ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

SEÁN DINEEN
RICHARD M. TIMONEY
JEAN-PIERRE VIGUÉ

**Pseudodistances invariantes sur les domaines d'un espace localement convexe**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série*, tome 12, nº 4 (1985), p. 515-529
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1985_4_12_4_515_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# Pseudodistances invariantes sur les domaines d'un espace localement convexe.

SEÁN DINEEN - RICHARD M. TIMONEY
JEAN-PIERRE VIGUÉ (*)

Dans cet article, nous montrerons que les pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi coïndicent sur les domaines convexes d'un espace localement convexe. Ceci répond à une question de L. Harris [7]. Le problème analogue, en dimension finie, a été posé par S. Kobayashi [13] et résolu indépendamment par L. Lempert [15] et par H. Royden et P. Wong [16]. Dans notre démonstration, nous utiliserons le résultat de L. Lempert, H. Royden et P. Wong, le théorème de Montel et les ultrafiltres.

Nous donnerons ensuite quelques applications de ce résultat. Nous en déduirons d'abord une nouvelle démonstration de la convexité des domaines bornés cerclés homogènes d'un espace de Banach complexe $E$ qui admettent une réalisation comme un domaine de Siegel (voir aussi W. Kaup [11]). Nous montrerons ensuite que, pour un domaine borné convexe d'un espace de Banach réflexif, l'égalité des distances de Carathéodory et de Kobayashi entraîne l'existence de géodésiques complexes sur $D$ au sens de E. Vesentini [17, 18 et 19]. A l'aide de ce résultat, nous étudierons le problème suivant: soient $D_1$ et $D_2$ deux domaines bornés convexes d'un espace de Banach réflexif. Soit $a$ un point de $D_1$, et soit $f\colon D_1 \to D_2$ une application holomorphe telle que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_{D_1}(a_1, \cdot)$. En supposant de plus que, pour tout point $z$ de $D_2$, il existe une unique géodésique complexe passant par $b = f(a)$ et $z$, nous montrerons que $f$ est une application bijective de $D_1$ sur $D_2$. [Malheureusement, nous ne savons pas si $f$ est un isomorphisme biholomorphe].

(*) J.-P. VIGUÉ tient à remercier le C.N.R.S. (France)/N.B.S.T. (Irlande) pour l'accord qui lui a permis de visiter Dublin en Mai 1983. Une partie de ce travail a été faite pendant son séjour.

Pervenuto alla Redazione il 10 Ottobre 1984.

La théorie des pseudodistances invariantes a été faite par S. Kobayashi [12, 13] en dimension finie et par L. Harris [7], T. Franzoni et E. Vesentini [6] en dimension infinie. Pour les propriétés fondamentales des fonctions holomorphes sur les espaces localement convexes, nous renvoyons le lecteur à S. Dineen [4], T. Franzoni et E. Vesentini [6].

## 1. – Définitions et rappels.

Soit $E$ un espace vectoriel complexe localement convexe séparé, et soit $D$ un domaine de $E$. Nous supposerons toujours que $D$ contient l'origine 0 de $E$. Si $D_1 \subset E$, et $D_2 \subset \mathbb{C}$ sont des domaines, nous noterons $H_g(D_1, D_2)$ l'ensemble des applications holomorphes de $D_1$ dans $D_2$ dont la restriction aux intersections de $D_1$ avec les sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$ sont holomorphes. Les éléments de $H_g(D_1, D_2)$ s'appellent les fonctions holomorphes au sens de Gateaûx [4]. On dit que les fonctions continues holomorphes au sens de Gateaûx sont des fonctions holomorphes au sens de Fréchet, ou plus simplement des fonctions holomorphes, et on note leur ensemble $H(D_1, D_2)$. Dans le cas où $D_2 = \mathbb{C}$, nous écrirons $H_g(D_1)$ et $H(D_1)$, à la place de $H_g(D_1, \mathbb{C})$ et $H(D_1, \mathbb{C})$ respectivement. Soit $\Delta$ le disque-unité ouvert dans $\mathbb{C}$.

On déduit des inégalités de Cauchy (voir par exemple [4] et [3]) le résultat suivant.

LEMME 1.1. *Si $D_2$ est un domaine borné dans $\mathbb{C}$, $H_g(D_1, D_2) = H(D_1, D_2)$.*

Nous munirons l'espace vectoriel $H(D)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de dimension finie de $E$, et nous utiliserons la forme suivante du théorème de Montel.

