X_{n-2}$ soit dense dans X, chaque strate $S_i = X_i - X_{i-1}$ est vide ou une variété lisse de dimension i, et tout point x de $X_i - X_{i-1}$, admet un *voisinage distingué* $U_x \subset X$ homéomorphe à $B^i \times c(L_x)$, produit d'une boule $B^i \subset \mathbb{R}^i$ par le cône ouvert sur le "link". Le link est une pseudovariété compacte de dimension réelle $n-i-1$ indépendante du point x de la strate $X_i - X_{i-1}$, et filtrée en:

$$L_x = L_{n-i-1} \supset L_{n-i-3} \supset \cdots \supset L_0 \supset L_{-1} = \emptyset,$$

de plus l'homéomorphisme précédent préserve les stratifications, c'est-à-dire envoie homéomorphiquement $U_x \cap X_m$ sur $B^i \times c(L_{m-i-1})$. (Par définition, on a $c(\emptyset) = \{\text{point}\}$). Dans la suite, la partie singulière de X, c'est-à-dire X_{n-2}, sera notée Σ.

Soit $\bar{p} = (p_2, p_3, \ldots, p_n)$ une perversité au sens de Goresky et MacPherson, c'est-à-dire une suite d'entiers tels que $p_2 = 0$, et $p_j \leq p_{j+1} \leq p_j + 1$, pour $2 \leq j \leq n-1$. Pour toute triangulation localement finie (T) de X, le groupe des i-chaînes simpliciales orientées de X, à support compact, pour la triangulation (T), est noté $C_i^{(T)}(X)$. Le groupe des i-chaînes P.L. de X, noté $C_i(X)$, est la limite directe des $C_i^{(T)}(X)$ pour toutes les triangulations de X, c'est-à-dire la réunion des groupes $C_i^{(T)}(X)$ pour toutes les triangulations (T) modulo l'identification de deux chaînes $\xi \in C_i^{(T)}(X)$ et $\xi' \in C_i^{(T')}(X)$ s'il existe une subdivision commune (T'') de (T) et (T') telle que les images canoniques de ξ et ξ' dans $C_i^{(T'')}(X)$ coïncident.

Le support $|\xi|$ d'une chaîne ξ de $C_i(X)$ est la réunion des adhérences des i-simplexes σ dont le coefficient dans ξ est non nul.

DÉFINITION 1.1. *On note $IC_i^{\bar{p}}(K)$ le sous-espace de $C_i(K)$ constitué des chaînes d'intersection, c'est-à-dire telles que pour tout $j \geq 2$:*

$$\dim(|\xi| \cap S_{n-j}) \leq i - j + p_j$$

$$\dim(|\partial\xi| \cap S_{n-j}) \leq (i-1) - j + p_j$$

La condition précédente signifie que le défaut permis de transversalité de $|\xi|$ et S_{n-j} est au maximum égal à la perversité p_j, de même pour $|\partial\xi|$.

Les groupes d'homologie d'intersection de X sont ceux du complexe $IC_*^{\bar{p}}(X)$ et on les note $IH_*^{\bar{p}}(X)$.

En particulier, si L est une variété lisse de dimension n, le cône cL est une pseudovariété de dimension $n+1$ dont l'ensemble singulier est de dimension 0. Une perversité $\bar{p}$ est donnée par le seul entier p_{n+1}, avec: $0 \leq p_{n+1} \leq n-1$. Les groupes d'homologie d'intersection satisfont [CGM, §2.2]:

$$IH_k^{\bar{p}}(cL) = \begin{cases} H_k(L) & \text{si } k < n - p_{n+1}, \\ 0 & \text{si } k \geq n - p_{n+1}. \end{cases} \tag{2}$$

2. - Calculs locaux, cas du cône

Fonctions différentiables γ-bornées sur le cône sur une variété lisse

On considère une variété lisse L et un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ localement fini de L par des ouverts de coordonnées, les U_i étant relativement compacts. On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées sur un tel ouvert. Le cône épointé $cL - \{s\} \simeq]0,1[\times L$ est alors muni des coordonnées (r, x).

La topologie $\mathcal{C}^\infty$ (sur une variété ouverte) est fermée pour l'intégration sur tout intervalle compact. Il nous faut la fermer relativement à l'intégration sur un intervalle d'extrémité le sommet du cône. Pour cela, étant donné un réel fixé $\gamma > 0$, on introduit les semi-normes

$$q_\gamma(U_i, s, \lambda)(f) = \max_{(r,x)\in]0,1[\times U_i} r^{\gamma+s} \left| \frac{\partial^{s+|\lambda|} f}{\partial r^s \partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}} \right|.$$

Dans cette expression $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est un multi-indice de longueur $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ et on a posé $\partial^\lambda x = \partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}$. Remarquons que l'ouvert "distingué" $]0,1[\times U_i$ n'est pas relativement compact dans la variété ouverte $]0,1[\times L$. Les restrictions de ces semi-normes aux ouverts d'un recouvrement de $]0,1[\times L$ par une famille dénombrable d'ouverts relativement compacts, définissent la topologie $\mathcal{C}^\infty$ habituelle de $]0,1[\times L$.

DÉFINITION 2.1. *Le sous-module $\mathcal{C}^\infty_\gamma(cL)$ des fonctions γ-bornées sur cL est défini par*

$$\mathcal{C}^\infty_\gamma(cL) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(]0,1[\times L) : q_\gamma(U_i, s, \lambda)(f) < \infty\}.$$

On remarque que la définition précédente est indépendante du choix des cartes de L.

LEMME 2.2. (i) *Muni des semi-normes $q(U_i, s, \lambda)$, $\mathcal{C}^\infty_\gamma(cL)$ est un espace de Fréchet, et si $\gamma \leq \gamma'$, on a une inclusion topologique $\mathcal{C}^\infty_\gamma(cL) \subset \mathcal{C}^\infty_{\gamma'}(cL)$.*

(ii) *Pour $\gamma' \geq \sup\{0, \gamma - 1\}$, ($\gamma' > 0$, si $\gamma = 1$) si $f \in \mathcal{C}^\infty_\gamma(cL)$, alors, pour $0 < \varepsilon < r$, la fonction $F_\varepsilon(r,x) = \int_\varepsilon^r f(\rho, x) d\rho$ est dans $\mathcal{C}^\infty_{\gamma'}(cL)$.*

(iii) *Pour $\gamma < 1$, $F(r,x) = \int_0^r f(\rho,x)d\rho$ définit un élément de $\mathcal{C}^\infty_{\gamma-1}(cL)$ et, pour ε tendant vers 0, la convergence de F_ε vers F a lieu dans $\mathcal{C}^\infty(cL - \{s\})$.*

DÉMONSTRATION. (i) se montre de la même manière que pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ habituelle.

(ii) Par hypothèse, il existe C_λ tel qu'on ait $q_\gamma(U, 0, \lambda)(f) \leq C_\lambda r^{-\gamma}$. Alors, si $\gamma \neq 1$ et $s = 0$, on a

$$r^{\gamma'} \left| \frac{\partial^{|\lambda|} F_\varepsilon}{\partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}} (r,x) \right| = r^{\gamma'} \left| \int_\varepsilon^r \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}} (\rho, x) d\rho \right|$$
$$\leq C_\lambda r^{\gamma'} |r^{-\gamma+1} - \varepsilon^{-\gamma+1}|$$

et cette expression est bornée au voisinage de $r = 0$. Pour $\gamma = 1$, on a une preuve du même type, et pour $s \neq 0$, il suffit de remarquer qu'il n'y a plus d'intégration.

