ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

C. ZUILY

Sur la régularité des solutions non strictement convexes de l'équation de Monge-Ampère réelle

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 15, nº 4 (1988), p. 529-554

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1988_4_15_4_529_0>

Sur la régularité des solutions non strictement convexes de l'équation de Monge-Ampère réelle

C. ZUILY

0. - Introduction

L'équation de Monge-Ampère réelle, $\det(u_{ij}) = \psi$, dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a fait l'objet de très nombreux travaux dans le cas où la fonction ψ est strictement positive et la solution u strictement convexe, c'est-à-dire à hessien défini positif. Nous renvoyons au récent article de Caffarelli-Nirenberg-Spruck [1] et à sa bibliographie pour plus de détails. L'hypothèse de stricte convexité faite sur la solution signifie que le linéarisé de l'équation en une telle solution est un opérateur elliptique du second ordre, hypothèse essentielle dans tous les travaux traitant de la régularité ou de l'existence de solutions du problème de Dirichlet par exemple.

Très peu de résultats sont connus lorsque le second membre ψ peut s'annuler, les solutions u considérées étant alors supposées seulement convexes. Dans ce cas le linéarisé est un opérateur du second ordre à forme caractéristique non négative et nous possédons, au moins en ce qui concerne la régularité, des renseignements assez complets sur de tels opérateurs depuis les travaux de L. Hörmander et O.A. Oleinik-E.V. Radkevitch. S'inspirant de ces derniers travaux et en utilisant le calcul para-différentiel de J.M. Bony, C.J. Xu [2] a récemment démontré un théorème de régularité pour des équations non linéaires générales du second ordre $F(x, u, \mathrm{D}u, \mathrm{D}^2 u) = 0$, lorsque le linéarisé est à forme caractéristique non négative et vérifie les conditions d'algèbre de Lie de L. Hörmander. Le linéarisé dépendant de la solution, les hypothèses sont assez implicites et difficiles à expliciter en général. Cependant, dans le cas de l'équation de Monge-Ampère, ces conditions peuvent être précisées par un calcul exact des crochets. Cela fait l'objet du premier paragraphe de ce travail (Théorème 1.1). Cependant afin de ne pas alourdir le texte, nous nous sommes limités au calcul des crochets d'ordre inférieur ou égal à deux, mais les formules et la méthode permettent de calculer les crochets d'ordre supérieur. En particulier, si le Hessien de ψ est défini positif aux points de Ω où ψ s'annule et si

Pervenuto alla Redazione il 25 Settembre 1987 ed in forma definitiva il 31 Marzo 1988.

u est une fonction convexe de classe $C^{\rho}_{\text{loc}}(\Omega)$, avec $\rho > 4$, alors $u \in C^\infty(\Omega)$. (Ce résultat peut être aussi déduit du théorème de [2]). Nous donnons ensuite un exemple montrant que ce résultat est faux dans $\mathbb{R}^n$ si la solution est supposée seulement de classe $C^{2+\varepsilon}$ (Proposition 1.3). Cependant, le cas où $d^2\psi$ est défini positif est en quelque sorte un cas extrême puisque alors les zéros de la fonction ψ sont isolés. A l'autre extrême, si ψ s'annule sur un petit ouvert on ne peut espérer aucun résultat de régularité. C'est pourquoi nous nous sommes posés la question de savoir sur quels ensembles ψ pouvait s'annuler tout en possédant la propriété que toutes ses solutions (a priori assez régulières) sont C^∞. C'est en termes négatifs que nous répondrons dans les cas particulier où $\psi^{-1}(0)$ est un plan de $\mathbb{R}^n$ (Proposition 2.1). En dimension 2 le résultat est plus précis et affirme que pour toute fonction $\psi \geq 0$, analytique au voisinage de l'origine, et telle que $\psi^{-1}(0)$ est un hyperplan, il existe pour tout $k \geq 2$ une solution locale de l'équation de Monge-Ampère, qui soit convexe, C^k et non C^{k+1} près de l'origine (Théorème 2.2).

1. - Régularité locale des solutions

1.1. *Notations*

On considère dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ l'équation

$$\det(u_{ij}) = \psi. \tag{1.1}$$

Ici u désigne une fonction réelle de classe C^2 et l'on a noté $u_{ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ et det la fonction déterminant. Nous noterons également:

$$\Sigma_\psi = \{x \in \Omega : \psi(x) = d\psi(x) = 0\}.$$

On désignera par $\mathbf{P}_u$ le linéarisé de l'équation (1.1) en une solution u, c'est-à-dire, en notant par F la fonction déterminant,

$$\mathbf{P}_u = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\beta}}\,(u_{ij})\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{1.2}$$

Il est facile de voir que $\dfrac{\partial F}{\partial u_{\alpha\beta}}\,(u_{ij})$ est le cofacteur de l'élément $u_{\alpha\beta}$ de la matrice (u_{ij}). Nous noterons H la matrice (u_{ij}), $\tilde{H}$ la matrice des cofacteurs et, pour $1 \leq \alpha \leq n$, ℓ_α la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne de $\tilde{H}$.

On ne considérera que les solutions convexes de l'équation (1.1), c'est-à-dire

$$\text{la matrice } (u_{ij}) \text{ est non négative dans } \Omega, \tag{1.3}$$

ce qui nécessitera $\psi \geq 0$.

1.2. *Résultats et exemples*

Le résultat principal de ce paragraphe est le:

THÉORÈME 1.1. *Supposons* $\psi \in C^\infty(\Omega)$ *et* $\psi \geq 0$. *Soit* $u \in C^\rho_{\text{loc}}(\Omega)$, $\rho > 4$, *une solution réelle et convexe de l'équation* (1.1). *Supposons l'une des conditions suivantes équivalentes satisfaite*:

(c) *pour tout* $x \in \Sigma_\psi$, *existe* $\alpha \in \{1, 2, \cdots, n\}$ t.q. $< d^2\psi(x)\ \ell_\alpha,\ \ell_\alpha > \neq 0$

(c)′ *pour tout* $x \in \Sigma_\psi$, $\mathbf{P}_u\psi(x) \neq 0$.

Alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Remarques et exemples 1.2.

a) Il est naturel qu'il n'y ait pas de condition en dehors de Σ_ψ puisqu'en ces points u est strictement convexe et que l'équation (1.1) est elliptique sur de telles fonctions.

b) Supposons que pour x dans Σ_ψ, la matrice de $d^2\psi(x)$ soit définie positive. On peut alors montrer que la condition (c) est toujours vérifiée pour $u \in C^4(\Omega)$, (car il existe $\alpha \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\ell_\alpha \not\equiv 0$). Le résultat de régularité qui en découle peut aussi se déduire du Théorème de [2].

Ceci dit, il faut remarquer que la condition de régularité *a priori*, $u \in C^4$, faite ci-dessus est importante. En effet on a la:

PROPOSITION 1.3. *Il existe des fonctions* ψ *de classe* C^∞ *dans* $\mathbb{R}^n$, $\psi \geq 0$ *et* $d^2\psi(x)$ *définie positive, telles que l'équation* (1.1) *possède des solutions convexes* u $C^{2+\varepsilon}$ *et non* C^3.

c) Considérons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $u_{11}u_{22} - u_{12}^2 = x_1^2$. La condition se traduit par $u_{22}(0, x_2) \neq 0$. Des solutions vérifiant cette condition existent, par exemple $u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\ x_2^2 + \frac{1}{12}\ x_1^4$.

d) Lorsque Σ_ψ est une hypersurface donnée par une équation $f = 0$, la condition (c) exprime que les champs de vecteurs

$$\mathbf{X}_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}}\ \frac{\partial}{\partial x_j},\quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

ne sont pas tous tangents à cette hypersurface.

1.3. *Preuve des résultats*

Nous utiliserons dans la preuve du Théorème 1.1 un résultat de C.J. Xu [2] que nous commençons par rappeler.

On considère une équation aux dérivées partielles non linéaire dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$F(x, u, \mathrm{D}u, \mathrm{D}^2 u) = 0, \tag{1.4}$$

où F est une fonction réelle et C^∞ de ses arguments. On notera par L le linéarisé de cette équation en une solution u, i.e.

$$\mathrm{L} = \sum_{j,k=1}^{n} a_{kj}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \text{ termes d'ordre } \leq 1, \tag{1.5}$$

où $a_{kj}(x) = \frac{\partial F}{\partial u_{kj}} (x, u(x), \mathrm{D}u(x), \mathrm{D}^2 u(x))$.

On considère les symboles:

$$g_j(x, \xi) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x)(i\xi_k), \quad j = 1, \cdots, n.$$

Etant donné un multi-indice $I = (i_1, \cdots, i_k)$, $|I| = k$, $1 \leq i_j \leq n$, on note

$$g_I(x, \xi) = (-i)^{|I|-1} \{g_{i_1}, \{g_{i_2}, \cdots, \{g_{i_{k-1}}, g_{i_k}\}\} \cdots\},$$

où $\{\ ,\ \}$ désigne le crochet de Poisson.

Le résultat suivant est un cas particulier du Théorème de [2].

