Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Xavier Saint Raymond

Résultats d'unicité de Cauchy instable dans des situations où la condition de pseudo-convexité dégénère

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 13, nº 4 (1986), p. 661-687

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1986_4_13_4_661_0>

Résultats d'unicité de Cauchy instable dans des situations où la condition de pseudo-convexité dégénère.

XAVIER SAINT RAYMOND

Depuis une trentaine d'années, l'étude de l'unicité de Cauchy locale pour les problèmes C^∞ linéaires a fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Un panorama des résultats obtenus est présenté dans Alinhac [3], et Zuily [15] en fournit des preuves d'une bonne partie.

Pour les opérateurs de type principal, Hörmander [7, chap. 8] a montré l'importance d'une propriété de convexité de la surface S portant les données de Cauchy, la pseudo-convexité, qui correspond au signe de certaines dérivées secondes de l'équation de S calculées aux zéros réels et complexes du symbole principal p de l'opérateur. Dans ce travail, nous avons cherché à préciser le rôle de cette condition de pseudo-convexité, mais, afin de limiter la complexité des phénomènes, nous nous sommes contentés d'examiner un cas où l'on sait bien que cette condition ne dépend que des zéros réels du symbole principal p (auxquels nous associons les bicaractéristiques correspondantes): lorsque *l'opérateur est du deuxième ordre* (le premier ordre est traité dans Saint Raymond [12]) *de type principal réel* (voir Bahouri [5], Nirenberg [10] et Alinhac [2] lorsque ce n'est plus de type principal), et que *la surface S n'est pas caractéristique* (dans le cas contraire, se reporter à Saint Raymond [11]).

La littérature contient déjà de nombreux résultats pour cette catégorie de problème. D'abord, Calderón [6] a montré qu'il y avait unicité en $x_0 \in S$ si toutes les bicaractéristiques passant par x_0 sont transverses à S. Hörmander [7, th 8.9.1] a étendu ce résultat au cas où l'ordre de contact des bicaractéristiques avec S ne dépasse pas 2, en ajoutant l'hypothèse qu'aucune bicaractéristique passant par x_0 n'est entièrement située, localement, dans le futur (hypothèse de pseudo-convexité). Alinhac [1, th. 2] a complété ce résultat en montrant que cette restriction était nécessaire à l'unicité

Pervenuto alla Redazione il 23 Ottobre 1985.

(en supposant toujours que l'ordre de contact est au plus égal à 2). Enfin, Lerner et Robbiano [9], puis Hörmander [8, th. 28.4.3] qui en a simplifié les hypothèses, ont prouvé une propriété d'unicité compacte sans aucune restriction sur l'ordre de contact des bicaractéristiques en supposant que, dans tout un voisinage de x_0, aucune bicaractéristique d'ordre de contact égal à 2 n'est entièrement contenue dans le futur (pour les conséquences géométriques de ces hypothèses, voir le Corollaire 2.7. ci-dessous).

Tous les résultats précédents possèdent la propriété de stabilité suivante: lorsque les hypothèses sont vérifiées en x_0, elles le sont aussi en tout point x suffisamment proche de x_0 sur S et donc il y a unicité également en ces points-là. Ici, nous abordons des situations qui ne possèdent plus cette propriété de stabilité. Dans un premier théorème (théorème 2.1) nous établissons l'unicité en un point x_0 de la frontière d'un domaine où S est pseudo-convexe. Nous relions ensuite les hypothèses de ce théorème à la position par rapport à S des bicaractéristiques passant par x_0: nous montrons qu'aucune d'entre elles n'est alors entièrement située, localement, dans le futur. Enfin, nous prouvons (au théorème 2.9) que cette dernière propriété est nécessaire à l'unicité même lorsque l'ordre de contact est strictement supérieur à 2.

Les méthodes que nous utilisons ici nous ont été inspirées par celles introduites par Hörmander [7, th. 5.2.1 & th. 5.3.2] puis développées par Zachmanoglou [13] & [14] pour étudier les problèmes analytiques. Ainsi nous démontrons le théorème d'unicité par une technique de déformation de surface qui se combine avec le théorème d'unicité de Hörmander ([7, th. 8.9.1], cf. th. 1.1 ci-dessous); de l'autre côté, nous déduisons notre théorème de non-unicité de celui d'Alinhac & Baouendi ([4, th. 2], cf. th. 1.4 ci-dessous) après construction de phases.

1. – Hypothèses. Notations. Résultats antérieurs.

1.1. *Hypothèses générales sur l'opérateur P et la surface S.*

Soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et, avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$,

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} a_\alpha(x) D^\alpha$$

un opérateur *différentiel linéaire du deuxième ordre* où les fonctions a_α sont C^∞ à valeurs complexes au voisinage de x_0. Nous noterons p le symbole principal de cet opérateur qui est la fonction définie sur $T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$ par la formule:

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \xi^\alpha .$$

Nous supposerons tout au long de ce papier que l'opérateur P est *de type principal réel*, c'est-à-dire que p est à valeurs réelles et que $d_\xi p \neq 0$ sur $T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$.

Considérons maintenant une hypersurface orientée de $\mathbf{R}^n$, S, passant par x_0; nous supposerons que cette hypersurface S *n'est pas caractéristique en* x_0, c'est-à-dire que si $\varphi(x) = 0$ en est une équation, où φ est une fonction C^∞ à valeurs réelles telle que $\varphi(x_0) = 0$ et $d\varphi(x_0) \neq 0$,

$$p(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0 . \tag{1.1}$$

Avec ces hypothèses, nous nous intéressons à l'unicité des solutions au problème de Cauchy avec données sur S, ce qui se ramène classiquement par linéarité à la question: est-ce-que

$$P(x, D)\, u(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad u(x) = 0 \;\text{ pour }\; \varphi(x) < 0$$

au voisinage de x_0 impliquent que u est nulle au voisinage de x_0?

Signalons dès maintenant que dans les différents théorèmes que nous montrons ici ces hypothèses générales peuvent être affaiblies. Ainsi: (i) au théorème 2.1 et au corollaire 2.4, nous pouvons remplacer la condition « $a_\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ » par « $a_\alpha \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ » pour $|\alpha| < 2$; (ii) au corollaire 2.12 et dans tous les résultats du paragraphe 5, nous pouvons remplacer les hypothèses « P d'ordre 2 et S non caractéristique » par « P d'ordre $m \in \mathbf{N}$ et $H_\varphi^2 p \neq 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$ » (pour les notations, voir le paragraphe suivant); (iii) enfin, dans le théorème 2.9, nous pouvons remplacer les hypothèses « P d'ordre 2 et de type principal » par « P d'ordre $m \in \mathbf{N}$ et $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$ »; on peut aussi y supprimer l'hypothèse « S non caractéristique » à condition de perturber l'opérateur à l'ordre $m-1$ dans la conclusion (cf. Hörmander [7, th. 8.9.4] et Saint Raymond [11, §.II]).

1.2. *Ordre de contact avec S des bicaractéristiques.*

Pour toute fonction q appartenant à l'anneau des fonctions C^∞ à valeurs réelles définies sur $T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$, noté $C^\infty(T^*\mathbf{R}^n \setminus 0)$, le champ hamiltonien de q est donné par la formule

$$H_q = q_\xi(x, \xi) \cdot \partial_x - q_x(x, \xi) \cdot \partial_\xi .$$

Ainsi, à la fonction φ définissant S (considérée comme fonction sur $T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$

en posant $\varphi(x, \xi) = \varphi(x)$), correspond le champ $-\varphi_x(x)\cdot\partial_\xi$; la condition (1.1) peut alors être réécrite sous la forme

$$H_\varphi^2 p(x_0) \neq 0 \tag{1.2}$$

puisque la fonction $H_\varphi^2 p(x, \xi)$ ne dépend plus de ξ.

Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, notons $\mathcal{K}_p^k(S)$ l'idéal de $C^\infty(T^*\mathbb{R}^n \setminus 0)$ engendré par les fonctions p et $H_p^j\varphi$ pour $0 \leqslant j < k$. La formule

$$H_p^j(\lambda\varphi) = \sum_{l=0}^{j} C_j^l (H_p^{j-l}\lambda)(H_p^l\varphi) \tag{1.3}$$

montre que cet idéal ne dépend pas de la fonction φ mais seulement de l'hypersurface S. Notons encore $\mathcal{C}ar_p^k(S)$ ($\subset T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$) l'ensemble des zéros de $\mathcal{K}_p^k(S)$, puis

$$\mathcal{C}ar_p^k(S, x_0) = \{(x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^k(S) : x = x_0\}.$$

En un point de $\mathcal{C}ar_p^k(S)$, le signe de la quantité $H_p^k\varphi$ ne dépend que de l'hypersurface *orientée* S car (1.3) montre que

$$H_p^k(\lambda\varphi) = \lambda H_p^k\varphi \ \text{mod.}\ \mathcal{K}_p^k(S)\,.$$

Pour $j \in \mathbf{N}$, il est clair que $\mathcal{C}ar_p^{k+j}(S) \subset \mathcal{C}ar_p^k(S)$, et on notera $\mathcal{C}ar_p^0$ la variété caractéristique $\mathcal{C}ar_p^0(S) = p^{-1}(0)$ qui est indépendante de S. Le champ H_p est tangent à $\mathcal{C}ar_p^0$, et on appelle bicaractéristiques les courbes intégrales de H_p dessinées sur $\mathcal{C}ar_p^0$. Comme $H_p^j\varphi$ représente la j-ème dérivée de la fonction φ le long de la bicaractéristique, il est clair que si $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^k(S)\setminus\mathcal{C}ar_p^{k+1}(S)$, la projection sur la base de la bicaractéristique issue de (x_0, ξ_0) possède un contact d'ordre k exactement avec l'hypersurface S. $\mathcal{C}ar_p^k(S)$ représente donc l'ensemble des bicaractéristiques dont l'ordre de contact avec S est au moins égal à k.

1.3. *Résultats classiques.*

Les deux résultats classiques concernant le problème que nous étudions ici sont les suivants:

THÉORÈME 1.1 (Hörmander [7, th. 8.9.1]). *Supposons que $H_p^2\varphi < 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$. Alors toute fonction à valeurs complexes $u \in H_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant au voisinage de x_0*

$$P(x, D)\,u(x) = 0 \quad \text{et} \quad u(x) = 0 \ \text{pour}\ \varphi(x) < 0$$

s'annule au voisinage de x_0.

