Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Jean-Pierre Vigué

Sur la caractérisation des isomorphismes analytiques entre domaines bornés d'un espace de Banach complexe

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 21, nº 1 (1994), p. 145-155

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1994_4_21_1_145_0>

Sur la caractérisation des isomorphismes analytiques entre domaines bornés d'un espace de Banach complexe

JEAN-PIERRE VIGUÉ

1. - Introduction

Ces dernières années, beaucoup d'efforts ont été faits pour caractériser un isomorphisme f d'un domaine borné D_1 de $\mathbb{C}^n$ sur un domaine borné D_2 de $\mathbb{C}^n$ comme une application holomorphe $f : D_1 \to D_2$ qui est une isométrie pour une métrique infinitésimale bien choisie en un point. Ces résultats s'appuient en général sur l'égalité des distances de Carathéodory et de Kobayashi sur un domaine convexe borné (voir H. Royden and P. Wong [10] et L. Lempert [9]), et sur la notion de géodésique complexe introduite par E. Vesentini [13, 14 et 15]. On est donc amené à supposer que l'un des domaines D_1 ou D_2 est convexe. Si on suppose D_1 convexe, il est naturel de supposer que f est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory (voir J.-P. Vigué [17]); en revanche, dans le cas où on suppose D_2 convexe, il faut supposer que f est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Kobayashi (voir J.-P. Vigué [18], S. Venturini [12], I. Graham [5] et L. Belkhchicha [1]). Il est intéressant de remarquer que la démonstration de L. Belkhchicha utilise aussi la distance de Carathéodory et montre comme résultat préliminaire que f est une isométrie pour la distance de Carathéodory.

En dimension infinie, nous n'avons pas, jusqu'à ce jour, de résultats aussi complets. On peut citer le résultat de L. Harris et J.-P. Vigué [7], mais sous une hypothèse très forte (on suppose en particulier que f est une isométrie pour la distance de Carathéodory de D_1 dans D_2), et aussi un résultat partiel de S. Dineen, R. Timoney et J.-P. Vigué [3] dans lequel on montre seulement que l'application f est bijective. Le résultat que nous allons démontrer maintenant complète, par exemple dans le cas de la boule-unité ouverte strictement convexe d'un espace de Banach réflexif, leur résultat.

Dans cet article, nous considérons le dual topologique E d'un espace de Banach complexe E_0. Soit D un domaine borné de E. Nous serons amené à considérer les hypothèses suivantes:

Pervenuto alla Redazione il 29 Marzo 1993 e in forma definitiva il 27 Settembre 1993.

(H_1) D est complet pour la distance intégrée de Carathéodory c^i_D.

(H_2) Soit $\varphi_n : \Delta \to D$ une suite d'applications holomorphes du disque-unité Δ dans D convergeant uniformément sur tout compact de Δ pour la topologie faible $\sigma(E, E_0)$ vers une application holomorphe $\varphi : \Delta \to E$. Alors, ou bien $\varphi(\Delta)$ est contenu dans la frontière de D, ou bien $\varphi(\Delta)$ est contenu dans D.

Remarquons qu'en dimension finie (H_2) signifie simplement que D est taut au sens de H. Wu [19], et que (H_1) entraîne (H_2).

L'hypothèse (H_1) est a priori plus faible que l'hypothèse d'être complet pour la distance de Carathéodory, et d'après L. Harris [6], l'hypothèse (H_1) est toujours satisfaite lorsque D est un domaine borné convexe de E. On déduit de [6] que (H_2) est vérifié dans les deux cas suivants:

(i) D est un domaine borné convexe de E, et il existe $a \in D$ et une famille σ_i de formes linéaires provenant de E_0 telles que:

$$D = \{z \in E | \operatorname{Re} \sigma_i(z - a) < 1\};$$

(ii) D est un domaine borné convexe d'un espace de Banach réflexif E.