THÉORÈME 1.4. *Soit u une solution réelle de l'équation* (1.4) *telle que $\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x)\xi_k\xi_j \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe un entier $r \geq 0$ tel que u soit de classe $C^\rho_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, avec $\rho > \mathrm{Max}(r+2, 4)$, et de plus*

$$\begin{gathered} \textit{pour tout } K \subset\subset \Omega \quad \textit{existe } C_K > 0: \\ \sum_{|I| \leq r} |g_I(x, \xi)|^2 \geq C_K\ |\xi|^2, \textit{ pour tout } (x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Notons que la condition (1.6) exprime que, parmi les champs de vecteurs

$$\mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \; 1 \leq j \leq n,$$

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j], \cdots, [\mathbf{X}_{i_1}, [\mathbf{X}_{i_2}, \cdots, [\mathbf{X}_{i_{k-1}}, \mathbf{X}_{i_k}] \cdots] \cdots,$$

en tout point de Ω il y en a n qui sont linéairement indépendants. Dans le cas d'une équation linéaire le Théorème 1.4 n'est rien d'autre que l'extension donnée par O.A. Oleinik-E.V. Radkevitch du théorème de L. Hörmander sur les "sommes de carrés".

Passons à la preuve du Théorème 1.1.

A. - *Calcul des crochets d'ordre* ≤ 2

On considère une solution $u \in C^4$ de l'équation (1.1) et on désigne par F la fonction déterminant. Avec la notation

$$\mathbf{X}_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}} \left(u_{ij}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq \alpha \leq n,$$

on a la:

PROPOSITION 1.5. *Pour* $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$

$$\psi[\mathbf{X}_\gamma,\ [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta]] = (\mathbf{X}_\gamma \mathbf{X}_\alpha \psi)\mathbf{X}_\beta - (\mathbf{X}_\gamma \mathbf{X}_\beta \psi)\mathbf{X}_\alpha. \tag{1.7}$$

PREUVE. On commence par calculer les crochets du premier ordre:

$$(1.8)\begin{cases} [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta] = \displaystyle\sum_{j,\ell=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial u_{\beta \ell}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right] = \sum_{k=1}^{n} A_{k\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \text{où} \\ A_{k\alpha\beta} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha \ell}} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u_{\beta k}\ u_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial u_{\beta \ell}} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u_{\alpha k}\ u_{ij}}\right) \left(u_{ij}\right) \cdot u_{ij\ell}. \end{cases}$$

LEMME 1.6.

$$\psi \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij} \partial u_{pq}} \left(u_{ij}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{pq}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial u_{ip}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{qj}}\right) \left(u_{ij}\right). \tag{1.9}$$

Supposons un instant ce résultat prouvé. De (1.8) et (1.9) on déduit:

$$\begin{aligned} \psi\ A_{k\alpha\beta} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} & \left\{\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha \ell}} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{\beta k}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial u_{i\beta}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{kj}}\right)\right. \\ & \left. - \frac{\partial F}{\partial u_{\beta \ell}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha k}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial u_{i\alpha}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{kj}}\right) \cdot u_{ij\ell}\right\}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \psi\ A_{k\alpha\beta} &= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \cdot u_{ij\ell}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha \ell}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\beta k}} - \frac{\partial F}{\partial u_{\beta \ell}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha k}}\right) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{\beta \ell}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{i\alpha}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{kj}} - \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha \ell}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{i\beta}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{kj}}\right) u_{ij\ell} \\ &= (1) + (2). \end{aligned}$$

Le terme (2) est nul car il s'écrit:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{kj}} \sum_{i,\ell=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{\beta\ell}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{i\alpha}} - \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\ell}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{i\beta}} \right) u_{ij\ell}$$

et que $\frac{\partial F}{\partial u_{\beta\ell}} = \frac{\partial F}{\partial u_{\ell\beta}}$, $\frac{\partial F}{\partial u_{i\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha i}}$, $u_{ij\ell} = u_{i\ell j} = u_{\ell ij}$.

D'autre part, en dérivant l'équation $F(u_{ij}) = \psi$ par rapport à x_ℓ, on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\ell} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} u_{ij\ell}.$$

On obtient alors:

$$\psi \; A_{k\alpha\beta} = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\ell}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\beta k}} - \frac{\partial F}{\partial u_{\beta\ell}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha k}} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_\ell}. \tag{1.10}$$

On déduit alors de (1.8) et (1.10)

$$\psi[\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta] = (\mathbf{X}_\alpha \psi)\mathbf{X}_\beta - (\mathbf{X}_\beta \psi)\mathbf{X}_\alpha. \tag{1.11}$$

Remarquons que (1.9) et (1.10) impliquent également

$$[\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta] = \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial u_{\ell\alpha} \partial u_{\beta k}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.12}$$

PREUVE DU LEMME 1.6. Soit (p, q) un indice fixé. Notant H la matrice hessienne de u, i.e. $H = (u_{ij})$, et $\tilde{H}$ la matrice des cofacteurs, i.e. $\tilde{H} = (\frac{\partial F}{\partial u_{ij}})$, dérivons l'identité

$$\tilde{H} H = \det \, H \cdot Id = F \cdot Id$$

par rapport à u_{pq}. Il vient

$$\tilde{H}' H + \tilde{H} H' = (F \cdot Id)'.$$

Multiplions cette égalité, à droite, par $\tilde{H}$ et utilisons le fait que

$$H \tilde{H} = F \cdot Id = \psi \cdot Id.$$

Il vient

$$\psi \tilde{H}' = (F \cdot Id)' \tilde{H} - \tilde{H} H' \tilde{H} = (1) - (2).$$

Le terme d'indice (i, j) du membre de gauche de cette égalité vaut

$$\psi \; \frac{\partial}{\partial u_{pq}} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \; (\mathrm{D}^2 u) \right) = \psi \; \frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij} \partial u_{pq}} \; (\mathrm{D}^2 u).$$

D'autre part, la matrice $(F \cdot Id)'$ étant la matrice diagonale $\frac{\partial F}{\partial u_{pq}} \cdot Id$, le terme général de la matrice (1) s'écrit $\frac{\partial F}{\partial u_{pq}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}$.

Ensuite, la matrice H' ayant pour terme général α_{rs}, avec $\alpha_{rs} = 1$ si $r = p$, $s = q$ et $\alpha_{rs} = 0$ sinon, celui de $H'\tilde{H}$ est donc

$$\beta_{k\ell} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks} \frac{\partial F}{\partial u_{s\ell}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq p \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_{q\ell}} & \text{si } k = p. \end{cases}$$

Le terme d'indice (i, j) de la matrice (2) est donc

$$\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{i\ell}} \beta_{\ell j} = \frac{\partial F}{\partial u_{ip}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{qj}}.$$

Passons au calcul du commutateur d'ordre deux. D'après (1.11) on peut écrire:

$$\begin{aligned}[\mathbf{X}_\gamma, \psi[\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta]] = [\mathbf{X}_\gamma, (\mathbf{X}_\alpha\psi)\mathbf{X}_\beta - (\mathbf{X}_\beta\psi)\mathbf{X}_\alpha] = (\mathbf{X}_\gamma\mathbf{X}_\alpha\psi)\mathbf{X}_\beta \\ + (\mathbf{X}_\alpha\psi)\ [\mathbf{X}_\gamma, \mathbf{X}_\beta] - (\mathbf{X}_\gamma\mathbf{X}_\beta\psi)\mathbf{X}_\alpha - (\mathbf{X}_\beta\psi)\ [\mathbf{X}_\gamma, \mathbf{X}_\alpha].\end{aligned}$$

D'autre part

$$[\mathbf{X}_\gamma, \psi[\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta]] = (\mathbf{X}_\gamma\psi)\ [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta] + \psi[\mathbf{X}_\gamma, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta]].$$

On en déduit:

$$\psi[\mathbf{X}_\gamma, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta]] = (\mathbf{X}_\gamma\mathbf{X}_\alpha\psi)\mathbf{X}_\beta - (\mathbf{X}_\gamma\mathbf{X}_\beta\psi)\mathbf{X}_\alpha + R$$

où

$$R = (\mathbf{X}_\alpha\psi)\ [\mathbf{X}_\gamma, \mathbf{X}_\beta] - (\mathbf{X}_\beta\psi)\ [\mathbf{X}_\gamma, \mathbf{X}_\alpha] - (\mathbf{X}_\gamma\psi)\ [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta].$$

