ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SAID BENACHOUR

Analyticité des solutions des équations de Vlassov-Poisson

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 16, nº 1 (1989), p. 83-104

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1989_4_16_1_83_0>

Analyticité des solutions des équations de Vlassov-Poisson

SAID BENACHOUR

1. - Introduction

On considère un plasma composé d'un nombre N de particules chargées. Soit $f_\alpha(t,x,v)$ la densité de probabilité d'une particule de l'espèce α qui, au temps t, occupe la position $x \in \mathbb{R}^n$ et la vitesse $v \in \mathbb{R}^n$. On notera $\overline{\eta}_\alpha$ la densité moyenne de particules, de type α, ayant la charge q_α et la masse m_α.

En négligeant les chocs et le champ magnétique, les fonctions $f_\alpha, 1 \leq \alpha \leq N$, sont solutions du système d'équations de Vlasson-Poisson:

$$
(1) \qquad \begin{cases}
\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f_\alpha = 0 \\
\Delta_x \phi = 4\pi\rho \\
\rho(t,x) = \sum\limits_\alpha \overline{\eta}_\alpha q_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(t,x,v)\mathrm{d}v \\
f_\alpha(0,x,v) = f_{\alpha,0}(x,v) \\
\lim\limits_{|x|\to+\infty} \nabla_x \phi(t,x) = 0,
\end{cases}
$$

où $\nabla_x f$ (resp. $\nabla_v f$) désigne le gradient de la fonction f par rapport aux variables d'espace x (resp. de vitesse v); et pour tout champ de vecteurs $\{a_i\}$ dans $\mathbb{R}^n$ on note:

$$
a \cdot \nabla_x = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad a \cdot \nabla_v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial v_i}.
$$

Dans (1) $\nabla_x \phi$ est le champ électrique. Aussi par la suite on notera:

$$
E(t,x) = \nabla_x \phi(t,x).
$$

Quant à la fonction ρ, c'est la charge; enfin la dernière équation de (1) n'est rien d'autre que la condition de champ nul à l'infini.

Pervenuto alla Redazione il 31 Marzo 1987 e in forma definitiva il 2 Luglio 1988.

L'existence de solutions faibles, en dimension quelconque, pour le système (1) a été obtenue par Arsenev [1].

L'existence et l'unicité de solutions classiques, pour (1), a été établie par Ukai et Okabé [14], sur $[0, +\infty[$ en deux dimensions d'espace et sur $[0, T^*[$ en dimension $n \geq 3$ d'espace.

D'autre part en dimension d'espace égale à 3, Bardos et Degond [3] ont montré l'existence et l'unicité d'une solution classique sur $[0, +\infty[$, lorsque la donnée initiale est "assez petite". Ce résultat utilise des idées voisines de celles de Klainerman [9] et Klainerman et Ponce [10].

Des résultats analogues à ceux qui sont mentionnés ci-dessus ont été obtenu en particulier par Batt [4] et Wollman [15], lorsque la donnée initiale est à symétrie sphérique ou à support compact.

Enfin, la régularité C^∞ des solutions de (1) a été démontrée par Degond [8].

L'existence de solutions classiques, sur $[0, +\infty[$ en deux dimensions et sur $[0, T^*[$ en dimension $n \geq 3$, sont obtenues dans [14] à l'aide d'un théorème du point fixe de Schauder sous les hypothèses:

(2) $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_v) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_v)$,

(3) $|f_0(x, v)| \leq C_0(1 + |x|)^{-2\gamma}(1 + |v|)^{-2\gamma}$, pour tout $(x, v) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_v$,

où γ est un nombre réel tel que $\gamma > n$.

Ces solutions (f, E) vérifient (1) et les propriétés suivantes: pour tout $T > 0$ en deux dimensions et pour tout $T < T^*$ si $n \geq 3$:

(4) $f \in C^1 \cap W^{1,\infty}([0, T] \times \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_v)$,

(5) il existe $\lambda \in]0, 1[$: $E \in C^{\lambda, 1+\lambda}([0, T] \times \mathbb{R}^n_x)$,

(6) $|f(t, x, v)| \leq C(1 + |x|)^{-\gamma}(1 + |v|)^{-\gamma}$,

(7) $$\sup_x \int_{\mathbb{R}^n_v} |f(t, x, v)| dv \leq \begin{cases} C' e^{Kt} & \text{si} \quad n = 2 \\ C'(1 - K't)^{\frac{1}{2-n}} & \text{si} \quad n \geq 3, \end{cases}$$

où les constantes C, C', K et K' ne dépendent que des données.

Pour montrer l'unicité de ces solutions classiques Ukai et Okabé [14] ont besoin de (2), (3) et des hypothèses suivantes:

(8) $f_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_v)$,

(9) $|\nabla_x f_0(x, v)| \leq C''(1 + |v|)^{-\gamma}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

(10) $|\nabla_v f_0(x, v)| \leq C''(1 + |v|)^{-\gamma}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Dans ce travail, on étudie l'analyticité des solutions de (1). Pour ce faire, on reprend les mêmes idées que dans Bardos-Benachour-Zerner [2] et Benachour [5]. On introduit des échelles d'espaces (cf. Ovsjannikov [13], Trèves [12], Niremberg [11]) de fonctions analytiques adaptées au système (1). On retrouve, là aussi, que le domaine d'analyticité en les variables d'espace (et de vitesse) se retrécit lorsque t tend vers $+\infty$ en deux dimensions et t tend vers T^* en dimension $n \geq 3$.

Nous aurons besoin des notations suivantes:

$Z = x + iy$ désignera le point courant de $\mathbb{R}^n_x + i\mathbb{R}^n$ (qui est le complexifié de $\mathbb{R}^n_x$),

$U = v + iw$ désignera le point courant de $\mathbb{R}^n_v + i\mathbb{R}^n$ (qui est le complexifié de $\mathbb{R}^n_v$),

On posera: $\operatorname{Re} Z = x$ et $\operatorname{Im} Z = y$,

$$\operatorname{Re} U = v \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} U = w.$$

s désignera un nombre réel de l'intervalle $]0, 1[$ et

$$D(s) = \{(x + iy, v + iw) \in (\mathbb{R}^n_x + i\mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n_v + i\mathbb{R}^n);\ |y| + |w| < s\}.$$

$\mathcal{A}_s$ sera l'espace des fonctions analytiques réelles sur $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_v$ et qui se prolongent en fonctions holomorphes et bornées sur $D(s)$.