Soit maintenant B la boule-unité ouverte de E. Nous considérons sur B l'hypothèse suivante:

(H_3) pour toute fonction $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$ bornée, continue sur $\overline{B}$, holomorphe sur B, on a:

$$\|f\|_{\operatorname{Ext}(\overline{B})} = \|f\|_{\overline{B}},$$

(où, par définition, $\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|$, et $\operatorname{Ext}(\overline{B})$ désigne l'ensemble des points complexe-extrémaux de $\overline{B}$).

L'hypothèse (H_3) est vérifiée pour tout domaine convexe borné de $\mathbb{C}^n$ (voir [1]). On déduit facilement du principe du maximum que, si B est telle que tous les points de la frontière de B soient des points complexe-extrémaux de $\overline{B}$, alors B vérifie (H_3). Nous montrerons d'autre part que la condition (H_3) est satisfaite dans le cas de la boule-unité ouverte B de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Pour l'instant, je ne sais pas si la condition (H_3) est satisfaite pour la boule-unité ouverte d'un espace de Banach réflexif E.

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. *Soit D un domaine borné du dual E d'un espace de Banach E_0 vérifiant les hypothèses* (H_1) *et* (H_2). *Soit B la boule-unité ouverte de E, et supposons que B vérifie* (H_3). *Soit a un point de D, et soit $f : D \to B$ une application holomorphe telle que $f(a) = 0$ et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour les métriques infinitésimales de Kobayashi $F_D(a, \cdot)$ et $F_B(0, \cdot)$. Alors f est une isomorphisme analytique de D sur B.*

Nous déduisons en particulier de ce résultat le corollaire suivant qui généralise à la dimension infinie un théorème de C. Stanton [11].

COROLLAIRE 1.2. *Soit D un domaine borné de l'espace de Banach complexe* $\ell^\infty(\mathbb{N})$ *qui satisfait aux hypothèses* (H_1) *et* (H_2). *Supposons qu'il existe un point a de D tel que les normes de Kobayashi $F_D(a,\cdot)$ et de Carathéodory $E_D(a,\cdot)$ coïncident. Supposons de plus que l'indicatrice*

$$\{x \in \ell^\infty(\mathbb{N}) | E_D(a,x) < 1\}$$

soit linéairement isomorphe à la boule-unité B de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. *Alors D est analytiquement isomorphe à B.*

Avant de démontrer les résultats annoncés, nous allons commencer par quelques rappels sur les distances de Carathéodory et de Kobayashi.

[Je remercie ma fille Anne, de l'aide qu'elle m'a apportée]

2. - Rappels et premières propriétés

Soit D un domaine borné du dual E d'un espace de Banach complexe E_0. Nous noterons c_D et k_D les distances de Carathéodory et de Kobayashi sur D. Les métriques infinitésimales de Carathéodory et de Kobayashi seront notées E_D et F_D. Par intégration de la métrique infinitésimale de Carathéodory E_D le long des chemins de classe C^1 par morceaux, on définit la distance intégrée de Carathéodory c_D^i, et on a:

$$c_D \leq c_D^i \leq k_D.$$

(Sur ces questions, on renvoie le lecteur aux livres de T. Franzoni et E. Vesentini [4] et de S. Dineen [2] et à l'article de S. Kobayashi [8]).

D'autre part, si D est convexe, on sait d'après H. Royden et P. Wong [10] et L. Lempert [9] que $c_D = k_D$ et que $E_D = F_D$.

Nous aurons besoin de la définition suivante.

DÉFINITION 2.1. *Soit $\varphi : \Delta \to D$ une application holomorphe. On dit que φ est une géodésique complexe pour la métrique infinitésimale de Kobayashi à l'origine si* $F_D(\varphi(0), \varphi'(0)) = 1$.

Nous avons alors le théorème d'existence suivant.