THÉORÈME 1.2 (Alinhac [1, th. 2]). *Supposons qu'il existe* $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$ *tel que* $H_p^2\varphi(x_0, \xi_0) > 0$. *Alors il existe deux fonctions* C^∞ *à valeurs complexes u et a vérifiant au voisinage de* x_0

$$[P(x, D) + a(x)]u(x) = 0 \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{supp} a \subset \operatorname{supp} u = \{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) \geqslant 0\}.$$

DÉFINITION 1.3. *La condition* $H_p^2\varphi < 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$ *a été introduite dans un cadre plus général par Hörmander* [7, chap. 8]; *lorsqu'elle est vérifiée, on dit que l'hypersurface S est pseudo-convexe en* x_0.

Avec ces deux résultats, qui règlent la question si $\mathcal{C}ar_p^3(S, x_0) = \emptyset$, nous en citons un troisième qui nous servira au paragraphe 4 (cf. aussi Hörmander [7, th. 8.9.4]):

THÉORÈME 1.4 (Alinhac & Baouendi [4, th. 2]). *Supposons qu'il existe deux fonctions* C^∞ *à valeurs réelles* Φ *et* Ψ *définies au voisinage de* x_0 *telles que:*

(i) $p(x, d\Phi(x)) = 0$;

(ii) $X = p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot \partial_x \neq 0$ *et* $X\Psi(x) = 0$;

(iii) $p(x_0, d\Psi(x_0)) \neq 0$.

Alors il existe deux fonctions C^∞ *à valeurs complexes u et a vérifiant au voisinage de* x_0

$$[P(x, D) + a(x)]u(x) = 0 \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{supp} a \subset \operatorname{supp} u = \{x \in \mathbf{R}^n : \Psi(x) \geqslant \Psi(x_0)\}.$$

COMMENTAIRE 1.5. Afin de comparer ce théorème avec les précédents, supposons que $\Psi(x) = \Psi(x_0) + \varphi(x)$ auquel cas (iii) équivaut à (1.1); alors les conditions (i) et (ii) entraînent que $(x_0, d\Phi(x_0)) \in \mathcal{C}ar_p^\infty(S, x_0)$, et même que la bicaractéristique issue de ce point reste dans S.

2. – Enoncé des résultats.

2.1. *Le théorème d'unicité.*

THÉORÈME 2.1. *Supposons qu'il existe au voisinage de* x_0 *une fonction* C^∞ *à valeurs réelles* ψ *telle que:*

(i) *pour tout point* $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$, *il existe* $k \in \mathbf{N}$, $c > 0$ *et un voisinage de* (x_0, ξ_0) *sur lequel:*

$$\left\{\begin{array}{l} (x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^2(S) \\ \\ \textit{et} \;\; \psi(x) \geqslant \psi(x_0) \end{array}\right. \Rightarrow H_p^2\varphi(x, \xi) \leqslant -c[\psi(x) - \psi(x_0)]^k\,;$$

(ii) $H_p \psi \neq 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^3(S, x_0)$.

Alors toute fonction à valeurs complexes $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ *vérifiant au voisinage de* x_0

$$P(x, D)\, u(x) = 0 \qquad et \qquad u(x) = 0 \ \ pour\ \ \varphi(x) < 0$$

s'annule au voisinage de x_0.

COMMENTAIRES 2.2. L'hypothèse (i) signifie qu'on suppose que S est pseudo-convexe dans le domaine $\psi(x) > \psi(x_0)$ au bord duquel se trouve x_0; en réalité cette hypothèse est un peu plus forte puisqu'elle réclame aussi un contrôle de $H_p^2 \varphi$ en fonction de la distance au bord. L'hypothèse (ii) signifie que les bicaractéristiques ayant un contact strictement supérieur à 2 sont obligatoirement transverses au bord du domaine $\psi(x) > \psi(x_0)$. L'exemple suivant montre que si les hypothèses du théorème sont vérifiées en x_0, elles ne le sont pas nécessairement en tout point voisin de x_0 (instabilité).

EXEMPLE 2.3. Soient $x = (t, y_1, y_2)$ les points de $\mathbf{R}^3$, $x_0 = (0, 0, 0)$, $\varphi(x) = t$ et $p(t, y_1, y_2; \tau, \eta_1, \eta_2) = \tau^2 + \eta_1\eta_2 + t\eta_1^2 + ty_1^{k-2}\eta_2^2$ où $k \in \mathbf{N}\setminus\{0, 1\}$. On calcule que

$$H_p \varphi = 2\tau\ , \qquad \mathcal{C}ar_p^2(S) = \{t = \tau = \eta_1\eta_2 = 0,\ \eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0\}\ ,$$

$$H_p^2 \varphi = -2\eta_1^2 - 2y_1^{k-2}\eta_2^2$$

et

$$\mathcal{C}ar_p^3(S, x_0) = \{t = y_1 = y_2 = \tau = \eta_1 = 0,\ \eta_2 \neq 0\}$$

si $k > 2$, $\mathcal{C}ar_p^3(S, x_0) = \emptyset$ si $k = 2$. Les hypothèses du théorème 1.1 sont donc vérifiées avec $\psi(x) = y_1$. Dans cet exemple, $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$ possède deux éléments (aux équivalences projectives près) dont l'un fournit une bicaractéristique d'ordre de contact 2 tangente au bord, et l'autre fournit une bicaractéristique d'ordre de contact k transverse au bord; on remarquera en outre que si k est impair, le théorème de non-unicité d'Alinhac (th. 1.2 ci-dessus) peut s'appliquer en n'importe quel point x voisin de x_0 sur S tel que $\psi(x) < \psi(x_0)$, ce qui illustre bien l'instabilité du théorème 2.1.

Lorsqu'il n'y a pas de bicaractéristique d'ordre de contact strictement supérieur à 3, il suffit de vérifier que S est pseudo-convexe dans un domaine $\psi(x) > \psi(x_0)$. Précisément:

COROLLAIRE 2.4. *Supposons que* $\mathcal{C}ar_p^4(S, x_0) = \emptyset$ *et qu'il existe au voisinage de* x_0 *une fonction* C^∞ *à valeurs réelles* ψ *telle que* $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$ *et* $H_p^2 \varphi \leqslant 0$

sur $\mathcal{C}ar_p^2(S, x)$ *pour tout* x *voisin de* x_0 *tel que* $\psi(x) > \psi(x_0)$. *Alors, même conclusion qu'au théorème* 2.1.

2.2. *Conséquences géométriques des hypothèses du théorème* 2.1.

Il est intéressant de relier les hypothèses du théorème 2.1, à la position (par rapport à S) des bicaractéristiques dont la projection sur la base passe par x_0.

PROPOSITION 2.5. *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, *toutes les bicaractéristiques dont la projection sur la base passe par* x_0 *possèdent au moins une branche localement contenue dans* $\{(x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^0 : \varphi(x) < 0\}$ (*demi-espace du passé*).

On pourrait démontrer directement cette proposition en précisant les arguments donnés au paragraphe 5.4. Ici, nous la déduirons de la proposition suivante qui est plus délicate à obtenir:

PROPOSITION 2.6. *Supposons qu'il existe au voisinage de* x_0 *une fonction* C^∞ *à valeurs réelles* ψ *telle que* $H_p^2 \varphi \leqslant 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^2(S, x)$ *pour tout* x *voisin de* x_0 *tel que* $\psi(x) > \psi(x_0)$. *Alors pour tout* $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$, *il exsiste* $s_0 > 0$ *tel que*

$$\varphi\big(\exp[sH_p](x_0, \xi_0)\big) \leqslant 0 \qquad \textit{pour} \qquad 0 < sH_p\,\psi(x_0, \xi_0) < s_0 .$$

La proposition 2.6 fournit en outre l'énoncé suivant:

COROLLAIRE 2.7. *Supposons que* $H_p^2 \varphi \leqslant 0$ *sur* $\mathcal{C}ar_p^2(S)$ *au voisinage de* x_0. *Alors toutes les bicaractéristiques issues des points de* $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$ *sont localement contenues dans* $\{(x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^0 : \varphi(x) \leqslant 0\}$.

COMMENTAIRES 2.8. Ce corollaire, dont une première version avait été démontrée par Lerner & Robbiano [9, 1, 2.2.1] conduit notamment aux deux constatations suivantes: (i) dans le théorème d'unicité compacte de Hörmander [8, th. 28.4.3], les hypothèses impliquent que toutes les bicaractéristiques dont la projection sur la base passe par x_0 plongent dans le domaine où on suppose que u est nulle; (ii) chaque fois qu'une bicaractéristique issue d'un point de $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$ n'est pas entièrement contenue dans le domaine $\varphi(x) \leqslant 0$ (par exemple lorsque son ordre de contact est impair et supérieur à 2), on peut trouver des points x arbitrairement proches de x_0 et des points $(x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^2(S, x)$ tels que $H_p^2 \varphi(x, \xi) > 0$, où l'on peut donc appliquer le théorème de non-unicité d'Alinhac (th. 1.2 ci-dessus); ceci prolonge la remarque sur l'instabilité que nous avions faite à propos de l'exemple 2.3 lorsque k est impair.

2.3. *Le théorème de non-unicité.*

D'après la proposition 2.5 et le commentaire 2.8 (i), tous les résultats d'unicité connus dans notre contexte supposent que les bicaractéristiques plongent dans le domaine où u est supposée nulle. Lorsque ce n'est plus le cas, on peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.9. *Supposons qu'il existe un entier $k > 0$ et un point $(x_0, \xi_0) \in \in \mathcal{C}ar_p^{2k}(S)$ tel que $H_p^{2k}\varphi(x_0, \xi_0) > 0$, et ajoutons les deux hypothèses suivantes:*

(i) $\forall q_1$ *et* $q_2 \in \mathcal{H}_p^k(S)$,

$$H_{q_1}\varphi(x_0, \xi_0) = H_{q_2}\varphi(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow H_{q_1} q_2(x_0, \xi_0) = 0 \,;$$

(ii) $\forall q \in \mathcal{H}_p^k(S)$,

$$d_\xi q(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow (dq \wedge d\varphi)(x_0, \xi_0) = 0 \,.$$

Alors il existe deux fonctions C^∞ à valeurs complexes u et a vérifiant au voisinage de x_0

$$[P(x, D) + a(x)]u(x) = 0 \,,$$

$$x_0 \in supp\, u \subset \{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) \geqslant 0\} \qquad et \qquad supp\, a \subset supp\, u \,.$$

COMMENTAIRES 2.10. (i) on notera que nos hypothèses ne portent que sur les valeurs en (x_0, ξ_0) des dérivées de p et de φ sans aucune hypothèse au voisinage; (ii) pour les cas où on dispose d'une bicaractéristique d'ordre de contact infini, il y a un résultat de Bahouri ([5, th. 2.1]) qui prolonge le théorème d'Alinhac & Baouendi (th. 1.4 ci-dessus).