On munit $\mathcal{A}_s$ de la norme

$$\|f\|_s = \sup_{D(s)} |f(x + iy, v + iw)|.$$

Enfin, on notera

$$D^0(s) = \{(x + iy) \in \mathbb{R}^n_x + i\mathbb{R}^n;\ |y| < s\}.$$

2. - Résultat principal

Dans toute la suite on supposera que le nombre de particules $N = 1$ et que les différentes constantes sont normalisées de telle sorte que le système (1) s'écrive sous la forme:

$$(11) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = 0 \\ \Delta_x \phi = \rho \\ \rho(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t, x, v) \mathrm{d}v \\ f(0, x, v) = f_0(x, v) \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} \nabla_x \phi(t, x) = 0. \end{cases}$$

Par commodité, on posera par la suite:

$$\rho = g$$
$$E = \nabla_x \phi.$$

On rappelle que E est le champ électrique et que la dernière condition de (11) n'est rien d'autre que la "condition de champ nul à l'infini".

THÉORÈM. *Soit* s *dans* $]0,1[$. *Soit* f_0 *dans* $\mathcal{A}_s$ *telle que la restriction de* f_0 *à* $\operatorname{Im} Z = \operatorname{Im} U = 0$ *vérifie les conditions* (8), (9) *et* (10). *On suppose que:*

$$\begin{aligned} &\text{il existe } C_0 > 0 : |f_0(x+iy, v+iw)| \\ (12) \qquad &\leq C_0(1+|x+iy|)^{-2\gamma}(1+|v+iw)|)^{-2\gamma}, \\ &\quad \text{pour tout } (x+iy, v+iw) \in D(s); \end{aligned}$$

$$(13) \qquad \text{il existe } C_1 > 0 : \sup_{|y|<s} \int\int |f_0(x+iy, v)| \mathrm{d}x\mathrm{d}v \leq C_1;$$

$$\begin{aligned} (14) \qquad \text{il existe } C_2 > 0 : &|\nabla_Z f_0(Z,U)| \leq C_2(1+|U|)^{-1}, \\ &|\nabla_U f_0(Z,U)| \leq C_2(1+|U|)^{-1}, \\ \text{pour tout } (Z,U) \in D(s). \end{aligned}$$

Soit (f, E) *la solution classique réelle de* (11).

Alors pour tout intervalle $[0,T]$, $T < T^*$ *si* $n \geq 3$, *il existe une constante* L *telle que pour tout* t *dans* $[0,T]$:

(a) $f(t,.,.)$ *se prolonge en une fonction holomorphe dans* $D(s(t))$;

(b) $E(t,.)$ *se prolonge en une fonction holomorphe dans* $D^0(s(t))$;

où $s(t) = e\left(\frac{s}{e}\right)^{e^{Lt}}$, *avec* $L = 2C \max \left\{\|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \psi_n(T)\right\}$,

$$\psi_n(T) = \begin{cases} Ae^{BT} & \text{si} \quad n = 2 \\ (A^{2-n} - B(n-2)T)^{\frac{1}{2-n}} & \text{si} \quad n \geq 3, \end{cases}$$

et les constantes A, B, C *ne dépendent que des données, à savoir* $C_0, C_1, n, \gamma, \|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ *(cf. proposition 3 pour plus de précision).*

Enfin, pour $n \geq 3$,

$$T^* = \frac{A^{2-n}}{B(n-2)}.$$

REMARQUES

1° Les conditions (8), (9), (10) ne sont utilisées que pour assurer l'unicité de la solution classique.

2° Les conditions (14) ne seront utiles que pour réaliser une majoration uniforme de $\frac{\partial f}{\partial t}$ dans le problème linéarisé.

3° Le théorème ci-dessus a une analogie, d'une part, avec les résultats d'analyticité des solutions des équations d'Euler [2], [5] et, d'autre part, avec le résultat de régularité C^∞ des solutions des équations d'Euler en deux dimensions [7]. En effet, dans ce dernier cas, T. Kato utilise une estimation de la norme du tourbillon dans des espaces de Hölder de la forme $C^{0,\alpha(t)}$, où $\alpha(t)$ a le même comportement que $s(t)$ dans le cas $n = 2$.

3. - Preuve du théorème

Elle sera faite en plusieurs étapes. On commence par faire un prolongement analytique de la charge et du champ électrique et leurs estimations en norme $\|\cdot\|_s$. Puis on introduit un schéma itératif (linéarisation de (11)). On réalise des majorations uniformes pour cette suite itérative. Enfin, on montre que le schéma itératif converge vers la solution analytique.

1ère étape. Estimations préliminaires de la charge et du champ électrique.

PROPOSITION 1. *Soit f dans $\mathcal{A}_s$ et vérifiant:*

$$\text{ils existent } C > 0 \text{ et } \gamma > n : |f(Z,U)| \leq C(1+|Z|)^{-\gamma}(1+|U|)^{-\gamma}, \quad \textit{pour tout } (Z,U) \in D(s).$$

Alors la fonction g, définie par

$$g(x+iy) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+iy, v)\mathrm{d}v,$$

est holomorphe et bornée sur $D^0(s)$ et vérifie:

$$|g(x+iy)| \leq C \cdot I(1+|x+iy|)^{-\gamma}, \qquad |y| < s, \tag{15}$$

où

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}v}{(1+|v|)^\gamma}.$$

La preuve de cette proposition est immédiate.

PROPOSITION 2. *Soit g une fonction holomorphe et bornée dans $D^0(s)$ et qui vérifie* (15).

Soit ϕ la solution C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ du problème:

$$\begin{cases} \Delta_x \phi(x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \nabla_x \phi(x) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Alors $E = \nabla_x \phi$ *se prolonge en une fonction holomorphe et bornée dans* $D^0(s)$.

De plus, ils existent $C_3 > 0$ *et* $C_4 > 0$, *ne dépendant que de la dimension* n, *telles que:*

$$(17)\qquad |E(x+iy)| \le C_3 \|g(\cdot + iy)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \cdot \|g\|_s^{\frac{n-1}{n}}, \text{ pour tout } y : |y| < s;$$

$$(18)\qquad |\operatorname{Im} E(x+iy)| \le C_4(|y|)\left(\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_s \operatorname{Log} \frac{1}{|y|}\right), |y| < s.$$

Il existe une constante C_5, *ne dépendant que de* n *et* $\theta \in]0,1[$, *telle que:*

$$(19)\qquad |\nabla_Z E(x+iy)| \le C_5 \|g\|_s^{\alpha} \|g(\cdot + iy)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\beta} \|\nabla_Z g\|_s^{\gamma}, |y| < s,$$

où: $\alpha = \frac{n(1-\theta)}{n+\theta}, \qquad \beta = \frac{\theta}{n+\theta}, \qquad \gamma = \frac{n\theta}{n+\theta}.$

PREUVE. On introduit le noyau de Green K de Δ_x dans $\mathbb{R}^n$,

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |x| & n = 2 \\ \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \ge 3, \end{cases}$$

où ω_n est la surface de S^{n-1} (la sphère, de rayon 1, dans $\mathbb{R}^n$).