LEMME 1.2. *L'ensemble*

$$A = \{f \in H(D, \Delta) | f(0) = 0\}$$

*est un sous-ensemble compact de $H(D)$.*

DÉMONSTRATION. D'après N. Bourbaki [1], il suffit de montrer que tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $A$ converge vers un élément de $A$. Soit donc $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $A$. Pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie $F$ de $E$, la restriction à $D \cap F$ des fonctions holomorphes sur $D$ définit un ultrafiltre $\mathcal{U}|_{D \cap F}$ sur $H(D \cap F)$. Le théorème de Montel et le principe du maximum du module montrent que $\mathcal{U}|_{D \cap F}$ converge vers une fonction holomorphe $f_F$ définie sur $D \cap F$ à valeurs dans $\Delta$.

Si $G$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie contenant $F$, il est clair que $f_{G|D\cap F} = f_F$. Les fonctions $f_F$ se recollent donc et définissent une fonction $f$, holomorphe au sens de Gateaûx sur $D$ tout entier. D'après le lemme 1.1, $f$ est holomorphe, et $\mathcal{U}$ converge vers $f \in A$. Ainsi, $A$ est compact.

Soit $\varrho$ la métrique de Poincaré sur le disque-unité $\Delta$. La pseudodistance de Carathéodory $c_D$ sur $D$ est définie de la manière suivante. Pour tout $z \in D$, pour tout $w \in D$,

$$c_D(z, w) = \sup \{(f(z), f(w)); f \in H(D, \Delta)\} .$$

Comme $\Delta$ est homogène, on peut supposer que $f(z) = 0$ et que $f(w) \geqslant 0$. On déduit du lemme 1.2 le résultat suivant:

LEMME 1.3. *Pour tout* $z \in D$, *pour tout* $w \in D$, *il existe une application holomorphe* $f \in H(D, \Delta)$ *telle que* $f(z) = 0$, $f(x) = \sigma > 0$, *et* $c_D(z, w) = \varrho(f(z), f(w)) = \varrho(0, \sigma)$.

REMARQUE 1.4. D'après le lemme 1.1, la pseudodistance de Carathéodory est indépendante de la topologie de l'espace localement convexe $E$ dans le sens suivant: si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies localement convexes séparées sur $E$ telles qu'un sous-ensemble $D$ de $E$ soit ouvert pour ces deux topologies, soient $D_1 = (D, \mathcal{T}_1)$ et $D_2 = (D, \mathcal{T}_2)$. Alors $c_{D_1} = c_{D_2}$. Ce résultat n'est plus vrai si on considère des espaces vectoriels topologiques non séparés ou non localement convexes.

La pseudodistance de Kobayashi $k_D$ est définie de manière duale. Pour tout $z \in D$, pour tout $w \in D$, on définit d'abord

$$\delta_D(z, w) = \inf \{\varrho(\xi, \eta);\ \text{il existe } f \in H(\Delta, D) \text{ telle que } f(\xi) = z \text{ et } f(\eta) = w\}.$$

En général, $\delta_D$ n'est pas une pseudodistance, car elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. Aussi, on définit la pseudodistance de Kobayashi $k_D$ de la façon suivante:

$$k_D(z, w) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \delta_D(z_j, z_{j+1});\ z_1 = z,\ z_m = w;\ m \text{ quelconque} \right\}.$$

On définit de manière analogue, et on renvoie le lecteur à [6], [7] et [13] les métriques infinitésimales de Carathéodory $\gamma_D$ et de Kobayashi $\chi_D$.

Pour les domaines convexes de $\mathbf{C}^n$, L. Lempert montre dans [14] que

$$k_D = \delta_D .$$

Ce résultat lui sert en particulier pour montrer le résultat suivant:

THÉORÈME 1.5 (L. Lempert [15], H. Royden et P. Wong [16]). *Soit $D$ un domaine convexe de $\mathbf{C}^n$. Alors on a:*

$$c_D = k_D = \delta_D \, .$$

*De même, pour les métrique infinitésimales,*

$$\gamma_D = \chi_D \, .$$

La démonstration de $\delta_D = k_D$ peut se généraliser à la dimension infinie. Par contre, il ne semble pas possible de généraliser la démonstration de $c_D = k_D$ au cas d'un domaine convexe d'un espace localement convexe, et nous allons généraliser ce résultat par un autre moyen.