Calculons ψR en utilisant (1.11). On a:

$$\begin{aligned}\psi R = (\mathbf{X}_\alpha\psi)\ (\mathbf{X}_\gamma\psi)\mathbf{X}_\beta - (\mathbf{X}_\alpha\psi)(\mathbf{X}_\beta\psi)\mathbf{X}_\gamma - (\mathbf{X}_\beta\psi)\ (\mathbf{X}_\gamma\psi)\mathbf{X}_\alpha \\ + (\mathbf{X}_\beta\psi)\ (\mathbf{X}_\alpha\psi)\mathbf{X}_\gamma - (\mathbf{X}_\gamma\psi)\ (\mathbf{X}_\alpha\psi)\mathbf{X}_\beta + (\mathbf{X}_\gamma\psi)\ (\mathbf{X}_\beta\psi)\mathbf{X}_\alpha = 0\end{aligned}$$

d'où $R = 0$ et (1.7) est démontrée. ∎

B. - *Preuve du Théorème* 1.1

L'hypothèse (1.3) de convexité de u implique que le symbole du linéarisé en u de l'équation est une forme quadratique non négative. Nous allons montrer que la condition (c) du Théorème (1.1) implique que la condition (1.6) du Théorème 1.4. est satisfaite avec $r = 2$. Autrement dit que la condition (c) entraîne qu'en tout point de Ω, parmi les crochets d'ordre ≤ 2, il y en a n qui sont linéairement indépendants. On peut écrire:

$$\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}_n = \det\,(\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n)\ e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{1.13}$$

où (e_j) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'autre part

$$\det(\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}}\right) = \det\,\tilde{H} = (\det\,H)^{n-1} = \psi^{n-1}$$

puisque $\tilde{H}$ est la matrice des cofacteurs. D'où

$$\mathbf{X}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}_n = \psi^{n-1}\ e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \tag{1.14}$$

Soit $\alpha \in \{1, 2, \cdots, n\}$, posons:

$$\Delta_\alpha = \mathbf{X}_\alpha \wedge \psi[\mathbf{X}_\alpha,\ [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_1]] \wedge \cdots \wedge \psi[\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_n]] \tag{1.15}$$

où, dans le membre de droite le terme nul $\psi[\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\alpha]]$ n'a pas été écrit. En utilisant la Proposition 1.5, on peut écrire:

$$\Delta_\alpha = \mathbf{X}_\alpha \wedge \{(\mathbf{X}_\alpha^2\psi)\mathbf{X}_1 - (\mathbf{X}_\alpha\mathbf{X}_1\psi)\mathbf{X}_\alpha\} \wedge \cdots \wedge \{(\mathbf{X}_\alpha^2\psi)\ \mathbf{X}_n - (\mathbf{X}_\alpha\mathbf{X}_n\psi)\mathbf{X}_\alpha\}.$$

En utilisant (1.14) on en déduit, avec $\varepsilon = \mp 1$,

$$\Delta_\alpha = \varepsilon(\mathbf{X}_\alpha^2\psi)^{n-1}\mathbf{X}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}_n = \varepsilon(\mathbf{X}_\alpha^2\psi)^{n-1}\ \psi^{n-1}\ e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \tag{1.16}$$

D'autre part (1.15) implique

$$\Delta_\alpha = \det(\mathbf{X}_\alpha,\ \psi[\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_1]], \cdots, \psi[\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_n]])\ e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

d'où

$$\Delta_\alpha = \psi^{n-1}\ \det(\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_1]], \cdots, [\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_n]])\ e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \tag{1.17}$$

De (1.16) et (1.17) on déduit

$$\det(\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_1]], \cdots, [\mathbf{X}_\alpha, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_n]]) = \varepsilon(\mathbf{X}_\alpha^2\psi)^{n-1}. \tag{1.18}$$

Ensuite, $\mathbf{X}_\alpha^2\psi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\ell}} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_\ell}\right)$,

$$\mathbf{X}_\alpha^2\psi = \sum_{j,\ell=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\ell}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_\ell} + \sum_{j,\ell=1}^n \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\ell}}.$$

En tout point de Σ_ψ on a donc, si $\ell_\alpha = \left(\dfrac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}}\right)$, $j = 1 \cdots n$,

$$\mathbf{X}_\alpha^2 \psi(x) = < d^2\psi(x)\ \ell_\alpha,\ \ell_\alpha > . \tag{1.19}$$

En vertu de (1.18) et (1.19), la condition (c) implique que l'on peut appliquer le Théorème 1.4 avec $r = 2$.

Montrons l'équivalence des conditions (c) et (c)$'$.

En utilisant le Lemme 1.6, on peut écrire:

$$\mathbf{X}_\alpha^2 \psi = \sum_{j,\ell} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\alpha}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{j\ell}} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_\ell} + \psi \sum_{j\ell} \frac{\partial^2 F}{\partial u_{\alpha\alpha} \partial u_{j\ell}} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_\ell} + O(\mathrm{d}\psi).$$

Par conséquent en tout point de Σ_ψ on a:

$$\mathbf{X}_\alpha^2 \psi(x) = \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\alpha}} \cdot \mathbf{P}\psi(x) \tag{1.20}$$

où $\mathbf{P}$ est le linéarisé en u de l'équation.

Supposons (c) satisfaite. On déduit de (1.19) et (1.20) que $\mathbf{P}\psi \neq 0$, i.e. (c)$'$ est satisfaite. Inversement, si $\mathbf{P}\psi \neq 0$ sur Σ_ψ, nous allons montrer que nécessairement il existe α tel que $\dfrac{\partial F}{\partial u_{\alpha\alpha}} \neq 0$. En effet si $\dfrac{\partial F}{\partial u_{\alpha\alpha}} = 0$ en un point de Σ_ψ, pour $\alpha = 1, 2, \cdots, n$, d'après la positivité de la matrice $\tilde{H}$ on a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\beta}}\right)^2 \leq \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\alpha}} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\beta\beta}},$$

et donc $\dfrac{\partial F}{\partial u_{\alpha\beta}} = 0$ en ce point, pour tous α et $\beta = 1, \cdots, n$. Nous allons montrer que cela implique que $\mathrm{d}^2\psi(x) = 0$ en ce point. En effet:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\ell} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\ u_{ij\ell},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\ell \partial x_k} = \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right) u_{ij\ell} + \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\ u_{ij\ell k} \right\}.$$

Or pour forme quadratique non négative $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ on a

$$\left(\sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\ v_{ij}\right)^2 \leq M \sum_{i,j,s} a_{ij}\ v_{si}\ v_{sj}.$$

Posons $a_{ij} = \dfrac{\partial F}{\partial u_{ij}}$, $v = u_\ell$, il vient

$$\left(\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right) u_{ij\ell} \right)^2 \leq M \sum_{i,j,s} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} u_{i\ell s} u_{j\ell s}.$$

On voit donc puisque, $\dfrac{\partial F}{\partial u_{\alpha\beta}} = 0$, pour tous α, pour tous β, que $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_\ell \partial x_k} = 0$ en un point de Σ_ψ, ce qui contredit la condition (c)$'$.

Il existe donc α tel que $\dfrac{\partial F}{\partial u_{\alpha\alpha}} \neq 0$ sur Σ_ψ. On conclue à partir de (1.19) et (1.20).

REMARQUE 1.7. On peut montrer que la condition (c) est en fait nécessaire et suffisante pour que les crochets d'ordre ≤ 2 engendrent l'algèbre de Lie. En effet considérons les champs $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n$, $[\mathbf{X}_\gamma, [\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta]]$, $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$ (les champs $[\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta]$ sont identiquement nuls sur Σ_ψ d'après (1.12)). Prenons en n parmi ceux-là dont k champs $\mathbf{X}_i$. Un calcul analogue à celui fait ci-dessus montre que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{X}_{a_1}, \cdots, \mathbf{X}_{a_k}, [\mathbf{X}_{\gamma_1}, [\mathbf{X}_{\alpha_1}, \mathbf{X}_{\beta_1}]], \cdots, [\mathbf{X}_{\gamma_{n-k}}, [\mathbf{X}_{\alpha_{n-k}}, \mathbf{X}_{\beta_{n-k}}]]) \\ = \psi^{k-1} G(\psi), \end{aligned}$$

où $G(\psi)$ est une fonction C^∞. Par conséquent, si $k \geq 2$, ces champs sont dépendants en tout point de Σ_ψ. On doit donc prendre $k = 1$.

Ensuite, grâce à la positivité de la matrice $\tilde{H}$ on voit que si $\dfrac{\partial F}{\partial u_{\alpha\alpha}} = 0$, pour tous α, ou si $\mathbf{P}\psi = 0$ en un point de Σ_ψ, alors $\det(\mathbf{X}_a, [\mathbf{X}_{\gamma_i}, [\mathbf{X}_{\beta_i}, \mathbf{X}_{\alpha_i}]$, $i = 1, \cdots, n-1)$, sont nuls sur Σ_ψ et donc l'algèbre de Lie n'engendre pas.

C. - *Preuve de la Proposition* 1.3

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ la fonction $u(x) = |x|^{2+\alpha}$, avec $\alpha = \frac{2}{n}$. Comme u est radiale on a alors:

$$\det(u_{ij}) = \left(\frac{u'(r)}{r} \right)^{n-1} u''(r) = (2+\alpha)^n \ (1+\alpha) \ r^{n\alpha} = c_n |x|^2.$$

2. - Résultats de non régularité

On s'intéresse dans ce paragraphe au cas où le second membre ψ de l'équation (1.1) s'annule sur des plans dans $\mathbb{R}^n$ de sorte que la forme quadratique $\mathrm{d}^2\psi$ n'est plus définie positive. On montre que les solutions ne sont en général pas toutes régulières.

On commence par un résultat dans $\mathbb{R}^n$ que l'on précisera dans le cas de $\mathbb{R}^2$. Les singularités des solutions seront concentrées sur des plans Σ de dimension $n-k$, i.e.