K est C^∞ en dehors de l'origine et vérifie:

$$(19)'\qquad |D^\alpha K(x)| \le \frac{C_K}{|x|^{n+|\alpha|-2}}, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, 1 \le |\alpha| \le 3,$$

avec $D = \frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, 2, \cdots, n$,
où la constante $C_K > 0$ ne dépend que de n.

Soit ϕ la solution de (16), alors

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x - x') g(x') \mathrm{d}x'.$$

On en déduit que $E = \nabla_x \phi$ est donnée par

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_{x'} K(x - x') \cdot g(x') \mathrm{d}x'.$$

En vertu de (19)' et de l'hypothèse (15) il est facile de voir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_{x'} K(x - x') g(x' + iy) \mathrm{d}x'$$

est holomorphe dans $D^0(s)$.

En vertu de l'unicité du prolongement analytique, on peut poser, pour $|y| < s$,

$$E(x+iy) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_{x'} K(x-x') g(x'+iy) \mathrm{d}x'. \tag{20}$$

Pour montrer le point (17), on commence par considérer un nombre réel $r > 0$, puis on sépare l'intégrale en (20) en deux parties:

$$P_1 = \{x' \in \mathbb{R}^n ; |x-x'| \leq r\} \quad \text{et} \quad P_2 \subset P_1.$$

On remarque que, an voisinage de $0, \nabla_x K$ est intégrable et, compte tenu de (19)', on a

$$\begin{aligned} |E(x+iy)| &\leq C_K \left[\|g\|_s \int_{P_1} \frac{\mathrm{d}x}{|x-x'|^{n-1}} + \frac{1}{r^{n-1}} \int_{P_2} |g(x'+iy)| \mathrm{d}x' \right] \\ &\leq C_K \left[r\|g\|_s + \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x'+iy)| \mathrm{d}x' \right]. \end{aligned}$$

On obtient (17) en choisissant $r = \left(\frac{\|g(\cdot+iy)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\|g\|_s} \right)^{\frac{1}{n}}$.

Pour montrer le point (18), on procède comme suit.

a) On commence par séparer l'intégrale en (20) en trois parties:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{x' \in \mathbb{R}^n ; |x-x'| < |y|\}, \\ Q_2 &= \{x' \in \mathbb{R}^n ; |y| \leq |x-x'| < 1\}, \\ Q_3 &= \{x' \in \mathbb{R}^n ; |x-x'| \geq 1\}. \end{aligned}$$

b) On a alors, compte tenu de (19)':

$$\left| \int_{Q_1} \nabla_{x'} K(x-x') g(x'+iy) \mathrm{d}x' \right| \leq C_K \omega_n |y| \|g\|_s.$$

c) Pour estimer l'intégrale sur Q_2, on utilise la formule de Taylor et les relations de Chauchy-Riemann:

$$\operatorname{Im} g(x+iy) = \operatorname{Im} g(x) + iy \cdot \nabla_{x'} \int_0^1 \operatorname{Re} g(x'+i\sigma y) \mathrm{d}\sigma. \tag{21}$$

Comme le noyau K est à valeurs réelles et la restriction de g à $\operatorname{Im} Z = 0$ est aussi réelle, on obtient après une intégration par parties:

$$(22) \qquad \left| \operatorname{Im} \int_{Q_2} \nabla_x K(x-x') g(x'+iy) \mathrm{d}x' \right|$$

$$= \left| \int_{Q_2} \nabla_{x'} K(x-x') y \cdot \nabla_{x'} \left[\int_0^1 \operatorname{Re}\ g(x'+i\sigma y) \mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}x' \right|$$

$$\leq \left| \int_{Q_2} y \cdot \nabla_{x'}^2 K(x-x') \left[\int_0^1 \operatorname{Re}\ g(x'+i\sigma y) \mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}x' \right|$$

$$+ \left| \int_{|x-x'|=1} \nabla_{x'} K(x-x') y \cdot (x-x') \left[\int_0^1 \operatorname{Re}\ g(x'+i\sigma y) \mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}x' \right|$$

$$+ \left| \frac{1}{y} \right| \left| \int_{|x-x'|=|y|} \nabla_{x'} K(x-x') y \cdot (x-x') \left[\int_0^1 \operatorname{Re}\ g(x'+i\sigma y) \mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}x' \right|$$

Le premier terme du second membre de (22) se majore par $C_K \omega_n \|g\|_s |y| \log \frac{1}{|y|}$; quant aux deux derniers termes, ils se majorent par $C_K \omega_n |y| \|g\|_s$.

d) Pour estimer l'intégrale sur Q_3, on utilise (21) et on intégre par parties comme ci-dessus:

$$\left| \operatorname{Im} \int_{Q_3} \nabla_{x'} K(x-x') g(x'+iy) \mathrm{d}x' \right|$$

$$(23) \quad \leq \left| \int_{Q_3} y \cdot \nabla_{x'}^2 K(x-x') \left[\int_0^1 \operatorname{Re}\ g(x'+i\sigma y) \mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}x' \right|$$

$$+ \left| \int_{|x-x'|=1} \nabla_{x'} K(x-x') y \cdot (x-x') \left[\int_0^1 \operatorname{Re}\ g(x'+i\sigma y) \mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}x' \right|.$$

Le deuxième terme du second membre de (23) se majore par $C_K \omega_n |y| \|g\|_s$; quant au premier terme, il se majore par $C'_K |y| \left(\|g\|_s + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right)$ en appliquant de nouveau la précédure en (c) et en remarquant que alors $\nabla_x^2 K$ est intégrable sur $|x| \geq 1$, (la constante $C'_K > 0$ ne dépend que du noyau K).

La preuve de (19) utilise les idées ci-dessus combinées avec le lemme 1 de [3].

2ème étape. Le schéma itératif.

On construit par itération les trois suites de fonctions $\{f^m\}$, $\{g^m\}$ et $\{E^m\}$ suivantes:
f^1 est d'abord définie comme la solution de:

$$\begin{cases} \frac{\partial f^1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f^1 = 0 \\ f^1(0,x,v) = f_0(x,v). \end{cases}$$

Il est clair que f^1 est donnée par:

$$f^1(t,x,v) = f_0(x - tv, v).$$

Ensuite on pose:

$$g^1(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n_v} f^1(t,x,v)\mathrm{d}v$$

$$E^1(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n_{x'}} \nabla_{x'} K(x-x') g^1(t,x')\mathrm{d}x',$$

où K est la solution fondamentale (ou élémentaire) de Δ_x dans $\mathbb{R}^n_x$.