## 2. – Égalité des pseudodistances de Carathéodory et de Kobayashi en dimension infinie.

Soit $D$ un domaine d'un espace vectoriel complexe localement convexe séparé $E$ (Pour l'instant, il n'est pas nécessaire de supposer $D$ convexe). Nous avons le résultat suivant:

THÉORÈME 2.1. *Pour tout $z \in D$, pour tout $w \in D$,*

$$c_D(z, w) = \inf c_{D \cap F}(z, w) \, ,$$

*oú $F$ parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de dimension finie de $E$ contenant $z$ et $w$.*

DÉMONSTRATION. Comme l'injection

$$i\colon D \cap F \hookrightarrow D$$

est holomorphe, $i$ est contractante pour la pseudodistance de Carathéodory. On a donc

$$c_D(z, w) \leqslant c_{D \cap F}(z, w) \, .$$

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des sous-espaces vectoriels complexes de dimension finie de $E$ contenant $z$ et $w$. Définissons un filtre $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}$ de la façon suivante: pour tout $G \in \mathcal{E}$, considérons

$$\mathcal{A}_G = \{F \in \mathcal{E} \mid F \supset G\} \, .$$

Il est clair que les $\mathcal{A}_G$, pour tous les $G \in \mathcal{E}$, forment une base de filtre $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}$. Considérons un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$.

Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de dimension finie de $E$, on peut choisir, d'après de lemme 1.3, une application holomorphe

$$\varphi_F \colon D \cap F \to \Delta$$

telle que

$$\varphi_F(z) = 0 \,, \qquad \varphi_F(w) = \sigma_F \geqslant 0 \,,$$

et que

$$c_{D \cap F}(z, w) = \varrho(0, \sigma_F) \,.$$

Soit $G$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$. Comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre [1], le lemme 1.2 montre que $(\varphi_{F|G \cap D})$ converge, selon $\mathcal{U}$, vers une application holomorphe

$$f_G \colon D \cap G \to \Delta \,.$$

De la même façon, $\sigma_F$ converge, selon $\mathcal{U}$, vers $\sigma \in \Delta$.

Il est clair que si $G_2 \supset G_1$,

$$f_{G_2|G_1 \cap D} = f_{G_1} \,.$$

Ainsi, les $f_G$ se recollent et définissent une application holomorphe (au sens de Gateaûx).

$$f \colon D \to \Delta$$

telle que $f(z) = 0$ et $f(w) = \sigma$. En fait, $f$ est holomorphe d'après le lemme 1.1 et on a

$$c_D(z, w) = \lim_{\mathcal{U}} c_{D \cap F}(z, w) = \inf_{F \in \mathcal{E}} c_{D \cap F}(z, w) \,,$$

et le théorème est démontré.

De la même façon, on peut montrer le résultat suivant pour la métrique infinitésimale de Carathéodory.

THÉORÈME 2.2. *Pour tout $z \in D$, pour tout vecteur $v \in E$, on a*

$$\gamma_D(z, v) = \inf \gamma_{D \cap F}(z, v) \,,$$

*où $F$ parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$ contenant $z$ et $v$.*

REMARQUE 2.3. On déduit du théorème 2.1 que, pour tout $z \in D$, pour tout $w \in D$, il existe un sous-espace vectoriel complexe $F$ de $E$, admettant une base algébrique dénombrable tel que

$$c_D(z, w) = c_{F \cap D}(z, w) .$$

REMARQUE 2.4. Si on suppose que $E$ est réunion croissante d'une suite $E_n$ d'espaces vectoriels de dimension finie, il est inutile d'utiliser les ultrafiltres. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit une fonction

$$f_n \in H(D \cap E_n, \Delta)$$

telle que $f_n(z) = 0$, $f_n(w) = \sigma_n$ et que

$$c_{D \cap E_n}(z, w) = \varrho(0, \sigma_n) .$$

La démonstration se fait alors par extraction de suites successives [pour chaque $p$, on définit une suite $(f_{n,p})$ extraite de la suite $(f_{n,p-1})$ telle que $f_{n,p}$ converge sur $D \cap E_p$]; on prend alors la suite diagonale, et on considère sa limite $f\colon D \to \Delta$.

Nous pouvons maintenant énoncer et montrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.5. *Soit $D$ un domaine convexe d'un espace vectoriel complexe localement convexe séparé $E$. Alors, on a*:

$$c_D = k_D = \delta_D .$$

*De même, pour les métriques infinitésimales,*

$$\gamma_D = \chi_D .$$

DÉMONSTRATION. On a toujours

$$c_D \leqslant k_D \leqslant \delta_D .$$

Soient $z$ et $w \in D$. En considérant, pour tout sous-espace vectoriel $F$ de dimension finie contenant $z$ et $w$, l'injection

$$i\colon D \cap F \hookrightarrow D ,$$

on montre que

$$\delta_D(z, w) \leqslant \inf_F \delta_{D \cap F}(z, w) ,$$

où $F$ parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$.