(iii) Sous l'hypothèse $\gamma < 1$, la même majoration que ci-dessus montre que F_ε admet une limite lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour tout multi-indice λ, les dérivées partielles $\dfrac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}$ sont bornées par une fontion $C_\lambda r^{-\gamma}$ intégrable en 0, et donc la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en x. Elle est dérivable par rapport à la variable r et sa dérivée $f(r, x)$ est donc aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ en r. Des majorations utilisées on déduit immédiatement que F est élément de $\mathcal{C}^\infty_{\gamma'-1}(cL)$.

La fonction $F - F_\varepsilon$ est indépendante de r. Les majorations

$$\left| \frac{\partial^{|\lambda|}(F - F_\varepsilon)}{\partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}(x) \right| = \left| \int_0^\varepsilon \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}(\rho, x) d\rho \right| \leq C_\lambda \varepsilon^{1-\gamma}.$$

montrent que la fonction $F - F_\varepsilon$ tend vers 0 dans $\mathcal{C}^\infty(cL - \{s\})$. □

Complexe des formes différentielles bornées sur le cône

Pour toute variété différentiable V, nous noterons $\Omega^\bullet(V)$ le complexe des formes différentielles sur V. Toute forme $\omega \in \Omega^\bullet(cL - \{s\})$ se décompose d'une façon unique comme

$$\omega = \eta + dr \wedge \phi$$

où $\phi = i_{\frac{\partial}{\partial r}} \omega$ et $\eta = \omega - dr \wedge i_{\frac{\partial}{\partial r}} \omega$. Dans toute carte de L, toute k-forme de $\Omega^\bullet(cL - \{s\})$ est somme d'éléments du type

$$\omega = a \; dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + b \; dr \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}}$$

où a et b sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de r et de x. Fixons des réels $c \geq 0$ et $\beta \geq 0$,

DÉFINITION 2.3. *Une forme différentielle* $\omega \in \Omega^k(cL - \{s\})$

$$\omega = a \; dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + b \; dr \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}}$$

est β-bornée si $a \in \mathcal{C}^\infty_{\beta - kc}(cL)$ *et* $b \in \mathcal{C}^\infty_{\beta-(k-1)c}(cL)$. *On note*

$$\Omega^\bullet_\beta(cL) = \{\omega \in \Omega^\bullet(cL - \{s\}) : \omega \textit{ et } d\omega \textit{ sont } \beta\textit{-bornées}\}$$

le complexe des formes différentielles β-bornées.

Notons [ ] la fonction partie entière, nous allons montrer:

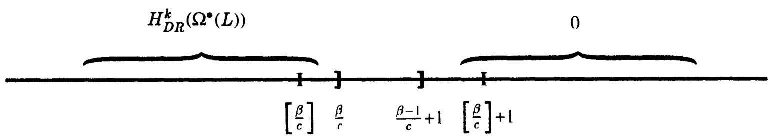
THÉORÈME 2.4. *Soit cL le cône sur une variété lisse L de dimension n et de connexité ν. Etant donnés deux nombres réels $\beta \geq 0$ et $c > 0$ quelconques, sauf dans le cas où $c > 1$ et $\nu < \dfrac{\beta}{c} \leq n$, pour lesquels on impose la condition*

$\frac{\beta}{c}\left[\frac{\beta}{c}\right] < \frac{1}{c}$, *on a:*

$$H^k(\Omega^\bullet_\beta(cL)) = \begin{cases} H^k_{DR}(\Omega^\bullet(L)) & si\ k \leq \left[\dfrac{\beta}{c}\right], \\ 0 & si\ k > \left[\dfrac{\beta}{c}\right]. \end{cases}$$

Pour $c = 0$, *on a encore, pour tout* β, $H^k(\Omega^\bullet_\beta(cL)) = H^k_{DR}(\Omega^\bullet(L))$.

La condition $0 < \frac{\beta}{c} - \left[\frac{\beta}{c}\right] < \frac{1}{c}$ est imposée, dans le cas $c > 1$, par la contrainte $\frac{\beta - 1}{c} + 1 < \left[\frac{\beta}{c}\right] + 1$ pour qu'il n'y ait pas de "trous" dans la cohomologie de $\Omega^\bullet_\beta(cL)$. En effet, pour $c > 1$ et $0 < \frac{\beta}{c} - \left[\frac{\beta}{c}\right] < \frac{1}{c}$, les groupes de cohomologie $H^k(\Omega^\bullet_\beta(cL))$ sont égaux à:



REMARQUE 2.5. En particulier, on déduit du Théorème 2.4 les résultats suivants:

(i) pour $\beta < c\nu$ (par exemple $\beta = 0$), $H^\bullet(\Omega^\bullet_\beta(cL)) = 0$;

(ii) pour β assez grand ou c nul (en fait $\beta > cn$), on a $H^\bullet(\Omega^\bullet_\beta(cL)) = H^\bullet_{DR}(\Omega^\bullet(L))$. Le théorème de de Rham habituel sur la partie lisse, pour lequel on n'a pas de contrainte au voisinage de la partie singulière, correspond au cas $\beta = \infty$.

Le Théorème 2.4 montre que la cohomologie du complexe des formes différentielles bornées se comporte localement comme l'homologie d'intersection. En fait, il résultera du paragraphe suivant que:

$$H^k(\Omega^\bullet_\beta(cL)) \cong \mathrm{Hom}(IH^{\bar{p}}_k(cL); \mathbb{R})$$

pour la perversité $\bar{p}$ telle que $p_{n+1} = n - \left[\frac{\beta}{c}\right] - 1$.

Le Théorème 2.4 est une conséquence directe de la Proposition 2.7 ci-dessous.

Etant donnée une forme $\omega = \eta + dr \wedge \phi$ dans $\Omega^k(cL - \{s\})$, on pose pour tout $r_0 > 0$:

$$\mathcal{K}_{r_0}(\omega) = \int_{r_0}^{r} \phi dr.$$

Les propriétés reliant cet opérateur et la condition β-bornée sont résumées dans le lemme qui suit. Au cours de la démonstration, on désignera par C une constante convenablement adaptée.

LEMME 2.6. (i) *Si ω est β-bornée et $k \leq \frac{\beta}{c} + 1$, alors $\mathcal{K}_{r_0}\omega$ est β-bornée.*

(ii) *Si ω est β-bornée et $k > \frac{\beta - 1}{c} + 1$, alors l'intégrale $\mathcal{K}_0\omega = \int_0^r \phi d\rho$ converge et définit une forme différentielle β-bornée.*

(iii) *Si $\omega \in \Omega^k_\beta(cL)$ et $k \leq \frac{\beta}{c}$, alors $d\mathcal{K}_{r_0}\omega$ est β-bornée.*

(iv) *Si $\omega \in \Omega^k_\beta(cL)$ et $k > \sup\left(\frac{\beta - 1}{c} + 1, \frac{\beta}{c}\right)$, $d\mathcal{K}_0\omega$ est β-bornée.*

DÉMONSTRATION. La partie (i) résulte du Lemme 2.2 partie (ii), où on pose $\gamma' = \gamma = \beta - (k-1)c \geq 0$ et (ii) résulte du même lemme, partie (iii), avec $\gamma = \beta - (k-1)c < 1$.

Démontrons (iii). On a:

$$d\mathcal{K}_{r_0}\omega = dr \wedge \phi + \int_{r_0}^{r} d_x \phi d\rho$$

où $d_x\phi$ est la différentielle extérieure relative au link L. Comme ϕ est β-bornée, il en est de même, par définition, de la forme $dr \wedge \phi$. Comme

$$d\omega = d_x\eta + dr \wedge \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} - d_x\phi\right)$$

est β-bornée, il en est de même de la k-forme $h = \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} - d_x\phi\right)$. D'après (i), si k vérifie $k + 1 \leq \frac{\beta}{c} + 1$, la k-forme $\int_{r_0}^{r} h d\rho$ est β-bornée.