EXEMPLE 2.11. Soient $x = (t, y_1, y_2)$ les points de $\mathbf{R}^3$, $x_0 = (0, 0, 0)$, $\varphi(x) = t$, $p(t, y_1, y_2; \tau, \eta_1, \eta_2) = \tau^2 + \eta_1\eta_2 + t\eta_1^2 - ty_1^{2k-2}\eta_2^2$ où $k \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$, et $\xi_0 = (0, 0, 1)$. On calcule que

$$H_p\varphi = 2\tau, \qquad H_p^2\varphi = -2\eta_1^2 + 2y_1^{2k-2}\eta_2^2, \qquad \text{puis pour } 3 \leqslant j \leqslant 2k \,,$$

$$H_p^j\varphi = 2\,\frac{(2k-2)!}{(2k-j)!}\, y_1^{2k-j}\eta_2^j + O([\,|x - x_0| + |\xi - \xi_0|\,]^{2k+1-j}) \,.$$

Il en résulte que $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^{2k}(S, x_0)$ et que $H_p^{2k}\varphi(x_0, \xi_0) = 2[(2k-2)!] > 0$. Les autres hypothèses du théorème 2.9 sont également vérifiées car:

(i) d'après les formules précédentes,

a) pour $j < 2k$, $H_{H_p^j\varphi}\varphi(x_0, \xi_0) = 0 \Leftrightarrow j \neq 1$;

b) pour $0 \leqslant j$, $l < k$, $j \neq 1$ et $l \neq 1$, $H_p H_p^j \varphi = H_p^{j+1} \varphi$, et $H_{H_p^j \varphi} H_p^l \varphi = 0([|x - x_0| + |\xi - \xi_0|]^{k+1})$.

(ii) pour $1 < j < 2k - 1$, et donc pour $1 < j < k$, $(dH_p^j \varphi)(x_0, \xi_0) = 0$; il suffit alors d'écrire

$$d_\xi(\alpha p + \beta\varphi + \gamma H_p \varphi)(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0, \xi_0)\, d\eta_1 + \gamma(x_0, \xi_0)\, d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(x_0, \xi_0) = \gamma(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow [d(\alpha p + \beta\varphi + \gamma H_p \varphi) \wedge d\varphi]\,(x_0, \xi_0) = 0\,.$$

Dans [1] (cf. th. 1.2 ci-dessus), Alinhac avait montré que lorsque $k = 1$, il suffit de supposer $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$ et $H_p^2 \varphi(x_0, \xi_0) > 0$ pour obtenir le résultat. C'est également vrai si $k = 2$:

Corollaire 2.12. *Supposons qu'il existe un point* $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^4(S, x_0)$ *tel que* $H_p^4 \varphi(x_0, \xi_0) > 0$. *Alors même conclusion qu'au théorème* 2.9.

3. – Démonstration des résultats d'unicité.

3.1. *Principe de la déformation de surface.*

Lemme 3.1. *Supposons qu'il existe un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, *et une fonction* $\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$ *à valeurs réelles telle que* $d\varphi_1 \neq 0$ *dans* Ω *et*

(i) $K = \{x \in \Omega : \varphi(x) \geqslant 0$ *et* $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_1(x_0)\}$ *est compact*;

(ii) $H_p^2 \varphi_1 < 0$ *sur* $\{(x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^0 : x \in K$ *et* $H_p \varphi_1(x, \xi) = 0\}$.

Alors toute fonction à valeurs complexes $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *vérifiant* $P(x, D)u(x) = 0$ *dans* Ω *et* $u(x) = 0$ *dans* $\{x \in \Omega : \varphi(x) < 0\}$ *s'annule au voisinage de* x_0.

Démonstration. Soit $k = \{x \in \operatorname{supp} u : \varphi_1(x) \leqslant \varphi_1(x_0)\}$; comme $\operatorname{supp} u \subset \{x \in \Omega : \varphi(x) \geqslant 0\}$, on a $k \subset K$ et k est compact grâce à (i).

Raisonnons par l'absurde: supposons que $x_0 \in \operatorname{supp} u$; alors $x_0 \in k \neq \emptyset$, et la fonction φ_1 atteint son minimum sur k en un point $x_1 \in k$ $(\subset K)$. On a donc

$$x_1 \in \operatorname{supp} u\,, \tag{3.1}$$

$$x_1 \in K\,, \tag{3.2}$$

$$\varphi_1(x_1) \leqslant \varphi_1(x_0) \quad \text{et} \quad k \subset \{x \in \Omega : \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_1)\} \tag{3.3}$$

par définitions de k et de x_1: Or

$$\operatorname{supp} u \subset \big(k \cup \{x \in \Omega : \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_0)\}\big) \subset \{x \in \Omega : \varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_1)\}$$

grâce à (3.3); de plus, grâce à (3.2) et à l'hypothèse (ii) du lemme, l'hypersurface orientée $\{x \in \Omega : \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1)\}$ est pseudo-convexe en x_1: on ne peut donc avoir (3.1) à cause du théorème d'unicité de Hörmander (th. 1.1 ci-dessus).

3.2. *Démonstration du théorème* 2.1: *choix de la déformation et compacité.*

Nous allons maintenant démontrer le théorème 2.1 en nous ramenant à la situation décrite ci-dessus; le présent paragraphe est consacré au choix de la déformation φ_1 et à la vérification de l'hypothèse (i) du lemme 3.1; la démonstration du théorème sera ensuite complétée au paragraphes 3.3 & 3.4.

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 2.1 et remarquons que si $\mathcal{C}ar_p^3(S, x_0) = \emptyset$, l'hypothèse (i) entraîne que $H_p^2\varphi < 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$, et il n'y a donc plus rien à démontrer puisque ce sont là les hypothèses du théorème 1.1. Nous pouvons donc supposer que $\mathcal{C}ar_p^3(S, x_0) \neq \emptyset$ et d'après l'hypothèse (ii), il existe donc un point (x_0, ξ_0) où $H_p\varphi = 0$ et $H_p\psi \neq 0$; cela nous permet d'une part de conclure que $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$ et d'autre part d'utiliser les résultats du lemme 5.2 dont la démonstration sera donnée au paragraphe 5.1.

Choisissons comme coordonnées locales sur $\mathbf{R}^n$: $x_n = \varphi(x)$, $x_{n-1} = \psi(x) - \psi(x_0)$, et complétons avec $x' = (x_1, \ldots, x_{n-2})$. Si q est un voisinage compact de x_0 dans $\mathbf{R}^n$ où tout est défini et où on peut appliquer les résultats du lemme 5.2, posons $Q = \{(x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^0 : x \in q \text{ et } |\xi|^2 = 1\}$ avec $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$. En utilisant l'hypothèse (i) du théorème 2.1 et la compacité de $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0) \cap Q$, on a, avec des constantes $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $c_0 > 0$, une estimation (uniforme)

$$H_p^2\varphi \leqslant -c_0 x_{n-1}^k \quad \text{sur} \quad \mathcal{C}ar_p^2(S) \cap \{(x, \xi) \in Q : x_{n-1} \geqslant 0\} \tag{3.4}$$

pourvu que l'on ait choisi q assez petit. Si nous notons $C_0 = \sup_Q |H_p\psi|$, notre déformation de surface sera définie par la formule

$$\varphi_\varepsilon(x) = x_n - \varepsilon^{k+1}x_{n-1} - \varepsilon^k \frac{x_{n-1}^2}{2} + \frac{c_0}{C_0^2}\,\frac{x_{n-1}^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \varepsilon^{k+1}|x'|^2 \tag{3.5}$$

où le réel $\varepsilon > 0$ reste à choisir.

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par la formule

$$f(t) = t + \frac{t^2}{2} - \frac{c_0}{C_0^2} \frac{t^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\,;$$

cette fonction vérifie

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\to+\infty} f(t) = -\infty\,;$$

il existe donc trois réels α, β et γ tels que $\alpha < 0 < \beta < \gamma$ et

$$\{t \in \,]\alpha, \gamma[\colon f(t) \geqslant 0\} = [0, \beta]\,; \tag{3.6}$$

nous posons alors:

$$\Omega_\varepsilon = \{(x', x_{n-1}, x_n)\colon |x'| < \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha\varepsilon < x_{n-1} < \gamma\varepsilon \quad \text{et} \quad |x_n| < \varepsilon\}$$

et

$$K_\varepsilon = \{x \in \Omega_\varepsilon\colon \varphi(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi_\varepsilon(x) \leqslant 0\}\,.$$

D'après (3.5),

$$K_\varepsilon = \left\{x \in \Omega_\varepsilon\colon 0 \leqslant x_n \leqslant \varepsilon^{k+1} x_{n-1} + \varepsilon^k \frac{x_{n-1}^2}{2} - \frac{c_0}{C_0^2} \frac{x_{n-1}^{k+2}}{(k+1)(k+2)} - \varepsilon^{k+1} |x'|^2\right\} \subset$$
$$\subset \left\{x \in \Omega_\varepsilon\colon 0 \leqslant \varepsilon^{k+1} x_{n-1} + \varepsilon^k \frac{x_{n-1}^2}{2} - \frac{c_0}{C_0^2} \frac{x_{n-1}^{k+2}}{(k+1)(k+2)} = \varepsilon^{k+2} f\left(\frac{x_{n-1}}{\varepsilon}\right)\right\}.$$

D'après (3.6), on a donc $K_\varepsilon \subset \{x \in \Omega_\varepsilon\colon x_{n-1} \in [0, \beta\varepsilon]\}$, puis on montre de même que pour $x \in K_\varepsilon$, $|x'| \leqslant (\beta + \beta^2/2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ et $0 \leqslant x_n \leqslant (\beta + \beta^2/2)\varepsilon^{k+2}$. Il existe alors clairement un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon \in \,]0, \varepsilon_0[, \ \Omega_\varepsilon \subset q \quad \text{et} \quad K_\varepsilon \text{ est compact dans } \Omega_\varepsilon\,. \tag{3.7}$$

3.3. *Démonstration du théorème* 2.1: *propriété de pseudo-convexité.*

Lemme 3.2. *Sous les hypothèses du théorème* 2.1 *et avec les notations précédentes, il existe* $\varepsilon_1 \in \,]0, \varepsilon_0[$ *tel que pour tout* $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_1[$, $H_p^2 \varphi_\varepsilon < 0$ *sur* $\{(x, \xi) \in Q\colon x \in K_\varepsilon$ *et* $H_p \varphi_\varepsilon(x, \xi) = 0\}$.

