ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

KLAUS FRITZSCHE

Linear-uniforme Bündel auf Quadriken

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 10, nº 2 (1983), p. 313-339

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1983_4_10_2_313_0>

Linear-Uniforme Bündel auf Quadriken.

KLAUS FRITZSCHE

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Vektorbündeln vom Rang 2 auf regulären komplex-projektiven Quadriken beliebiger Dimension. In den ersten beiden Abschnitten werden einige grundlegende Sätze über die Geometrie von Quadriken und über Bündel auf Quadriken zusammengestellt.

Der dritte Abschnitt enthält das Hauptergebnis dieser Arbeit, die vollständige Klassifikation der linear-uniformen 2-Bündel auf Q_m für $m \geqslant 2$. Als «linear-uniform» werden solche Bündel bezeichnet, die auf sämtlichen Geraden in der gleichen Weise spalten. Neben den zerfallenden Bündeln gibt es auf Q_2 sehr viele linear-uniforme Bündel, auf Q_4 im Wesentlichen nur das universelle Unterbündel und das universelle Quotientenbündel, die bei Einschränkung auf Q_3 zusammenfallen und dort das einzige nicht-triviale Beispiel liefern. Auf Q_m, $m \geqslant 5$, gibt es nur noch spaltende linear-uniforme Bündel.

Der Inhalt dieser Arbeit stellt einen Ausschnitt aus meiner Habilitationsschrift dar (vgl. [4]).

1. – Geometrie von Bündeln und Quadriken.

DEF. 1.1. Sei $A \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{C})$ eine nicht-triviale symmetrische Matrix, $q_A\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ die durch $q_A(z) := z^T \circ A \circ z$ definierte zugehörige quadratische Form. Es sei $k = \operatorname{rg}(A)$. Dann heißt

$$F^k_{n-1} = \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}_n : q_A(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$$

die durch A bestimmte Quadrik, und man nennt k auch den Rang der Quadrik.

Pervenuto alla Redazione il 28 Febbraio 1983.

F^k_{n-1} ist ein $(n-1)$-dimensionaler komplexer Raum, und Sing (F^k_{n-1}) ist ein $(n-k)$-dimensionaler linearer Raum. Ist $n \geqslant 3$, $k \geqslant 3$ und $H \subset \mathbb{P}_n$ eine Hyperebene, so ist $F' = F^k_{n-1} \cap H$ eine $(n-2)$-dimensionale Quadrik mit $\max(1, k-2) \leqslant \operatorname{rg}(F') \leqslant \min(k, n)$.

Die reguläre Quadrik F^{n+1}_{n-1} ist isomorph zu

$$Q_{n-1} = \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}_n : z_0^2 + \ldots + z_n^2 = 0\}.$$

Für $p \in Q_{n-1}$ gilt:

$T_p(Q_{n-1}) \cap Q_{n-1}$ ist eine Quadrik vom Typ F^{n-1}_{n-2} mit p als einzigem singulären Punkt

Def. 1.2. Für $l \geqslant 1$ sei Σ_l die Menge der l-dimensionalen linearen Unterräume von Q_{2l}, Σ'_l die Menge der l-dimensionalen linearen Unterräume von Q_{2l+1}.

Es gilt: $\Sigma_l \cong O(2l+2)/U(l+1)$ ist eine $l(l+1)/2$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die aus zwei Zusammenhangskomponenten $\Sigma_{l,+}$ und $\Sigma_{l,-}$ besteht. $\Sigma'_l \cong SO(2l+3)/U(l+1)$ ist eine $(l+1)(l+2)/2$-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Die folgenden Beispiele sollen das veranschaulichen:

A) Die Segre-Abbildung $\sigma_{1,1}: \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3$ hat eine 2-dimensionale reguläre Quadrik zum Bild. Die beiden Geradenscharen auf Q_2 sind bei dieser Art der Darstellung nicht zu verkennen.

B) Sei $G_{k,n}$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit der k-dimensionalen $\mathbb{C}$-Untervektorräume des $\mathbb{C}^n$. Die Plücker Einbettung

$$\mathrm{pl}: G_{2,4} \hookrightarrow \mathbb{P}_5 \qquad (\text{mit } \mathrm{pl}(\mathbb{C}v + \mathbb{C}w) = [v \wedge w])$$

definiert einen Isomorphismus auf die 4-dimensionale Quadrik

$$F_4 = \{(u_0 : \ldots : u_5) \in \mathbb{P}_5 : u_0u_5 - u_1u_4 + u_2u_3 = 0\}.$$

Spätestens seit Felix Klein weiß man, wie man die beiden Scharen von Ebenen auf F_4 sehen kann:

Die Punkte von F_4 kann man auch als Elemente der Menge $\mathbb{G}_{1,3}$ aller projektiven Geraden im $\mathbb{P}_3$ auffassen. Ist nun $x_0 \in \mathbb{P}_3$ ein Punkt, so repräsentiert $\mathbb{G}(x_0) = \{L \in \mathbb{G}_{1,3}: x_0 \in L\}$ den einen Ebenen-Typ, eine sogenannte α-Ebene. Ist $E_0 \subset \mathbb{P}_3$ eine Ebene, so stellt $\mathbb{G}(E_0) = \{L \in \mathbb{G}_{1,3}: L \subset E_0\}$ den anderen Ebenen-Typ dar, eine β-Ebene. Das Schnittverhalten der Ebenen auf F_4 läßt sich bei dieser Betrachtungsweise ganz einfach ablesen.

C) Ist $H \subset \mathbb{P}_5$ eine Hyperebene und $F_3 = F_4 \cap H$ eine reguläre 3-dimensionale Quadrik, so liefert

$$\Lambda \mapsto \Lambda \cap H$$

eine Bijektion zwischen $\Sigma_{2,+}$ und Σ_1'.