Supposons g^{j-1}, E^{j-1} et f^j construites pour $j \leq m$ et posons:

$$g^m(t,x) = \int f^m(t,x,v)\mathrm{d}v, \tag{24}$$

$$E^m(t,x) = \int \nabla_{x'} K(x-x') g^m(t,x')\mathrm{d}x', \tag{25}$$

et enfin, considérons f^{m+1} la solution du problème de Cauchy linéaire du 1er ordre:

$$\begin{cases} \frac{\partial f^{m+1}}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f^{m+1} + E^m \cdot \nabla_v f^{m+1} = 0 \\ f^{m+1}(0,x,v) = f_0(x,v). \end{cases} \tag{26}$$

3ème étape. Estimations de $f^1(t,.,.), g^1(t,.)$ et $E^1(t,.)$.

On remarque que pour tout t, $f^1(t,.,.)$ est analytique réelle et se prolonge en une fonction holomorphe dan $D(s)$ en posant:

$$f^1(t, x+iy, v+iw) = f_0(x - tv + iy, v + iw).$$

On a alors pour tout t:

$$\|f^1(t,.)\|_s \le \|f_0\|_s.$$

D'autre part, grâce à l'hypothèse (12) on a, pour tout $(x+iy, v+iw)$ dans $D(s)$,

$$|f^1(t,x+iy,v+iw)| \le C_0(1+|x-tv+iy|)^{-2\gamma}(1+|v+iw|)^{-2\gamma}.$$

En utilisant l'inégalité

$$(27) \qquad 1+|X-X'| \ge \frac{1+|X'|}{1+|X|}, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \forall X' \in \mathbb{R}^n,$$

on déduit que, pour tout t dans $[0,T]$,

$$\begin{aligned}|f^1(t,x+iy,v+iw)| &\le C_0(1+|x+iy|)^{-\gamma}(1+t|v|)^{\gamma}(1+|v+iw|)^{-2\gamma}\\ &\le C_0(1+T)^{\gamma}(1+|x+iy|)^{-\gamma}(1+|v+iw|)^{-\gamma}.\end{aligned}$$

Donc, en vertu des propositions 1 et 2, $g^1(t,.)$ et $E^1(t,.)$ se prolongent en deux fonctions holomorphes dans $D^0(s)$. De plus $g^1(t,.)$ vérifie (15), et $E^1(t,.)$ vérifie (17) et (18) pour tout t dans $[0,T]$.

4ème étape. Estimations de $g^m(t,.), E^m(t,.), f^{m+1}(t,.,.)$.

PROPOSITION 3. *Les relations* (24), (25), (26) *définissent trois suites de fonctions* $\{g^m\}, \{E^m\}, \{f^{m+1}\}$ *telles que: pour tout t dans* $[0,T]$, *($T < T^*$ si la dimension $n \ge 3$), $g^m(t,.)$ et $E^m(t,.)$ se prolongent en deux fonctions holomorphes dans $D^0(s(t))$ et $f^{m+1}(t,.,.)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(s(t))$.*

De plus ils existent des constantes M_1, M_2, M_3 positives et ne dépendant que de (n,T,γ,C_0,C_1) [c.f. (12) *et* (13)*] et il existe une fonction numérique ψ_n telles que:*

$$(28) \qquad \sup_{|y|<s(t)} \|g^m(t,.+iy)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le M_1(C_1), \textit{ pour tout } m,$$

$$(29) \qquad \|g^m(t,.)\|_{s(t)} \le \psi_n(t), \textit{ pour tout } m,$$

$$(30) \qquad \|E^m(t,.)\|_{s(t)} \le M_2, \textit{ pour tout } m,$$

$$(31) \qquad \|f^{m+1}(t,.,.)\|_{s(t)} \le \|f_0\|_s, \textit{ pour tout } m,$$

$$(32) \qquad |f^{m+1}(t,x+iy,v+iw)| \le M_3(1+|x+iy|)^{-\gamma}(1+|v+iw|)^{-\gamma},$$

$$\textit{pour tout } (x+iy,v+iw) \in D(s(t)), \textit{ pour tout } m,$$

où $\quad s(t) = e\left(\dfrac{s}{e}\right)^{e^{Lt}}$ *(cf. énoncé du théorème),*

$$\psi_n(t) = \begin{cases} Ae^{Bt} & si\ n = 2 \\ (A^{2-n} - B(n-2)t)^{\frac{1}{2-n}} & \text{si } n \geq 3, \end{cases} \tag{33}$$

où A, B et L ne dépendent que des données; précisèment on a:

$$A = C_0 4\gamma \int_{\mathbb{R}^n} (1+v)^{-\gamma} \mathrm{d}v,$$

$$B = C_0 \frac{\omega_n}{n}(2C_3)^n C_1, \qquad \omega_n = mes(S^{n-1}),$$

$$L = 2C_4 \max \, \{\|f_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}, \quad \psi_n(T)\},$$

avec C_3 et C_4 des constantes positives ne dépendant que du noyau de Green K (cf. proposition 2).

REMARQUE. On a bien sûr

$$T^* = \frac{A^{2-n}}{B(n-2)}$$

et $\lim\limits_{\substack{T \to T^* \\ T < T^*}} \psi_n(T) = +\infty$, si la dimension $n \geq 3$.

PREUVE. Supposons la proposition 3 démontrée pour g^{k-1}, E^{k-1}, f^k avec $k \leq m$.

Alors, grâce à l'hypothèse de récurrence (32) sur f^m et à la proposition 1, $g^m(t,.)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $D^0(s(t))$. Il en est de même pour $E^m(t,.)$, grâce à la proposition 2. Montrons le point (28):

$$\|g^m(t,. + iy)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \int\int |f^m(t, x+iy, v)| \mathrm{d}x\mathrm{d}v. \tag{34}$$

Puisque $f^m(t, x+iy, v)$ est la solution, pour $|y| < s(t)$, de

$$\begin{cases} \frac{\partial f^m}{\partial t} + v \cdot \nabla_Z f^m + \text{ Re } E^{m-1}(t, Z) \cdot \nabla_v f^m = 0 \\ f^m(0, x+iy, v) = f_0(x+iy, v), \end{cases} \tag{35}$$

car les courbes caractéristiques $(Z(\tau), V(\tau))$ de (35) sont

$$\begin{cases} \frac{dZ}{d\tau} = V(\tau) \\ \frac{dV}{d\tau} = E^{m-1}(\tau, Z(\tau)) \\ (Z(t), V(t)) = (x+iy, v), |y| < s(t), \end{cases} \tag{36}$$

ou $\text{Im } V(\tau) = 0$, et $\text{Im } Z(\tau) = \text{ Im } Z(t) = y$.
Posons

$$\text{Re } Z(\tau) = X(\tau).$$

Alors, pour tout y tel que $|y| < s(t)$, $(X(\tau), V(\tau))$ vérifie le système suivant:

$$\text{(37)} \qquad \begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = V(\tau) \\ \frac{dV}{d\tau} = E^{m-1}(\tau, X(\tau) + iy) \\ (X(t), V(t)) = (x, v). \end{cases}$$

Soit $(X(\tau, t, x, v; y), V(\tau, t, x, v; y))$ la solution de (37). On remarquera, que d'une part,

$$|\text{ Im } Z(\tau)| + |\text{ Im } V(\tau)| = |y| < s(t) < s, \text{ pour tout } \tau \in [0, t],$$

donc

$$\text{(38)} \qquad \begin{aligned} f^m(t, x + iy, v) &= f_0(Z(0), V(0)) \\ &= f_0(X(0, t, x, v; y) + iy, V(0, t, x, v; y)), \end{aligned}$$

et d'autre part, le champ de vecteurs en (37) est à divergence nulle. D'où, en vertu du théorème de Liouville,

$$\int\int |f^m(t, x + iy, v)| \mathrm{d}x \mathrm{d}v = \int\int |f_0(X + iy, V)| \mathrm{d}X \mathrm{d}V.$$

On obtient alors (28) en tenant compte de (34) et (13).