D'après le théorème 2.1, on a

$$c_D(z, w) = \inf_F c_{D \cap F}(z, w) ,$$

et d'après le théorème 5.1 (L. LEMPERT [15], H. ROYDEN et P. WONG [16]),

$$c_{D \cap F}(z, w) = \delta_{D \cap F}(z, w) .$$

On en déduit

$$c_D(z, w) \geqslant \delta_D(z, w) .$$

Ce qui prouve l'égalité annoncée.

L'égalité $\gamma_D = \chi_D$ se montre de façon analogue.

Dans [21], Vigué posait la question suivante: si $D$ est le produit de deux domaines $D_1$ et $D_2$, a-t-on, pour tout $(z_1, z_2) \in D_1 \times D_2$, pour tout $(w_1, w_2) \in D_1 \times D_2$

$$c_{D_1 \times D_2}\big((z_1, z_2), (w_1, w_2)\big) = \max\big(c_{D_1}(z_1, w_1), c_{D_2}(z_2, w_2)\big) .$$

Comme cette égalité est vraie pour la distance de Kobayashi et pour $\delta_{D_1 \times D_2}$ (voir par exemple [13]), on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2.6. *Soient $D_1$ et $D_2$ deux domaines convexes. Alors, pour tout $(z_1, z_2) \in D_1 \times D_2$, pour tout $(w_1, w_2) \in D_1 \times D_2$, on a*

$$c_{D_1 \times D_2}\big((z_1, z_2), (w_1, w_2)\big) = \max\big(c_{D_1}(z_1, w_1), c_{D_2}(z_2, w_2)\big) .$$

Il ne semble pas cependant que cette méthode permette de traiter un produit continu de domaines convexes au sens de [21].

La suite de cet article sera consacrée à des applications du théorème 2.5.

## 3. – Convexité des domaines bornés cerclés symétriques.

Dans [20], J.-P. Vigué a étudié les domaines bornés symétriques d'un espace de Banach complexe et a montré qu'ils étaient homogènes. Il a montré ensuite que tout domaine borné symétrique a une réalisation comme un domaine cerclé borné et que cette réalisation est unique à un isomorphisme linéaire près. W. Kaup et H. Upmeier [10] ont montré que beaucoup de domaines bornés symétriques ont une réalisation comme un domaine de Siegel, et, dans [11], W. Kaup montre que tout domaine borné cerclé symétrique est convexe. Nous allons montrer que tout domaine borné cerclé symétrique qui admet une réalisation comme un domaine de Siegel est convexe. Notre démonstration, qui est différente de celle de [10] est très simple et utilise essentiellement l'égalité des métriques infinitésimales de Carathéodory et de Kobayashi sur un domaine convexe. Commençons par la proposition suivante:

PROPOSITION 3.1 (1). *Soit $D$ un domaine d'un espace de Banach complexe $E$, et supposons que l'adhérence $\bar{D}$ de $D$ est égale à*

$$\{x \in E : |P_i(x)| \leqslant 1, \forall i \in I\}\ ,$$

*pour une famille $(P_i)_{i\in I}$ de polynômes complexes homogènes continus sur $E$. Alors,*

$$D = \{x \in E\colon \chi_D(0, x) < 1\}\ .$$

[Ainsi, la boule-unité pour la métrique infinitésimale de Kobayashi à l'origine $\chi_D(0, \cdot)$ est non convexe en général].

DÉMONSTRATION. Il est clair que $D$ est contenu dans

$$A = \{x \in E\colon \chi_D(0, x) < 1\}\ .$$

Soit maintenant $x \in A$. D'après la définition de la métrique infinitésimale de Kobayashi, il existe une application holomorphe $\varphi\colon \Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = 0$ et que $\varphi'(0) = \lambda x$, pour un nombre réel $\lambda > 1$.

On a donc, pour tout $i \in I$,

$$\|P_i \circ \varphi\|_\Delta \leqslant 1\ .$$

En calculant le développement en série de $P_i \circ \varphi(rz)$ on trouve que, pour tout $r < 1$,

$$P_i(r\varphi'(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_i\big(\varphi(r \exp[i\theta])\big) \exp[-n_i i\theta]\, d\theta\ ,$$

où $n_i$ est le degré du polynôme homogène $P_i$. On en déduit que $|P_i(\varphi'(0))| \leqslant 1$, ce qui montre que $x$ appartient à $D$.

(1) Alors que la réduction de cet article était achevée nous avons appris qu'un résultat semblable à celui de la proposition 3.1 avait été démontré par T. BARTH, *The Kobayashi indicatrix at the center of a circular domain*, Proc. A.M.S., **88** (1983), pp. 527-530.