Für die folgenden Untersuchungen wird es nützlich sein, sich an die Struktur des Cohomologie-Ringes einer Quadrik zu erinnern: Ist $m = 2l$, $l \geqslant 2$, so gilt:

$$H^*(Q_m; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}e_l + \dots + \mathbb{Z}e_{l-1} + (\mathbb{Z}e_l + \mathbb{Z}e_l') + \mathbb{Z}e_{l+1} + \dots + \mathbb{Z}e_m$$

mit

$$e_i\,, \quad e_i' \in H^{2i}(Q_m; \mathbb{Z})$$

und

$$e_i \cdot e_{m-i} \quad = \quad e_m \quad \text{für } i < l\,,$$

$$e_l \cdot e_l = e_l' \cdot e_l' = \begin{cases} 0 & \text{falls } l \text{ ungerade} \\ e_m & \text{falls } l \text{ gerade}\,, \end{cases}$$

$$e_l \cdot e_l' = \begin{cases} e_m & \text{falls } l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } l \text{ gerade}\,, \end{cases}$$

$$e_1^r = \begin{cases} e_r & \text{für } r < l \\ e_l + e_l' & \text{für } r = l \\ 2e_r & \text{für } r > l\,. \end{cases}$$

Ist $m = 2l + 1$, $l \geqslant 1$, so gilt:

$$H^*(Q_m; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}e_0 + \dots + \mathbb{Z}e_m$$

mit

$$e_i \in H^{2i}(Q_m; \mathbb{Z})$$

und

$$e_i \cdot e_{m-i} = \quad e_m \quad \text{für alle } i\,,$$

$$e_1^r = \begin{cases} e_r & \text{für } r \leqslant l \\ 2e_r & \text{für } r > l\,. \end{cases}$$

Die Picard-Gruppe $\operatorname{Pic}(Q_m) = H^1(Q_m, \mathcal{O}^*)$ einer Quadrik berechnet sich über die Hodge-Zerlegung:

$$\operatorname{Pic}(Q_m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } m = 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{für } m = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{für } m \geqslant 3\,. \end{cases}$$

Erzeugende erhält man folgendermaßen:

a) Ist $\varphi\colon \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_2$ die Veronese-Einbettung (mit Q_1 als Bild), so wird $\operatorname{Pic}(Q_1)$ von $\mathfrak{L}_1(1) = \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$ erzeugt.

b) Sind $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2\colon Q_2 \to \mathbb{P}_1$ die beiden Projektionen, so besteht $\operatorname{Pic}(Q_2)$ aus den Bündeln $\mathfrak{L}_{pq} = \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(p) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(q)$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

c) Für $m \geqslant 3$ wird $\operatorname{Pic}(Q_m)$ von $i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{m+1}}(1)$ erzeugt, wobei $i\colon Q_m \hookrightarrow \mathbb{P}_{m+1}$ die kanonische Einbettung bezeichnet.

Ist $H_r(q)$ der Raum der homogenen Polynome von r Veränderlichen und vom Grad q, so gilt:

$$H^0(Q_2, \mathfrak{L}_{pq}) = \begin{cases} H_2(p) \otimes H_2(q) & \text{falls } p \text{ und } q \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

$$H^1(Q_2, \mathfrak{L}_{pq}) = \begin{cases} H_2(p) \otimes H_2(-q-2)^* & \text{falls } p \geqslant 0,\ q \leqslant 2 \\ H_2(-p-2)^* \otimes H_2(q) & \text{falls } p \leqslant -2,\ q \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Für $m \geqslant 3$ gilt:

$$H^0(Q_m, i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{m+1}}(q)) = \begin{cases} 0 & \text{für } q < 0 \\ H_{m+2}(q) & \text{für } 0 \leqslant q < 2 \\ H_{m+2}(q)/\mathfrak{q}_F \cdot H_m(q-2) & \text{für } q \geqslant 2\,, \end{cases}$$

$$\left(\text{wo } Q_m = \{[z] \in \mathbb{P}_{m+1}\colon \mathfrak{q}_F(z) = 0\}\right),$$

$$H^1(Q_m, i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{m+1}}(q)) = 0\,.$$

Def. 1.3. Sei $m \geqslant 2$. Ein 2-Bündel E über Q_m heißt minimal, falls $H^0(Q_m, E) \neq 0$ und $H^0(Q_m, E \otimes i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{m+1}}(-1)) = 0$ ist.

E heißt reduzibel, falls es eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{L}_1 \to E \to \mathfrak{L}_2 \to 0$$

mit Geradenbündeln $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ gibt. E heißt trivial reduzibel, falls man für $\mathfrak{L}_1$ das triviale Bündel wählen kann (das ist genau dann der Fall, wenn es einen Schnitt $s \in H^0(Q_m, E)$ ohne Nullstellen gibt).

BEMERKUNG. Ist $m \geqslant 3$, so spaltet jedes reduzible 2-Bündel auf Q_m:

BEWEIS. Ist E reduzibel, so existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{L}_1 \to E \to \mathfrak{L}_2 \to 0 .$$

Wegen $m \geqslant 3$ ist $H^1(Q_m, \mathcal{H}om(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1)) = 0$, und die Sequenz spaltet.

DEF. 1.4. Ein minimales 2-Bündel E auf Q_2 heißt exzeptionell, falls $H^0(Q_2, E \otimes \mathfrak{L}_{-1,0}) \neq 0$ oder $H^0(Q_2, E \otimes \mathfrak{L}_{0,-1}) \neq 0$ ist. (Es gibt dann holomorphe Schnitte $s \in H^0(Q_2, E)$, die auf einer Geraden $L \subset Q_2$ verschwinden!).

SATZ 1.5. Sei E minimal, nicht reduzibel und nicht exzeptionell. Dann gilt für jedes $s \in H^0(Q_m, E)$, $s \neq 0$:

$Z := \{x \in Q_m \colon s(x) = 0\}$ ist lokal-vollständiger Durchschnitt der Codimension 2. Ist $m \geqslant 3$ und $c_1(E) \leqslant 0$, so ist $\dim_{\mathbf{C}} H^0(Q_m, E) = 1$.

Der *Beweis* wird in der üblichen Weise geführt. Im Falle $m = 2$ ist zu beachten, daß die Idealgarbe $\mathfrak{J}$ einer Kurve in Q_2 folgende Gestalt besitzt:

Entweder ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}_{pq}$ mit $(p, q) \in \{(0, -1), (-1, 0)\}$ oder es ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}_{pq}$ mit $p < 0$ und $q < 0$.