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\}, \quad 1 < k \leq n-1,$$

où les f_i sont des formes linéaires à différentielles indépendantes.

PROPOSITION 2.1. *Soit dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un plan Σ de dimension $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, et $x_0 \in \Sigma$. Il existe des fonctions $\psi \geq 0$, analytiques au voisinage de x_0, avec $\Sigma = \psi^{-1}(0)$, et telles que l'équation* (1.1) *possède des solutions u convexes, de classe C^2 mais non C^3 près de x_0.*

PREUVE. Par changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \cdots = x_k = 0\}.$$

Les fonctions u et ψ dépendront, dans $\mathbb{R}^n$, seulement des $k+1$ premières variables $x_1, \cdots, x_{k+1}$. On peut donc supposer dans la Proposition que $k = n-1$. On posera $x = (x', x_n)$, avec $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$, et on considère la fonction $u(x) = |x'|^{2+\alpha}\ g(x_n)$, où $\alpha = \frac{2}{n}$ et g est une solution près de l'origine de l'équation

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} (\alpha+1)g\ g'' - (\alpha+2)g'^2 = (2+\alpha)^{1-n} \\ g(0) = 1 \quad g'(0) = 1. \end{cases}$$

Nous allons calculer $\det(u_{ij})$. On a:

$$\begin{array}{ll} 1 \leq i \neq j \leq n-1 & u_{ij} = \alpha(2+\alpha)x_i x_j |x'|^{\alpha-2} g \\ 1 \leq j \leq n-1 & u_{jj} = (2+\alpha)g\ \left(|x'|^{\alpha} + \alpha x_j^2 |x'|^{\alpha-2}\right) \\ 1 \leq j \leq n-1 & u_{jn} = (2+\alpha)x_j\ |x'|^{\alpha} g' \\ & u_{nn} = |x'|^{2+\alpha}\ g''. \end{array}$$

Tout d'abord il est facile de voir que $\det(u_{ij})$ est homogène de degré $2+n\alpha$ en x'. En effet en écrivant le degré d'homogénéité de chacun des termes on obtient:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \cdots\cdots & \alpha & 1+\alpha \\ \alpha & \alpha & \cdots\cdots & \alpha & 1+\alpha \\ \vdots & & & & \\ \alpha & \alpha & \cdots\cdots & \alpha & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha & \cdots\cdots & 1+\alpha & 2+\alpha \end{vmatrix}.$$

Si $\ell_1, \cdots, \ell_n$ désignent les n lignes, Δ est une somme de termes de la forme $a_{i_1} a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$, où $a_{i_1} \in \ell_1, \cdots, a_{i_n} \in \ell_n$, avec $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n$. Si a_{i_n} est le dernier terme de ℓ_n, il est homogène de degré $2+\alpha$, les autres sont parmi les $n-1$ premiers termes des lignes ℓ_j, $1 \le j \le n-1$, et donc homogènes de degré α. Le produit est donc homogène de degré $2+\alpha+(n-1)\alpha = 2+n\alpha$. Si a_{i_n} est entre le premier et le $(n-1)^{\text{ème}}$ terme de ℓ_n, il est homogène de degré $1+\alpha$; parmi les autres, un est forcément le dernier et les $n-2$ autres entre le premier et le $(n-1)^{\text{ème}}$; au total l'homogénéité est $1+\alpha+1+\alpha+(n-2)\alpha$, c'est-à-dire $2+n\alpha$. Il suffit donc de calculer Δ pour $|x'|=1$. Ensuite on peut mettre $(2+\alpha)\cdot g$ en facteur dans chaque ligne puis $\frac{g'}{g}$ dans la dernière ligne et la dernière colonne. Il vient:

$$\Delta = (2+\alpha)^n \; g^{n-2} g'^2$$
$$\begin{vmatrix} 1+\alpha x_1^2 & \alpha x_1 x_2 & \alpha x_1 x_3 \cdots \alpha x_1 x_{n-1} & x_1 \\ \alpha x_2 x_1 & 1+\alpha x_2^2 & \alpha x_2 x_3 \cdots \alpha x_2 x_{n-1} & x_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha x_{n-1} x_1 & \alpha x_{n-1} x_2 & \cdots\cdots 1+\alpha x_{n-1}^2 & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots\cdots \quad x_{n-1} & A \end{vmatrix}$$

où $A = \frac{1}{2+\alpha} \frac{gg''}{g'^2}$.

On va noter $\Delta_n(\lambda, x_1, \cdots, x_{n-1})$ le déterminant obtenu en remplaçant dans le déterminant ci-dessus $1+\alpha x_j^2$ par $\lambda+\alpha x_j^2$, $1 \le j \le n-1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Delta(\lambda, x')$ est donc un polynôme en λ de degré $n-1$, le coefficient de λ^{n-1} étant A, le coefficient de λ^{n-2} étant $(\alpha A - 1)\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = \alpha A - 1$. On aura:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \Delta = (2+\alpha)^n \; g^{n-2} \; g'^2 \; \Delta_n(1, x') \\ \Delta_n(\lambda, x') = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-3} \frac{\lambda^j}{j!} \; \Delta_n^{(j)} \; (0, x') + (\alpha A - 1)\lambda^{n-2} + A \; \lambda^{n-1}. \end{cases}$$

On va montrer que $\Delta_n^{(j)}(0, x') = 0$, $0 \le j \le n-3$.

En effet on peut écrire:

$$\Delta_n'(\lambda, x') = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{n-1} \; (\lambda; x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{n-1}),$$

où $\Delta_{n-1}(\lambda, x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{n-1})$ a la même forme que Δ_n mais possède $n-1$ lignes et colonnes. En fait c'est exactement Δ_n auquel on a enlevé la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne. De même $\Delta^{(j)}$ $(\lambda, x_1, \cdots, x_{n-1})$ est une somme finie de déterminants obtenus à partir de Δ_n en enlevant j lignes et j colonnes de mêmes indices. Lorsque $j \le n-3$, il reste à un tel déterminant au moins 3 lignes et trois colonnes. Considérons un tel déterminant en $\lambda = 0$. Supposons qu'il reste les lignes d'indices $i_1, \cdots, i_k, n$, avec $k = n-1-j$. Il est de la forme:

$$\begin{vmatrix} \alpha x_{i_1}^2 & \alpha x_{i_1} x_{i_2} & \cdots & \alpha x_{i_1} x_{i_k} & x_{i_1} \\ \alpha x_{i_2} x_{i_1} & \alpha x_{i_2}^2 & \cdots & \alpha x_{i_2} x_{i_k} & x_{i_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha x_{i_k} x_{i_1} & \alpha x_{i_k} x_{i_2} & \cdots & \alpha x^2 i_k & x_{i_k} \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_k} & A \end{vmatrix} .$$

Un tel déterminant est nul puisque notant $\ell_1, \cdots, \ell_{k+1}$ ses lignes on a $\ell_j = \alpha x_{i_j} \ell$, $1 \leq j \leq k$, avec $\ell = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}, 1)$.

On déduit de (2.2) que $\Delta_n(\lambda, x') = (\alpha A - 1)\lambda^{n-2} + A\lambda^{n-1}$ et

$$\Delta = (2+\alpha)^n g^{n-2} g'^2 [(\alpha A - 1) + A] = (2+\alpha)^n g^{n-2} g'^2 \left[\frac{\alpha+1}{\alpha+2} \cdot \frac{g\ g''}{g'^2} - 1 \right],$$

d'où

$$\Delta = (2+\alpha)^{n-1}\ g^{n-2} [(\alpha+1) g\ g'' - (\alpha+2) g'^2]$$

et

$$\psi = \det\ (u_{ij}) = g^{n-2} |x'|^4. \tag{2.3}$$

En prenant $n\alpha = 2k$, avec k non multiple de n, obtient une solution plus régulière mais non C^∞. ∎

Dans le cas de la dimension $n = 2$ nous allons préciser de manière substantielle la Proposition 2.1.

THÉORÈME 2.2. *Soit Σ une droite dans $\mathbb{R}^2$ et $x_0 \in \Sigma$. Soit ψ une fonction analytique près de x_0, $\psi \geq 0$, avec $\Sigma = \psi^{-1}(0)$. Soit k un entier, $k \geq 2$. Il existe alors, au voisinage de x_0, une fonction u convexe, de classe C^k mais non C^{k+1}, solution de l'équation* (1.1) *près de x_0.*

PREUVE. Comme précédemment on peut supposer $\Sigma = \{x_1 = 0\}$. La démonstration consistera à obtenir tout d'abord une solution formelle par superposition de solutions puis à prouver la convergence. On notera dans ce qui suit $F(u) = F(u_{ij}) = \det(u_{ij})$.

LEMME 2.3. *Soient u^j, $0 \leq j \leq N$, $N \geq 2$, des fonctions réelles de classe C^2 et $\mathbf{L}_{u^j}$ l'opérateur linéarisé en u^j, i.e. $\mathbf{L}_{u^j} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\beta}} (u^j) \partial_\alpha \partial_\beta$. On a alors*

$$F\left(\sum_{j=0}^{N} u^j \right) = \sum_{j=0}^{N} F(u^j) + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=k+1}^{N} \mathbf{L}_{u^k}\ (u^j). \tag{2.4}$$

PREUVE. Ce lemme est facile, il résulte d'une part du fait que $F(u)$ est homogène de degré 2 par rapport à u, d'où $\sum_{i,j=1}^{n} u_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} (u) = \mathbf{L}_u(u) = 2F(u)$, et d'autre part du fait que, lorsque $n = 2$, on a $\mathbf{L}_u(v) = \mathbf{L}_v(u)$. Il suffit alors de faire une récurrence sur N.