D'autre part la k-forme $\int_{r_0}^{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} d\rho = \eta(r) - \eta(r_0)$ est β-bornée, puisque η l'est par hypothèse et, puisque les coefficients de $\eta(r_0)$, qui sont indépendants de r, sont dominés par $Cr^{kc-\beta}$ au voisinage de $r = 0$ (on a $kc - \beta \leq 0$). Par différence $\int_{r_0}^{r} d_x\phi d\rho$ est β-bornée.

Pour démontrer (iv), il suffit de remplacer r_0 par 0 dans la démonstration précédente avec les conditions suivantes:

$$\int_0^r h d\rho \text{ est } \beta\text{-bornée pour } k > \frac{\beta - 1}{c} + 1 \text{ (d'après (ii));}$$

$$\int_0^r \frac{\partial \eta}{\partial r} d\rho = \eta(r) \text{ est } \beta\text{-bornée pour } k > \frac{\beta}{c}$$

(ici, pour cette condition, on a $\eta(r_0) \to 0$). □

PROPOSITION 2.7. *Pour tous $\beta \geq 0$ et $c \geq 0$, on a:*

a) *Si $k \leq \frac{\beta}{c}$ (ou pour tout k si $c = 0$), toute k-forme fermée et β-bornée du cône est cohomologue, dans $\Omega^\bullet_\beta$, à l'extension d'une forme du link.*

b) *Si $k > \sup\left(\frac{\beta - 1}{c} + 1, \frac{\beta}{c}\right)$, toute k-forme fermée et β-bornée du cône est cohomologue à 0.*

DÉMONSTRATION. a) Dans $\Omega^\bullet(cL - \{s\})$, on a:

$$(\mathcal{K}_{r_0} d + d\mathcal{K}_{r_0})\omega = \omega - \omega(r_0).$$

Si maintenant $\omega \in \Omega^k_\beta(cL)$, avec $k \leq \frac{\beta}{c}$, alors dans la formule précédente, $\mathcal{K}_{r_0}(\omega) \in \Omega^{k+1}_\beta(cL)$, d'après (i) du Lemme 2.6, et, d'après (iii) du même Lemme, il en est de même de $d\mathcal{K}_{r_0}(\omega)$. Donc la k-forme $\omega(r_0)$, dont les coefficients constants en r sont dans $C^\infty_{\beta - kc}(cL)$ (puisque les constantes sont majorées par C $r^{kc-\beta}$ au voisinage de 0) est dans $\Omega^k_\beta(cL)$. Il en résulte que si la forme ω est un cocycle de $\Omega^\bullet_\beta(cL)$, il est cohomologue, dans $\Omega^\bullet_\beta(cL)$, à $\omega(r_0)$.

b) Supposons maintenant $k > \sup\left(\frac{\beta - 1}{c} + 1, \frac{\beta}{c}\right)$ et faisons tendre r_0 vers 0 dans l'expression $(\mathcal{K}_{r_0} d + d\mathcal{K}_{r_0})\omega = \omega - \omega(r_0)$. Alors on a les convergences suivantes:

$\mathcal{K}_{r_0}(d\omega) \to \mathcal{K}_0(d\omega)$ d'après (ii) du Lemme 2.6 (ici $k > \frac{\beta - 1}{c}$ suffit);

$\mathcal{K}_{r_0}(\omega) \to \mathcal{K}_0(\omega)$ dans $\Omega^\bullet(cL - \{s\})$ d'après le Lemme 2.2(iii), donc $d\mathcal{K}_{r_0}(\omega) \to d\mathcal{K}_0(\omega)$;

$\omega(r_0) \to 0$ car les coefficients sont majorés par $Cr_0^{kc-\beta}$ et $kc - \beta > 0$.

On en déduit la relation $(\mathcal{K}_0 d + d\mathcal{K}_0)\omega = \omega$ dans laquelle $\mathcal{K}_0(\omega)$ et $d\mathcal{K}_0(\omega)$ sont dans $\Omega^\bullet_\beta(cL)$ ceci respectivement d'après (ii) et (iv) du Lemme 2.6. Ensuite, on continue la preuve comme dans la partie a). □

3. - Globalisation

Rappels sur les faisceaux pervers

Soit X une pseudovariété munie d'une stratification. Les complexes de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet$ tels que les groupes d'hypercohomologie $\mathbb{H}_c^j(X;\mathcal{F}^\bullet)$ soient égaux aux groupes d'homologie d'intersection de X sont caractérisés par divers systèmes d'axiomes. Nous utiliserons ici les axiomes des faisceaux pervers $(AX_1)_{\bar{p}}$, énoncés dans [GM2, §3.3] et [Bo, §V.2.3], et nous les rappelons dans ce paragraphe.

On notera $\mathcal{E}$ un système local sur $U_2 = X - X_{n-2}$, pouvant éventuellement être le faisceau constant $\mathbb{R}_{U_2}$ ou $\mathbb{C}_{U_2}$.

Pour tout élément X_{n-j} de la filtration de X, on pose:

$$U_j = X - X_{n-j} \quad (2 \le j \le n+1);$$

on a: $U_{j+1} = U_j \cup S_{n-j}$. L'inclusion naturelle $U_j \hookrightarrow U_{j+1}$ est notée i_j.

Application d'attachement: Soit F un sous-espace fermé de X et soit i l'inclusion de $U = X - F$ dans X. Si $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe de faisceaux sur X, la composition des morphismes naturels:

$$\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\mu} R i_* i^* \mathcal{F}^\bullet$$

est appelée application d'attachement. C'est un quasi-isomorphisme pour tout x dans U. Remarquons que, si $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe de faisceaux mous, μ est un quasi-isomorphisme, pour tout x de X.

Axiomes des faisceaux pervers pour la perversité $\bar{q}$:

(1a) $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe borné, $\mathcal{F}^k = 0$ si $k < 0$, et $\mathcal{F}^\bullet_{U_2} = \mathcal{E}$;

(1b) Pour tout x de S_{n-j}, on a $H^k(\mathcal{F}^\bullet_x) = 0$ si $k > q_j$ $(j = 2, \dots, n)$;

(1c) L'application d'attachement $\mathcal{F}^k|_{U_{j+1}} \to R i_{j*} \mathcal{F}^k|_{U_j}$ est un quasi-isomorphisme, pour $k \le q_j$.

Borel [Bo, §V.3] fait remarquer que la condition de constructibilité, présente dans le système d'axiomes de [GM2], est en fait une conséquence des axiomes précédents.

THÉORÈME 3.1 ([GM2, §3.5]). *Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un complexe de faisceaux fins (ou mous) sur X satisfaisant les axiomes des faisceaux pervers pour la perversité $\bar{q}$, alors les groupes de cohomologie du complexe*

$$\dots \to \Gamma(X;\mathcal{F}^{k-1}) \to \Gamma(X;\mathcal{F}^k) \to \Gamma(X;\mathcal{F}^{k+1}) \to \dots$$

i.e. les groupes d'hypercohomologie $\mathbb{H}_c^k(X;\mathcal{F}^\bullet)$, sont isomorphes à $\mathrm{Hom}(IH_k^{\bar{p}}(X);\mathbb{R})$ *pour la perversité complémentaire $\bar{p}$ (c'est-à-dire $p_j + q_j = j-2$ pour $j \ge 2$).*

Complexe des formes différentielles bornées

On considère maintenant une pseudovariété X munie d'une *stratification de Thom-Mather*, c'est-à-dire une stratification comme en formule (1), dont toutes les strates $S_i = X_i - X_{i-1}$ sont des variétés $\mathcal{C}^\infty$ et telle que, pour chaque strate S_i, il existe

- un voisinage ouvert T_i de X_i dans X,
- une retraction continue (et $\mathcal{C}^\infty$ sur la partie régulière) π_i de T_i sur X_i,
- une fonction continue (et $\mathcal{C}^\infty$ sur la partie régulière) $\rho_i : T_i \to [0, \infty[$,

tels que $X_i = \{x \in T_i | \rho_i(x) = 0\}$ et les (T_i, π_i, ρ_i) satisfont les axiomes (A8) et (A9) de [Ma]. En particulier, si $X_i \subset \bar{X}_j$, l'application

$$(\pi_i, \rho_i)|_{T_i \cap X_j} : T_i \cap X_j \to X_i \times]0, \infty[$$

est une submersion $\mathcal{C}^\infty$. D'autre part, en posant $T_{i,j} = T_i \cap X_j$, $\pi_{i,j} = \pi_i|_{T_{i,j}}$ et $\rho_{i,j} = \rho_i|_{T_{i,j}}$, on a pour tout triple (X_i, X_j, X_k)

$$\pi_{i,j} \circ \pi_{i,k} = \pi_{i,k} \text{ et } \rho_{i,j} \circ \pi_{j,k} = \rho_{i,k}$$

lorsque les deux membres de cés equations sont définis.