D'autre part, on sait que, si $D$ est un domaine cerclé d'un espace de Banach complexe $E$, la boule-unité pour la métrique infinitésimale de Carathéodory à l'origine $\gamma_D(0, \cdot)$

$$B = \{x \in E\colon \gamma_D(0, x) < 1\}$$

est égale à l'enveloppe convexe de $D$. On déduit de ceci le théorème suivant:

THÉORÈME 3.2. *Soit $D$ un domaine d'un espace de Banach complexe $E$, et supposons que*

$$\bar{D} = \{x \in E\colon |P_i(x)| \leqslant 1,\ \forall i \in I\}$$

*pour une famille de polynômes homogènes complexes continues $(P_i)_{i \in I}$. Alors, si $D$ admet une réalisation comme un domaine convexe, $D$ est convexe.*

DÉMONSTRATION. Puisque $D$ admet une réalisation comme un domaine convexe, $\gamma_D$ et $\chi_D$ coïncident. Compte-tenu de la proposition 3.1, et de la remarque précédente, $D$, qui est un domaine cerclé est égal à l'enveloppe convexe de $D$ et est donc convexe.

On déduit du théorème 3.2 le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3.3. *Soit $D$ un domaine borné cerclé symétrique d'un espace de Banach complexe $E$, et supposons que $D$ admette une réalisation comme un domaine de Siegel. Alors $D$ est convexe.*

DÉMONSTRATION. D'après W. Kaup et H. Upmeier [10], si $D$ admet une réalisation comme un domaine de Siegel $S$, $S$ est convexe. [C'est une conséquence facile du fait que $S$ est égal à son enveloppe d'holomorphie (voir [20])]. D'autre part, en utilisant des résultats de S. Dineen [5] sur les enveloppes d'homomorphie, J.-P. Vigué [22] a montré que

$$\bar{D} = \{x \in E\colon |P_i(x)| \leqslant 1,\ \forall i \in I\}$$

pour une famille de polynômes homogènes $(P_i)_{i \in I}$. D'après le théorème 4.2, $D$ est convexe.

On sait que tous les domaines bornés symétriques de $\mathbf{C}^n$ admettent une réalisation comme un domaine de Siegel. En dimension infinie, des conditions très générales pour qu'il en soit ainsi sont données par W. Kaup et H. Upmeier [10].

## 4. – Existence de géodésiques complexes.

Rappelons d'abord la définition des géodésiques complexes au sens de E. Vesentini [17, 18 et 19].

DÉFINITION 4.1. Soit $D$ un domaine borné d'un espace de Banach complexe $E$. On dit qu'une application holomorphe $\varphi\colon \Delta \to D$ est un géodésique complexe si $\varphi$ est une isométrie pour la distance de Carathéodory, c'est-à-dire, si, pour tout $\zeta_1 \in \Delta$, pour tout $\zeta_2 \in \Delta$, on a:

$$c_D(\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) = c_\Delta(\zeta_1, \zeta_2) = \varrho(\zeta_1, \zeta_2)\,.$$

THÉORÈME 4.2. *Soit $D$ un domaine borné d'un espace de Banach complexe $E$. Soit $\varphi\colon \Delta \to D$ une application holomorphe. Pour que $\varphi$ soit une géodésique complexe, il faut et il suffit que $\varphi$ vérifie une des deux conditions suivantes*:

(i) *il existe deux points distincts $\zeta_1$ et $\zeta_2$ de $\Delta$ tels que*

$$c_D(\varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) = c_\Delta(\zeta_1, \zeta_2) = \varrho(\zeta_1, \zeta_2)\,,$$

(ii) *il existe $\zeta \in \Delta$ et un vecteur $v$ non nul $\in \mathbf{C}$ tels que*

$$\gamma_D(\varphi(\zeta), \varphi'(\zeta)\cdot v) = \gamma_\Delta(\zeta, v)\,.$$

Il est facile de voir que, sur l'image $\varphi(\Delta)$ d'une géodésique complexe $\varphi$, les distances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident. Réciproquement, nous avons le théorème suivant qui généralise certains résultats de E. Vesentini sur l'existence des géodésiques complexes.

THÉORÈME 4.3. *Soit $D$ un domaine borné convexe d'un espace de Banach complexe $E$, et soit $\mathcal{T}$ une topologie localement convexe séparée sur $E$, moins fine que la topologie de la norme. Supposons que l'adhérence $\overline{D}$ de $D$, pour la topologie de la norme, soit $\mathcal{T}$-compacte.*

(i) *Etant donnés deux points $z$ et $w$ de $D$, il existe au moins une géodésique complexe $\varphi\colon \Delta \to D$ telle que $z$ et $w$ appartiennent à $\varphi(\Delta)$;*

(ii) *étant donnés $z \in D$ et un vecteur $v \in E$, il existe au moins une géodésique complexe $\varphi\colon \Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = z$ et que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à $v$.*

DÉMONSTRATION. Montrons (i). Soit $f_n \in H(\Delta, D)$ une suite de fonctions holomorphes telles que $f_n(0) = z$, $f_n(\sigma_n) = w$, $\sigma_n > 0$, $\lim \sigma_n = \sigma$ et $\varrho(0, \sigma) = k_D(z, w)$.