Si toutes les séries convergent on pourra prendre $N = +\infty$.

Nous posons maintenant pour $j \geq 0$

$$\begin{cases} u^{2j} &= x_1^{2+j} h_{2j}(x_2) \\ u^{2j+1} &= x_1^{2+j} \; |x_1| h_{2j+1}(x_2), \end{cases} \tag{2.5}$$

où $h_k(x_2)$ sont des fonctions à déterminer; d'autre part nous noterons $u^k_{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$, les dérivées secondes de la fonction u^k par rapport à x_α, x_β. On a facilement:

$$u_{11}^{2j} = (1+j)(2+j) x_1^j h_{2j}\;(x_2), \quad u_{12}^{2j} = (2+j) x_1^{1+j} h'_{2j}(x_2) \text{ et}$$
$$u_{22}^{2j} = x_1^{2+j}\; h''_{2j}(x_2).$$

De même,

$$u_{11}^{2j+1} = (3+j)(2+j) x_1^j \; |x_1| h_{2j+1}(x_2),$$
$$u_{12}^{2j+1} = (3+j) x_1^{1+j} \cdot |x_1| \cdot h'_{2j+1}(x_2),$$
$$u_{22}^{2j+1} = x_1^{2+j} \; |x_1| h''_{2j+1}(x_2).$$

On en déduit, pour $j \geq 0$,

$$\begin{cases} F(u^{2j}) &= x_1^{2+2j} \; \{(1+j)(2+j) h_{2j} h''_{2j} - (2+j)^2 h'^2_{2j}\} \\ F(u^{2j+1}) &= x_1^{4+2j} \; \{(2+j)(3+j) h_{2j+1} h''_{2j+1} - (3+j)^2 h'^2_{2j+1}\}. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} F(u^j) = x_1^2 \big[&\{2h_0 h''_0 - 4h'^2_0\} \\ &+ \sum_{k \geq 1} x_1^{2k} \; \{(k+1)(k+2) h_{2k} h''_{2k} - (2+k)^2 \; h'^2_{2k} \\ &+ (k+1)(k+2) h_{2k-1} h''_{2k-1} - (2+k)^2 \; h'^2_{2k-1}\} \big]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Il faut calculer maintenant le second terme du membre de droite de (2.4). On le séparera en quatre termes correspondant successivement aux cas k pair et j pair, k pair et j impair, k impair et j pair et, enfin, k impair et j impair, et on notera ces termes (1), (2), (3) et (4).

$$(1) = \sum_{p \geq 0} \; \sum_{q \geq p+1} \mathbf{L}_{u^{2p}}(u^{2q}).$$

Rappelons que si u est une fonction C^2 on a $\mathbf{L}_u = u_{22}\partial_1^2 - 2u_{12}\partial_1\partial_2 + u_{11}\partial_2^2$. Il vient

$$(1) = \sum_{p\geq 0}\ \sum_{q\geq p+1} x_1^{p+q+2}\ \{(1+q)(2+q)h_{2q}h''_{2p} - 2(2+p)(2+q)h'_{2q}h'_{2p} + (1+p)(2+p)h''_{2q}\ h_{2p}\},$$

d'où

$$(1) = x_1^2 \sum_{\ell\geq 1} x_1^\ell \cdot \sum_{p=0}^{[\frac{\ell-1}{2}]}\ \sum_{p+q=\ell} \{(1+q)(2+q)h_{2q}h''_{2p} - 2(2+p)(2+q)h'_{2q}h'_{2p} + (1+p)(2+p)h''_{2q}h_{2p}\}. \tag{2.7}$$

Ensuite

$$(2) = \sum_{p\geq 0}\ \sum_{q\geq p} \mathbf{L}_{u^{2p}}(u^{2q+1}) = \sum_{p\geq 0}\ \sum_{q\geq p} x_1^{p+q+2}\ |x_1|\ \{(3+q)(2+q)h_{2q+1}h''_{2p} -2(2+p)(3+q)h'_{2q+1}h'_{2p} + (1+p)(2+p)h''_{2q+1}h_{2p}\},$$

d'où

$$(2) = x_1^2\ |x_1| \sum_{\ell\geq 0} x_1^\ell \cdot \sum_{p=0}^{[\frac{\ell}{2}]}\ \sum_{p+q=\ell} \{(3+q)(2+q)h_{2q+1}\ h''_{2p} - 2(2+p)(3+q)h'_{2q+1}h'_{2p} + (1+p)(2+p)h''_{2q+1}h_{2p}\}. \tag{2.8}$$

D'autre part

$$(3) = \sum_{p\geq 0}\ \sum_{q\geq p+1} \mathbf{L}_{u^{2p+1}}(u_{2q}) = \sum_{p\geq 0}\ \sum_{q\geq p+1} x_1^{p+q+2}\ |x_1| \cdot \{(1+q)(2+q)h_{2q}h''_{2p+1} - 2(3+p)(2+q)h'_{2p+1}h'_{2q} + (3+p)(2+p)h_{2p+1}\cdot h''_{2q}\},$$

d'où

$$(3) = x_1^2\ |x_1| \sum_{\ell\geq 1} x_1^\ell \sum_{p=0}^{[\frac{\ell-1}{2}]}\ \sum_{p+q=\ell} \{(1+q)(2+q)h_{2q}h''_{2p+1} - 2(3+p)(2+q)h'_{2p+1}h'_{2q} + (3+p)(2+p)h_{2p+1}h''_{2q}\}. \tag{2.9}$$

Enfin

$$(4) = \sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq p+1} \mathbf{L}_{u^{2p+1}}(u^{2q+1}) = \sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq p+1} x_1^{4+p+q} \ \{(3+q)(2+q)h_{2q+1}h''_{2p+1}$$
$$-2(3+p)(3+q)h'_{2q+1}h'_{2p+1} + (3+p)(2+p)h''_{2q+1}h_{2p+1}\},$$

par conséquent

$$(2.10)\quad (4) = x_1^2\sum_{\ell\geq 3} x_1^\ell \sum_{p=0}^{[\frac{\ell-3}{2}]}\sum_{p+q=\ell-2} \{(3+q)(2+q)h_{2q+1}h''_{2p+1}$$
$$-2(3+p)(3+q)\cdot h'_{2q+1}h'_{2p+1} + (3+p)(2+p)h''_{2q+1}h_{2p+1}\}.$$

D'après (2.4),...,(2.10), si l'on pose $u = \sum_{j\geq 0} u^j$, on a

$$(2.11)\qquad F(u) = x_1^2\sum_{\ell\geq 0} x_1^\ell H_\ell^{(0)}(x_2) + x_1^2\ |x_1|\sum_{\ell\geq 0} x_1^\ell H_\ell^{(1)}(x_2),$$

avec

$$(2.12)\qquad \begin{cases} H_0^{(0)} = 2(h_0h''_0 - 2h'^2_0) \\ H_1^{(0)} = 2(h_0h''_2 - 6h'_0h'_2 + 3h''_0h_2) \\ H_2^{(0)} = 2(h_0h''_4 - 8h'_0h'_4 + 6h''_0h_4 \\ \qquad + 3h_2h''_2 - \frac{9}{2}h'^2_2 + 3\ h_1h''_1 - \frac{9}{2}h'^2_1) \end{cases}$$

et, pour $\ell\geq 3$,

$$(2.13)\, H_\ell^{(0)} = 2h_0h''_{2\ell} - 4(2+\ell)h'_0h'_{2\ell} + (1+\ell)(2+\ell)h''_0h_{2\ell}$$
$$+\sum_{p=1}^{[\frac{\ell-1}{2}]}\sum_{p+q=\ell} \{(1+p)(2+p)h_{2p}h''_{2p} - 2(2+p)(2+q)h'_{2q}h''_{2p}$$
$$+ (1+q)(2+q)h_{2q}h''_{2p}\}$$
$$+\sum_{p=0}^{[\frac{\ell-3}{2}]}\sum_{p+q=\ell-2} \{(3+q)(2+q)h_{2q+1}h''_{2p+1}$$
$$-2(3+p)(3+q)h'_{2q+1}h'_{2p+1} + (3+p)(2+p)h''_{2q+1}h_{2p+1}\}$$
$$+\delta(\ell-2k)\ \{(k+1)(k+2)h_{2k}h''_{2k} - (2+k)^2h'^2_{2k}$$
$$+(k+1)(k+2)h_{2k-1}h''_{2k-1} - (2+k)^2h'^2_{2k-1}\},$$

où

$$\delta(\ell - 2k) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ell \text{ est impair} \\ 1 \text{ si } \ell = 2k. \end{cases}$$