PREUVE DU POINT (29).

Ce sera une conséquence de (28), (17) et du lemme suivant.

LEMME 1. *Ils existent deux constantes positives a_0 et b_0, ne dépendant que de γ, n et C_0, telles que*

$$\|g^m(t, .)\|_{s(t)} \leq a_0 + b_0 \left(\int_0^t \|E^{m-1}(\tau, .)\|_{s(\tau)} \mathrm{d}\tau \right)^n.$$

PREUVE DU LEMME 1. On a, pour $|y| < s(t)$,

$$g^m(t, x + iy) = \int f^m(t, x + iy, v) \mathrm{d}v.$$

Grâce à (38) et à l'hypothèse (12), on déduit

$$\text{(39)} \qquad |g^m(t, x + iy)| \leq C_0 \int_{\mathbb{R}^n_v} (1 + |V(0, t, x, v; y)|)^{-2\gamma} \mathrm{d}v.$$

On fait une partition de $\mathbb{R}_v^n$ en

$$P_1 = \{v \in \mathbb{R}_v^n; |v| \geq 2 \int_0^t \|E^{m-1}(\tau,.)\|_{s(\tau)} \mathrm{d}\tau\}$$

et

$$P_2 = \mathbb{R}_v^n - P_1$$

En tenant compte de (37), on a

$$|V(0,t,x,v;y) - v| \leq \int_0^t \|E^{m-1}(\tau,.)\|_{s(\tau)} \mathrm{d}\tau$$

et on en déduit que

$$\int_{P_1} (1 + |V(0,t,x,v;y)|)^{-2\gamma} \mathrm{d}v \leq 4^\gamma \int_{\mathbb{R}_v^n} \frac{\mathrm{d}v}{(1+|v|)^{2\gamma}}. \tag{40}$$

D'autre part on a

$$\int_{P_2} (1 + |V(0,t,x,v;y)|)^{-2\gamma} \mathrm{d}v \leq mes(P_2), \tag{41}$$

or $mes P_2 = \frac{\omega_n}{n} 2^n \left(\int_0^t \|E^{m-1}(\tau,.)\|_{s(\tau)} \mathrm{d}\tau \right)^n$.
En rapprochant (39), (40), (41), on obtient la preuve du lemme avec

$$a_0 = C_0 4^\gamma \int_{\mathbb{R}_v^n} (1+|v|)^{-2\gamma} \mathrm{d}v$$

$$b_0 = C_0 \frac{\omega_n}{n} 2^n, \qquad \omega_n = mes(S^{n-1}).$$

Compte tenu du lemme ci-dessus, du point (17) de la proposition 2 et de (28) qui est vérifié aussi par $g^{m-1}(t,.)$, on a

$$\|g^m(t,.)\|_{s(t)} \leq a_0 + b_0 C_3^n C_1 \left(\int_0^t \|g^{m-1}(\tau,.)\|_{s(\tau)}^{\frac{n-1}{n}} \mathrm{d}\tau \right)^n \tag{42}$$

On est amené alors à introduire la solution ψ_n de l'équation intégrale

$$\phi(t) = a_0 + b_0 C_3^n C_1 \left(\int_0^t \phi(\tau)^{n-1} \mathrm{d}\tau \right). \tag{43}$$

On vérifie que ψ_n est donnée par (33) et donc:

si $n = 2$, alors la solution ψ_2 de (43) est définie globalement sur $[0, +\infty[$.
si $n \geq 3$, alors la solution ψ_n de (43) est définie seulement sur un intervalle $[0, T^*[$, où $T^* > 0$ ne dépend que de n, γ, C_0, C_1 et C_3 (pour C_0 et C_1 c.f. les hypothèses (12), (13) et pour C_3 c.f. (17)).

D'autre part, il est clair que pour tout n, ψ_n est une fonction croissante sur $[0, T]$.

En comparant (42) et (43) on déduit

$$\|g^m(t,.)\|_{s(t)} \leq \psi_n(t) \leq \psi_n(T), \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

où, bien entendu, $T < T^*$ si la dimension $n \geq 3$.

PREUVE DU POINT (30).

C'est une conséquence de (27), (28) et (29). En effet, il suffit de prendre

$$M_2 = C_3 C_1^{\frac{1}{n}} \psi_n(T)^{\frac{n-1}{n}}.$$

PREUVE DU POINT (31).

Par hypothèse $f^{m+1}(t, x, v)$ est la solution du problème de Cauchy linéaire

$$\text{(44)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial f^{m+1}}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f^{m+1} + E^m \cdot \nabla_v f^{m+1} = 0 \\ f^{m+1}(0, x, v) = f_0(x, v). \end{cases}$$

Puisque, pour tout t dans $[0, T]$, $E^m(t,.)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $D^0(s(t))$, on va montrer que $f^{m+1}(t,.,.)$ se prolonge aussi en une fonction holomorphe dans $D(s(t))$. Pour ce faire, on introduit les "courbes caractéristiques complexes":

$$(Z(\tau), U(\tau)), \text{ dans } (\mathbb{R}_x^n + i\mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}_v^n + i\mathbb{R}^n), \text{ définies par:}$$

$$\text{(45)} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = U(\tau) \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = E^m(\tau, Z(\tau)) \\ (Z(t), U(t)) = (x + iy, v + iw), \ |y| + |w| < s(t). \end{cases}$$

Posons

$$\mathrm{Im}\ Z(\tau) = y(\tau)$$
$$\mathrm{Im}\ U(\tau) = w(\tau).$$

Alors, pour tout $\tau < t$, mais τ assez voisin de t, on a

$$|y(\sigma)| + |w(\sigma)| < s(t) < s(\sigma), \text{ pour tout } \sigma \in [\tau, t], \tag{46}$$

$$|y(\tau)| \leq |y| + \int_\tau^t |w(\sigma)| d\sigma, \tag{47}$$

$$|w(\tau)| \leq |w| + \int_\tau^t | \operatorname{Im} E^m(\sigma, Z(\sigma))| d\sigma. \tag{48}$$