Démonstration. Comme toutes les fonctions ne dépendant que de p, de φ et de ψ envisagées ici sont continues sur le compact Q, les différentes constantes C_j apparaissant ci-dessous en désigneront des bornes (indépendantes de ε et de $(x, \xi) \in Q$).

Les hypothèses (i) et (ii) du théorème 2.1 entraînent que $H_p^2\varphi < 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0) \cap \{(x, \xi) \in Q \colon H_p\psi(x, \xi) = 0\}$, et donc il existe $c_1 > 0$ telle que $H_p^2\varphi \leqslant -2c_1$ sur ce compact, puis il en existe un voisinage ouvert U tel que $H_p^2\varphi \leqslant -c_1$ dans $U \cap Q$. Si nous posons

$$\delta = \inf_{Q\setminus U} \max\{|x - x_0|, |H_p\varphi(x, \xi)|, |H_p\psi(x, \xi)|\},$$

$\delta > 0$ par continuité des fonctions considérées et définition de U, et on a

$$\text{(3.8)} \qquad \forall (x, \xi) \in Q, \quad \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < \delta, \\ |H_p\varphi(x, \xi)| < \delta \ \text{et} \ \Rightarrow H_p^2\varphi(x, \xi) \leqslant -c_1 . \\ |H_p\psi(x, \xi)| < \delta \end{array} \right.$$

Comme $x_n = \varphi(x)$ et $x_{n-1} = \psi(x) - \psi(x_0)$, la formule (3.5) donne

$$\text{(3.9)} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_p\varphi_\varepsilon = H_p\varphi - H_p\psi\left(\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^k x_{n-1} - \dfrac{c_0}{C_0^2}\dfrac{x_{n-1}^{k+1}}{k+1}\right) + \varepsilon^{k+1} H_p|x'|^2 , \\ \text{et} \\ H_p^2\varphi_\varepsilon = H_p^2\varphi - H_p^2\psi\left(\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^k x_{n-1} - \dfrac{c_0}{C_0^2}\dfrac{x_{n-1}^{k+1}}{k+1}\right) - \\ \qquad\qquad - (H_p\psi)^2\left(\varepsilon^k - \dfrac{c_0}{C_0^2} x_{n-1}^k\right) + \varepsilon^{k+1} H_p^2|x'|^2 . \end{array} \right.$$

La première de ces deux formules prouve que pour $(x, \xi) \in Q$ et $x \in K_\varepsilon$,

$$|H_p\varphi_\varepsilon - H_p\varphi| \leqslant C_1\varepsilon^{k+1} ,$$

et nous avons donc un $\varepsilon_2 > 0$ ne dépendant que de p, de φ et de ψ tel que

$$\text{(3.10)} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_2[, \ |x - x_0| < \delta \ \text{et} \ |H_p\varphi_\varepsilon - H_p\varphi| < \delta \ \text{pour} \ (x, \xi) \in Q \ \text{et} \ x \in K_\varepsilon .$$

Dans la suite, nous supposerons que $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_2\}$.

Soit maintenant un point $(x, \xi) \in Q$ tel que $x \in K_\varepsilon$ et $H_p\varphi_\varepsilon(x, \xi) = 0$. Nous distinguerons deux cas:

a) Si $|H_p\psi(x, \xi)| < \delta$, alors grâce à (3.10) et à (3.8), on a $H_p^2\varphi(x, \xi) \leqslant -c_1$ d'où, d'après (3.9),

$$H_p^2\varphi_\varepsilon(x, \xi) \leqslant -c_1 + C_2\varepsilon^k .$$

Il existe donc un $\varepsilon_3 > 0$ ne dépendant que de c_1 et de C_2 (*i.e.* que de p, de φ et de ψ) tel que $H_p^2 \varphi_\varepsilon(x, \xi) \leq -c_1/2$ pourvu que $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$.

b) *Si* $|H_p \psi(x, \xi)| \geq \delta$, la formule (3.9) donne

$$H_p^2 \varphi_\varepsilon(x, \xi) \leq H_p^2 \varphi(x, \xi) + c_0 x_{n-1}^k - \delta^2 \varepsilon^k + C_3 \varepsilon^{k+1} .$$

Comme (x, ξ) est ici tel que $|\varphi(x)| \leq (\beta + \beta^2/2)\varepsilon^{k+2}$ et $|H_p\varphi(x, \xi)| \leq C_1 \varepsilon^{k+1}$, nous pouvons, grâce au lemme 5.2, trouver un point $(y, \eta) \in Q \cap \mathcal{C}ar_p^2(S)$ tel que

$$\psi(y) = \psi(x) \qquad \text{et} \qquad |H_p^2 \varphi(y, \eta) - H_p^2 \varphi(x, \xi)| \leq C_4 \varepsilon^{k+1} ;$$

nous pouvons alors appliquer l'estimation (3.4) au point (y, η) qui vérifie $y_{n-1} = \psi(y) - \psi(x_0) = \psi(x) - \psi(x_0) = x_{n-1} \geq 0$, ce qui donne finalement

$$H_p^2 \varphi_\varepsilon(x, \xi) \leq -\delta^2 \varepsilon^k + C_5 \varepsilon^{k+1}$$

qui est le résultat cherché pourvu qu'on choisisse $\varepsilon < \varepsilon_4 = \delta^2/C_5$.

Nous obtenons donc le lemme 3.2 en prenant $\varepsilon_1 = \min \{\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

3.4. *Démonstration du théorème* 2.1: *choix de* ε.

Soit $u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que, au voisinage de x_0

$$P(x, D)\, u(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad u(x) = 0 \ \text{pour}\ \varphi(x) < 0 .$$

Il existe alors un $\varepsilon_u > 0$ tel que ces propriétés aient lieu dans l'ouvert Ω_ε dès que $\varepsilon < \varepsilon_u$. Si donc nous choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_u\}$, nous pouvons appliquer le lemme 3.1 avec $\Omega = \Omega_\varepsilon$ et $\varphi_1 = \varphi_\varepsilon$ puisque la compacité est assurée par (3.7) et la pseudo-convexité par le lemme 3.2. La démonstration du théorème est donc complète.

3.5. *Démonstration du corollaire* 2.4.

Quitte à remplacer $\psi(x)$ par $\psi(x) - \psi(x_0)$, nous pouvons supposer que $\psi(x_0) = 0$. D'après le théorème 2.1, et comme les hypothèses du corollaire 2.4 entraînent que $H_p^2 \varphi \leq 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$, il nous suffit d'établir que pour tout $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^3(S, x_0)$: (i) $H_p \psi(x_0, \xi_0) \neq 0$; (ii) il existe une constante $c > 0$ telle que dans un voisinage de (x_0, ξ_0),

$$(x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^2(S) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) \geq 0 \Rightarrow H_p^2 \varphi(x, \xi) \leq -c\psi(x) .$$

Soit donc un point $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^3(S, x_0)$.

(i) *Supposons que* $H_p\psi(x_0, \xi_0) = 0$. Comme p est de type principal, on pourra trouver une autre fonction ψ_2 telle que $\psi_2(x_0) = 0$ et $H_p\psi_2(x_0, \xi_0) = 1$. Alors $(d\varphi \wedge d\psi \wedge d\psi_2)(x_0) \neq 0$ puisque par hypothèse $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$ et que $H_p\varphi = H_p\psi = 0 \neq H_p\psi_2$ en (x_0, ξ_0). D'après le lemme 5.1 (propriété (5.2)), nous pouvons donc utiliser φ, $H_p\varphi$, ψ et ψ_2 comme coordonnées sur $\mathcal{C}ar_p^0$ près de (x_0, ξ_0). Plus précisément, nous choisirons des coordonnées $(t, y, z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n-4}\times\mathbb{R}^2$ définies de la façon suivante: comme $H_p\psi_2(x_0, \xi_0) \neq 0$, il existe, pour tout (x, ξ) dans un voisinage, un unique réel t tel que

$$\psi_2\big(\exp[-tH_p](x, \xi)\big) = 0\ ;$$

comme $H_p\psi_2(x_0, \xi_0) = 1$, cette formule nous assure que $\psi_2 \sim t$ et que $H_p t \equiv 1$; nous prenons ensuite $y_1 = \psi$, $z_1 = \varphi$, $z_2 = H_p\varphi$, et nous complétons ce système de coordonnées par des fonctions $y_2, \ldots, y_{2n-4}$ choisies arbitrairement sur $\{t = 0\}$, puis prolongées au voisinage avec la condition $H_p y_j \equiv 0$.

Par ce choix de coordonnées, on a $\mathcal{C}ar_p^2(S) = \{(t, y, z) \in \mathcal{C}ar_p^0 : z = 0\}$ et $\omega(s) = \exp[sH_p](x_0, \xi_0) = \big(s; \psi[\omega(s)], 0, \ldots, 0; \varphi[\omega(s)], H_p\varphi[\omega(s)]\big)$. Grâce à une formule de Taylor, on peut donc écrire

$$H_p^2\varphi[\omega(s)] = H_p^2\varphi(s, 0, 0) + \psi[\omega(s)]f(s) + \varphi[\omega(s)]g(s) + H_p\varphi[\omega(s)]h(s),$$

d'où en dérivant: $\partial_t H_p^2\varphi(0, 0, 0) = H_p^3\varphi(x_0, \xi_0) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites donne donc

$$H_p^2\varphi(t, y, 0) = c(t, y)\big(t + a(y)\big) \tag{3.11}$$

où $c(0, 0) = c_0 \neq 0$ et $a(0) = 0$. Si donc nous posons $\omega_\varepsilon = (c_0\,\varepsilon; \varepsilon^2, 0, \ldots, 0; 0, 0)$, ω_ε tend vers (x_0, ξ_0) quand ε tend vers 0, et

$$\omega_\varepsilon \in \mathcal{C}ar_p^2(S),\ \psi(\omega_\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0, \quad \text{mais } H_p^2\varphi(\omega_\varepsilon) = c_0^2\varepsilon + O(\varepsilon^2) > 0$$

pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit, ce qui contredit l'hypothèse du corollaire 2.4.