Sei E minimal, nicht exzeptionell und (im Falle $m = 2$) nicht reduzibel, $s \in H^0(Q_m, E) \setminus \{0\}$, $Z = \{s = 0\}$ werde mit der durch s induzierten holomorphen Struktur versehen, es sei $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{Q_m}/\mathfrak{J}_Z|_Z$.

Der Koszul-Komplex

$$0 \longrightarrow \det E^* \xrightarrow{\alpha} E^* \xrightarrow{\beta} \mathfrak{J}_Z \longrightarrow 0$$

induziert über die Abbildung β einen Isomorphismus

$$E^*|_Z \xrightarrow{\sim} N^*_{Z/Q_m} .$$

Ist umgekehrt $Z \subset Q_m$ ein beliebiger lokal-vollständiger Durchschnitt der Codimension 2 und $\mathfrak{L} \in \operatorname{Pic}(Q_m)$ mit $\mathfrak{L}|_Z = \det N_{Z/Q_m}$, so sucht man nach 2-Bündeln E mit einem Schnitt $s \in H^0(Q_m, E)$, so daß $Z = \{s = 0\}$ ist. Die Klassen von in Frage kommenden Bündeln entsprechen den lokal-freien Elementen von $\operatorname{Ext}^1(Q_m; \mathfrak{J}_Z, \mathfrak{L}^*)$.

Ist $m \geqslant 3$, so ist stets $\operatorname{Ext}^1(Q_m; \mathfrak{J}_Z, \mathfrak{L}^*) \cong H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$. Das gleiche gilt für $m = 2$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{pq}$ mit $p \leqslant 1$ und $q \leqslant 1$. Nach einem Satz von Serre ist die Extension, die durch $1 \in H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ definiert wird, lokal-frei. Das ergibt ein beliebtes Verfahren zur Konstruktion von Bündeln.

Insbesondere folgt:

1) $c_1(E \otimes \mathfrak{L}) = c_1(\mathfrak{L})$,

$c_2(E \otimes \mathfrak{L}) = d_{Q_m}(Z)$ (= duale Klasse von Z).

2) E spaltet genau dann, wenn Z globaler vollständiger Durchschnitt ist.

BEISPIELE:

1) $m = 2$.

Sei $Z = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset Q_2$ eine endliche Punktmenge. Dann gibt es ein Bündel E, das eine Extension

$$0 \to \mathcal{O} \to E \to \mathfrak{I}_Z \otimes i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1) \to 0$$

definiert (über Z sind alle Bündel isomorph!).

Offensichtlich ist

$$c_1(E) = (1, 1),$$

$$c_2(E) = N.$$

Man kann das Sprungverhalten von E auf Geraden untersuchen: Sei $L \subset Q_2$ eine Gerade im $\mathbf{P}_3$.

Ist $Z \cap L = \emptyset$, so ist

$$0 \to \mathcal{O}_L \to E|_L \to \mathcal{O}_L(1) \to 0 \qquad \text{exakt},$$

und diese Sequenz spaltet. Also ist $E|_L \cong \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L$.

Ist $Z \cap L = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant N$, so ist

$$\mathcal{O}_L \xrightarrow{\varphi_s|L} E|_L \to \mathcal{O}_L(1-k) \to 0 \qquad \text{exakt},$$

also auch

$$0 \to \mathrm{Im}\,(\varphi_s|_L) \to E|_L \to \mathcal{O}_L(1-k) \to 0.$$

Da $\mathrm{Im}\,(\varphi_s|_L) \cong \mathcal{O}_L(k)$ ist, spaltet auch diese Sequenz, und es ist

$$E|_L \cong \mathcal{O}_L(k) \oplus \mathcal{O}_L(1-k).$$

Das bedeutet: Ist $k > 1$, so ist L eine Sprunggerade.

Natürlich ist $H^0(Q_2, E) \neq 0$, und aus dem Verschwinden von $H^0(Q_2, \mathfrak{I}_Z)$ folgt, daß auch $H^0(Q_2, E \otimes i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1)) = 0$ ist.

Somit ist E minimal. Andererseits ist E nicht reduzibel (sonst müßte E auf allen Geraden einer Schar in der gleichen Weise spalten).

Im Gegensatz zu diesem Beispiel sollen nun reduzible Bündel auf Q_2 betrachtet werden. Die geschilderten Ergebnisse stammen im Wesentlichen von Schwarzenberger ([6], [8], [10]).

DEF. 1.6. E heißt μ-reduzibel, falls es eine Sequenz

$$0 \to \mathfrak{L}_{r_1,s_1} \to E \to \mathfrak{L}_{r_2,s_2} \to 0$$

mit $r_1 \geqslant r_2$ gibt.

E heißt ν-reduzibel, falls man $s_1 \geqslant s_2$ wählen kann.

Schließlich heißt E doppelt-reduzibel, falls E sowohl μ-reduzibel als auch ν-reduzibel ist.

LEMMA 1.7. Ist E μ-reduzibel, so sind die Zahlen r_1, r_2, s_1, s_2 durch E eindeutig bestimmt. Wenn E nicht spaltet, so muß $r_1 > r_2$ und $s_1 < s_2 - 1$ sein.

(Für ν-reduzible Bündel gelten analoge Aussagen.)

BEWEIS. Wenn E spaltet, so folgt die Behauptung sehr leicht. E spalte daher nicht.

Dann muß $H^1(Q_2, \mathfrak{L}_{r_1-r_2,s_1-s_2}) \neq 0$ sein.

Da $r_1 \geqslant r_2$ ist, muß $s_1 - s_2 \leqslant -2$ sein.

Annahme: $r_1 = r_2 =: r$.

Dann ist $0 \to \mathfrak{L}_{0,s_1} \to E \otimes \mathfrak{L}_{-r,0} \to \mathfrak{L}_{0,s_2} \to 0$ exakt, und man kann zeigen, daß $E \otimes \mathfrak{L}_{-r,0} = \mathrm{pr}_2^* \tilde{E}$ für ein Bündel $\tilde{E}$ über $\mathbb{P}_1$ ist. Dann müßte E aber spalten.

Also ist $r_1 > r_2$ und $s_1 < s_2 - 1$.