Nous avons déjà étudié les conditions de croissance sur un cône, nous les globaliserons dans ce qui suit. On se donne deux suites de réels positifs (quelconques, pour l'instant), notées $\bar{\beta} = (\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ et $\bar{c} = (c_2, c_3, \ldots, c_n)$, chaque couple (β_j, c_j) étant lié à la strate S_{n-j}. On se propose de définir sur X un complexe de faisceaux de formes différentielles $\Omega^\bullet_{\bar{\beta}}$, dépendant des suites $\bar{\beta}$ et $\bar{c}$. Au voisinage d'une strate S_{n-j}, nous ne retiendrons que les formes différentielles dont le comportement asymptotique, lorsqu'on s'approche de la dite strate, est contrôlé par une puissance de la distance à cette strate. Cette puissance est fonction de β_j et c_j.

On se donne d'abord un atlas (localement fini) de X constitué d'ouverts distingués $W_{j,\alpha}$, munis de cartes locales fixées $W_{j,\alpha} \cong B^{n-j} \times c(L_{j-1})$ où B^{n-j} est une boule domaine de définition d'une carte locale de la strate S_{n-j} ([GM2]).

A toute suite décroissante d'entiers $j_0 = n + 1 > j_1 = j > j_2 > \cdots > j_l > j_{l+1} = 0$, correspond une chaîne d'éléments de la filtration de X:

$$\emptyset = X_{n-j_0} \subset X_{n-j_1} = X_{n-j} \subset X_{n-j_2} \subset \cdots \subset X_{n-j_l} \subset X = X_n = X_{n-j_{l+1}}$$

Celle-ci induit une filtration des links successifs, décrite de la façon suivante: l'ouvert distingué $W_{j,\alpha}$ est homéomorphe à $B^{n-j} \times c(L_{j-1})$, où le link L_{j-1}, comme variété singulière, est lui-même recouvert par des ouverts distingués. Ceux-ci sont les traces sur L_{j-1} des ouverts distingués qui correspondent aux strates intervenant dans la chaîne de la filtration précédente. On obtient ainsi un recouvrement de $W_{j,\alpha}$ par des ouverts homéomorphes à

$$B^{n-j_1} \times c(B^{j_1-1-j_2} \times c(B^{j_2-1-j_3} \times \cdots \times c(B^{j_l-1}) \cdots)).$$

On a donc une famille d'ouverts $W_{\alpha_{j_0},\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}$ tels que

$$\begin{aligned}B^{n-j_1}_{\alpha_{j_0}} \times c(L_{j_1-1}) &\supset B^{n-j_1}_{\alpha_{j_0}} \times c(B^{j_1-1-j_2}_{\alpha_{j_1}} \times c(L_{j_2-1})) \supset \cdots \\ &\supset B^{n-j_1}_{\alpha_{j_0}} \times c(B^{j_1-1-j_2}_{\alpha_{j_1}} \times c(B^{j_2-1-j_3}_{\alpha_{j_2}} \times \cdots \times c(B^{j_l-1}_{\alpha_{j_l}})\cdots)) \\ &\cong W_{\alpha_{j_0},\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}\end{aligned}$$

où $B^{n-j_1}_{\alpha_{j_0}}$ est une boule de S_{n-j_1}, $B^{j_1-1-j_2}_{\alpha_{j_1}}$ est une boule de $S_{n-j_2} \cap L_{j_1-1}$ (strate de dimension $j_1 - 1 - j_2$ de L_{j_1-1}), etc... Avec cette convention,

$$W_{\alpha_{j_0},\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}} \cong B^{n-j_1}_{\alpha_{j_0}} \times c(W_{\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}).$$

On notera W_X et on appellera *atlas distingué* de X, l'atlas de X constitué des ouverts $W_{\alpha_{j_0},\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}$ (comparer avec les Σ-cartes de [Fe]).

De façon générale, pour $t = 0, \dots, l$, nous noterons $u^t_{a_t}$ les coordonnées de $B^{j_t-1-j_{t+1}}_{\alpha_{j_t}}$ et $x^t_{i_t} = (u^t_{a_t}, r_{j_{t+1}}, u^{t+1}_{a_{t+1}}, \cdots, r_{j_l}, u^l_{a_l})$ les coordonnées de

$$B^{j_t-1-j_{t+1}}_{\alpha_{j_t}} \times]0,1[\times B^{j_{t+1}-1-j_{t+2}}_{\alpha_{j_{t+1}}} \times \cdots \times]0,1[\times B^{j_l-1}_{\alpha_{j_l}}$$

donc de $B^{j_t-1-j_{t+1}}_{\alpha_{j_t}} \times c(B^{j_{t+1}-1-j_{t+2}}_{\alpha_{j_{t+1}}} \times \cdots \times c(B^{j_l-1}_{\alpha_{j_l}})\cdots)$ (voir Figure 1).

Remarquons que, dans l'ouvert $W_{\alpha_{j_0},\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}$, on a l coordonnées du type r_{j_t} et donc $n - l$ coordonnées du type $u^t_{a_t}$. Notons V l'ouvert de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n-l}$ décrit par ces dernières coordonnées et $u \in V$. On définit une famille de semi-normes sur les ouverts $W_{\alpha_{j_0},\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}$, en posant, pour $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$, $\bar{s} = (s_1, \dots, s_l)$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-l})$ et pour toute fonction f définie sur $X - \Sigma$,

$$\begin{aligned}&q_{\bar{\gamma}}(W_{\alpha_{j_0},\dots,\alpha_{j_l}}, \bar{s}, \lambda)(f) \\ &= \sup_{(r_{j_1},\dots,r_{j_l},u)\in(]0,1[)^l\times V} (r_{j_1})^{\gamma_1}(r_{j_l})^{\gamma_l} \left| \frac{\partial^{s_1+\cdots+s_l+|\lambda|} f(r_{j_1}, \dots, r_{j_l}, u)}{\partial(r_{j_1})^{s_1}\cdots\partial(r_{j_l})^{s_l}(\partial u^0_1)^{\lambda_1}\cdots(\partial u^l_{j_l-1})^{\lambda_{n-l}}} \right|.\end{aligned}$$

DÉFINITIONS 3.2. i) *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(X - \Sigma)$ est $\bar{\gamma}$-bornée si pour tous $W_{\alpha_{j_0},\dots,\alpha_{j_l}}$, $\bar{s}$ et λ, on a*

$$q_{\bar{\gamma}}(W_{\alpha_{j_0},\dots,\alpha_{j_l}}, \bar{s}, \lambda)(f) < \infty.$$

ii) *Considérons une forme différentielle ω sur $X - \Sigma$, qui dans $W_{\alpha_{j_0},\dots,\alpha_{j_l}}$ est une somme de termes de la forme*

$$a(r_{j_1}, \dots, r_{j_l}, u)dx_{h_1} \wedge \cdots \wedge dx_{h_k}$$

où les x_h parcourent toutes *les coordonnées de $W_{\alpha_{j_0},\dots,\alpha_{j_l}}$, et dans lesquels, pour chaque $t = 0, \dots, l$, apparaissent k_t termes différentiels du type $dx^t_{i_t}$. On dit que*

ω est $\bar\beta$-bornée si, en posant $\gamma_t = \beta_{j_t} + s_t - k_t c_{j_t}$, pour $t = 0, \ldots, l$, les coefficients a sont $\bar\gamma$-bornés.