(ii) *Maintenant que nous savons* que $H_p\psi(x_0, \xi_0) = \lambda \neq 0$, nous reprenons la construction de coordonnées locales donnée ci-dessus avec des modifications évidentes de façon à obtenir

$$H_p t \equiv 1,\ \psi \sim \lambda t,\ H_p y_j \equiv 0 \quad \text{pour } j = 1, \ldots, 2n-4,$$

$$z_1 = \varphi,\ z_2 = H_p\varphi \quad \text{et } \mathcal{C}ar_p^2(S) = \{(t, y, z) \in \mathcal{C}ar_p^0 : z = 0\}.$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, on établit la formule (3.11); l'hypothèse du corollaire 2.4 nous assure que pour $\lambda t \geqslant 0$, $H_p^2\varphi(t, y, 0) \leqslant 0$, d'où on tire, en remplaçant y par 0 puis t par 0, que $c_0/\lambda < 0$ puis que $c_0 a(y) \leqslant 0$, ce qui donne finalement que pour $\lambda t \geqslant 0$,

$$H_p^2 \varphi(t, y, 0) \leqslant c(t, y)\, t \leqslant \tfrac{1}{2}\, (c_0/\lambda)(\lambda t) \; ;$$

comme $\psi \sim \lambda t$ et que $\mathcal{C}ar_p^2(S) = \{(t, y, z) \in \mathcal{C}ar_p^0 : z = 0\}$, cela signifie que

$$(x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^2(S) \text{ et } \psi(x) \geqslant 0 \Rightarrow H_p^2 \varphi(x, \xi) \leqslant \tfrac{1}{3}(c_0/\lambda)\, \psi(x) \, ,$$

d'où le corollaire 2.4.

4. – Démonstration des résultats de non-unicité.

Le théorème 2.9 s'obtient par application directe du théorème 2 de Alinhac & Baouendi [4] (th. 1.4 ci-dessus); il reste toutefois à construire les phases Φ et Ψ permettant d'utiliser ce résultat.

4.1. *Démonstration du théorème* 2.9: *construction de la phase* Φ.

LEMME 4.1. *Sous les hypothèses du théorème* 2.9, *il existe une application linéaire symétrique* $F\colon T_{x_0}\mathbb{R}^n \to T_{x_0}^*\mathbb{R}^n$ *telle que*

$$d_x p(x_0, \xi_0) + F[d_\xi p(x_0, \xi_0)] = 0 \; ; \tag{4.1}$$

$$\forall q \in \mathcal{H}_p^k(S), \; \big(d_x q(x_0, \xi_0) + F[d_\xi q(x_0, \xi_0)]\big) \wedge d\varphi(x_0) = 0 \, . \tag{4.2}$$

DÉMONSTRATION. Choisissons sur $\mathbb{R}^n$ des coordonnées locales (x', x'', x_n) avec $x' = (x_1, \dots, x_{r-1})$, $x'' = (x_r, \dots, x_{n-1})$ et $x_n = \varphi(x)$ telles que $d_\xi p(x_0, \xi_0) = d\xi_{n-1}$ et

$$\{d_\xi q(x_0, \xi_0) : q \in \mathcal{H}_p^k(S)\} = \left| \begin{array}{l} \Big\{\sum\limits_j X_j\, d\xi_j : X' = 0\Big\} \text{ s'il existe } q_0 \in \mathcal{H}_p^k(S) \\ \text{tel que } H_{q_0}\varphi(x_0, \xi_0) \neq 0 \text{ (\textit{cas} no. 1), ou} \\ \Big\{\sum\limits_j X_j\, d\xi_j : X' = X_n = 0\Big\} \text{ si } \forall q \in \mathcal{H}_p^k(S), \\ H_q\varphi(x_0, \xi_0) = 0 \text{ (\textit{cas} no. 2).} \end{array} \right.$$

Puis nous choisissons des éléments $q_j \in \mathcal{H}_p^k(S)$ pour $r \leqslant j \leqslant n$ (cas no. 1) ou

$r \leqslant j < n$ (cas no. 2) tels que $q_{n-1} = p$ et

$$d_\xi q_j(x_0, \xi_0) = d\xi_j \,; \tag{4.3}$$

nous posons alors pour $r \leqslant j \leqslant n$ (ou $r \leqslant j < n$ suivant le cas)

$$F_{j,l} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_l}(x_0, \xi_0) \quad \text{pour } 1 \leqslant l < n \,, \tag{4.4}$$

et de plus, si nous sommes dans le cas no. 2,

$$F_{n,n-1} = -\frac{\partial p}{\partial x_n}(x_0, \xi_0)\,. \tag{4.5}$$

Les quantités $F_{j,l}$ et $F_{l,j}$ ne sont simultanément définies que pour $r \leqslant j < n$ et $r \leqslant l < n$, et on a alors d'après (4.3) et (4.4)

$$H_{q_j}\varphi(x_0, \xi_0) = H_{q_l}\varphi(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{et} \quad F_{j,l} - F_{l,j} = H_{q_j} q_l(x_0, \xi_0)\,,$$

d'où $F_{j,l} = F_{l,j}$ grâce à l'hypothèse (i) du théorème 2.9; nous pouvons donc compléter le tableau des $F_{j,l}$ en une matrice symétrique, et nous définissons l'application linéaire F par la formule

$$F\Big[\sum_{j=1}^{n} X_j d\xi_j\Big] = \sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} F_{j,l} X_j\Big) dx_l \,;$$

nous obtenons alors en utilisant (4.3) et (4.4) que pour $r \leqslant j \leqslant n$ (ou $r \leqslant j < n$ suivant le cas)

$$\frac{\partial q_j}{\partial x_l}(x_0, \xi_0) + \big(F[d_\xi q_j(x_0, \xi_0)]\big)_l = \frac{\partial q_j}{\partial x_l}(x_0, \xi_0) + F_{j,l} = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant l < n. \tag{4.6}$$

Le même calcul, pour $j = n-1$ et $l = n$ donne

$$\frac{\partial p}{\partial x_n}(x_0, \xi_0) + \big(F[d_\xi p(x_0, \xi_0)]\big)_n = \begin{cases} 0 \text{ d'après (4.5) dans le cas no. 2, ou} \\ -H_p q_n(x_0, \xi_0) \text{ dans le cas no. 1}\,, \end{cases}$$

et cette dernière expression est nulle puisque $H_p q_n \in \mathcal{K}_p^{k+1}(S)$ et que $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^{2k}(S) \subset \mathcal{C}ar_p^{k+1}(S)$; avec les équations (4.6), cela nous donne donc (4.1).

Enfin, si $q \in \mathcal{K}_p^k(S)$, il existe grâce à notre choix des q_j des coefficients

$X_j \in \mathbb{R}$ tels que

$$d_\xi q(x_0, \xi_0) = \sum_{j=r}^{n(-1)} X_j \, d_\xi q_j(x_0, \xi_0) , \tag{4.7}$$

et on calcule alors qu'en (x_0, ξ_0)

$$d_x q + F[d_\xi q] = d_x q + \sum X_j F[d_\xi q_j] = d_x q - \sum X_j d_x q_j + \alpha_0 dx_n$$

d'après (4.6), puis

$$\big(d_x q(x_0, \xi_0) + F[d_\xi q(x_0, \xi_0)]\big) \wedge d\varphi(x_0) = \big(d_x[q - \sum X_j q_j]\,(x_0, \xi_0)\big) \wedge d\varphi(x_0)$$

d'où (4.2) grâce à (4.7) et à l'hypothèse (ii) du théorème 2.9.

LEMME 4.2. *Sous les hypothèses du théorème* 2.9, *il existe au voisinage de x_0 une fonction Φ de classe C^∞ à valeurs réelles telle que*

$$d\Phi(x_0) = \xi_0 \quad \textit{et} \quad p\big(x, d\Phi(x)\big) = 0 \textit{ près de } x_0 ; \tag{4.8}$$

$$\forall q \in \mathcal{H}_p^k(S), \ (dQ \wedge d\varphi)(x_0) = 0 \textit{ où on a posé } Q(x) = q\big(x, d\Phi(x)\big) . \tag{4.9}$$

DÉMONSTRATION. En reprenant les notations de la démonstration précédente, nous posons $\xi_0 = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ puis

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-2}, 0, x_n) = \sum_{j \neq n-1} x_j\Big(\xi_j + \tfrac{1}{2} \sum_{l \neq n-1} F_{j,l}\, x_l\Big) . \tag{4.10}$$

Par un théorème classique (cf. Hörmander [7, th. 1.8.2]) nous pouvons étendre cette fonction en une solution de (4.8) car $d_\xi p(x_0, \xi_0) = d\xi_{n-1}$ (cf. (4.3)). En dérivant (4.10) lorsque j et l sont différents de $n-1$, et en dérivant (4.8) et en comparant avec (4.1) dans les autres cas, on obtient que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j\, \partial x_l}(x_0) = F_{j,l} \quad \text{pour } 1 \leqslant j, l \leqslant n ,$$

ce qui entraîne que pour $q \in \mathcal{H}_p^k(S)$,

$$(dQ \wedge d\varphi)(x_0) = \big(d_x q(x_0, \xi_0) + F[d_\xi q(x_0, \xi_0)]\big) \wedge d\varphi(x_0)$$

d'où (4.9) grâce à (4.2).