De même

$$H_0^{(1)} = 2\{h_0 h_1'' - 6h_0' h_1' + 3h_0'' h_1\} \tag{2.14}$$

et, pour $\ell \geq 1$,

$$\begin{aligned} H_\ell^{(1)} &= 2\ h_0 h_{2\ell+1}'' - 4(3+\ell)h_0' h_{2\ell+1}' + (2+\ell)(3+\ell)h_0'' h_{2\ell+1} \\ &+ \sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]} \sum_{p+q=\ell} \{(1+p)(2+p)h_{2p}h_{2q+1}'' - 2(2+p)(3+q)h_{2p}' h_{2q+1}' \\ &\qquad + (3+q)(2+q)h_{2p}'' h_{2q+1}\ \} \\ &+ \sum_{p=0}^{[\frac{\ell-1}{2}]} \sum_{p+q=\ell} \{(1+q)(2+q)h_{2q}h_{2p+1}'' - 2(3+p)(2+q)h_{2q}' h_{2p+1}' \\ &\qquad + (3+p)(2+p)h_{2q}'' h_{2p+1}\ \}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

A. - *Construction d'une solution formelle*

Soit $\psi(x_1, x_2)$ une fonction analytique positive ou nulle dans un voisinage de l'origine telle que $\psi^{-1}(0) = \{x_1 = 0\}$. On peut écrire $\psi = x_1^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} x_1^\ell \psi_\ell(x_2)$. Compte tenu de (2.11),...,(2.15), résoudre l'équation $F(u) = \psi$ revient à résoudre au voisinage de l'origine

$$\begin{cases} H_\ell^{(0)} = \psi_\ell \quad , \quad \ell \geq 0 \\ H_\ell^{(1)} = 0 \quad , \quad \ell \geq 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Pour $\ell = 0$, d'après le théorème de Cauchy-Kovalewsky, il existe une fonction h_0, analytique dans un voisinage de l'origine, solution du problème

$$\begin{cases} 2(h_0 h_0'' - h_0'^2) = \psi_0 \\ h_0(0) = 1,\ h_0'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

On fixe un voisinage V de l'origine où $h_0 > 0$.

Pour $\ell \geq 0$ l'équation $H_\ell^{(0)} = \psi_\ell$ est une équation linéaire du type

$$(2.18)\qquad \begin{gathered} h''_{2\ell}+a_\ell h'_{2\ell}+b_\ell h_{2\ell}=F_\ell(x,h_1,\cdots,h_{2\ell-2});\\ F_\ell,\ a_\ell,\ b_\ell \text{ analytiques,}\end{gathered}$$

et $H_\ell^{(1)}=0$ est du type

$$(2.19)\qquad \begin{gathered} h''_{2\ell+1}+\tilde a_\ell h'_{2\ell+1}+\tilde b_\ell h_{2\ell+1}=\tilde F_\ell(x,h_1,\cdots,h_{2\ell}),\\ \tilde F_\ell \text{ analytique, } \tilde F_0\equiv 0.\end{gathered}$$

On détermine donc successivement, h_0 étant choisie, $h_1,h_2,\cdots,h_{2\ell-1}$ puis $h_{2\ell}\cdots$ avec des conditions aux limites que l'on choisira par la suite. On obtient ainsi une solution formelle de l'équation $F(u)=\psi$ de la forme

$$u=x_1^2\sum_{j\geq 0}x_1^j h_{2j}+x_1^2\ |x_1|\sum_{j\geq 0}x_1^j\ h_{2j+1}.$$

Si on veut que u soit C^k, mais non C^{k+1}, il suffira de prendre $h_1=h_3=\cdots=h_{2k-5}\equiv 0$ et $h_{2k-3}(0)=1$ et u s'écrira:

$$(2.20)\qquad u=x_1^2 v(x_1,x_2)+x_1^k\ |x_1|w(x_1,x_2),\quad w(0,0)=1.$$

B. - *Construction d'une vraie solution*

Pour montrer que le procédé décrit ci-dessus conduit à une vraie solution, il nous faut montrer que les fonctions analytiques h_ℓ déterminées par les équations (2.18) et (2.19) sont définies dans un même voisinage de l'origine et déterminent des fonctions analytiques v et w comme en (2.20).

Nous allons montrer qu'il existe des constantes $\varepsilon>0,\ A>0,\ B>0$ telles que:

$$(2.21)\qquad |h_j^{(\alpha)}\ (0)|\leq \varepsilon A^j B^\alpha\frac{(\alpha+j)!}{(j+2)!\ (\alpha+j+1)^3}\qquad \forall j\geq 0,\ \forall\alpha\geq 0.$$

Cette inégalité est vraie pour $j=0,1$ et tout α, si A et B sont assez grands, puisque h_0 et h_1 sont analytiques. Supposons la vraie à l'ordre $\leq j-1$ pour tout α et prouvons là à l'ordre j. Supposons tout d'abord j impair, $j=2\ell+1$. En choisissant convenablement les conditions aux limites lors de la résolution de l'équation (2.19) on peut supposer que (2.21) est vraie lorsque $j=2\ell+1$ et $\alpha=0,1$. Supposons donc (2.21) vraie lorsque $j=2\ell+1$ et $\beta\leq\alpha-1$ et prouvons la à l'ordre $\alpha\geq 2$.

Dérivons $\alpha-2$ fois l'équation $H_\ell^{(1)}=0$, où $H_\ell^{(1)}$ est donnée par (2.15), puis faisons $x_2=0$. Il vient:

$$
\begin{aligned}
(2.22)\qquad h_0 h_{2\ell+1}^{(\alpha)} = &-\sum_{\beta=1}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta} h_0^{(\beta)} h_{2\ell+1}^{(\alpha-\beta)} \\
&+2(3+\ell)\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta} h_0^{(\beta+1)} h_{2\ell+1}^{(\alpha-\beta-1)} \\
&+\frac{1}{2}(2+\ell)(3+\ell)\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta} h_0^{(\beta+2)} h_{2\ell+1}^{(\alpha-\beta-2)} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta}\cdot\sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]}\sum_{p+q=\ell}\Big\{(1+p)(2+p)\cdot h_{2p}^{(\beta)} h_{2q+1}^{(\alpha-\beta)} \\
&\qquad -2(2+p)(3+q) h_{2p}^{(\beta+1)} h_{2q+1}^{(\alpha-\beta-1)} \\
&\qquad +(3+q)(2+q) h_{2p}^{(\beta+2)} h_{2q+1}^{(\alpha-\beta-2)}\Big\} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta}\sum_{p=0}^{[\frac{\ell-1}{2}]}\sum_{p+q=\ell}\Big\{(1+q)(2+q) h_{2q}^{(\beta)} h_{2p+1}^{(\alpha-\beta)} \\
&\qquad -2(3+p)(2+q) h_{2q}^{(\beta+1)} h_{2p+1}^{(\alpha-\beta-1)} \\
&\qquad +(3+p)(2+p) h_{2q}^{(\beta+2)} h_{2p+1}^{(\alpha-\beta-2)}\Big\}
\end{aligned}
$$

$= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (9)$, où

$$(1) = -\sum_{\beta=1}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta} h_0^{(\beta)} h_{2\ell+1}^{(\alpha-\beta)},$$

$$(2) = 2(3+\ell)\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta} h_0^{(\beta+1)} h_{2\ell+1}^{(\alpha-\beta-1)},$$

$$(3) = \frac{1}{2}(2+\ell)(3+\ell)\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta} h_0^{(\beta+2)} h_{2\ell+1}^{(\alpha-\beta-2)},$$

$$(4) = \frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta}\cdot\sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]}\sum_{p+q=\ell}(1+p)(2+p) h_{2p}^{(\beta)} h_{2q+1}^{(\alpha-\beta)},$$

$$(5) = \frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta}\cdot\sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]}\sum_{p+q=\ell} 2(2+p)(3+q) h_{2p}^{(\beta+1)} h_{2q+1}^{(\alpha-\beta-1)},$$

$$(6) = \frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta}\cdot\sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]}\sum_{p+q=\ell}(3+q)(2+q)h_{2p}^{(\beta+2)}h_{2q+1}^{(\alpha-\beta-2)},$$

$$(7) = \frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta}\sum_{p=0}^{[\frac{\ell-1}{2}]}\sum_{p+q=\ell}(1+q)(2+q)h_{2q}^{(\beta)}h_{2p+1}^{(\alpha-\beta)},$$

$$(8) = -\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta}\sum_{p=0}^{[\frac{\ell-1}{2}]}\sum_{p+q=\ell}(3+p)(2+q)h_{2q}^{(\beta+1)}h_{2p+1}^{(\alpha-\beta-1)},$$

$$(9) = \frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta}\sum_{p=0}^{[\frac{\ell-1}{2}]}\sum_{p+q=\ell}(3+p)(2+p)h_{2q}^{(\beta+2)}h_{2p+1}^{(\alpha-\beta-2)}.$$