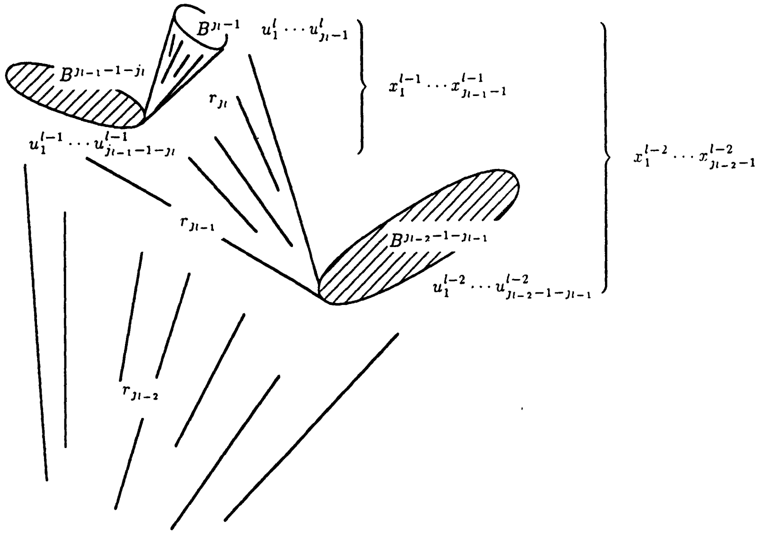


Fig. 1 - *Les coordonnées*

Cela veut donc dire que, pour $W_{\alpha_{j_0},\ldots,\alpha_{j_l}}$, $\bar s$ et λ, le *sup* pour $(r_{j_1}, \ldots, r_{j_l}, u) \in (]0,1[)^l \times V$ de

$$(r_{j_1})^{\beta_{j_1}+s_1-k_1c_{j_1}} \ldots (r_{j_l})^{\beta_{j_l}+s_l-k_lc_{j_l}} \left| \frac{\partial^{s_1+\cdots+s_l+|\lambda|} a(r_{j_1}, \ldots, r_{j_l}, u)}{\partial(r_{j_1})^{s_1} \cdots \partial(r_{j_l})^{s_l} (\partial u_1^0)^{\lambda_1} \cdots (\partial u_{j_l-1}^l)^{\lambda_{n-l}}} \right|$$

est fini.

REMARQUE 3.3 (Croissance en norme des formes $\bar\beta$-bornées pour une métrique de type conique). Si L est une variété riemannienne munie d'une métrique g, on définit une métrique sur le cône cL de la façon suivante:

$$\mu = dr^2 + r^{2c} g$$

On note $\|\ \|_\mu$ la norme correspondante. Soit une k-forme

$$\omega = a\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + b\ dr \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{k-1}}$$

où a et b sont des fonctions C^∞ de r et de x. On a:

$$\|\omega\|_\mu^2 = \frac{1}{r^{2kc}} (|a|^2 + r^{2c}|b|^2).$$

Sur le cône, une forme β-bornée vérifie donc

$$\sup_{cL-\{s\}} r^{\beta}||\omega||_{\mu} < \infty \text{ et } \sup_{cL-\{s\}} r^{\beta}||d\omega||_{\mu} < \infty.$$

De façon générale, sur les ouverts $W_{\alpha_{j_0},\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}$ d'une variété stratifiée X, on définit une métrique $\mu_{\alpha_{j_0},\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}$ par récurrence en posant

$$\mu_{\alpha_{j_0},\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}} = (du_1^0)^2 + \cdots + (du_{n-j_1}^0)^2 + (dr_{j_1})^2 + (r_{j_1})^{2c_{j_1}}\mu_{\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}.$$

On note $|| \; ||_{\mu}$ la semi-norme correspondante sur les formes différentielles définies sur $X-\Sigma$. De même que dans le cas du cône, une forme $\bar{\beta}$-bornée sur la variété X vérifie la relation

$$\sup_{(r_{j_1},r_{j_2},\dots,r_{j_l})\in(]0,1[)^l} (r_{j_1})^{\beta_{j_1}}(r_{j_2})^{\beta_{j_2}}\cdots(r_{j_l})^{\beta_{j_l}}||\omega||_{\mu} < \infty \tag{3}$$

et la même relation pour $d\omega$.

On définit, sur la variété X, le préfaisceau des formes différentielles bornées, de la façon suivante: pour tout ouvert V on considère

$$\Omega^k_{\bar{\beta}}(V) = \{\omega \in \Omega^k((X-\Sigma)\cap V): \text{ pour tout } W_{\alpha_{j_0},\dots,\alpha_{j_l}},$$
$$\omega \text{ et } d\omega \text{ sont } \beta\text{- bornées dans } W_{\alpha_{j_0},\dots,\alpha_{j_l}}\cap V\}$$

PROPOSITION 3.4. *La donnée $V \to \Omega^{\bullet}_{\bar{\beta}}(V)$ définit un complexe de faisceaux mous sur X, noté $\Omega^{\bullet}_{\bar{\beta}}$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que, sous les hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés, Verona ([Ve2, p. 8]) a construit une partition de l'unité composée de fonctions "contrôlées", c'est-à-dire ne dépendant pas, au voisinage des strates singulières, de la fonction distance à ces strates. On remarque que pour tout $\bar{\gamma}$, l'espace des fonctions $\bar{\gamma}$-bornées et l'espace des sections de $\Omega^{\bullet}_{\bar{\beta}}$ sont des modules sur l'algèbre des fonctions contrôlées de Verona.

Soit maintenant F un fermé de X, montrons que $\Gamma(X;\Omega^{\bullet}_{\bar{\beta}}) \to \Gamma(F;\Omega^{\bullet}_{\bar{\beta}})$ est surjective. Soit $\omega \in \Gamma(F;\Omega^{\bullet}_{\bar{\beta}})$, il existe un voisinage ouvert U de F et une section de $\Omega^{\bullet}_{\bar{\beta}}$ au dessus de U, dont la restriction à F est égale à ω. On la note encore ω. En utilisant une partition de l'unité au dessus de F et subordonnée à U, par des fonctions contrôlées de Verona, on construit une forme $\tilde{\omega}$ dont la restriction à F est égale à ω, nulle sur $X-U$, et qui appartient à $\Gamma(X;\Omega^{\bullet}_{\bar{\beta}})$.

THÉORÈME 3.5. *Soit X une pseudovariété munie d'une stratification de Thom-Mather. Supposons que l'on ait choisi des suites $\bar{\beta}$ et $\bar{c}$ vérifiant les relations:*

$$\left[\frac{\beta_j}{c_j}\right] \leq \left[\frac{\beta_{j+1}}{c_{j+1}}\right] \leq \left[\frac{\beta_j}{c_j}\right] + 1 \tag{4a}$$

et, si $c_j > 1$,

(4b)
$$0 \leq \frac{\beta_j}{c_j} - \left[\frac{\beta_j}{c_j}\right] < \frac{1}{c_j}.$$

Alors on a, pour tout k,

$$H^k(\Omega^\bullet_{\bar\beta}(X)) \cong \mathrm{Hom}(IH^{\bar p}_k(X); \mathbb{R})$$

où la perversité $\bar p$ *est définie par:*

$$p_j = j - 2 - \left[\frac{\beta_j}{c_j}\right].$$

Les conditions (4a) signifient que la suite $q_j = \left[\frac{\beta_j}{c_j}\right]$ est une perversité $\bar q$.