4.2. *Démonstration du théorème 2.9: construction de la phase Ψ.*

LEMME 4.3. *Soient Φ une solution C^∞ de l'équation $p(x, d\Phi(x)) = 0$ et $X = p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot \partial_x$ le champ de transport correspondant; alors pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ et tout entier $j \in \mathbf{N}$, $X^j \psi(x) = H_p^j \psi(x, d\Phi(x))$.*

DÉMONSTRATION. Par récurrence. Pour $j = 0$ ou 1, c'est bien clair; puis

$$X[H_p^j \psi(x, d\Phi(x))] = p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot ([H_p^j \psi(x, \xi)]_x + \\ + \Phi_{xx}(x)\, [H_p^j \psi(x, \xi)]_\xi)_{\xi = d\Phi(x)} = p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot [H_p^j \psi(x, \xi)]_x - \\ - p_x(x, d\Phi(x)) \cdot [H_p^j \psi(x, \xi)]_\xi)_{\xi = d\Phi(x)} = H_p^{j+1} \psi(x, d\Phi(x))$$

où l'on a utilisé que $p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot \Phi_{xx}(x) = -p_x(x, d\Phi(x))$, résultat qui s'obtient en dérivant l'équation $p(x, d\Phi(x)) = 0$.

D'après le théorème 2 de Alinhac & Baouendi [4] (th. 1.4 ci-dessus), le théorème 2.9 résulte maintenant du:

LEMME 4.4. *Sous les hypothèses du théorème 2.9, il existe deux fonctions C^∞ à valeurs réelles Φ et Ψ définies au voisinage de x_0 et possédant les propriétés suivantes:*

$$p(x, d\Phi(x)) = 0\,; \tag{4.11}$$

$$X = p_\xi(x, d\Phi(x)) \cdot \partial_x \neq 0 \qquad \text{et } X\Psi(x) = 0\,; \tag{4.12}$$

$$x_0 \in \{x \in \mathbf{R}^n : \Psi(x) \geq 0\} \subset \{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) \geq 0\}\,. \tag{4.13}$$

DÉMONSTRATION. Comme fonction Φ, nous prenons celle qui nous est fournie par le lemme 4.2. La propriété (4.8) entraîne la propriété (4.11), et aussi que $X \neq 0$ et $X\varphi(x_0) = 0$. Nous pouvons donc trouver des coordonnées locales (x', x_{n-1}, x_n), avec $x' = (x_1, \ldots, x_{n-2})$, qui redressent le champ X en

$$X = \partial_{n-1} \tag{4.14}$$

et telles que $x_0 = (0, 0, 0)$ et $d\varphi(x_0) = dx_n$. Grâce au théorème des fonctions implicites, S possède une équation de la forme $\varphi_1(x) = 0$ avec $\varphi_1(x', x_{n-1}, x_n) = x_n + \varphi_0(x', x_{n-1})$ où φ_0 est une fonction C^∞ à valeurs réelles telle que $\varphi_0(0, 0) = 0$ et $d\varphi_0(0, 0) = 0$. Les hypothèses du théorème étant invariantes par changement d'équation de S, nous pouvons supposer que c'est φ elle-même qui s'écrit ainsi. Un développement de Taylor en x'

nous donne donc

$$(4.15)\qquad \varphi(x', x_{n-1}, x_n) = x_n + \varphi(0, x_{n-1}, 0) + x' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x'}(0, x_{n-1}, 0) + O(|x'|^2)$$

où $|x'|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-2}^2$.

Utilisons maintenant l'hypothèse: $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^{2k}(S)$ et $H_p^{2k}\varphi(x_0, \xi_0) > 0$; avec (4.8), le lemme 4.3 et (4.14), cela entraîne que $\partial_{n-1}^j \varphi(0, 0, 0) = 0$ pour $0 \leqslant j < 2k$ et $\partial_{n-1}^{2k}\varphi(0, 0, 0) = 2c > 0$; il en résulte que pour $|x_{n-1}|$ suffisamment petit

$$(4.16)\qquad \varphi(0, x_{n-1}, 0) \geqslant c x_{n-1}^{2k};$$

puis, toujours d'après le lemme 4.3 et (4.14), $\partial_{n-1}^j \varphi(x) = q_j(x, d\Phi(x))$ pour des fonctions $q_j \in \mathcal{K}_p^k(S)$ pourvu que $0 \leqslant j < k$; grâce à (4.9), nous obtenons ainsi que $\partial_{x'} \partial_{n-1}^j \varphi(0, 0, 0) = 0$ pour $0 \leqslant j < k$ d'où

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x'}(0, x_{n-1}, 0) \right| \leqslant C_1 |x_{n-1}|^k, \qquad \text{puis } x' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x'}(0, x_{n-1}, 0) \geqslant -c x_{n-1}^{2k} - \frac{C_1^2}{4c}|x'|^2.$$

En rapprochant cette estimation de (4.15) et (4.16), nous obtenons

$$\varphi(x', x_{n-1}, x_n) \geqslant x_n - C_2|x'|^2.$$

Si donc nous posons $\Psi(x', x_{n-1}, x_n) = x_n - C_2|x'|^2$, (4.14) entraîne (4.12), et l'estimation précédente entraîne (4.13).

4.3. *Démonstration du corollaire* 2.12.

Il nous suffit de vérifier que pour $k = 2$, les hypothèses (i) et (ii) du théorème 2.9 sont automatiquement vérifiées dès qu'on suppose que $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^4(S, x_0)$. Rappelons que $\mathcal{K}_p^2(S)$ est l'idéal formé des fonctions de la forme $q = \alpha p + \beta \varphi + \gamma H_p \varphi$, α, β et $\gamma \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n \setminus 0)$.

(i) *La condition*

$$H_{q_j}\varphi(x_0, \xi_0) = 0 \qquad \text{avec} \qquad q_j = \alpha_j p + \beta_j \varphi + \gamma_j H_p \varphi$$

entraîne que $\gamma_j(x_0, \xi_0) = 0$ puisque $H_p\varphi(x_0, \xi_0) = H_\varphi \varphi(x_0, \xi_0) = 0$ et que $H_{H_p\varphi}\varphi(x_0, \xi_0) = H_\varphi^2 p(x_0) \neq 0$ d'après (1.2). Si $\gamma_1(x_0, \xi_0) = \gamma_2(x_0, \xi_0) = 0$, tous les termes de la forme $H_r s$ obtenus en développant $H_{q_1} q_2$ apparaissent avec des coefficients nuls en (x_0, ξ_0) à l'exception des termes $H_p p$, $H_p \varphi$ et $H_\varphi \varphi$

qui sont eux-mêmes nuls en (x_0, ξ_0); nous avons donc montré que

$$H_{q_1}\varphi(x_0, \xi_0) = H_{q_2}\varphi(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow H_{q_1} q_2(x_0, \xi_0) = 0 \, .$$

(ii) *La condition*

$$d_\xi(\alpha p + \beta\varphi + \gamma H_p \varphi)(x_0, \xi_0) = 0$$

entraîne que $\alpha(x_0, \xi_0) = \gamma(x_0, \xi_0) = 0$ puisque $d_\xi \varphi = 0$ et que $d_\xi p(x_0, \xi_0)$ et $d_\xi H_p \varphi(x_0, \xi_0)$ sont linéairement indépendants d'après la propriété (5.1) du lemme 5.1; pour un tel élément de $\mathcal{K}_p^2(S)$ on a donc

$$\big(d(\alpha p + \beta\varphi + \gamma H_p \varphi) \wedge d\varphi\big)\,(x_0, \xi_0) = \beta(x_0, \xi_0)(d\varphi \wedge d\varphi)(x_0) = 0 \, ,$$

tous les autres produits extérieurs apparaissant avec des coefficients nuls en (x_0, ξ_0). Les hypothèses du théorème 2.9 sont donc vérifiées, et le corollaire 2.12 en résulte.

5. – Lemmes techniques.

5.1. *Conséquences des hypothèses générales sur p et S.*

Nous donnons ici les démonstrations de deux lemmes que nous avons utilisés au cours des démonstrations précédentes, et qui figurent déjà sous une forme voisine dans Lerner & Robbiano [9].

LEMME 5.1. *Supposons qu'on a fait le choix d'un système de coordonnées, pour lequel on note $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$, et qu'on s'est donné k fonctions C^∞ à valeurs réelles $\psi_1, \ldots, \psi_k$ telles que $(d\varphi \wedge d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_k)(x_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage compact q de x_0 tel que, avec $Q = \{(x, \xi) \in \mathrm{Car}_p^0 : x \in q$ et $|\xi|^2 = 1\}$, on ait pour tout $(x_1, \xi_1) \in Q \cap \mathrm{Car}_p^2(S)$:*

(5.1) *$d_\xi p$, $d_\xi\big(|\xi|^2 - 1\big)$ et $d_\xi(H_p \varphi)$ sont linéairement indépendants en (x_1, ξ_1);*

(5.2) *dp, $d\big(|\xi|^2 - 1\big)$, $d\varphi$, $d(H_p \varphi)$, $d\psi_1, \ldots, d\psi_k$ sont linéairement indépendants en (x_1, ξ_1).*

DÉMONSTRATION. (i) *Si q est assez petit,* $H_\varphi^2 p(x_1) \neq 0$ pour tout $x_1 \in q$ d'après (1.2). Si nous supposons que

$$X = \alpha d_\xi p(x_1, \xi_1) + \beta d_\xi\big(|\xi|^2 - 1\big)\,(x_1, \xi_1) + \gamma d_\xi(H_p \varphi)(x_1, \xi_1) = 0 \, ,$$

nous obtenons successivement que

$$\left|\begin{array}{l}\beta = \big(2\alpha p(x_1, \xi_1) + 2\beta|\xi_1|^2 + \gamma H_p\varphi(x_1, \xi_1)\big)/2 = X\cdot\xi_1/2 = 0\,,\\ \gamma = \big(\alpha H_p\varphi(x_1, \xi_1) + \gamma H_\varphi^2 p(x_1)\big)/H_\varphi^2 p(x_1) = X\cdot d\varphi(x_1)/H_\varphi^2 p(x_1) = 0\,,\\ \text{et}\\ \alpha = \alpha|d_\xi p(x_1, \xi_1)|^2/|d_\xi p(x_1, \xi_1)|^2 = X\cdot d_\xi p(x_1, \xi_1)/|d_\xi p(x_1, \xi_1)|^2 = 0\end{array}\right.$$

car $d_\xi p(x_1, \xi_1) \neq 0$ puisque p est de type principal; ceci donne la propriété (5.1).