Soit

$$f_n(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\zeta^n\,, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}\,.$$

Comme $D$ est borné, il existe un nombre réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\|a_{n,m}\| \leqslant M$. Comme $D$ est borné, la boule $B(0, M)$ est $\mathcal{T}$-relativement compacte, et sa $\mathcal{T}$-adhérence $\overline{B(0, M)}^{\mathcal{T}}$ est contenue dans $B(0, M')$.

Il est clair que $a_{n,0} = z$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbf{N}$, sans point adhérent. Par $\mathcal{T}$-compacité, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $(a_{n,m})_{n\in\mathbf{N}}$ converge selon $\mathcal{U}$ vers $a_m$. Il est clair que $a_m \in B(0, M')$.

Par suite, la série

$$f(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m$$

définit une fonction holomorphe de $\Delta$ dans $E$.

On montre alors (voir par exemple la méthode de [9, p. 104-106]) que, pour tout $\zeta \in \Delta$, $(f_n(\zeta))_{n\in\mathbf{N}}$ converge, selon $\mathcal{U}$, vers $f(\zeta)$. Ceci montre que $f(0) = z$, $f(\sigma) = w$, et $f(\Delta) \subset \bar{D}$. Comme $D$ est convexe, on en déduit que $f(\Delta) \subset D$, et, d'après le théorème 4.2, $f$ est bien une géodésique complexe telle que $f(0) = z$ et $f(\sigma) = w$ .

Les hypothèses du théorème 4.3 sont vérifiées en particulier dans les deux cas suivants:

1/*$E$ est un espace de Banach réflexif et $D$ est un domaine borné convexe de $E$.*

En effet, dans ce cas, le théorème de Hahn-Banach montre que les adhérences $\bar{D}^n$ de $D$ pour la topologie de la norme et $\bar{D}^\tau$ pour la topologie fàible sont égales, et on sait que $\bar{D}^\tau$ est faiblement compact.

2/*$E$ est le dual topologique d'un espace de Banach $F$, et $D$ est la boule-unité ouverte de $E$.*

Dans ce cas, l'adhérence $\bar{D}$ de $D$ est compacte pour la topologie faible définie par $F$.

Remarquons que le cas 2/ s'applique par exemple à la boule-unité ouverte $B$ de $l_1(\mathbf{N})$.

Nous conjecturons que les géodésiques complexes existent toujours entre deux points quelconques de la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe. Si on regarde les espaces de suite classiques, nous avons montré ce résultat dans le cas de $l_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et c'est aussi vrai pour $c_0$ puisque la boule-unité de cet espace est un domaine borné symétrique.

Ce résultat a des conséquences aussi en dimension finie. Ainsi, du théorème 4.3 et des rèsultats de [24] on déduit le théorème suivant:

THÉORÈME 4.4. *Soit $D$ un domaine borné convexe de $\mathbf{C}^n$, et soit $f$: $D \to D$ une application holomorphe. Alors, l'ensemble des points fixes de $f$ est un sous-ensemble analytique connexe de $D$.*

## 5. – Sur la caractérisation des automorphismes biholomorphes des domaines bornés.

Si $D$ est un domaine borné d'un espace de Banach complexe $E$, il est intéressant d'essayer de caractériser les automorphismes biholomorphes de $D$ comme les applications holomorphes $f\colon D \to D$ isométriques pour une distance invariante. Une telle caratérisation a été donnée par L. Harris et J.-P. Vigué [8] avec des hypothèses très fortes, alors que, en dimension finie, on déduit de H. Cartan [2] le théorème suivant:

Théorème 5.1. *Soit $D$ un domaine borné de $\mathbf{C}^n$, et soit $a$ un point de $D$. Soit $f\colon D \to D$ une application holomorphe telle que $f(a) = a$ et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $\gamma_D(a, \cdot)$. Alors $f$ est un automorphisme biholomorphe de $D$.*

Malheureusement, J.-P. Vigué [23] a montré que, même pour un domaine cerclé borné $D$ d'un espace de Banach complexe, la caractérisation de H. Cartan n'était pas valable. Nous allons voir maintenant ce qu'il est possible de dire dans le cas où $D$ est un domaine borné convexe d'un espace de Banach complexe $E$.