THÉORÈME 2.2. *Soit D un domaine borné vérifiant l'hypothèse* (H_2). *Soit a un point de D, et soit $v \in E$ tel que* $F_D(a,v) = 1$. *Alors il existe une géodésique complexe pour la métrique de Kobayashi à l'origine $\varphi : \Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0) = v$.*

DÉMONSTRATION. D'après la définition de la métrique infinitésimale de Kobayashi, il existe une suite φ_n d'applications holomorphes de Δ dans D

telles que $\varphi_n(0) = a$, $\varphi'_n(0) = (1 - 1/n)v$. On montre de manière tout à fait standard en utilisant le théorème de Montel que, selon un ultrafiltre $\mathcal{U}$, φ_n converge pour la topologie faible $\sigma(E, E_0)$ uniformément sur tout compact de Δ vers une application holomorphe φ. Il est clair que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0) = v$. D'après l'hypothèse (H_2), $\varphi(\Delta) \subset D$, et le théorème est démontré. □

Comme E. Vesentini [13, 14 et 15], on peut également définir les géodésiques complexes pour la distance de Carathéodory, et c'est ce que nous allons faire dans le théorème suivant.

THÉORÈME ET DÉFINITION 2.3. *Soit D un domaine borné de E, et soit $\varphi : \Delta \to D$ une application holomorphe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $E_D(\varphi(0), \varphi'(0)) = 1$;

(ii) *il existe deux points distincts α et β de Δ tels que*

$$c_D(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = c_\Delta(\alpha, \beta);$$

(iii) *pour tout $\alpha \in \Delta$, pour tout $\beta \in \Delta$,*

$$c_D(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = c_\Delta(\alpha, \beta).$$

On dit alors que φ est une géodésique complexe pour la distance de Carathéodory.

Ainsi donc, les géodésiques complexes pour la distance de Carathéodory ont des propriétés plus intéressantes que celles pour la métrique infinitésimale de Kobayashi. Bien sûr, les géodésiques complexes pour la distance de Carathéodory n'existent pas en général. Cependant dans [3], S. Dineen, R. Timoney et J.-P. Vigué ont montré leur existence dans un certain nombre de cas: celui d'un domaine borné convexe d'un espace de Banach réflexif et aussi celui de la boule-unité ouverte d'un dual.

Nous aurons également besoin d'un théorème d'existence et d'unicité des géodésiques complexes démontré par E. Vesentini [13, 14 et 15]. Soit A une partie de E. Rappelons qu'un point x de A est un point complexe-extrémal de A si 0 est le seul vecteur y de E tel que $x + \varsigma y$ appartienne à A, pour tout $\varsigma \in \Delta$.

THÉORÈME 2.4. *Soit B la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe E. Soit v un point de la frontière de B. Alors,*

$$\varsigma \mapsto \varphi(\varsigma) = \varsigma v$$

est une géodésique complexe pour la distance de Carathéodory de B. Si de plus, v est un point complexe- extrémal de $\overline{B}$, alors φ est l'unique géodésique complexe telle que $\varphi(0) = 0$ et que $\varphi'(0) = v$.

3. - La condition (H$_3$)

Soit E le dual topologique d'un espace de Banach complexe E_0, et soit B la boule-unité ouverte de E. Si $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$ est une fonction bornée, continue sur $\overline{B}$, holomorphe sur B, le principe du maximum classique montre que

$$\|f\|_{\overline{B}} = \|f\|_{\partial B},$$

où ∂B est la frontière de B. Si on suppose que tous les points de la frontière de B sont des points complexe-extrémaux de $\overline{B}$, on déduit du résultat précédent que

$$\|f\|_{\overline{B}} = \|f\|_{\mathrm{Ext}(\overline{B})}.$$

Ainsi donc, nous avons montré la (facile) proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. *Soit B la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe E, et supposons que tous les points de la frontière de B soient des points complexe-extrémaux de $\overline{B}$. Alors B vérifie l'hypothèse* (H$_3$).

Soit maintenant $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace de Banach complexe des suites bornées de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, muni de la norme

$$\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n|,$$

et soit B la boule-unité ouverte de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Nous allons montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.2. *B vérifie l'hypothèse* (H$_3$).