(ii) *De nouveau si q est assez petit,* $(d\varphi \wedge d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_k)(x_1) \neq 0$ pour tout $x_1 \in q$; la propriété (5.2) résulte donc de la propriété (5.1) puisque $d_\xi\varphi = d_\xi\psi_1 = \ldots = d_\xi\psi_k = 0$.

LEMME 5.2. *Supposons qu'on a fait le choix d'un système de coordonnées, pour lequel on note $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$, et qu'il existe une fonction C^∞ à valeurs réelles ψ et un point de $\mathcal{C}ar_p^2(S, x_0)$ où $H_p\psi \neq 0$. Alors il existe un voisinage compact q de x_0 et une constante $C > 0$ tels qu'avec $Q = \{(x, \xi) \in \mathcal{C}ar_p^0\colon x \in q$ et $|\xi|^2 = 1\}$ on ait*

$$\forall (x, \xi) \in Q\,, \qquad \exists (y, \eta) \in Q \cap \mathcal{C}ar_p^2(S)\colon$$

$$\psi(y) = \psi(x) \qquad \textit{et}\ |H_p^2\varphi(y, \eta) - H_p^2\varphi(x, \xi)| \leqslant C\big(|\varphi(x)| + |H_p\varphi(x, \xi)|\big)\,.$$

DÉMONSTRATION. L'existence du point (x_0, ξ_0) où $H_p\varphi = 0$ et $H_p\psi \neq 0$ prouve que $(d\varphi \wedge d\psi)(x_0) \neq 0$: nous pouvons donc utiliser les résultats du lemme 5.1, et nous demanderons en outre que le voisinage q soit tel que $\forall x \in q$, $\exists y \in q \cap S$ tel que $\psi(y) = \psi(x)$.

D'après la propriété (5.1), nous avons $p = |\xi|^2 - 1 = H_p\varphi = 0$, et $d_\xi p$, $d_\xi\big(|\xi|^2 - 1\big)$, $d_\xi(H_p\varphi)$ linéairement indépendants en $\big(x_0, \xi_0/|\xi_0|\big)$; nous pouvons donc utiliser le théorème des fonctions implicites pour en déduire que $\forall y \in q \cap S$, $Q \cap \mathcal{C}ar_p^2(S, y) \neq \emptyset$, et donc

$$\text{(5.3)} \qquad \forall (x, \xi) \in Q\,, \quad \exists (y, \eta) \in Q \cap \mathcal{C}ar_p^2(S)\colon \psi(y) = \psi(x)\,;$$

il ne reste plus qu'à prouver l'estimation de $|H_p^2\varphi(y, \eta) - H_p^2\varphi(x, \xi)|$.

La propriété (5.2) montre que les fonctions φ, $H_p\varphi$ et ψ peuvent être prises comme coordonnées sur la variété Q près de n'importe quel point de $Q \cap \mathcal{C}ar_p^2(S)$; chaque point de $Q \cap \mathcal{C}ar_p^2(S)$ possède donc un voisinage dans lequel l'estimation a lieu comme on le voit en écrivant une formule de Taylor. Par compacité, $Q \cap \mathcal{C}ar_p^2(S)$ possède lui-même un voisinage ouvert U vérifiant avec une constante uniforme C_1:

$$\forall(x,\xi)\in Q\cap U\,,\quad \exists(y,\eta)\in Q\cap \mathcal{C}ar_p^2(S):$$
$$\psi(y)=\psi(x)\quad \text{et}\quad |H_p^2\varphi(y,\eta)-H_p^2\varphi(x,\xi)|\leqslant C_1\big(|\varphi(x)|+|H_p\varphi(x,\xi)|\big)\,.$$

Enfin, comme $\inf\limits_{Q\setminus U}\big(|\varphi|+|H_p\varphi|\big)=c>0$ par définition de U, on a aussi (cf. (5.3)):

$$\forall(x,\xi)\in Q\setminus U\,,\quad \exists(y,\eta)\in Q\cap \mathcal{C}ar_p^2(S):$$
$$\psi(y)=\psi(x)\ \text{ et }\ |H_p^2\varphi(y,\eta)-H_p^2\varphi(x,\xi)|\leqslant\big(2\sup_Q|H_p^2\varphi|/c\big)\big(|\varphi(x)|+|H_p\varphi(x,\xi)|\big)\,,$$

d'où le lemme.

5.2. *Choix de la fonction φ.*

Dans la démonstration de la proposition 2.6, nous aurons besoin d'une version précisée du lemme 28.4.2 de Hörmander [8]; nous en donnons ici la démonstration.

LEMME 5.3. *Prenons les mêmes hypothèses qu'au lemme 5.2 et supposons en outre que $H_p^2\varphi\leqslant 0$ sur $\mathcal{C}ar_p^2(S,x)$ pour tout x voisin de x_0 tel que $\psi(x)>\psi(x_0)$. Alors il existe un voisinage ω de x_0 et un nombre $A>0$ tels qu'avec $\varphi_1(x)=\big(1-A|x-x_0|^2\big)\varphi(x)$ on ait*

$$(5.4)\qquad \forall(x,\xi)\in T^*\omega\,,\quad \left\{\begin{array}{l} p(x,\xi)=H_p\varphi_1(x,\xi)=0\,,\\ \varphi_1(x)\geqslant 0\ \ et\ \ \psi(x)\geqslant\psi(x_0)\end{array}\right.\Rightarrow H_p^2\varphi_1(x,\xi)\leqslant 0\,.$$

DÉMONSTRATION. Supposons pour simplifier que $x_0=0$; nous pouvons utiliser le résultat du lemme 5.2 qui fournit un voisinage compact q de x_0 et une constante $C>0$ tels que, compte tenu de l'hypothèse supplémentaire que nous avons ici,

$$(5.5)\quad \forall(x,\xi)\in Q,\qquad \psi(x)\geqslant\psi(x_0)\Rightarrow H_p^2\varphi(x,\xi)\leqslant C\big(|\varphi(x)|+|H_p\varphi(x,\xi)|\big)\,.$$

Par ailleurs on calcule que

$$\left\{\begin{array}{l} H_p\varphi_1=\varphi H_p(1-A|x|^2)+(1-A|x|^2)\,H_p\,\varphi\,,\\ H_p^2\varphi_1=\varphi H_p^2(1-A|x|^2)+2H_p\varphi H_p(1-A|x|^2)+(1-A|x|^2)\,H_p^2\varphi\,,\\ H_p(1-A|x|^2)=-2Ax\cdot p_\xi,\\ \text{et}\\ H_p^2(1-A|x|^2)=-2A|p_\xi|^2-2Ax\cdot H_p^2x\,.\end{array}\right.$$

Plaçons-nous en un point de Q où $H_p\varphi_1 = 0$, $\varphi_1 \geqslant 0$ et $\psi \geqslant \psi(x_0)$; $H_p\varphi_1 = 0$ entraîne que

$$H_p\varphi = -\frac{\varphi}{1-A|x|^2}H_p(1-A|x|^2) = \frac{2A\varphi(x\cdot p_\xi)}{1-A|x|^2},$$

d'où

$$H_p^2\varphi_1 = \varphi[-2A|p_\xi|^2 - 2Ax\cdot H_p^2 x] + 2\frac{2A\varphi x\cdot p_\xi}{1-A|x|^2}(-2Ax\cdot p_\xi) + (1-A|x|^2)H_p^2\varphi;$$

le dernier terme se majorant grâce à (5.5), on obtient

$$H_p^2\varphi_1 \leqslant 2A\varphi\left[-|p_\xi|^2 - x\cdot H_p^2 x - \frac{4A(x\cdot p_\xi)^2}{1-A|x|^2}\right] + C(1-A|x|^2)\varphi + 2CA\varphi|x\cdot p_\xi|,$$

puis enfin, à condition de prendre $|x|^2 < 1/2A$,

$$H_p^2\varphi_1 \leqslant 2A\varphi\left[-|p_\xi|^2 + \frac{C}{2A} + C_A|x|\right].$$

Comme p est de type principal, $\inf_Q |p_\xi|^2 = c > 0$; on obtient donc (4.4) en prenant $A > C/c$, puis $\omega \subset q$ tel que $|x| < c/2C_A$ et $|x| < (2A)^{-\frac{1}{2}}$ dans ω.

5.3. *Démonstration de la proposition* 2.6.

Comme dans la démonstration du corollaire 2.4, nous pouvons supposer que $\psi(x_0) = 0$ quitte à remplacer $\psi(x)$ par $\psi(x) - \psi(x_0)$.

Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{Car}_p^2(S, x_0)$. Si $H_p\psi(x_0, \xi_0) = 0$, il n'y a rien à démontrer; nous pouvons donc supposer que

$$H_p\psi(x_0, \xi_0) > 0 \tag{5.6}$$

quitte à changer p en $-p$. Ceci nous permet alors d'utiliser le lemme 5.3: nous supposerons que (5.4) est vérifiée avec φ à la place de φ_1. De même, comme $H_p^2\varphi(x_0, \xi_0) \neq 0$ entraîne que $H_p^2\varphi(x_0, \xi_0) < 0$ auquel cas le résultat est évident, nous pouvons supposer (cf. (1.2)) que

$$H_p\varphi(x_0, \xi_0) = H_p^2\varphi(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{et } H_\varphi^2 p(x_0, \xi_0) \neq 0. \tag{5.7}$$

La démonstration s'effectuera en trois étapes.