Plus précisément, soit $E$ un espace de Banach complexe réflexif, et soient $D_1$ et $D_2$ deux domaines bornés de $E$. Supposons que $D_1$ soit convexe, et soit $a$ un point de $D_1$. Enfin, soit $f\colon D_1 \to D_2$ une application holomorphe, et supposons que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Carathéodory, c'est-à-dire que, pour tout vecteur $v \in E$, on a

$$\gamma_{D_2}(f(a), f'(a)\cdot v) = \gamma_{D_1}(a, v)\,.$$

Nous avons la proposition suivante:

Proposition 5.2. *Pour tout $x \in D_1$,*

$$c_{D_2}(f(a), f(x)) = c_{D_1}(a, x)\,.$$

Démonstration. Soit $x \in D_1$. D'après le théorème 4.3, il existe une géodésique complexe $\varphi$ telle que $\varphi(0) = a$ et que $x \in \varphi(\Delta)$. Comme $f'(a)$ est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory, on a, pour tout $v \in \mathbf{C}$,

$$\gamma_{D_2}(f\circ\varphi(0), (f\circ\varphi)'(0)v) = \gamma_{D_1}(\varphi(0), \varphi'(0)\cdot v) = \gamma_\Delta(0, v)\,.$$

D'après le théorème 4.2, $f\circ\varphi$ est une géodésique complexe. On a donc

$$c_{D_2}(f\circ\varphi(0), f\circ\varphi(\zeta)) = c_\Delta(0, \zeta)\,,$$

de même,

$$c_{D_1}(\varphi(0), \varphi(\zeta)) = c_\Delta(0, \zeta)\,,$$

ce qui prouve le résultat.

Rappelons qu'un ensemble $A \subset D$ est dit compétement intérieur à $D$ (et on le note $A \subset\subset D$) si la distance de $A$ à la frontière de $D$ est strictement positive.

De la proposition 5.2 et de L. Harris [7], proposition 23, p. 381, on déduit le corollaire suivant:

COROLLAIRE 5.3. *Pour tout* $A \subset\subset D_2$, $f^{-1}(A) \subset\subset D_1$.

Supposons de plus que $D_2$ est convexe, et que les géodésiques complexes passant par $b = f(a)$ sont uniques. Plus précisément, nous supposons que étant donné un point $x$ de $D_2$, il existe, à un changement de paramètre holomorphe près, une seule géodésique complexe $\varphi$ telle que $b$ et $x$ appartiennent à $\varphi(\Delta)$. Ceci est par exemple le cas quand $D_2$ est la boule-unité ouverte d'un espace de Banach complexe tel que tout point de la frontière de $D_2$ soit un point complexe-extrémal de $\bar{D}_2$, et $b = 0$ (voir E. Vesentini [19]).

Sous ces hypothèses, nous allons montrer que $f$ est une application bijective $D_1$ sur $D_2$. Montrons d'abord que $f$ est surjective. Soit $x \in D_2$. Soit $\psi\colon \Delta \to D_2$ une géodésique complexe telle que $\psi(0) = b$ et que $x$ appartienne à $\psi(\Delta)$. D'après le théorème d'inversion locale $\psi(\zeta) \in f(D_1)$, si $\zeta$ est suffisamment proche de 0. Choisissons un tel $\zeta_0 \neq 0$; il existe donc une géodésique complexe $\varphi\colon \Delta \to D_1$ telle que $\varphi(0) = a$, $\varphi(\zeta_0) = c$, et $f(c) = \psi(\zeta_0)$. D'après l'hypothèse d'unicité des géodésiques complexes, on a $f \circ \varphi = \psi$. Ainsi, $x \in f(D_1)$.

Montrons maintenant que $f$ est injectif. Soient $c$ et $d$ deux points de $D_1$, et supposons que $f(c) = f(d) = e$. Soit $\varphi_1$ (resp. $\varphi_2$) une géodésique complexe passant par $a$ et $c$ (resp. $d$). Comme

$$c_{D_1}(a, c) = c_{D_1}(a, d)\,,$$

on peut changer la paramétrisation de $\varphi_1$ et $\varphi_2$ et supposer que

$$\varphi_1(0) = a\,, \quad \varphi_1(\zeta) = c$$

$$\varphi_2(0) = a\,, \quad \varphi_2(\zeta) = d\,.$$

Nous avons alors

$$f\circ\varphi_1(0) = b\,, \quad f\circ\varphi_1(\zeta) = e\,,$$

$$f\circ\varphi_2(0) = b\,, \quad f\circ\varphi_2(\zeta) = e\,.$$

Par l'hypothèse d'unicité des géodésiques complexes, on a: $f \circ \varphi_1 = f \circ \varphi_2$. Mais, comme $f$ est un isomorphisme d'un voisinage de $a$ sur un voisinage de $b$, ceci entraîne $\varphi_1 = \varphi_2$ et $b = c$. Nous avons donc montré le théorème suivant:

THÉORÈME 5.4. *Soient $D_1$ et $D_2$ deux domaines bornés convexes d'un espace de Banach réflexif $E$. Soit $a$ un point de $D_1$, soit $b$ un point de $D_2$, et soit $f: D_1 \to D_2$ une application holomorphe telle que $f(a) = b$. Supposons que les géodésiques complexes passant par $b$ vérifie l'hypothèse d'unicité et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour les métriques infinitésimales de Carathéodory. Alors $f$ est une application bijective de $D_1$ sur $D_2$.*

On peut se demander si $f$ est un isomorphisme biholomorphe. Pour l'instant, nous ne savons pas la réponse. Il serait également intéressant de savoir si l'hypothèse sur l'unicité des géodésiques complexes est nécessaire.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chapitre I, Hermann, Paris,1965.

[2] H. CARTAN, *Sur les fonctions de plusieurs variables complexs. L'itération des transformations intérieures d'une domaine borné*, Math. Z., **35** (1932), pp. 760-773.

[3] J.-F. COLOMBEAU - D. LAZET, *Sur les théorèmes de Vitali et de Montel en dimension infinie*, C.R. Acad. Sci., Paris, A. **274** (1972), pp. 185-187.

[4] S. DINEEN, *Complex analysis on locally convex spaces*, North-Holland Math. Studies 57, Amsterdam, 1981.

[5] S. DINEEN, *The Cartan-Thullen theorem for Banach spaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **24** (1970), pp. 667-676.

[6] T. FRANZONI - E. VESENTINI, *Holomorphic maps and invariant distances*, North-Holland Math. Studies 40, Amsterdam, 1980.

[7] L. A. HARRIS, *Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces*, in *Advances in Holomorphy*, North-Holland Math. Studies 34, Amsterdam, 1979, pp. 345-406.

[8] L. A. HARRIS - J.-P. VIGUÉ, *A metric condition for equivalence of domains*, Atti Accad. Naz. Lincei, **67** (1979), pp. 402-403.

[9] E. HILLE - R. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **36**, A.M.S., Providence, 1957.

[10] W. KAUP - H. UPMEIER, *Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces*, Math. Z., **147** (1977), pp. 179-200.

[11] W. KAUP, *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces*, Math. Z., **183** (1983), pp. 503-529.

[12] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, New York, 1971.

[13] S. KOBAYASHI, *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc., **82** (1976), pp. 357-416.

[14] L. LEMPERT, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule,* Bull. Soc. Math. France, **109** (1981), pp. 427-474.
[15] L. LEMPERT, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains,* Anal. math., **8** (1982), pp. 257-261.
[16] H. ROYDEN - P. WONG, *Carathéodory and Kobayashi metric on convex domains,* à paraître.
[17] E. VESENTINI, *Complex geodesics,* Compositio math., **44** (1981), pp. 375-394.
[18] E. VESENTINI, *Complex geodesics and holomorphic maps,* Sympos. math., **26** (1982), pp. 211-230.
[19] E. VESENTINI, *Invariant distances and invariant differential metrics in locally convex spaces,* Spectral theory, Banach center publications, **8** (1982), pp. 493-512.
[20] J.-P. VIGUÉ, *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques,* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup, (4), **9** (1976), pp. 203-282.
[21] J.-P. VIGUÉ, *Automorphismes analytiques des produits continus de domaines bornés,* Ann. scient. Ec. Norm. Sup (4), **11** (1978), pp. 229-246.
[22] J.-P. VIGUÉ, *Sur la convexité des domaines bornés cerclés homogènes,* Séminaire Lelong-Skoda, Lecture Notes 822, 1980, Springer, Berlin, pp. 317-331.
[23] J.-P. VIGUÉ, *Sur les applications holomorphes isométriques pour la distance de Carathéodory,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4), **9** (1982), pp. 255-261.
[24] J.-P. VIGUÉ, *Géodésiques complexes et points fixes d'applications holomorphes,* Adv. in Math., **52** (1984), pp. 241-247.

Department of Mathematics
University College Dublin
Belfield
Dublin 4
Ireland

School of Mathematics
Trinity College
Dublin 2
Ireland

Université Paris VI
Analyse Complexe
et Géométrie
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
(L.A. 213)
4, Place jussieu
75230 Paris-Cedex 05
France