Schränkt man die Sequenz

$$0 \to \mathfrak{L}_{r_1,s_1} \to E \to \mathfrak{L}_{r_2,s_2} \to 0$$

auf eine Gerade $L' = \mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ ein, so erhält man die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{L'}(r_1) \to E|_{L'} \to \mathcal{O}_{L'}(r_2) \to 0\,.$$

Da $H^1(L', \mathcal{O}(r_1 - r_2)) = 0$ ist, spaltet diese Sequenz, und r_1, r_2 sind durch $E|_{L'} \cong \mathcal{O}_{L'}(r_1) \oplus \mathcal{O}_{L'}(r_2)$ eindeutig bestimmt.

Für $s \in \mathbb{Z}$ hat man außerdem die exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{L}_{0,s_1-s} \to E \otimes \mathfrak{L}_{-r_1,-s} \to \mathfrak{L}_{r_2-r_1,s_2-s} \to 0\,.$$

Nun ist

$$H^0(Q_2, E\otimes \mathfrak{L}_{-r_1,-s}) \cong H^0(Q_2, \mathfrak{L}_{0,s_1-s}) = H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(s_1-s)) = \begin{cases} 0 & \text{für } s > s_1 \\ 1 & \text{für } s = s_1 , \end{cases}$$

also $s_1 = \max\{s : H^0(E\otimes\mathfrak{L}_{-r_1,-s}) \neq 0\}$.

Eine entsprechende Charakterisierung erhält man für s_2.

Aus den Arbeiten von Schwarzenberger folgt nun:

SATZ 1.8. Ein unzerlegbares 2-Bündel E auf Q_2 ist genau dann doppelt reduzibel, wenn es ein Geradenbündel $\mathfrak{L}$ und zwei exakte Sequenzen

$$0 \to \mathfrak{L}_{r_1',0} \to E\otimes\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}_{r_2',s_2'} \to 0$$

und

$$0 \to \mathfrak{L}_{r_1'',s_1''} \to E\otimes\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}_{0,s_1''} \to 0$$

mit $r_1' < r_2' - 1$, $s_2' < 0$ und $r_1'' > 0$, $s_1'' < s_2'' - 1$ gibt.

Ist $\mathrm{pr}: \mathbb{P}_3 \setminus \{\mathrm{pt.}\} \to \mathbb{P}_2$ eine Projektion mit Zentrum außerhalb Q_2, so ist $f = \mathrm{pr}|_{Q_2}: Q_2 \to \mathbb{P}_2$ eine zweiblättrige verzweigte Überlagerung. Insbesondere ist f platt, und $f_*\mathfrak{L}$ ist für jedes Geradenbündel $\mathfrak{L}$ ein Vektorbündel vom Rang 2.

Wegen der exakten Sequenz

$$0 \to \mathfrak{L}_{q-1,p-1} \to f^*f_*\mathfrak{L}_{pq} \to \mathfrak{L}_{pq} \to 0$$

und der Isomorphie

$$f^*f_*\mathfrak{L}_{pq} \cong f^*f_*\mathfrak{L}_{qp}$$

gibt es die beiden exakten Sequenzen

$$0 \to \mathfrak{L}_{-1,0} \to (f^*f_*\mathfrak{L}_{1,q}) \otimes \mathfrak{L}_{-q,0} \to \mathfrak{L}_{1-q,q} \to 0$$

und

$$0 \to \mathfrak{L}_{-q,q-1} \to (f^*f_*\mathfrak{L}_{1,q}) \otimes \mathfrak{L}_{-q,0} \to \mathfrak{L}_{0,1} \to 0 .$$

Daher ist $E^{(\alpha)} = f^*f_*\mathfrak{L}_{1,-\alpha}$ für $\alpha > 0$ doppelt-reduzibel.

2) $m = 4$.

Sei $\Lambda \subset Q_4$ eine α-Ebene. Offensichtlich ist Λ lokal-vollständiger Durchschnitt der Codimension 2, und es ist

$$\det N_{\Lambda/Q_4} \cong [(\det T_{Q_4})|_\Lambda] \otimes (\det T_\Lambda)^* = \mathcal{O}_\Lambda(4) \otimes \mathcal{O}_\Lambda(-3) = \mathcal{O}_\Lambda(1) = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)|_\Lambda .$$

Es gibt also eine lokal-freie Extension

$$0 \to i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(-1) \to E^* \to \mathfrak{J}_\Lambda \to 0 .$$

Es folgt sofort, daß $c_1(E^*) = -1$ und $c_2(E^*) = (1, 0)$ ist.

Ist $L \subset Q_4$ eine Gerade (im $\mathbb{P}_5$), die Λ nicht schneidet, so hat man die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_L(-1) \to E^*|_L \to \mathcal{O}_L \to 0 .$$

Wenn L die Ebene Λ in einem Punkt schneidet, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_L \to E^*|_L \to \mathcal{O}_L(-1) \to 0 .$$

In beiden Fällen erhält man:

$$E^*|_L \cong \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1) .$$

Der Isomorphismus $E^*|_\Lambda \cong N^*_{\Lambda/Q_4}$ führt zu der exakten Sequenz

$$0 \to T_\Lambda \to T_{Q_4}|_\Lambda \to E|_\Lambda \to 0 .$$

Über Q_4 ist darüber hinaus das tautologische Unterbündel $S_{2,4} = \{(V, z) \in G_{2,4} \times \mathbb{C}^4 \colon z \in V\}$ und das Quotientenbündel $Q_{2,4} = Q_4 \times \mathbb{C}^4/S_{2,4}$ gegeben. Bekanntlich gilt:

$$T_{Q_4} \cong S^*_{2,4} \otimes Q_{2,4} .$$

Lemma 1.9.

1) Ist $\Lambda \subset G_{2,4}$ eine α-Ebene, so gilt:

$$S_{2,4}|_\Lambda \cong \mathcal{O}_\Lambda \oplus \mathcal{O}_\Lambda(-1) , \quad Q^*_{2,4}|_\Lambda \cong \Omega^1_\Lambda(1) .$$

2) Ist $\Lambda' \subset G_{2,4}$ eine β-Ebene, so gilt:

$$S_{2,4}|_{\Lambda'} \cong \Omega^1_{\Lambda'}(1) , \quad Q^*_{2,4}|_{\Lambda'} \cong \mathcal{O}_{\Lambda'} \oplus \mathcal{O}_{\Lambda'}(-1) .$$

Beweis. Sei $H^*(Q_4; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\eta \oplus (\mathbb{Z}\gamma' \oplus \mathbb{Z}\gamma'') \oplus \mathbb{Z}\varepsilon + \mathbb{Z}\delta$ mit $\eta^2 = \gamma' + \gamma''$. Dann wird γ' durch eine α-Ebene und γ'' durch eine β-Ebene repräsentiert (nach entsprechender Normierung, vgl. auch [1]).