(i) *Choix de coordonnées microlocales*: soit

$$q_0(x, \xi) = \varphi(x) + H_p\varphi(x, \xi) + \frac{H_\varphi H_p\psi(x_0, \xi_0)}{H_p\psi(x_0, \xi_0)}p(x, \xi);$$

alors en utilisant (5.7):

$$H_{q_0} p(x_0, \xi_0) = H_{q_0} \psi(x_0, \xi_0) = 0 \,, \tag{5.8}$$

et

$$H_{q_0} \varphi(x_0, \xi_0) = - H_{q_0} H_p \varphi(x_0, \xi_0) = - H_\varphi^2 p(x_0, \xi_0) \neq 0 \,. \tag{5.9}$$

D'après (5.8), on peut trouver une fonction $q(x, \xi)$ définie au voisinage de (x_0, ξ_0) telle que

$$H_p q(x, \xi) = 0 \quad \text{et } dq(x_0, \xi_0) = dq_0(x_0, \xi_0) \,; \tag{5.10}$$

nous posons alors

$$\omega(s, t) = \exp [sH_p + tH_q] (x_0, \xi_0) \,;$$

la relation (5.10) entraîne que pour s et t voisins de 0, $\omega(s, t) \in \mathcal{C}ar_p^0$ et que les relations (5.8) et (5.9) sont encore vraies avec q à la place de q_0. Comme $\partial_t(\varphi[\omega(s, t)]) = H_q \varphi(x_0, \xi_0)$ et $\partial_t(H_p \varphi[\omega(s, t)]) = H_q H_p \varphi(x_0, \xi_0)$ en $s = t = 0$, il existe, d'après (5.9) et le théorème des fonctions implicites, deux fonctions $\tau(s)$ et $\theta(s)$ telles que $\tau(0) = \theta(0) = 0$ et

$$\begin{cases} \varphi[\omega(s, t)] \quad = 0 \Leftrightarrow t = \tau(s) \,, \\ H_p \varphi[\omega(s, t)] = 0 \Leftrightarrow t = \theta(s) \,. \end{cases} \tag{5.11}$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans un voisinage $|s| < \varepsilon$, $|t| < \varepsilon$ où les fonctions τ et θ sont bien définies et tel que $(H_q \varphi[\omega(s, t)]) \, (H_q H_p \varphi[\omega(s, t)]) \neq 0$. Remarquons enfin qu'à cause de (5.9),

$$(\varphi[\omega(s, t)]) \, (H_p \varphi[\omega(s, t)]) > 0 \Rightarrow (\tau(s) - t) \, (\theta(s) - t) < 0 \,. \tag{5.12}$$

(ii) *La fonction φ est négative le long de la courbe $t = \theta(s)$.*

LEMME 5.4. *Sous les hypothèses de la proposition* 2.6 *et avec les notations précédentes, $\varphi[\omega(s, \theta(s))] \leqslant 0$ pour $s \geqslant 0$.*

DÉMONSTRATION. Posons

$$f(s) = \varphi[\omega(s, \theta(s))] \quad \text{ et } g(s) = \psi[\omega(s, \theta(s))] \,;$$

par dérivation nous obtenons:

$$\begin{cases} f'(s) = H_p \varphi[\omega(s, \theta(s))] + \theta'(s) H_q \varphi[\omega(s, \theta(s))] = \theta'(s) H_q \varphi[\omega(s, \theta(s))] \,, \\ \text{et} \\ g'(0) = H_p \psi(x_0, \xi_0) + \theta'(0) H_q \psi(x_0, \xi_0) = H_p \psi(x_0, \xi_0) > 0 \end{cases}$$

d'après (5.11), (5.8) et (5.6). Cela nous donne déjà

$$\varphi[\omega(s, \theta(s))] \geqslant 0 \quad \text{pour } s \geqslant 0 . \tag{5.13}$$

Pour avoir une expression de $\theta'(s)$, dérivons l'identité $H_p\varphi[\omega(s, \theta(s))] = 0$:

$$0 = H_p^2\varphi[\omega(s, \theta(s))] + \theta'(s) H_q H_p \varphi[\omega(s, \theta(s))] ,$$

d'où

$$f'(s) = -\big(H_q\varphi[\omega(s, \theta(s))]/H_q H_p \varphi[\omega(s, \theta(s))]\big) H_p^2 \varphi[\omega(s, \theta(s))] .$$

Dans l'expression précédente, la grande parenthèse renferme une fonction strictement négative à cause de (5.9), et d'après (5.13) et (5.4), nous avons donc écrit $f'(s)$ comme une fonction qui est négative là où $f(s)$ et s sont positives; le lemme 5.4 résulte donc du lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

LEMME. *Soit f une fonction C^1 à valeurs réelles telle que $f(0) = 0$ et $f'(s) \leqslant 0$ si $f(s) \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$. Alors $f(s) \leqslant 0$ pour $s \geqslant 0$.*

(iii) *Fin de la démonstration*: Posons $f(s) = \varphi(\exp [sH_p] (x_0, \xi_0))$; alors:

$$f(s) = \varphi[\omega(s, 0)] \quad \text{et} \quad f'(s) = H_p\varphi[\omega(s, 0)] . \tag{5.14}$$

Pour conclure, nous distinguons les deux cas suivants:

a) *S'il existe $s_0 > 0$ tel que $\theta(s_0) = 0$*, alors pour tout $s \in [0, s_0]$, $f(s) \leqslant 0$. En effet, si $s_1 \in [0, s_0]$ est tel que $\theta(s_1) = 0$, cela découle du lemme 5.4; sinon, posons $s_2 = \sup \{s < s_1 : \theta(s) = 0\}$ et $s_3 = \inf \{s > s_1 : \theta(s) = 0\}$; on a $0 \leqslant s_2 < s_1 < s_3 \leqslant s_0$, et sur $]s_2, s_3[$, $\theta(s) \neq 0$ donc d'après (5.11) et (5.14), f est monotone; comme on tire du lemme 5.4 que $f(s_2) \leqslant 0$ et $f(s_3) \leqslant 0$, il en résulte que $f(s_1) \leqslant 0$.

b) *Si $\forall s \in]0, \varepsilon[$, $\theta(s) \neq 0$*, f est encore strictement monotone d'après (5.11) et (5.14), et comme $f(0) = 0$, on a $f(s)\, f'(s) > 0$ pour $0 < s < \varepsilon$; en utilisant (5.14) et (5.12) nous en déduisons que $\tau(s)\theta(s) < 0$, avec (5.11) que $f(s)\varphi[\omega(s, \theta(s))] > 0$, puis enfin que $f(s) < 0$ grâce au lemme 5.4, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.6.

5.4. *Démonstration de la proposition* 2.5.

D'après la proposition 2.6, la proposition 2.5 résulte du

LEMME 5.5. *Sous les hypothèses du théorème* 2.1, $\mathcal{C}ar_p^\infty(S, x_0) = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Nous supposerons comme précédemment que $\psi(x_0) = 0$.

Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^\infty(S, x_0)$; d'après l'hypothèse (ii) du théorème 2.1, $H_p\psi(x_0, \xi_0) = \lambda \neq 0$. Comme dans la démonstration du corollaire 2.4 (partie (ii)) nous choisissons sur $\mathcal{C}ar_p^0$ près de (x_0, ξ_0) des coordonnées locales $(t, y, z) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{2n-4}\times\mathbf{R}^2$ telles que

$$(5.15) \qquad \begin{cases} H_p t = 1 \ , \ \psi \sim \lambda t \ , \ H_p y_j = 0 \quad \text{pour } j = 1, \ldots, 2n-4 \ , \\ z_1 = \varphi \ , \ z_2 = H_p\varphi \quad \text{et } \mathcal{C}ar_p^2(S) = \{(t, y, z) \in \mathcal{C}ar_p^0 : z = 0\} \ . \end{cases}$$

Ces propriétés entraînent que $\omega(s) = \exp[sH_p](x_0, \xi_0) = \big(s; 0, \ldots, 0; \varphi[\omega(s)], H_p\varphi[\omega(s)]\big)$; comme $(x_0, \xi_0) \in \mathcal{C}ar_p^\infty(S, x_0)$, on a

$$\varphi[\omega(s)] = O\big(|s|^\infty\big) \ , \qquad H_p\varphi[\omega(s)] = O\big(|s|^\infty\big) \qquad \text{et } H_p^2\varphi[\omega(s)] = O\big(|s|^\infty\big) ;$$

par développement de Taylor

$$H_p^2\varphi[\omega(s)] = H_p^2\varphi(s, 0, 0) + \varphi[\omega(s)]g(s) + H_p\varphi[\omega(s)]h(s) \ ,$$

d'où

$$H_p^2\varphi(s, 0, 0) = O\big(|s|^\infty\big) \ .$$

Si donc nous posons pour $\varepsilon > 0$, $\omega_\varepsilon = (\lambda\varepsilon, 0, 0)$, ω_ε tend vers (x_0, ξ_0) quand ε tend vers 0, et d'après (5.15),

$$\omega_\varepsilon \in \mathcal{C}ar_p^2(S) \ , \ \psi(\omega_\varepsilon) > \frac{\lambda^2\varepsilon}{2} > 0 \ , \qquad \text{mais } H_p^2\varphi(\omega_\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty) = O\big(\psi(\omega_\varepsilon)^\infty\big) \ ,$$

ce qui contredit l'hypothèse (i) du théorème 2.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC, *Non unicité du problème de Cauchy*, Ann. of Math., **117**, (1983), pp. 77-108.

[2] S. ALINHAC, *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **34** (2) (1984), pp. 89-109.

[3] S. ALINHAC, *Uniqueness and nonuniqueness in the Cauchy problem*, Contemp. Mathematics, **27** (1984), pp. 1-22.

[4] S. ALINHAC - M. S. BAOUENDI, *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal*, Sém. Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé n. XXII (Ecole Polytechnique, Paris).

[5] H. BAHOURI, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel*, Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1982, et Comm. in PDE'S, **8** (1983), pp. 1521-1547.

[6] A. P. CALDERÓN, *Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations*, Proc. Sympos. Fluid Dynamics and Appl. Math. (Univ. of Maryland, 1961), Gordon & Breach, New York (1962), pp. 147-195.

[7] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, Berlin, 1963.

[8] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, Vol. IV, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[9] N. LERNER - L. ROBBIANO, *Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-84, exposé n. IX (Ecole Polytechnique, Paris), J. d'Analyse Math., **44** (1984-85), pp. 32-66.

[10] L. NIRENBERG, *Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equation*, preprint.

[11] X. SAINT RAYMOND, *L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques*, Comm. in PDE's, **7** (1982), pp. 559-579.

[12] X. SAINT RAYMOND, *L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, L'Enseign. Math., **32** (1986), pp. 1-55.

[13] E. C. ZACHMANOGLOU, *Nonuniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Arch. Rational Mech. Anal., **27** (1968), pp. 373-384.

[14] E. C. ZACHMANOGLOU, *Uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc., **136** (1969), pp. 517-526.

[15] C. ZUILY, *Uniqueness and nonuniqueness in the Cauchy problem*, Progr. Math., vol. 33, Birkhäuser, Boston, 1983.

Département de Mathématiques (bât. 425)
Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex, France