DÉMONSTRATION. Il est facile de voir que l'ensemble des points complexe-extrémaux de $\overline{B}$ est exactement l'ensemble des points $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ tels que $|z_n| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit donc $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$ une application continue bornée, holomorphe dans B.

Soit $\varepsilon > 0$. Il nous suffit de montrer qu'il existe un point $y \in \mathrm{Ext}(\overline{B})$ tel que

$$|f(y)| \geq \|f\|_{\overline{B}} - \varepsilon.$$

Par définition de $\|f\|_{\overline{B}}$, on peut trouver un $x \in \overline{B}$ tel que $|f(x)| \geq \|f\|_{\overline{B}} - \varepsilon$, et comme B est dense dans $\overline{B}$, on peut supposer que $x \in B$. D'autre part, comme B est homogène, on peut trouver un automorphisme F de B tel que $F(0) = x$. Il est facile de voir sur la forme des automorphismes analytiques de B que F est holomorphe au voisinage de $\overline{B}$ et que $F(\mathrm{Ext}(\overline{B})) = \mathrm{Ext}(\overline{B})$. Soit $h = f \circ F$. On a donc

$$\|h\|_{\overline{B}} = \|f\|_{\overline{B}}, \text{ et } |h(0)| \geq \|f\|_{\overline{B}} - \varepsilon.$$

Considérons l'application $\varphi : \overline{\Delta} \to \overline{B}$ définie par $\varphi(\varsigma) = (\varsigma, \varsigma, \ldots, \varsigma, \ldots)$. Ainsi $h \circ \varphi$ est une fonction continue sur $\overline{\Delta}$, holomorphe dans Δ. D'après le principe du maximum, il existe un point ζ_0 de la frontière de $\overline{\Delta}$ tel que

$$|h(\varphi(\zeta_0)| \geq \|f\|_{\overline{B}} - \varepsilon.$$

Ainsi donc,

$$|f(F(\varphi(\zeta_0)))| \geq \|f\|_{\overline{B}} - \varepsilon,$$

et $F(\varphi(\zeta_0))$ est un point complexe-extrémal de $\overline{B}$. Le théorème est démontré. □

4. - Première partie de la démonstration du Théorème 1.1

Par des méthodes inspirées de C. Stanton [11] et de L. Belkhchicha [1], nous allons montrer le lemme suivant.

LEMME 4.1. *Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, et supposons que D vérifie les hypothèses* (H_1) *et* (H_2). *Soit B la boule-unité ouverte de E, et supposons que B vérifie l'hypothèse* (H_3). *Soit $f : D \to B$ une application holomorphe, et supposons qu'il existe un point a de D tel que $f(a) = 0$ et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Kobayashi. Alors f vérifie les deux propriétés suivantes:*

(i) $\forall x \in D,\ \forall y \in D,\ c_B(f(x), f(y)) = c_D(x, y)$;

(ii) $\forall x \in D,\ \forall v \in E,\ E_B(f(x), f'(x) \cdot v) = E_D(x, v)$.

Ainsi, f est une isométrie pour la distance de Carathéodory de D sur $f(D)$.

DÉMONSTRATION. Etant donnés x et y dans D (resp. $x \in D$ et $v \in E$), on montre facilement en utilisant le théorème de Montel qu'il existe une application holomorphe $F : D \to \Delta$ qui réalise exactement la distance de Carathéodory de x et y (resp. la métriques infinitésimale $E_D(x, v)$), c'est-à-dire telle que

$$c_\Delta(F(x), F(y)) = c_D(x, y)$$

$$(\text{resp. } E_\Delta(F(x), F'(x) \cdot v) = E_D(x, v)).$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de a et un voisinage V de $0 = f(a)$ tel que f soit un isomorphisme analytique de U sur V. Alors $(f|_U)^{-1}$ est une application holomorphe de V sur U; soit G l'application holomorphe de V dans Δ définie par

$$G(z) = F \circ (f|_U)^{-1}(z).$$

Nous allons montrer que G se prolonge en une application holomorphe de B dans Δ.