La fonction h_0 étant analytique au voisinage de zéro, il existe une constante $M > 0$ telle que $|h_0^{(\gamma)}(0)| \leq M^{\gamma+1}\gamma!$, $\gamma \geq 0$. On a (en utilisant la (2.21))

$$|(1)| \leq \sum_{\beta=1}^{\alpha-2}\binom{\alpha-2}{\beta}M^{\beta+1}\beta!\ \varepsilon A^{2\ell+1}B^{\alpha-\beta}\frac{(\alpha-\beta+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha-\beta+2\ell+2)^3}$$

$$\leq \varepsilon A^{2\ell+1}\ B^{\alpha}\frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3}$$

$$\cdot\sum_{\beta=1}^{\alpha-2}\frac{(\alpha-2)!}{(\alpha-\beta-2)!}\ \frac{(\alpha-\beta+2\ell+1)!}{(\alpha+2\ell+1)!}\ \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\alpha-\beta+2\ell+2)^3}\ M\left(\frac{M}{B}\right)^{\beta}.$$

Posons

$$A_0 = \frac{(\alpha-2)!}{(\alpha+2\ell+1)!}\ \frac{(\alpha-\beta+2\ell+1)!}{(\alpha-\beta-2)!}\ \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\alpha-\beta+2\ell+2)^3}.$$

On a:

$$\begin{cases}(\alpha+2\ell+1)! = (\alpha-2)!\ (\alpha-1)\alpha\cdots(\alpha+2\ell+1)\\ (\alpha-\beta+2\ell+1)! = (\alpha-\beta-2)!\ (\alpha-1-\beta)(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\beta+2\ell+1),\end{cases}$$

d'où

$$A_0 = \frac{(\alpha-\beta-1)}{(\alpha-1)}\ \frac{(\alpha-\beta)}{\alpha}\ \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\ \frac{(\alpha-\beta+2\ell+1)}{(\alpha+2\ell+1)}\ \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\alpha-\beta+2\ell+2)^3};$$

posons

$$A_1 = \frac{(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\beta+2\ell-2)}{(\alpha-1)\ \alpha\cdots\cdots\ (\alpha+2\ell-2)},$$

$$A_2 = \frac{(\alpha-\beta+2\ell-1)(\alpha-\beta+2\ell)(\alpha-\beta+2\ell+1)}{(\alpha-\beta+2\ell+2)^3},$$

$$A_3 = \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\alpha+2\ell-1)(\alpha+2\ell)(\alpha+2\ell+1)},$$

on a

$$A_0 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Alors $A_1 \leq 1$ car chacun des termes du numérateur est inférieur à son correspondant au dénominateur. De même $A_2 \leq 1$. D'autre part, comme $\alpha \geq 2$, $\ell \geq 1$, $\alpha+2\ell \geq 4$ et donc $(\alpha+2\ell+2) \leq 2(\alpha+2\ell-1)$. Par conséquent $A_3 \leq 2^3$. On en déduit que $A_0 \leq 2^3$. Il vient alors

$$|(1)| \leq \varepsilon\ A^{2\ell+1}B^{\alpha}\ \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3} \cdot 2^3 M \cdot \frac{M}{B} \sum_{\beta=0}^{\infty} \left(\frac{M}{B}\right)^{\beta}, \text{ si } \frac{M}{B} < 1,$$

d'où

$$|(1)| \leq \frac{M}{B} \cdot \frac{2^3 M}{1-\frac{M}{B}}\ \varepsilon A^{2\ell+1}\ B^{\alpha}\ \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3}. \tag{2.23}$$

On prendra par la suite B très grand par rapport à M. Ensuite,

$$\begin{aligned}|(2)| &\leq 2(3+\ell) \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} \frac{(\alpha-2)!}{\beta!(\alpha-\beta)!} M^{\beta+2}(\beta+1)! \\ &\cdot \frac{(\alpha-\beta+2\ell)!}{(2\ell+3)!(\alpha-\beta+2\ell+1)^3}\ \varepsilon A^{2\ell+1} B^{\alpha-\beta-1} \\ &\leq \varepsilon A^{2\ell+1} B^{\alpha}\ \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3} \\ &\cdot \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} \frac{2(3+\ell)(\alpha-2)!(\alpha-\beta+2\ell)!(\alpha+2\ell+2)^3}{(\alpha-\beta-2)!\ \ (\alpha+2\ell+1)!(\alpha-\beta+2\ell+1)^3} \cdot M \cdot \left(\frac{2M}{B}\right)^{\beta+1}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité $(\beta+1)! \leq 2^{\beta+1}\beta!$. On a $A_0 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, où

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{2(3+\ell)(\alpha-2)!(\alpha-\beta+2\ell)!(\alpha+2\ell+2)^3}{(\alpha-\beta-2)!(\alpha+2\ell+1)!(\alpha-\beta+2\ell+1)^3} \\ &= \frac{(\alpha-\beta-1)(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\beta+2\ell)\cdot 2(\ell+3)(\alpha+2\ell+2)^3}{(\alpha-1)\cdot\alpha\cdots(\alpha+2\ell)(\alpha+2\ell+1)(\alpha-\beta+2\ell+1)^3},\end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{(\alpha-\beta-1)}{(\alpha-1)}\ \frac{(\alpha-\beta)}{\alpha} \cdots \frac{(\alpha-\beta+2\ell-3)}{(\alpha+2\ell-3)},$$

$$A_2 = \frac{(\alpha-\beta+2\ell-2)(\alpha-\beta+2\ell-1)(\alpha-\beta+2\ell)}{(\alpha-\beta+2\ell+1)^3},$$

$$A_3 = \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\alpha+2\ell-2)(\alpha+2\ell-1)(\alpha+2\ell)} \cdot \frac{2(\ell+3)}{(\alpha+2\ell+1)}.$$

On a $A_1 \leq 1$, $A_2 \leq 1$ et $A_3 \leq 2 \cdot 3^3$. On en déduit

$$|(2)| \leq \varepsilon A^{2\ell+1} B^\alpha \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3}\, 2\cdot 3^3\, M \cdot \frac{2M}{B} \sum_{\beta=0}^{\infty} \left(\frac{2M}{B}\right)^\beta, \quad \text{si } \frac{2M}{B} < 1,$$

d'où

$$(2.24) \qquad |(2)| \leq \frac{2M}{B} \cdot \frac{c_0 M}{1-\frac{2M}{B}} \cdot \varepsilon A^{2\ell+1} B^\alpha \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3}, \quad c_0 = 2\cdot 3^3.$$

Des inégalités tout à fait analogues permettent de montrer que

$$(2.25) \qquad |(3)| \leq \frac{2M}{B} \frac{c_1 M}{1-\frac{2M}{B}} \varepsilon A^{2\ell+1} B^\alpha \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3},$$

où c_1 est une constante absolue, indépendante de $\alpha, \ell, \varepsilon, A, B, M$.

Considérons le terme (4). On a

$$(2.26) \qquad \begin{aligned} |(4)| \leq & \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} \sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]} \sum_{p+q=\ell} \binom{\alpha-2}{\beta} \frac{(p+1)(p+2)}{2} \\ & \cdot \varepsilon\ A^{2p} B^\beta \cdot \frac{(\beta+2p)!}{(2p+2)!(\beta+2p+1)^3} \\ & \cdot \varepsilon\ A^{2q+1} B^{\alpha-\beta} \cdot \frac{(\alpha-\beta+2q+1)!}{(2q+3)!(\alpha-\beta+2q+2)!} \\ \leq & \ \varepsilon A^{2\ell+1} B^\alpha \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3} \cdot R, \end{aligned}$$

où

$$R = \varepsilon \cdot \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} \sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]} \sum_{p+q=\ell} \binom{\alpha-2}{\beta} \frac{(p+1)(p+2)}{2} \frac{(\beta+2p)!}{(2p+2)!(\beta+2p+1)^3}$$
$$\cdot \frac{(\alpha-\beta+2q+1)!}{(2q+3)!(\alpha-\beta+2q+2)^3} \frac{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3}{(\alpha+2\ell+1)!}.$$

Remarquons que $\frac{(p+1)(p+2)}{(2p+2)!} \leq \frac{1}{(2p)!}$ de sorte que la quantité qui est à l'intérieur de la somme définissant R peut être majorée par

$$\frac{(\alpha-2)!(2\ell+3)!}{(\alpha+2\ell+1)!} \frac{(\beta+2p)!}{\beta!(2p)!} \frac{(\alpha-\beta+2q+1)!}{(2q+3)!(\alpha-\beta-2)!} \cdot \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\beta+2p+1)^3(\alpha-\beta+2q+2)^3}$$

et donc

$$R \leq \varepsilon \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} \sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]} \sum_{p+q=\ell} \frac{\binom{\beta+2p}{2p}\binom{\alpha-\beta+2q+1}{2q+3}}{\binom{\alpha+2\ell+1}{2\ell+3}} \cdot \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\beta+2p+1)^3(\alpha-\beta+2q+2)^3}.$$

Comme $\binom{a-b}{c-d} \cdot \binom{b}{c} \leq \binom{a}{b}$, il vient

$$R \leq \varepsilon \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} \sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]} \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\beta+2p+1)^3(\alpha-\beta+2\ell-2p+2)^3}.$$