Für das universelle Bündel $U_{2,4} = S^*_{2,4}$ auf Q_4 gilt dann:

$$c_1(U_{2,4}) = \eta\,, \quad c_2(U_{2,4}) = \gamma'' \quad (\text{vgl. [5]})\,.$$

Also ist

$$c_1(S_{2,4}) = -1\,, \quad c_2(S_{2,4}) = (0,1)\,,$$

$$c_1(Q_{2,4}) = 1\,, \quad c_2(Q_{2,4}) = (1,0)\,.$$

Insbesondere ist $S_{2,4}$ weder zu $Q_{2,4}$ noch zu $Q^*_{2,4}$ isomorph!

Sei nun $L \subset G_{2,4}$ irgendeine Gerade. Wegen der Injektion $S_{2,4} \hookrightarrow Q_4 \times \mathbf{C}^4$ muß $S_{2,4}|_L \cong \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1)$ sein.

Das gleiche folgt für $Q^*_{2,4}$.

Andererseits ist $c_2(S_{2,4}|_\Lambda) = 0$ und $c_2(Q^*_{2,4}|_\Lambda) = 1$.

Da $S_{2,4}|_\Lambda$ spaltet und $Q^*_{2,4}|_\Lambda$ unzerlegbar ist, folgt mit [7], Seite 212, die erste Behauptung.

Auf Λ' müssen lediglich die Rollen von $S_{2,4}$ und $Q^*_{2,4}$ vertauscht werden.

Lemma 1.9 liefert einem die exakte Sequenz

$$0 \to T_\Lambda \to T_\Lambda \oplus T_\Lambda(-1) \to E|_\Lambda \to 0\,.$$

Es folgt, daß die Chernklassen von $E^*|_\Lambda$ und $\Omega^1_\Lambda(1)$ übereinstimmen, und eine erneute Anwendung von [7], Seite 212, ergibt die Isomorphie

$$E^*|_\Lambda \cong \Omega^1_\Lambda(1)\,.$$

Ein Bündel, das auf allen Geraden L einer Quadrik in der gleichen Weise spaltet, wird in dieser Arbeit linear-uniform genannt. Eine Klassifikation solcher Bündel wird in § 3 geliefert. Hier haben wir gerade erhalten, daß E^* (und damit auch E) linear-uniform ist.

Ist $\Lambda \subset Q_4$ eine α-Ebene, $\Lambda' \subset Q_4$ eine β-Ebene und $\Lambda \cap \Lambda' \neq \emptyset$, so ist $Z = \Lambda \cup \Lambda'$ eine 2-dimensionale singuläre Quadrik (vom Rang 2), die man aus Q_4 durch 2-fachen Hyperebenenschnit bekommt. Mit der gleichen Methode, mit der in [7] das Theorem 2.3.2 bewiesen wird, läßt sich zeigen:

Satz 1.10. Ist $m \geqslant 3$, E ein 2-Bündel auf Q_m, $H \subset \mathbf{P}_{m+1}$ eine Hyperebene, so daß $E|_{H \cap Q_m}$ spaltet, so spaltet E schon selbst.

Eine 2-fache Anwendung dieses Ergebnisses beweist: Jedes 2-Bündel E auf Q_4, das auf Z spaltet, spaltet auch schon selbst. Daß es nicht genügt, das Spalten von E auf *einer* Ebene zu fordern, zeigt das vorangegangene Beispiel.

2. – Spaltungsverhalten und Stabilität.

DEF. 2.1. Sei E ein holomorphes 2-Bündel auf Q_m, $m \geq 2$. E heißt linear-uniform vom Typ $\alpha \geq 0$, falls $E|_L \cong \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-\alpha)$ für alle Geraden $L \subset Q_m$ ist.

Um das Spaltungsverhalten eines Bündels auf Geraden besser untersuchen zu können, versieht man die Menge der Geraden mit einer (sich natürlich ergebenden) topologischen Struktur. Ein bewährter Ansatz ist die Methode der Standard-Diagramme, die auf van de Ven zurückgeht. Diese für das Studium von Bündeln auf dem $\mathbb{P}_n$ eingeführte Methode bleibt auch bei Quadriken Q_m, $m \geq 3$, erfolgreich, da es auf solchen Quadriken viele Geraden gibt. Die Quadrik Q_2 enthält zu wenig Geraden und muß daher anders behandelt werden (man denke z.B. an die Problematik der unzerlegbaren reduziblen Bündel). In diesem Abschnitt soll Q_2 daher ganz ausgeklammert werden.

Es sei $F_{1,n} = \{(x, L) \in \mathbb{P}_n \times \mathbb{G}_{1,n}\colon x \in L\}$ die $(2n-1)$-dimensionale Fahnenmannigfaltigkeit der Punkte und Geraden im $\mathbb{P}_n$: Dann gehört dazu das folgende Standard-Diagramm von holomorphen Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} F_{1,n} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{G}_{1,n} \\ \mathbb{P}_n & \end{tikzcd}$$

Bezüglich q ist $F_{1,n}$ nichts anderes als das projektive Bündel $\mathbb{P}(S_{2,n+1}) \to \to \mathbb{G}_{1,n}$, wobei $S_{2,n+1} = \{(V, z) \in G_{2,n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}\colon z \in V\}$ das tautologische Bündel auf $\mathbb{G}_{1,n} = G_{2,n+1}$ ist.

Bezüglich p ist $F_{1,n}$ das projektive Bündel $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}_n}(-1)) \to \mathbb{P}_n$. Das folgt aus der Beziehung $p^{-1}(\mathbb{C}v) \cong \{\mathbb{C}v\} \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}v)$ und aus der Euler-Sequenz $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1) \to \mathbb{P}_n \times \mathbb{C}^{n+1} \to T_{\mathbb{P}_n}(-1) \to 0$.