REMARQUE 3.6. La Remarque 2.5 se globalise de façon évidente à la situation du théorème 3.5.

La démonstration du théorème se fait en trois étapes: on étend d'abord le lemme de Poincaré (Théorème 2.4) dans le cas où le link est singulier, on montre ensuite un isomorphisme de Künneth pour les complexes de formes différentielles bornées, enfin on montre que, sous les hypothèses (4), $\Omega^\bullet_{\bar\beta}$ est un faisceau pervers.

LEMME (de Poincaré). Soit L une variété singulière stratifiée de dimension $j-1$ et W_L un atlas distingué de L. On considère un faisceau de formes différentielles $\Omega^\bullet_{\bar\beta}(L)$ associé à deux suites de réels positifs $\bar\beta = (\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{j-1})$ et $\bar c = (c_2, c_3, \ldots, c_{j-1})$ satisfaisant les conditions (4). On note cL le cône sur L muni de la stratification induite par celle de L et W_{cL} l'atlas distingué naturellement induit. On complète $\bar\beta$ et $\bar c$ par $\beta_j \geq 0$ et $c_j > 0$ tels que les conditions (4) soient toujours vérifiées. On a:

LEMME 3.7.

$$H^k(\Omega^\bullet_{\bar\beta}(cL)) = \begin{cases} H^k(\Omega^\bullet_{\bar\beta}(L)) & si\ k \leq \left[\frac{\beta_j}{c_j}\right], \\ 0 & si\ k > \left[\frac{\beta_j}{c_j}\right]. \end{cases}$$

La démonstration consiste à vérifier que, dans la démonstration du Théorème 2.4, les opérateurs d'homotopie (Lemme 2.6) sont ici à valeurs dans les formes de $\Omega^\bullet_{\bar\beta}(cL)$. Pour cela, on remarque d'abord que si $\omega = \eta + dr \wedge \phi$ est $\bar\beta$-bornée il en est de même de η et ϕ. D'autre part, un atlas distingué du cône comporte trois types d'ouverts rencontrant la partie singulière de cL:

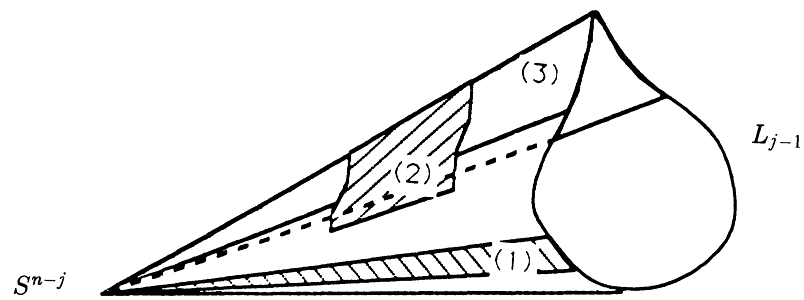


Fig. 2 - *Ouverts du cône de type:* (1) $W_{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2}} = W_{\alpha_j,\alpha_0}$; (2) $W_{\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}$, $j_1 \neq j$; (3) $W_{\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_l}}$, $j_1 = j$, $l > 2$.

(1) ouverts correspondant à des suites $j_1 = j$, $j_2 = 0$ (de longueur 1), c'est à dire cônes sur une boule régulière du link;

(2) ouverts tels que $j_1 < j$, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent pas le sommet du cône cL;

(3) ouverts tels que $j_1 = j$ mais de longueur plus grande que 1; ils sont cônes sur une partie singulière du link.

Pour les ouverts de type (1), le Lemme 3.7 est le Théorème 2.4. La méthode de démonstration de ce théorème se généralise aux ouverts de type (2) et (3). On remarque que l'intégration suivant la variable r ne modifie pas les majorations écrites suivant les autres rayons r_j des cônes contenus dans le link et que pour un ouvert de type (2), et pour l'opérateur d'homotopie $\mathcal{K}_0$ (Lemme 2.6), les majorations de la démonstration utilisent la propriété d'être $\bar{\beta}$-borné sur un ouvert de type (3) le contenant.

LEMME 3.8 (Formule de Künneth). *Soit L une pseudovariété stratifiée, on a:*

$$H^k(\Omega^\bullet_{\bar{\beta}}(B^i \times cL)) = H^k(\Omega^\bullet_{\bar{\beta}}(cL))$$

DÈMONSTRATION. On va le démontrer dans le cas particulier $i = 1$, le résultat général s'en déduit par récurrence.

Notons $\pi : B \times cL \to cL$ la projection sur le second facteur, et $s : cL \to B \times cL$ la section nulle. On va montrer que ces applications induisent des isomorphismes réciproques en cohomologie. Tout d'abord les applications induites

$$\pi^\bullet : \Omega^\bullet(cL - \Sigma) \to \Omega^\bullet(B \times (cL - \Sigma)) \text{ et } s^\bullet : \Omega^\bullet(B \times (cL - \Sigma)) \to \Omega^\bullet(cL - \Sigma)$$

induisent des applications

$$\pi^\bullet : \Omega^\bullet_{\bar\beta}(cL) \to \Omega^\bullet_{\bar\beta}(B \times cL) \text{ et } s^\bullet : \Omega^\bullet_{\bar\beta}(B \times cL) \to \Omega^\bullet_{\bar\beta}(cL).$$

Puisque $\pi \circ s = id$, il vient $s^\bullet \circ \pi^\bullet = id$, de même au niveau de la cohomologie. Pour montrer que $\pi^\bullet \circ s^\bullet = id$ au niveau de la cohomologie, on construit un opérateur d'homotopie K sur $\Omega^\bullet_{\bar\beta}(B \times cL)$ de la façon suivante: toute forme de $\Omega^k_{\bar\beta}(B \times cL)$ s'écrit de manière unique comme $\omega = \lambda + du \wedge \gamma$ où u est la coordonnée de B et où les formes différentielles λ et γ ne comportent pas de différentielle en u. On pose

$$K(\omega) = \int_0^u \gamma dv$$

Il est clair que K prend ses valeurs dans $\Omega^{k-1}_{\bar\beta}(B \times cL)$. D'autre part on vérifie aisément (voir par exemple [BT], démonstration de la Proposition 4.1) que $\pi^k \circ s^k - id = (-1)^k(dK - Kd)$. On en déduit le résultat.

PROPOSITION 3.9. *Sous les hypothèses* (4) *le complexe de faisceaux* $\Omega^\bullet_{\bar\beta}$ *est un faisceau pervers.*

DÉMONSTRATION. Sur $U_2 = X - X_{n-2}$, $\Omega^\bullet_{\bar\beta}$ est le faisceau des formes différentielles C^∞, donc $\Omega^\bullet_{\bar\beta}|_{U_2} = \mathbb{R}$, d'autre part, si $k < 0$, $\Omega^k_{\bar\beta} = 0$ d'où l'axiome (1a).

On a: $H^k(\Omega^\bullet_{\bar\beta})_x = \varinjlim_{U_x} H^k(\Omega^\bullet_{\bar\beta}(U_x \cap (X - X_{n-2})))$, où la limite est prise sur les voisinages distingués U_x du point x. Le Théorème 2.4 (calcul local) et le Lemme 3.7 montrent que l'on a, pour $x \in S_{n-j}$:

$$H^k(\Omega^\bullet_{\bar\beta}(U_x \cap (X - X_{n-2}))) = \begin{cases} H^k(\Omega^\bullet_{\bar\beta}(L_x \cap (X - X_{n-2}))) & \text{pour } k \le \left[\dfrac{\beta_j}{c_j}\right], \\ 0 & \text{pour } k > \left[\dfrac{\beta_j}{c_j}\right]. \end{cases}$$

En posant $q_j = \left[\dfrac{\beta_j}{c_j}\right]$, on a $H^k((\Omega^\bullet_{\bar\beta})_x) = 0$ pour $k > q_j$ ce qui est l'axiome (1b).