Nous allons montrer qu'il existe une constante absolue $S_0 > 0$, indépendante de $\ell, \alpha, \varepsilon, A, B, M$, qui majore la double somme ci-dessus (de sorte que l'on aura $R \leq \varepsilon S_0$). En effet

$$\frac{\alpha+2\ell+2}{(\beta+2p+1)(\alpha-\beta+2\ell-2p+2)} = \frac{\alpha+2\ell+2}{\alpha+2\ell+3}\left\{\frac{1}{\beta+2p+1}+\frac{1}{\alpha-\beta+2\ell-2p+2}\right\}.$$

Comme $(a+b)^3 \leq c_0(a^3+b^3)$, où c_0 est une constante indépendante de a et b, on obtient

$$\frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\beta+2p+1)^3(\alpha-\beta+2\ell-2p+2)^3} \leq c_0 \left\{\frac{1}{(\beta+2p+1)^3}+\frac{1}{(\alpha-\beta+2\ell-2p+2)^3}\right\}.$$

Notre assertion résulte du fait que la série double $\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(m+n+1)^3}$ est convergente. Utilisant (2.26) on obtient

$$|(4)| \leq \varepsilon \cdot S_0 \cdot \varepsilon A^{2\ell+1} B^{\alpha} \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3}. \tag{2.27}$$

Considérons le terme (5):

$$(5) \leq \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} \sum_{p=1}^{[\frac{\ell}{2}]} \sum_{p+q=\ell} (2+p)(3+q) \binom{\alpha-2}{\beta} \varepsilon A^{2p} B^{\beta+1} \frac{(\beta+1+2p)!}{(2p+2)!(\beta+2p+2)^3}$$

$$\cdot \varepsilon A^{2q+1} B^{\alpha-\beta-1} \cdot \frac{(\alpha-\beta+2q)!}{(2q+3)!(\alpha-\beta+2q+1)^3}.$$

En utilisant l'inégalité

$$\frac{(2+p)(3+q)}{(2p+2)!(2q+3)!} \leq \frac{1}{(2p+1)!(2q+2)!},$$

on obtient comme précédemment

$$|(5)| \leq \varepsilon A^{2\ell+1} B^{\alpha} \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3} \varepsilon \cdot R, \text{ avec}$$

$$R \leq \sum_{\beta} \sum_{p \geq 1} \sum_{p+q=\ell} \frac{(\alpha-2)!(2\ell+3)!}{(\alpha+2\ell+1)!} \cdot \frac{(\beta+1+2p)!}{(2p+1)!\beta!} \frac{(\alpha-\beta+2q)!}{(2q+2)!(\alpha-\beta-2)!}$$

$$\cdot \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\beta+2+2p)^3(\alpha-\beta+2q+1)^3}.$$

On utilise ensuite l'inégalité

$$\binom{\beta+2p+1}{2p+1} \binom{\alpha-\beta+2q}{2q+2} \leq \binom{\alpha+2\ell+1}{2\ell+3}$$

et la fin de la preuve se fait comme au terme (4). Ainsi avec une constante absolue S_1:

$$|(5)| \leq \varepsilon S_1 \cdot \varepsilon A^{2\ell+1} B^{\alpha} \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3}. \tag{2.28}$$

L'estimation du terme (6) est en tout point identique et conduit à:

(2.29) $|(6)|$ est majoré par le second membre de (2.28).

La technique de majoration des termes (7), (8), (9) est la même. Explicitons les calculs pour le terme (7). On a

$$
\begin{aligned}
|(7)| \leq \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} \sum_{p=0}^{[\frac{\ell-1}{2}]} \sum_{p+q=\ell} & \frac{(1+q)(2+q)}{2} \\
& \cdot \binom{\alpha-2}{\beta} \varepsilon A^{2q} B^{\beta} \frac{(\beta+2q)!}{(2q+2)!(\beta+2q+1)^3} \\
& \cdot \varepsilon A^{2p+1} B^{\alpha-\beta} \cdot \frac{(\alpha-\beta+2p+1)!}{(2p+3)!(\alpha-\beta+2p+2)^3} \\
& \leq \varepsilon A^{2\ell+1} B^{\alpha} \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3} \cdot \varepsilon R,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
R \leq \sum_{\beta=0}^{\alpha-2} \sum_{p=0}^{[\frac{\ell-1}{2}]} \sum_{p+q=\ell} & \frac{(\alpha-2)!(2\ell+3)!}{(\alpha+2\ell+1)!} \frac{(\beta+2q)!\ (\alpha-\beta+2p+1)!}{(2q)!\beta!(2p+3)!(\alpha-\beta-2)!} \\
& \cdot \frac{(\alpha+2\ell+2)^3}{(\beta+2q+1)^3(\alpha-\beta+2p+2)^3}.
\end{aligned}
$$

La preuve est identique aux cas (4)...(6) puisque

$$
\binom{\beta+2q}{2q}\binom{\alpha-\beta+2p+1}{2p+3} \leq \binom{\alpha+2\ell+1}{2\ell+3}.
$$

En regroupant les informations données par (2.23),...,(2.29) on peut écrire:

$$
|h_{2\ell+1}^{(\alpha)}(0)| \leq (D \cdot \frac{M^2}{B} + \varepsilon S)\varepsilon A^{2\ell+1} B^{\alpha} \frac{(\alpha+2\ell+1)!}{(2\ell+3)!(\alpha+2\ell+2)^3}, \tag{2.30}
$$

où D et S sont des constantes absolues.

Il suffit alors de choisir $B \geq 2DM^2$ et $\varepsilon \leq \frac{1}{2S}$ pour que (2.21) soit vraie pour $h_{2\ell+1}$ à l'ordre α. Ceci termine la preuve de (2.21) dans le cas où j est impair.

Lorsque j est pair, $j = 2\ell$, on utilise l'équation $H_\ell^{(0)} = \psi_\ell$, où $H_\ell^{(0)}$ est donné par (2.13), que l'on dérive $\alpha - 2$ fois. Les techniques d'estimations sont identiques à celles développées dans le cas j impair et ne seront pas détaillées. Cependant nous montrerons comment se traite le terme nouveau issu de la dérivation de ψ_ℓ. Rappelons que $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 \sum_{\ell\geq 0} x_1^\ell \psi_\ell(x_2)$ de sorte que $\psi_\ell(x_2) = \frac{1}{(\ell+2)!}\psi^{(\ell+2)}(0, x_2)$. La fonction ψ étant analytique il existe une constante $K > 0$ telle que

$$
|\psi_\ell^{(\alpha-2)}(0)| \leq \frac{1}{(\ell+2)!} K^{\ell+\alpha+1}\ (\ell+\alpha)!.
$$

On peut écrire:

$$|\psi_\ell^{(\alpha-2)}(0)| \le \varepsilon A^{2\ell} B^\alpha \frac{(\alpha+2\ell)!}{(2\ell+2)!(\alpha+2\ell+1)^3} \cdot R, \text{ avec}$$

$$R = \frac{K^{\ell+\alpha+1}}{\varepsilon A^{2\ell} B^\alpha} \cdot \frac{(\ell+\alpha)!(2\ell+2)!(\alpha+2\ell+1)^3}{(\ell+2)!\ (\alpha+2\ell)!}.$$

On voit facilement que

$$\frac{(\ell+\alpha)!(2\ell+2)!}{(\ell+2)!(\alpha+2\ell)!} \le 1 \text{ et } (\alpha+2\ell+1)^3 \le C_0 C_1^{\alpha+2\ell},$$

où C_0 et C_1 sont des constantes absolues. On en déduit

$$R \le \frac{KC_0}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{C_1^2 K}{A^2}\right)^\ell \left(\frac{KC_1}{B}\right)^\alpha \le \frac{K^3 C_0 C_1^3}{\varepsilon A^2 B}, \text{ si } \begin{cases} A^2 \ge C_1^2 K \\ B \ge KC_1. \end{cases}$$

On obtient finalement, de manière analogue à (2.30),

$$|h_{2\ell}^{(\alpha)}(0)| \le \left(D' \frac{M^2}{B} + \varepsilon S' + \frac{K^3 C_0 C_1^3}{\varepsilon A^2 B}\right) \varepsilon A^{2\ell} B^\alpha \frac{(\alpha+2\ell)!}{(2\ell+2)!(\alpha+2\ell+1)^3}.$$

On commence par fixer ε de sorte que $\varepsilon S' \le \frac{1}{3}$. Ensuite on prend B assez grand pour que $\frac{D'M^2}{B} \le \frac{1}{3}$, puis $A^2 B$ assez grand pour que $\frac{K^3 C_0 C_1^3}{\varepsilon A^2 B} \le \frac{1}{3}$ et (2.21) est prouvé pour $j = 2\ell$ à l'ordre α. ∎

De (2.21) on déduit facilement qu'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\text{(2.31)} \qquad |h_j^{(\alpha)}(0)| \le L^{\alpha+j+1}\ \alpha!, \quad \text{pour tous } \alpha \ge 0, \quad \text{pour tous } j \ge 0,$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.2. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Caffarelli - L. Nirenberg - J. Spruck: *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equation I: Monge-Ampère equation*, Comm. on Pure and Applied Mathematics, **XXXVII**, (1984), 369-402.

[2] Xu Chao Jiang: *Régularité des solutions des e.d.p. non-linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, **300** (1985), 267-270.

Université Paris-Sud
Départment de Math.
F-91405 Orsay, France.