D'autre part, pour tout σ dans $[\tau, t]$, τ assez voisin de t, on a, grâce à (46) et au point (18) de la proposition 2,

$$\begin{aligned} &| \operatorname{Im} E^m(\sigma, Z(\sigma))| \\ &\leq C_4 |y(\sigma)| \left(\|g^m(\sigma, .)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g^m(\sigma, .)\|_{s(\sigma)} \operatorname{Log} \frac{1}{|y(\sigma)|} \right). \end{aligned} \tag{49}$$

De nouveau, grâce au théorème de Liouville, on a

$$\|g^m(t, .)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}, \text{ pour tout } t, \tag{50}$$

et grâce au point (29) on a

$$\|g^m(\sigma, .)\|_{s(\sigma)} \leq \psi_n(T), \text{ pour tout } \sigma \leq T. \tag{51}$$

Posons

$$L = 2C_4 \max \left\{ \|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \psi_n(T) \right\},$$

$$\theta(r) = r(1 - \operatorname{Log} r), 0 < r \leq 1. \tag{52}$$

On déduit alors, de (49), (50) et (51),

$$| \operatorname{Im} E^m(\sigma, Z(\sigma))| \leq \frac{1}{2} L \theta(|y(\sigma)|), \text{ pour tout } \sigma \in [\tau, t]. \tag{52+}$$

Enfin, en additionnant membre à membre (47) et (48) et en tenant compte des faits que θ est une fonction croissante sur $[0, 1]$ et vérifie $\theta(r) \geq r$, on obtient, quitte à supposer $L \geq 2$,

$$|y(\tau)| + |w(\tau)| \leq |y| + |w| + L \int_\tau^t \theta\left(|y(\sigma)| + |w(\sigma)|\right) d\sigma. \tag{53}$$

On introduit la solution

$$s(t) = e \left(\frac{s}{e}\right)^{e^{Lt}}$$

de l'équation intégrale

$$s(\tau) = s(t) + L\int_{\tau}^{t} \theta(s(\sigma))\mathrm{d}_{\sigma}. \tag{54}$$

Par comparaison de (53) et (54) on a

$$|y| + |w| < s(t) \Longrightarrow |y(\tau)| + |w(\tau)| < s(\tau), \text{ pour tout } \tau \in [0,t]. \tag{54+}$$

En effet, supposons qu'il existe $t_0 < \tau < t$ tel que : $|y(\tau) + |w(\tau)| < s(\tau)$ et $|y(t_0)| + |w(t_0)| = s(t_0)$. En notant par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_-}$ la dérivèe à gauche et compte tenu de (45) et (52+), on a, pour τ dans $]t_0, t]$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_-}|y(\tau)| \geq -\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}y(\tau)\right| = -|w(\tau)|,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_-}|w(\tau)| \geq -|\operatorname{Im} E^m(\tau, Z(\tau))| \geq -\frac{1}{2}L\theta(|y(\tau)|).$$

Posons $h(\tau) = |y(\tau) + |w(\tau)$, on a, par addition des deux inégalités ci-dessus,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_-}h(\tau) \geq -|w(\tau)| - \frac{1}{2}L\theta(|y(\tau)|).$$

Comme, d'une part, θ est croissante et verifie $\theta(r) \geq r$ et, d'autre part, on suppose $L \geq 2$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_-}h(\tau) \geq -\left(1 + \frac{L}{2}\right)\theta(h(\tau)) \geq -L\theta(h(\tau)).$$

En intégrant cette inéquation entre t_0 et t on a

$$e^{-Lt} \operatorname{Log} \frac{h(t)}{e} \geq e^{-Lt_0} \operatorname{Log} \frac{h(t_0)}{e} = e^{-Lt_0} \operatorname{Log} \frac{s(t_0)}{e};$$

d'où, on tire

$$e^{-Lt} \operatorname{Log} \frac{h(t)}{2} \geq e^{-Lt_0} e^{Lt_0} \operatorname{Log} \frac{s}{e};$$

donc

$$\operatorname{Log} \frac{h(t)}{e} \geq e^{Lt} \operatorname{Log} \frac{s}{e}.$$

C'est à dire que $h(t) \geq s(t)$, ce qui contredit notre hypothèse de départ. En conclusion, les solutions de (45), sont bien définies sur $[0,t]$.

Donc, en particulier, on a

$$|\operatorname{Im} Z(0)| + |\operatorname{Im} U(0)| < s.$$

Par conséquent, pour tout t dans $[0,T]$, $f^{m+1}(t,.,.)$ solution de (44), se prolonge en une fonction holomorphe dans

$$D(s(t)) = \{(x+iy, v+iw) \in (\mathbb{R}^n_x + i\mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n_v + i\mathbb{R}^n); |y| + |w| < s(t)\},$$

car on a

$$f^{m+1}(t, x+iy, v+iw) = f_0(Z(0), U(0)), \ |y| + |w| < s(t). \tag{55}$$

D'où on tire facilement la majoration (31).

PREUVE DU POINT (32).

En vertu de (55) et de l'hypothèse (12) on a

$$|f^{m+1}(t, x+iy, v+iw)| \leq C_0(1 + |Z(0)|)^{-2\gamma}(1 + |U(0)|)^{-2\gamma}. \tag{56}$$

D'autre part, du système (45), on déduit

$$\begin{aligned} |U(\tau) - (v+iw)| &\leq \int_\tau^t \|E^m(\sigma,.)\|_{s(\sigma)} \mathrm{d}\sigma \\ &\leq M_2 T, \ \text{pour tout } \tau, t \in [0,T], \ \tau < t, \end{aligned} \tag{57}$$

$\left(\text{On rappelle que, } M_2 = C_3 C_1^{\frac{1}{n}} \psi_n(T)^{\frac{n-1}{n}}\right)$.

On a aussi, à partir de (45) et (57),

$$|Z(0) - (x+iy) + (v+iw)t| \leq M_2 T^2. \tag{58}$$

Compte tenu de (57) et de l'inégalité (27), on a

$$1 + |U(0)| \geq (1 + |v+iw|)(1 + M_2 T)^{-1},$$

d'où

$$(1 + |U(0)|)^{-2\gamma} \leq (1 + M_2 T)^{2\gamma}(1 + |v+iw|)^{-2\gamma}. \tag{59}$$

De même, compte tenu de (58), on a

$$\begin{aligned} (1 + |U(0)|)^{-2\gamma} &\leq (1 + M_2 T^2)^{2\gamma}(1 + |(x+iy) - (v+iw)t|)^{-2\gamma} \\ &\leq (1 + M_2 T^2)^{2\gamma}(1 + |(x+iy) - (v+iw)t|)^{-\gamma} \end{aligned}$$

et, en utilisant de nouveau (27), on a

$$(1 + |Z(0)|)^{-2\gamma} \leq (1 + M_2 T^2)^{2\gamma}(1 + T)^{\gamma}(1 + |x+iy|)^{-\gamma}(1 + |v+iw|)^{\gamma}. \tag{60}$$

Enfin, en combinant (56), (59) et (60), on a

$$|f^{m+1}(t, x+iy, v+iw)| \leq M_3(1+|x+iy|)^{-\gamma}(1+|v+iw|)^{-\gamma}, \quad |y|+|w| < s(t),$$

où $M_3 = C_0(1+T)^\gamma(1+M_2T)^{2\gamma}(1+M_2T_2)^{2\gamma}$.