Démontrons (1c): Le complexe $\Omega^\bullet_{\bar\beta}$ est un complexe de faisceaux mous, donc on a un quasi-isomorphisme (voir ci-dessus, application d'attachement):

$$\mu : i_{j*}i_j^*(\Omega^\bullet_{\bar\beta}|_{U_{j+1}}) \xrightarrow{\cong} Ri_{j*}i_j^*(\Omega^\bullet_{\bar\beta}|_{U_{j+1}}).$$

Une section ω de $\Omega^\bullet_{\bar\beta}|_{U_{j+1}}$ est une forme C^∞ définie sur $U_2 = X - X_{n-2}$ telle que ω et $d\omega$ satisfont les conditions de croissance au voisinage de tout point de U_{j+1}. De même, une section de $i_{j*}i_j^*(\Omega^\bullet_{\bar{\beta}}|_{U_{j+1}}) = i_{j*}(\Omega^\bullet_{\bar{\beta}}|_{U_j})$ est une forme $\mathcal{C}^\infty$ définie sur U_2 telle que ω et $d\omega$ satisfont les conditions de croissance au voisinage de tout point de U_j, mais non nécessairement au voisinage des points de S_{n-j}. (Rapelons que $U_{j+1} = U_j \cup S_{n-j}$). L'application d'attachement:

$$\Omega^\bullet_{\bar{\beta}}|_{U_{j+1}} \longrightarrow i_{j*}i_j^*(\Omega^\bullet_{\bar{\beta}}|_{U_{j+1}})$$

est donc induite par l'inclusion.

Pour $x \in S_{n-j}$, l'inclusion des fibres

$$\psi_x : \Omega^\bullet_{\bar{\beta},x} \to [i_{j*}i_j^*(\Omega^\bullet_{\bar{\beta}}|_{U_{j+1}})]_x$$

est un morphisme de complexes. On veut montrer que le morphisme induit en homologie $\bar{\psi}_x$ est un isomorphisme. Par abus de langage "section au-dessus d'un ouvert U de X" signifie "section au-dessus de $U - \Sigma \cap U$".

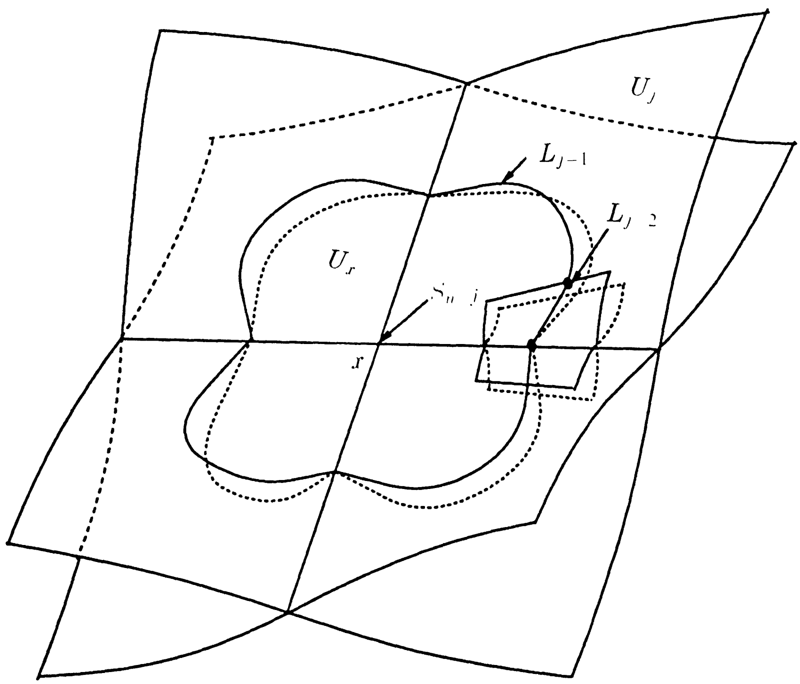


Fig. 3 - *Extension de sections. Ici on a* $B^{n-j} = S_{n-j} = \{x\}$, $U_{j+1} = U_j \cup S_{n-j}$, U_j = Surface $- \{x\}$, U_{j+1} = Surface entière.

Surjectivité de $\bar{\psi}_x$

Considérons $U_x \simeq B^{n-j} \times cL_{j-1}$ un voisinage distingué de $x \in S_{n-j}$ et notons $\partial U_x \simeq B^{n-j} \times L_{j-1}$ la partie de son bord correspondant à la base du cône. Soit ω une section de $i_{j*}i_j^*(\Omega^k_{\bar{\beta}}|_{U_{j+1}})$ au-dessus de U_x (forme différentielle fermée). Cette section vérifie les conditions de croissance au voisinage de U_j. Puisque $k \leq q_j$, pour tout point y de ∂U_x, il existe un voisinage U_y dans lequel ω satisfait les conditions de croissance (relativement aux strates S_α de U_j, c'est-à-dire telles que $S_{n-j} \subset \bar{S}_\alpha$). Notons ω_1 la restriction de ω à ∂U_x. D'après le Lemme 3.7, comme $q_j \leq q_{j+1}$, on peut étendre la forme ω_1 en une forme ω_2 sur $B^{n-j} \times cL_{j-1}$ qui satisfait aussi les conditions de croissance relativement à S_{n-j}, donc relativement à U_{j+1} et telle que les formes ω et ω_2 soient cohomologues.

Injectivité de $\bar{\psi}_x$

Soit $\tilde{\omega}$ une section de $\Omega^k_{\bar{\beta}}|_{U_{j+1}}$ telle que $\psi(\tilde{\omega}) = d\varphi$, où φ est une section de $i_{j*}i_j^*(\Omega^k_{\bar{\beta}}|_{U_{j+1}})$ au-dessus de U_j satisfaisant les conditions de croissance (pour q_j) au voisinage de U_j. D'après la surjectivité de $\bar{\psi}_x$ (ici degré $(\varphi) = k - 1 < q_j$) il existe $\tilde{\varphi}$ cohomologue à φ et satisfaisant les conditions de croissance (pour q_{j+1}) au voisinage de U_{j+1}, d'où $\tilde{\omega} = d\varphi = d\tilde{\varphi}$ est cohomologue à zéro. □

4. - Relation avec le complexe des formes ombre

Dans le cas où $X = |K|$ est un polyèdre plongé dans un espace euclidien $[BGM]$ associent à chaque $(n-k)$-simplexe σ d'une subdivision barycentrique de la triangulation K de X une k-forme différentielle $\omega(\sigma)$ appelée *forme ombre*. Pour toute k-chaîne c l'intégrale $\int_c \omega(\sigma)$ est égale au volume d'une région qui correspond à l'ombre de la chaîne c dans K ([BGM, Proposition du §3]).

La convergence en norme de $\omega(\sigma)$ est liée au défaut de transversalité de σ par rapport aux faces de K, de la façon suivante: considérons la stratification de X définie par les squelettes de K, la forme $\omega(\sigma)$ est dans $\mathcal{L}^q$ si et seulement si le simplexe σ est admissible pour toute perversité $\bar{p}$ telle que $p_j < j/q$ pour tout j.

Etant donné le simplexe standard Δ^n, on rappelle que si ω est dans $\mathcal{L}^q(\Delta^n)$, alors, en notant $\omega \wedge *\omega = \|\omega\|^2 d\,\mathrm{vol}(\Delta^n)$, on a $\|\omega\|_\mu \in \mathcal{L}^q(\Delta^n)$. Ici $c = 1$, et $\|\omega\|_\mu$ est la norme définie dans la Remarque 3.3.