Sei

$$V \in G_{2,n+1}, \qquad L = \mathbb{P}(V) \in \mathbb{G}_{1,n}.$$

Dann ist

$$H^0(q^{-1}(V), p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)) \cong H^0(L, \mathcal{O}_L(1)) \cong V^*.$$

Daraus folgt:

$$q_* p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \cong S^*_{2,n+1}.$$

Somit ist $S_{2,n+1} \cong S^*_{2,n+1} \otimes \det S_{2,n+1} = q_* p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \otimes \det S^*_{2,n+1}$.

Im Falle $n = 3$ (also $G_{2,n+1} \cong Q_4$) ergibt sich:

$$S_{2,4} \cong q_* p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1) \otimes \mathcal{O}_{Q_4}(-1) .$$

Auf ähnliche Weise kann man auch das Bündel $Q_{2,4}$ charakterisieren. Außerdem kann man zeigen:

Is $i\colon Q_3 \hookrightarrow Q_4$ die kanonische Einbettung, so ist $i^* S_{2,4} \cong i^* Q^*_{2,4}$.

DEF. 2.2. Sei $\mathcal{E}$ eine lokal-freie Garbe vom Rang 2 auf Q_m, $m \geqslant 3$. $\mathcal{E}$ heißt stabil (bzw. semistabil), wenn für alle kohärenten Untergarben $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ vom Rang 1 gilt:

$$c_1(\mathcal{L}) < \frac{c_1(\mathcal{E})}{2}$$

$$\left(\text{bzw. } c_1(\mathcal{L}) \leqslant \frac{c_1(\mathcal{E})}{2}\right).$$

BEMERKUNG. Es genügt, das Kriterium für lokal-freie Untergarben zu überprüfen. Allerdings ist zu beachten: Eine lokal-freie Untergarbe braucht noch nicht ein Unterbündel zu sein!

Es gelten die bekannten Sätze über Stabilität und Semistabilität (vgl. [7]). Die Resultate werden hier ohne Beweis übernommen:

LEMMA 2.3. Sei $\mathcal{E}$ lokal-frei vom Rang 2 auf Q_m, $m \geqslant 3$. Ist $c_1(\mathcal{E}) \equiv 1 \bmod 2$, so gilt:

$$\mathcal{E} \text{ stabil} \Leftrightarrow \mathcal{E} \text{ semistabil} .$$

LEMMA 2.4. Sei $\mathcal{E}$ lokal-frei vom Rang 2 auf Q_m, $m \geqslant 3$. Dann gilt:

$$\mathcal{E} \text{ stabil} \Leftrightarrow H^0(Q_m, \operatorname{end}(\mathcal{E})) \cong \mathbb{C} .$$

DEF. 2.5. Sei E ein 2-Bündel auf Q_m, $m \geqslant 3$. E heißt normiert, falls $c_1(E) \in \{0, -1\}$ ist. Ist E beliebig, $c = c_1(E)$, so definiert man

$$E_{\text{norm}} := \begin{cases} E\left(-\dfrac{c}{2}\right) & \text{falls } c \equiv 0 \bmod 2 \\[2ex] E\left(-\dfrac{c+1}{2}\right) & \text{falls } c \equiv 1 \bmod 2 . \end{cases}$$

Dann ergibt sich:

LEMMA 2.6. Sei E ein 2-Bündel auf Q_m, $m \geqslant 3$ Dann gilt:

$$\begin{aligned} &E \text{ stabil} &&\Leftrightarrow H^0(Q_m, E_{\text{norm}}) &&= 0 , \\ &E \text{ semistabil} &&\Leftrightarrow H^0(Q_m, E_{\text{norm}}(-1)) &&= 0 . \end{aligned}$$

Aus den Arbeiten von Maruyama (aber für den vorliegenden Fall auch aus elementareren Überlegungen) folgt:

SATZ 2.7. Sei E ein semistabiles 2-Bündel auf Q_m, $m \geqslant 4$. Dann ist $E|_{Q_{m-1}}$ semistabil für allgemeine reguläre Hyperebenenschnitte $Q_{m-1} \subset Q_m$.

Vor dem Beweis des wichtigsten Satzes dieses Abschnittes müssen wir die Geometrie der Geraden auf Quadriken noch etwas näher studieren.

SATZ 2.8. Die Menge $\Sigma_1(Q_m) \subset \mathbb{G}_{1,m+1}$ der Geraden auf Q_m bildet für $m \geqslant 3$ eine zusammenhängende $(2m-3)$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

BEWEIS. Nach [2] genügt es zu zeigen, daß $H^1(L, N_{L/Q_m}) = 0$ für alle $L \in \Sigma_1(Q_m)$ ist.

Das folgt aber aus der exakten Sequenz

$$0 \to T_L \to T_{Q_m}|_L \to N_{L/Q_m} \to 0$$

und der Tatsache, daß

$$T_{Q_m}|_L \cong \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(1)^{\oplus(m-2)} \oplus \mathcal{O}_L(2) \quad \text{ist.}$$

BEISPIEL: $\Sigma_1(Q_3) = \Sigma_1' \cong \Sigma_{2,+} \cong \mathbb{P}_3$.

DEF. 2.9. $\mathbb{F}(Q_m) = \{(x, L) \in Q_m \times \Sigma_1(Q_m) : x \in L\}$ sei die Fahnenmannigfaltigkeit der Punkte und Geraden auf Q_m.

Dazu gehört das Fahnendiagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(Q_m) & \xrightarrow{q} & \Sigma_1(Q_m) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \\ Q_m & & \end{array}$$

Ist $j: \Sigma_1(Q_m) \hookrightarrow \mathbb{G}_{1,m+1}$ die natürliche Injektion, so erhält man $\mathbb{F}(Q_m)$ als Liftung von $F_{1,m+1}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(Q_m) = j^*F_{1,m+1} & \xrightarrow{j'} & F_{1,m+1} \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\ \Sigma_1(Q_m) & \xhookrightarrow{j} & \mathbb{G}_{1,m+1} \end{array}$$

Also ist $\mathbb{F}(Q_m) = j^*\mathbb{P}(S_{2,m+2}) = \mathbb{P}(j^*S_{2,m+2})$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2m-2$.