Ceci achève la preuve de la proposition 3.

5ème étape. Estimation de $\frac{\partial f^m}{\partial t}$.

PROPOSITION 4. *Pour tout $\varepsilon > 0, \varepsilon < s(T)$, il existe une constante M_4, ne dépendant que de ε et des données, telle que*

$$|\frac{\partial f^m}{\partial t}(t, x+iy, v+iw)| \leq M_4$$

pour tout $(x+iy, w+iw) \in D(s(t)-\varepsilon)$, pour tout $\in [0, T]$.

PREUVE. Pour $|\text{ Im } Z| + |\text{ Im } U| < s(t)$, on a

$$\frac{\partial f^m}{\partial t} = -U \cdot \nabla_Z f^m - E^{m-1}(t, Z) \cdot \nabla_U f^m.$$

Compte tenu de (30), du théorème 2.2.3. (cf. [16]), de (32) et du fait que $\gamma > n$ et $|y|+|w| < s$, on déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < s(T)$, il existe une constante $K_1(\varepsilon)$, ne dépendant que de ε et des données, telle que

$$\left|\frac{\partial f^m}{\partial t}(t, x+iy, v+iw)\right| \leq |v+iw| \cdot |\nabla_Z f^m| + K_1(\varepsilon)$$

pour tout $(x+iy, v+iw) \in D(s(t)-\varepsilon)$, pour tout $t \in [0, T]$.

Donc pour montrer la proposition 4, il suffit de voir qu'il existe une constante $K_2(\varepsilon)$, ne dépendant que de ε et des données, telle que

$$|(v+iw)| \cdot |\nabla_Z f^m(t, x+iy, x+iw)| \leq K_2(\varepsilon)$$

pour tout $(x+iy, v+iw) \in D(s(t)-\varepsilon)$, pour tout $t \in [0, T]$.

Pour ce faire, on introduit de nouveau les courbes caractéristiques

$$(Z(\tau) = Z(\tau, t, x+iy, v+iw), \qquad U(\tau) = U(\tau, t, x+iy, v+iw)),$$

qui sont solutions de

$$\text{(61)} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\tau} = U(\tau) \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = E^{m-1}(\tau, Z(\tau)) \\ (Z(t), U(t)) = (x+iy, v+iw), \qquad |y|+|w| < s(t). \end{cases}$$

On notera

$$Z_0(\cdot) = Z(0, t, x+iy, v+iw),$$
$$U_0(\cdot) = U(0, t, x+iy, v+iw).$$

Compte tenu de (55), on a, par définition de f^m,

$$f^m(t, x+iy, v+iw) = f_0(Z_0(\cdot), U_0(\cdot)),$$

d'où, pour $j = 1, 2, \cdots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial z_j} f^m(t, Z, U) = \nabla_Z f_0(Z_0(\cdot), U_0(\cdot)) \cdot \frac{\partial}{\partial z_j} Z_0(\cdot) + \nabla_U f_0(Z_0(\cdot), U_0(\cdot)) \cdot \frac{\partial}{\partial z_j} U_0(\cdot).$$

Donc, en vertu des hypothèses (14), on a

$$|\nabla_Z f^m(t, x+iy, v+iw)| \leq C_2(1+|U_0(\cdot)|)^{-1}(|\nabla_Z Z_0(\cdot)| + |\nabla_Z U_0(\cdot)|).$$

D'autre part, compte tenu de (59) et de l'inégalité déjà utilisée (27), on a

$$|\nabla_Z f^m(t, x+iy, v+iw)| \leq C_2(1+M_2 T)(1+|v+iw|)^{-1} \ (|\nabla_Z Z_0(\cdot)| + |\nabla_Z U_0(\cdot)|),$$
$$\text{pout tout } (x+iy, v+iw) \in D(s(t)), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

On achève alors la preuve de la proposition à l'aide du lemme suivant.

LEMME 2. *Pour tout $\varepsilon > 0, \varepsilon < s(T)$, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$, ne dépendant que de ε et des données, telle que toute solution de (61) vérifie:*

$$|\nabla_Z Z_0(t, x+iy, v+iw)| \leq C(\varepsilon),$$
$$|\nabla_Z U_0(t, x+iy, v+iw)| \leq C(\varepsilon),$$
pour tout $(x+iy, v+iw) \in D(s(t)-\varepsilon)$, pour tout $t \in [0, T]$.

PREUVE DU LEMME 2. Pour $\tau < t$, on a, à partir du système (61),

$$\nabla_z Z(\tau) = 1 - \int_\tau^t \nabla_z U(\sigma) \mathrm{d}\sigma, \tag{62}$$

$$\nabla_z U(\tau) = -\int_\tau^t \nabla_Z E^{m-1}(\sigma, Z(\sigma)) \cdot \nabla_z Z(\sigma) \mathrm{d}\sigma. \tag{63}$$

Soit $\varepsilon > 0, \varepsilon < s(T)$. Puisque $\theta(r) = r(1 - \log r)$ est croissante sur $[0,1]$ et grâce à (53) et (54+), on a, si $|y| + |w| < s(t) - \varepsilon$,

$$|\operatorname{Im} Z(\tau)| + |\operatorname{Im} U(\tau)| < s(t) - \varepsilon + L \int_\tau^t \theta(s(\sigma)) \mathrm{d}\sigma;$$

et par définition même de la fonction $s(t)$, cf. (54), on déduit alors

$$|\text{ Im } Z(\tau)| + |\text{ Im } U(\tau)| < s(\tau) - \varepsilon, \text{ pour tout } \tau \leq t.$$

De ce fait et compte tenu de (19), (28), (29) et du théorèm 2.2.3. (cf. [16]), il existe une constante $K_3(\varepsilon)$, ne dépendant que de ε et des données, telle que

$$(64) \qquad \begin{aligned} |\nabla_z E^{m-1}(\sigma, Z(\sigma))| &\leq \|\nabla_z E^{m-1}(\sigma, .)\|_{s(\sigma)-\varepsilon} \\ &\leq K_3(\varepsilon), \text{ pour tout } \sigma \in [0, t]. \end{aligned}$$

En regroupant (62), (63) et (64), on a

$$|\nabla_z Z(\tau)| \leq 1 + K_3(\varepsilon)T \int_\tau^t |\nabla_z Z(\sigma)| \mathrm{d}\sigma.$$

Donc, grâce au lemme de Gronwall, il existe une constante $C(\varepsilon)$, ne dépendant que de ε et des données, telle que

$$|\nabla_z Z(\tau) \leq C(\varepsilon) \text{ pour tout } \tau \leq t, \ |y| + |w| < s(t) - \varepsilon.$$

Enfin, grâce à cette dernière inégalité, à (63) et (64), on obtient le lemme.