Remarquons d'abord que G est définie dans un voisinage de l'origine dans E et admet donc un développement en série de polynômes homogènes

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z),$$

où $P_n(z)$ est un polynôme homogène de degré n, et ce développement converge dans un voisinage de l'origine suffisamment petit.

Soit maintenant u un point complexe-extrémal de $\overline{B}$, et soit t un vecteur de E tel que $f'(a) \cdot t = u$. On sait que $F_B(0, u) = 1$, et comme $f'(a)$ est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Kobayashi, $F_D(a, t) = 1$. Il existe donc une géodésique complexe pour la métrique infinitésimale de Kobayashi à l'origine $\varphi : \Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0) = t$.

Il est clair que $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe pour la métrique infinitésimale de Kobayashi, mais, comme B est convexe, on sait d'après L. Lempert [9], H. Royden et P. Wong [10] que les distances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident sur B. Ainsi donc, $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe pour la distance de Carathéodory (ce qui entraîne qu'il en est de même pour φ), et d'après le théorème d'unicité de E. Vesentini, on a:

$$f(\varphi(\varsigma)) = \varsigma u.$$

Ces résultats montrent également que f est un isomorphisme de $\varphi(\Delta)$ sur $f(\varphi(\Delta))$. Calculons $G(f(\varphi(\varsigma)))$. On trouve

$$G(f(\varphi(\varsigma))) = F(\varphi(\varsigma)),$$

et la fonction $G \circ f \circ \varphi$ est une application holomorphe de Δ dans Δ. Son développement en série est obtenu par substitution dans le développement de G, et on trouve

$$G(f(\varphi(\varsigma))) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\varsigma u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varsigma^n P_n(u).$$

On déduit des inégalités de Cauchy que $\|P_n(u)\| \leq 1$. En faisant ce raisonnement pour tout point $u \in \mathrm{Ext}(\overline{B})$, on déduit que $\|P_n\|_{\mathrm{Ext}(\overline{B})} \leq 1$, et d'après l'hypothèse (H_3), ceci entraîne que

$$\|P_n\|_{\overline{B}} \leq 1.$$

Pour tout $z \in B$, on a donc $\|P_n(z)\| \leq \|z\|^n$. On déduit immédiatement que G se prolonge en une application holomorphe de B dans $\mathbb{C}$. Soit maintenant $r < 1$, et soit B_r la boule de centre 0 et de rayon r. En utilisant $G \circ f \circ \varphi$, on montre de même que $\|G\|_{\mathrm{Ext}(\overline{B}_r)} < 1$. On en déduit que $\|G\|_{\overline{B}_r} < 1$, ce qui montre que G se prolonge en une application holomorphe de B dans Δ.

Au voisinage de a dans D, on a $G \circ f = g$. D'après le théorème de prolongement analytique, on a, pour tout $z \in D$,

$$G \circ f(z) = g(z).$$

En particulier, $G(f(x)) = g(x)$, $G(f(y)) = g(y)$ (resp. $G(f(x)) = g(x)$, $G'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot v) = g'(x) \cdot v$), ce qui montre l'égalité annoncée

$$c_B(f(x), f(y)) = c_D(x, y)$$

$$\text{(resp. } E_B(f(x), f'(x) \cdot v) = E_D(x, v)). \qquad \square$$

5. - Fin de la démonstration du Théorème 1.1

Montrons d'abord le lemme suivant.