De la démonstration du Théorème 2 de [BGM] nous allons déduire le résultat suivant:

PROPOSITION 4.1. *Soit σ un $(n-k)$-simplexe de la subdivision barycentrique du simplexe standard Δ^n et F une face de Δ^n de codimension j. Si β est le défaut de transversalité de σ par rapport à F, (i.e.* $\dim(\sigma \cap F) = (n-k) - j + \beta$), *alors la face F est un pôle d'ordre β pour la forme $\omega(\sigma)$. Les formes $\omega(\sigma)$ et $d\omega(\sigma)$ vérifient donc la relation* (3).

DÉMONSTRATION. Notons de la même manière (x_i), $i = 1, \dots, n+1$ les sommets de Δ^n et les coordonnées barycentriques relatives à ces sommets. Tout $(h-1) = (n-k)$- simplexe σ d'une subdivision barycentrique de Δ^n peut s'écrire sous la forme

$$\sigma = (x_{i_0}, \dots, x_{i_1 - 1})(x_{i_1}, \dots, x_{i_2 - 1}) \dots (x_{i_{h-1}}, \dots, x_{i_h - 1})$$

où les sommets de σ sont les barycentres des faces incidentes

$$(x_{i_0}, \dots, x_{i_1-1}) < (x_{i_0}, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_2-1}) < \dots < (x_{i_0}, \dots, x_{i_1}, \dots x_{i_h-1})$$

On montre ([BGM, Proposition du §6]) que l'on peut se restreindre aux simplexes σ dont le dernier sommet est le barycentre de Δ^n, donc tels que tous les sommets de Δ^n apparaissent dans la description de σ. La forme ombre $\omega(\sigma)$ se décrit explicitement comme suit: pour toute face $(x_1, \dots, x_m)$ de Δ^n, notons

$$W(x_1, \dots, x_m) = m! \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{\lambda-1} x_\lambda dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_\lambda} \wedge \dots \wedge dx_m$$

la forme de Whitney définie dans Δ^n et relative à cette face. On pose

$$\omega(\sigma) = \Psi_\sigma(x_{i_0}, \dots, x_{i_h-1}) \frac{W(x_{i_0}, \dots, x_{i_1-1})}{(x_{i_0} + \dots + x_{i_1-1})^{s_1}} \wedge \dots \wedge \frac{W(x_{i_{h-1}}, \dots, x_{i_h-1})}{(x_{i_{h-1}} + \dots + x_{i_h-1})^{s_h}}$$

où $s_\lambda = \mathrm{card}(x_{i_{\lambda-1}}, \dots, x_{i_\lambda - 1})$ et Ψ_σ est la fonction notée $\Phi(v_1, \dots, v_h, s_1, \dots, s_h)$ dans [BGM] avec $v_\lambda = x_{i_{\lambda-1}} + \dots + x_{i_\lambda-1}$. On a $n+1 = \sum_{\lambda=1}^{h} s_\lambda$.

La démonstration du Théorème 2 de [BGM] montre que $\omega(\sigma)$ est dans $\mathcal{L}^q$ si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$\begin{array}{ll}
(h) & s_h - 1 < (s_h)/q \\
(h-1) & s_{h-1} + s_h - 2 < (s_{h-1} + s_h)/q \\
\dots & \dots \\
(\lambda) & s_\lambda + \dots + s_h - (h - \lambda + 1) < (s_\lambda + \dots + s_h)/q \\
\dots & \dots \\
(2) & n + 1 - s_1 - (h-1) < (n + 1 - s_1)/q
\end{array}$$

En fait, chacune de ces conditions est relative à une face déterminée de Δ^n. Plus précisément, considérons la face $F_\lambda = (x_{i_0}, \dots, x_{i_{\lambda-1}-1})$ de codimension $j = s_\lambda + \dots + s_h$. La forme $\omega(\sigma)$ est dans $\mathcal{L}^{q_j}$ au voisinage de F_λ si et seulement si la relation (λ) est vérifiée, pour $q = q_j$. On sait que l'on a $q_j < j/\beta_j$ où la face F_λ est un pôle d'ordre β_j pour la forme $\omega(\sigma)$. Parmi les faces F de Δ^n de codimension j donnée, la face F_λ est celle qui rencontre σ avec la dimension la plus grande, et donc qui porte le plus grand ordre de pôle, d'où le résultat. $\square$

PROPOSITION 4.2. *Le complexe des formes ombre est un sous-complexe quasi-isomorphe au complexe des formes $\bar{\beta}$-bornées, pour la perversité $\bar{\beta}$.*

DÉMONSTRATION. Les formes ombres ont des coefficients analytiques en dehors de leurs pôles. Pour de telles fonctions, les conditions imposées sur les dérivées dans la Définition 2.1 sont surabondantes. On en déduit que les formes ombres sont dans $\Omega^\bullet_{\bar{\beta}}$. Comme le complexe des formes ombre et le complexe des formes $\bar{\beta}$-bornées ont même cohomologie, on obtient le résultat. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] A. BOREL et al., *Intersection Cohomology.* Progress in Math. vol. 50, Birkhäuser, Boston, 1984.

[BT] R. BOTT - L.W. TU, *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics 82, Springer-Verlag Heidelberg, 1982.

[BGM] J.P. BRASSELET - M. GORESKY - B. MACPHERSON, *Simplicial Differential Forms with Poles.* Amer. J. Math. **113** (1991), 1019-1052.

[Bry] J.L. BRYLINSKI, *Equivariant Intersection Cohomology.* Contemp. Math. **139** (1992), 5-32. (Première version: Prépublication de l'IHES, Juin 1986.)

[Ch] J. CHEEGER, *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds.* Proc. Sympos. Pure Math. **36** (1980), 91-146. Amer. Math. Soc., Providence RI.

[CGM] J. CHEEGER - M. GORESKY - R. MACPHERSON, *$\mathcal{L}^2$-cohomology and intersection cohomology for singular varieties.* Seminar on Differential Geometry, S.T. Yau ed., Ann. of Math. Stud., Princeton Univ. Press, Princeton NJ, **102** (1982), 303-340.

[Fe] M. FERRAROTTI, *A complex of stratified forms satisfying De Rham's theorem.* Preprint, Universitá di Pisa, 1991. To appear in Hawaii-Provence Singularities Proceedings. Travaux en Cours, Hermann, Paris.

[GM1] M. GORESKY - R. MACPHERSON, *Intersection homology theory.* Topology **19** (1980), 135-162.

[GM2] M. GORESKY - R. MACPHERSON, *Intersection homology theory II.* Invent. Math. **71** (1983), 77-129.

[Gr] A. GROTHENDIECK, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties.* Publ. Math. I.H.E.S. **29** (1966), 95-105.

[Ha] R. HARTSHORNE, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties.* Publ. Math. I.H.E.S. **45** (1975), 6-99.

[Ma] J. MATHER, *Notes on topological stability.* Harvard University, 1970.

[Na] M. NAGASE, *Sheaf theoretic $\mathcal{L}^2$-cohomology.* Adv.Stud.Pure Math. **8** (1987), 273-279, North Holland.

[Sa] N. SASAKURA, *Cohomology with polynomial growth and completion theory.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **17** (1981), 371-552.

[Ve1] A. VERONA, *Le théorème de De Rham pour les préstratifications abstraites.* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **273** (1971), 886-889.

[Ve2] A. VERONA, *Stratified mappings - Structure and Triangulability.* Lecture Notes in Math. 1120, Springer Verlag Heidelberg, 1984.

[Yo] B. YOUSSIN, *$\mathcal{L}^p$-cohomology of cones and horns.* Preprint September 1992, M.I.T.

Equipe CNRS SiGmA
CIRM Luminy
Case 916
13288 Marseille Cedex 9
France

URA CNRS 1408
Université Paul Sabatier
118 Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
France