6ème étape. Convergence du schéma itératif.

Soit $T > 0, T < T^*$ si $n \geq 3$, et soit $\beta > 0$ tel que $\beta < s(T)$. Considérons

$$Q_{T,\beta} = [0, T] \times D(\beta).$$

En vertu des propositions 3 et 4, $f^m(t, x + iy, v + iw)$ ainsi que toutes ses dérivées partielles premières par rapport à $t, x_j, y_j, v_j, w_j, 1 \leq j \leq n$, sont bornées dans $Q_{T,\beta}$. Donc, il existe une sous-suite de $\{f^m\}$ (qui sera encore notée $\{f^m\}$) qui converge uniformément sur tout compact de $Q_{T,\beta}$. Notons $\tilde{f}$ cette limite. De la convergence uniforme, on déduit alors que:

(1°) Pour tout t dans $[0, T]$, $\tilde{f}(t, ., .)$ est analytique dans $D(s(t))$ et

$$|\tilde{f}(t, Z, U)| \leq M_3(1 + |Z|)^{-\gamma}(1 + |U|)^{-\gamma}, \text{ pour tout } (Z, U) \in D(s(t));$$

(2°) $g^m(t, x + iy) = \int f^m(t, x + iy, v)\mathrm{d}v, \ |y| < s(t)$,

converge aussi uniformèment sur tout compact de $[0, T] \times D^0(\beta)$ (quitte à en extraire une sous-suite) vers une fonctions $\tilde{g}$ qui vérifie:

$$\tilde{g}(t, x + iy)| \leq M_3'(1 + |x + iy|)^{-\gamma}, \text{ pour tout } (t, x + iy) \in [0, T] \times D^0(s(t)).$$

De plus, pour tout t dans $[0,T]$, $\tilde{g}(t,.)$ est analytique dans $D^0(s(t))$;

(3°) Enfin, grâce aux propriétés du noyau de Green K et au point (2°) précédent, de la suite

$$E^m(t,x+iy) = \int \nabla_{x'} K(x-x') g^m(t,x'+iy)\mathrm{d}x'$$

on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de $[0,T] \times D^0(\beta)$ vers une fonction $\tilde{E}$.

De même que ci-dessus, pour tout t dans $[0,T]$, $E(t,.)$ est analytique dans $D^0(s(t))$.

PROLOGUE

Comme les restrictions à $\operatorname{Im} Z = \operatorname{Im} U = 0$, de $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{E}$, vérifient le système de Vlassov-Poisson (cf. [3]), le théorème est démontré compte tenu de l'unicité des solutions classiques de (11).

REMARQUE. En dimension $n \geq 3$, Bardos et Degond [3] ont montré l'existence et l'unicité d'une solution classique et globale en temps (c'est à dire définie sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_v)$, en supposant la donnée initiale "f_0 assez petite"; cf. aussi [9] et [10].

En suivant les mêmes idées que ci-dessus, ainsi que celles de [3] et [10], on peut montrer que, pour tout $t \geq 0$, $f(t,.,.)$ se prolonge en une fonction analytique dans $D(s(t))$, pourvu que l'on suppose la donnée initiale f_0 telle que il existe $\varepsilon > 0$, assez petit, tel que

$$|f_0(Z,U) \leq \varepsilon(1+|Z|)^{-\gamma}(1+|U|)^{-\gamma}, \quad |\operatorname{Im} Z| + |\operatorname{Im} U| < s,$$

$$|\nabla_{Z,U} f_0(Z,U)| \leq \varepsilon(1+|Z|)^{-\gamma}(1+|U|)^{-\gamma-1}, \quad |\operatorname{Im} Z| + |\operatorname{Im} U| < s,$$

$$\sup_{|y|<s} \int\int |f_0(x+iy,v)|\mathrm{d}x\mathrm{d}v \leq \varepsilon C.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. A. ARSENEV, *Global existence of a weak solution of Vlassov's system of equations*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat Fiz. **15** (1975), 136-147.

[2] C. BARDOS - S. BENACHOUR - M. ZERNER, *Analyticité des solutions périodiques des équations d'Euler en dimension deux d'espace*, C.R. Ac. Sc. Paris, **282** (1976), 995-998.

[3] C. BARDOS - P. DEGOND, *Global existence for the Vlassov-Poisson equation in 3-space variables with small initial data* Ann. Inst. H. Poincaré (Analyse non linéaire) 2, **2** (1985), 101-118.

[4] J. Batt, *Global symmetric solution of the initial value problem of stellar dynamics*, J. Differential Equations, **25** (1977), 342-364.
[5] S. Benachour, *Analyticité des solutions des équations d'Euler*, Arch. Rational Mech. Anal., **71** (1979), 271-299.
[6] R. Courant - D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Interscience (1962).
[7] T. Kato, *On the classical solution of the two dimensional non-stationary Euler equation*, Arch. Rational Mech. Anal, **25** (1967), 188-200.
[8] P. Degond, *Rapport interne*, Centre de Mathématiques appliqueés, Ecole Polytechnique, Paris.
[9] S. Klainerman, *Long time behaviour of the solution of non-linear equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **78** (1982), 73-98.
[10] S. Klainerman - G. Ponce, *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations*, Comm. Pure and Appl. Math., **36** (1983), 133-141.
[11] L. Niremberg, *An abstract form of the non-linear Cauchy-Kowalewska theorem*, J. Differential Geom., **6** (1972), 561-576.
[12] F. Trèves, *An abstract nonlinear Cauchy-Kowalewska theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **150** (1970), 77-92.
[13] L.V. Ovsjannikov, *A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces*, Dokl. Akad. Baube. SSSR, **4** (1971) et Soviet Math., **12** (1971), 1497-1502.
[14] S. Ukai - T. Okabé, *On classical solution in the large in time of two-dimensional Vlassov's equation*, Osaka J. Math., **15** (1978), 245-261.
[15] S. Wollmann, *The Spherically Symmetric Vlassov-Poisson System*, J. Differential Equations, **35** (1980), 30-35.
[16] L. Hörmander, *Complex Analysis of Several Variables*, (D. Van Nostrand).

Univ. des Sciences et de la Technologie
Institut Mathematique
El-Alia B.P. N° 32
BAB EZZOUAR - ALGER, Algerie