Ist $x \in Q_m$, so ist jede Gerade $L \subset Q_m$ durch x auch in dem projektiven Tangentialraum $T_x(Q_m)$ enthalten. Da $Q_m \cap T_x(Q_m)$ ein Kegel über einer regulären Quadrik Q_{m-2} mit Spitze in x ist, folgt:

$$p^{-1}(x) \cong \{L \in \Sigma_1(Q_m)\colon x \in L\} \cong Q_{m-2}\,.$$

SATZ 2.10. (« Grauert/Mülich »).

Sei E ein semistabiles 2-Bündel auf Q_m, $m \geqslant 3$. Dann spaltet E auf allgemeinen Geraden $L \subset Q_m$ in der Form

$$E|_L \cong \mathcal{O}_L(a) \oplus \mathcal{O}_L(a) \qquad \text{falls } c_1(E) \equiv 0 \mod 2\,,$$

$$E|_L \cong \mathcal{O}_L(a) \oplus \mathcal{O}_L(a-1) \qquad \text{falls } c_1(E) \equiv 1 \mod 2\,.$$

BEWEIS.

1) Ist $m \geqslant 4$, so kann man nach dem Satz 2.7 stets ein $Q_3 \subset Q_m$ finden, so daß $E|_{Q_3}$ semistabil ist.

Ist $L \subset Q_3$ eine Gerade, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_1 = a_1(L)$ $a_2 = a_2(L)$ mit

$$E|_L \cong \mathcal{O}_L(a_1) \oplus \mathcal{O}_L(a_2)\,,$$

$$a_1 \geqslant a_2 \qquad \text{und} \qquad a_1 + a_2 = c_1(E)\,.$$

Setzt man $a_1^0 = \min\limits_{L \subset Q_3} a_1(L)$, so gibt es auch eine Gerade $L_0 \subset Q_3$ mit $a_1(L_0) = a_1^0$.

Dann ist $E|_{L_0} = \mathcal{O}_{L_0}(a_1^0) \oplus \mathcal{O}_{L_0}(a_2^0)$, mit $a_2^0 = c_1(E|_{L_0}) - a_1^0$. Aus dem Halbstetigkeitssatz läßt sich leicht folgern, daß $\{L \subset Q_m\colon E|_L = \mathcal{O}_L(a_1^0) \oplus \mathcal{O}_L(a_2^0)\}$ Zariski-offen in der Menge aller Geraden $L \subset Q_m$ ist.

Es genügt also offensichtlich zu zeigen:

Ist E ein 2-Bündel auf Q_3, das auf fast allen Geraden $L \subset Q_3$ in der Form $E|_L = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-\alpha)$ mit $\alpha \geqslant 2$ spaltet, so ist E nicht semistabil.

2) Wir benutzen das Standard-Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}(Q_3) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & \Sigma_1(Q_3) \cong \mathbb{P}_3 \\ Q_3 & \end{tikzcd}$$

Dabei kann man (bezüglich einer geeigneten Einbettung $\iota\colon Q_3 \hookrightarrow Q_4 = G_{2,4}$) die Fahnenmannigfaltigkeit $\mathbb{F}(Q_3)$ als projektives Bündel $\mathbb{P}(\iota^* S_{2,4})$ über Q_3 auffassen.

Sei $U_E \subset \Sigma_1(Q_3)$ die Zariski-offene Teilmenge der Geraden, auf denen E « generisch » spaltet (in der Form $E|_L = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-\alpha)$, $\alpha \geqslant 2$) und $S_E = \Sigma_1(Q_3) \setminus U_E$ die Menge der « Sprunggeraden ».

Die Garbe $q_* p^* E$ ist kohärent auf $\Sigma_1(Q_3)$ und lokal-frei vom Rang 1 über U_E. Außerdem hat man einen kanonischen Garben-Homomorphismus

$$\mathfrak{L} := q^* q_* p^* E \xrightarrow{\varphi} p^* E .$$

Sei $\mathfrak{Q} := \operatorname{Coker}(\varphi)$, $T(\mathfrak{Q})$ die Torsionsgarbe von $\mathfrak{Q}$ und $\tilde{\mathfrak{Q}} := \mathfrak{Q}/T(\mathfrak{Q})$. Dann hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to \tilde{\mathcal{F}} \to p^* E \to \mathfrak{Q}/T(\mathfrak{Q}) \to 0 .$$

Da $\operatorname{Sing}(\tilde{\mathfrak{Q}})$ eine mindestens 2-codimensionale analytische Menge in $\mathbb{F}(Q_3)$ ist, muß $\tilde{\mathcal{F}}$ ein Geradenbündel und auf $W_E = \mathbb{F}(Q_3) \setminus \operatorname{Sing}(\tilde{\mathfrak{Q}})$ sogar ein Unterbündel von p^*E sein. Sei $V_E = p(W_E)$.

Angenommen, es gibt ein Unterbündel $\mathcal{F} \subset E|_{V_E}$ mit $p^*\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}|_{W_E}$, dann läßt sich $\mathcal{F}$ zu einer kohärenten Untergarbe $\hat{\mathcal{F}} \subset E$ mit $\operatorname{rang}(\hat{\mathcal{F}}) = 1$ auf Q_3 fortsetzen.

Sei $L \in U_E$, also $L \subset V_E$. Dann ist

$$\hat{\mathcal{F}}|_L = \mathcal{F}|_L \cong p^*\mathcal{F}|_{q^{-1}(y_L)} = \tilde{\mathcal{F}}|_{q^{-1}(y_L)} \subset p^*E|_{q^{-1}(y_L)} \cong E|_L = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-\alpha) .$$

Für $L \in U_E$ ist φ über $q^{-1}(y_L)$ nichts anderes als die Auswertungsabbildung, und deshalb muß $\hat{\mathcal{F}}|_L \cong \mathcal{O}_L$ und $c_1(\hat{\mathcal{F}}) = 0$ sein.