LEMME 5.1. *Sous les hypothèses du théorème, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est un isomorphisme linéaire de E.*

DÉMONSTRATION. On a supposé que $f'(a)$ est une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Kobayashi, ce qui entraîne que l'ensemble

$$A = \{x \in D | f'(x) \text{ est un isomorphisme linéaire de } E\}$$

est un ouvert non vide de E. Montrons que c'est un fermé de D. Soit $x \in \overline{A}$. On peut trouver une suite x_n de points de A convergeant vers x. Du fait que $f'(x_n)$ est une isométrie pour $E_D(x_n, \cdot)$ et $E_B(f(x_n), \cdot)$, on déduit qu'il existe une constante $m > 0$ telle que, pour tout n, pour tout $v \in E$,

$$||f'(x_n) \cdot v|| \geq m||v||.$$

Par passage à la limite, $f'(x)$ vérifie la même inégalité. Montrons que cela entraîne que $f'(x)$ est un isomorphisme linéaire de E. Pour cela, il suffit de vérifier que, pour tout $y \in E$, il existe $z \in E$ tel que $f'(x) \cdot z = y$. D'après l'hypothèse, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un z_n unique appartenant à E tel que $f'(x_n) \cdot z_n = y$. On a:

$$\left\| z_n - z_p \right\| = \left\| (f'(x_n))^{-1} \cdot y - (f'(x_p))^{-1} \cdot y \right\| \leq \left\| (f'(x_n))^{-1} - (f'(x_p))^{-1} \right\| \cdot ||y||.$$

Or,

$$\left\| f'(x_n))^{-1} - (f'(x_p))^{-1} \right\| \leq \left\| (f'(x_n))^{-1} \right\| \left\| (f'(x_n)) - (f'(x_p)) \right\| \left\| (f'(x_p))^{-1} \right\|.$$

Comme $\left\|(f'(x_n))^{-1}\right\|$ et $\left\|(f'(x_p))^{-1}\right\|$ sont inférieurs à $1/m$, on en déduit que z_n est une suite de Cauchy. Sa limite z est telle que $f'(x) \cdot z = y$, et le résultat est démontré. □

Ainsi donc, on déduit des Lemmes 4.1, 5.1 et du théorème d'inversion locale que f est un isomorphisme analytique de D sur $f(D)$. Il reste à démontrer que $f(D) = B$. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $x \in \partial B$, l'ensemble A des $t \in \mathbb{R}_+$ tels que $tx \in f(D)$ est égal à $[0, 1[$.

D'abord, comme $f(D)$ est ouvert, il est clair que A est ouvert et contient 0. Montrons que, si $r = \sup t$ tel que le segment $[0, t]$ soit contenu dans A, alors $r = 1$. En effet, si $r < 1$, la suite $x_n = (r - 1/n)\, x$ est une suite de Cauchy pour la distance intégrée de Carathéodory c^i_B convergeant vers rx. Le plus court chemin entre deux points x_n et x_m est donné par exemple par un morceau du chemin γ défini par $\gamma(t) = tx$. D'autre part, pour $0 \leq t < r$,

$$t \mapsto f^{-1}(\gamma(t))$$

est un chemin de D, et comme f est une isométrie pour E_D et E_B, sa longueur est la même que celle de γ. Ceci entraîne que $f^{-1}(x_n)$ est une suite de Cauchy pour c^i_D. Comme D est c^i_D-complet, elle converge vers une limite $a \in D$, et $f(a) = rx$. Comme A est ouvert, tout un voisinage de r appartient à A, et r ne peut être égal à la borne supérieure des t tels que $[0, t] \subset A$. Contradiction. □

Ce résultat montre que f est un isomorphisme analytique de D sur B, et le théorème est démontré.

6. - Démonstration du Corollaire 1.2

Pour démontrer le Corollaire 1.2, nous allons appliquer le Théorème 1.1. Pour cela, il suffit de construire une application holomorphe $f : D \to B$ (où B est la boule-unité ouverte de $\ell^\infty(\mathbb{N})$), telle que $f(a) = 0$ et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour les métriques infinitésimales de Kobayashi $F_D(a, \cdot)$ et $F_B(0, \cdot)$.

Soit v un vecteur de E de norme 1 pour $E_D(a, \cdot) = F_D(a, \cdot)$. On montre facilement en utilisant le théorème de Montel qu'il existe une application holomorphe $\varphi_v : D \to \Delta$ qui donne la valeur de $E_D(a, v)$, c'est-à-dire telle que $\varphi_v(a) = 0$ et que $\varphi'_v(a) \cdot v = 1$.

On sait d'autre part que les indicatrices pour les métriques infinitésimales de Carathéodory et de Kobayashi au point a coïncident et sont linéairement isomorphes à la boule-unité ouverte B de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Quitte à faire un isomorphisme linéaire de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, on peut donc supposer que ces indicatrices sont exactement égales à B. Soit

$$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \ [1 \text{ à la } n^{\text{ième}} \text{ place}],$$

et soit $\varphi_n = \varphi_{e_n}$. Considérons l'application $\varphi : D \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ définie par

$$f = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots).$$

Il est facile de montrer que f est holomorphe; c'est une application holomorphe de D dans B telle que $f(a) = 0$ et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour les métriques infinitésimales de Kobayashi $F_D(a, \cdot)$ et $F_B(0, \cdot)$. D'après le Théorème 1.1, f est un isomorphisme analytique de D sur B et le corollaire est démontré. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BELKHCHICHA, *Caractérisation des isomorphismes analytiques de certains domaines bornés*. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **313** (1991), 281-284.

[2] S. DINEEN, *The Schwarz Lemma*. Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford 1989.

[3] S. DINEEN - R. TIMONEY - J.-P. VIGUÉ, *Pseudodistances invariantes sur les domaines d'un espace localement convexe*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **12** (1985), 515-529.

[4] T. FRANZONI - E. VESENTINI, *Holomorphic maps and invariant distances*. North-Holland Math. Studies 40, 1980.

[5] I. GRAHAM, *Holomorphic mappings into strictly convex domains which are Kobayashi isometries at a point*. Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 917-921.

[6] L. HARRIS, *Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces*. In *Advances in Holomorphy*, Mathematical Studies 34, North-Holland, Amsterdam, 1979, 345-406.

[7] L. HARRIS - J.-P. VIGUÉ, *A metric condition for equivalence of domains*. Atti Accad. Naz. Lincei (8) **67** (1979), 402-403.

[8] S. KOBAYASHI, *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*. Bull. Amer. Math. Soc., **82** (1976), 357-416.

[9] L. LEMPERT, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*. Anal. Math., **8** (1982), 257-261.

[10] H. ROYDEN - P. WONG, *Carathéodory and Kobayashi metrics on convex domains*. Preprint (1983).

[11] C. STANTON, *A characterization of the polydisc*. Math. Ann., **264** (1983), 271-275.

[12] S. VENTURINI, *On holomorphic isometries for the Kobayashi and the Carathéodory distances on complex manifolds*. Atti Accad. Naz. Lincei (8), à paraître.

[13] E. VESENTINI, *Complex geodesics*. Compositio Math. **44** (1981), 375-394.

[14] E. VESENTINI, *Complex geodesics and holomorphic mappings*. Sympos. Math., **26** (1982), 211-230.

[15] E. VESENTINI, *Invariant distances and invariant differential metrics in locally convex spaces*. In *Spectral theory*, Banach Center Publications, Warsaw, **8** (1982), 493-512.

[16] J.-P. VIGUÉ, *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **9** (1976), 203-282.

[17] J.-P. VIGUÉ, *Caractérisation des automorphismes analytiques d'un domaine convexe borné*. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984), 101-104.

[18] J.-P. VIGUÉ, *Sur la caractérisation des automorphismes analytiques d'un domaine borné*. Portugal. Math., **43** (1986), 439-453.

[19] H. WU, *Normal families of holomorphic mappings*. Acta Math. **119** (1967), 194-233.

Mathématiques
URA CNRS D1322 Groupes de Lie et Géométrie
Université de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex
France