Da $c_1(E)/2 = (-\alpha)/2 \leqslant -1$ ist, kann E in diesem Fall nicht semistabil sein. Der Beweis ist also fertig, wenn man zeigen kann, daß aus « $\alpha \geqslant 2$ » schon die Existenz des oben beschriebenen Unterbündels $\mathcal{F} \subset E|_{V_E}$ folgt. Verwendet man das « Descente-Lemma » (chapt. II, Lemma 2.1.2 in [7]), so läuft das darauf hinaus zu zeigen, daß

$$H^0\Big(q^{-1}(L),\ \mathcal{H}om\,\big(T_{W_E/V_E},\ \mathcal{H}om\,(\tilde{\mathcal{F}}|_{W_E},\ (p^*E/\tilde{\mathcal{F}})|_{W_E})\big)|_{q^{-1}(L)}\Big) = 0$$

für $L \in U_E$ ist.

Sei $\underline{L} = q^{-1}(L)$ für ein $L \in U_E$. Dann ist $\tilde{\mathcal{F}}|_{\underline{L}} = \mathcal{O}_{\underline{L}}$ und $p^*E|_{\underline{L}} = \mathcal{O}_{\underline{L}} \oplus \oplus\, \mathcal{O}_{\underline{L}}(-\alpha)$, also $\mathcal{H}om\,(\tilde{\mathcal{F}}, p^*E/\tilde{\mathcal{F}})|_{\underline{L}} = \mathcal{O}_{\underline{L}}(-\alpha)$.

Unter Ausnutzung der Tatsache, daß $\mathbb{F}(Q_3) \xrightarrow{p} Q_3$ ein projektives Bündel und $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\iota^* S_{2,4})}(-1)|_{\underline{L}} \cong q^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-1)|_{\underline{L}} = \mathcal{O}_{\underline{L}}$ ist, erhält man:

$$T_{\mathbb{F}(Q_3)/Q_3}|_{\underline{L}} = \mathcal{O}_{\underline{L}} \oplus \mathcal{O}_{\underline{L}}(-1)/\mathcal{O}_{\underline{L}} = \mathcal{O}_{\underline{L}}(-1) .$$

Doch $H^0(\underline{L}, \mathcal{O}_{\underline{L}}(1-\alpha))$ verschwindet für $\alpha \geqslant 2$!

3. – Der Klassifikationssatz.

Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des folgenden Theorems:

THEOREM 3.1. Sei E ein holomorphes 2-Bündel auf Q_m, $m \geqslant 2$. Ist E

linear-uniform vom Typ $\alpha\geqslant 0$, so gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1) $m=2$, $\alpha\geqslant 0$ und $E\cong\mathfrak{L}_{0,0}\oplus\mathfrak{L}_{-\alpha-\alpha}$ oder $E\cong\mathfrak{L}_{0,-\alpha}\oplus\mathfrak{L}_{-\alpha,0}$.

2) $m=2$, $\alpha>0$, E ist unzerlegbar und doppelt reduzibel, und es gibt zwei exakte Sequenzen

$$0\to\mathfrak{L}_{a',0}\to E\to\mathfrak{L}_{-a'-\alpha,-\alpha}\to 0$$
$$0\to\mathfrak{L}_{0,a''}\to E\to\mathfrak{L}_{-\alpha,-a''-\alpha}\to 0\ .$$

Dabei ist $\quad a'=\max\{s\colon H^0(Q_2,E\otimes\mathfrak{L}_{-s,0})\neq 0\}\leqslant-\alpha$

und $\quad a''=\max\{t\colon H^0(Q_2,E\otimes\mathfrak{L}_{0,-t})\neq 0\}\leqslant-\alpha$,

und eine der beiden Zahlen muß sogar $\leqslant-\alpha-1$ sein.

3) $m\geqslant 3$, $\alpha\geqslant 0$ und $E=\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-\alpha)$.

4) $m=4$, $\alpha=1$ und $E\cong S_{2,4}$ oder $E\cong Q^*_{2,4}$.

5) $m=3$, $\alpha=1$ und $E\cong i^*S_{2,4}\cong i^*Q^*_{2,4}$.

Dabei ist $i\colon Q_3\hookrightarrow Q_4$ die kanonische Einbettung.

Der *Beweis* wird in mehreren Schritten geführt.

LEMMA 3.2. Sei E ein holomorphes 2 Bündel auf Q_2. Ist E linear-uniform von Typ 0, so ist $E\cong\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}$

BEWEIS. Man betrachte die Projektion

$$Q_2=\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1\xrightarrow{pr_1}\mathbb{P}_1\ .$$

pr_1 ist eigentlich und platt, und nach Voraussetzung gilt für $L'=\mathrm{pr}_1^{-1}(x)$, $x\in\mathbb{P}_1$:

$$H^0(L',E|_{L'})=H^0(L',\mathcal{O}_{L'}\oplus\mathcal{O}_{L'})\cong\mathbb{C}^2\ .$$

Also ist $(\mathrm{pr}_1)_*E$ lokal-frei vom Rang 2, d.h.

$$(\mathrm{pr}_1)_*E=\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(b)\ .$$

Dann ist die natürliche Abbildung

$$\mathfrak{L}_{a,0}\oplus\mathfrak{L}_{b,0}=\mathrm{pr}_1^*(\mathrm{pr})_*E\to E$$

ein Isomorphismus.

Da $E|_{L'}$ keine nicht-trivialen Schnitte mit Nullstellen hat, muß $a=b=0$ sein.

LEMMA 3.3. Sei E ein holomorphes 2-Bündel auf Q_m. Es sei $3\leqslant m\leqslant 4$ und E linear-uniform vom Typ 0, oder $m\geqslant 5$ und E linear-uniform vom Typ $\alpha\geqslant 0$.

Dann spaltet E in zwei Geradenbundel.

BEWEIS. Wir benutzen das Fahnendiagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}(Q_m) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \Sigma_1(Q_m) \\ Q_m & \end{tikzcd}$$

Hier ist $q^{-1}(y_L) \cong L$ und $p^{-1}(x) \cong Q_{m-2}$.
Sei E linear-uniform vom Typ $\alpha \geqslant 0$ auf Q_m.
Dann ist

$$\begin{aligned} H^0(q^{-1}(y_L), p^*E|_{q^{-1}(y_L)}) &\cong H^0(L, E|_L) \\ &\cong H^0(L, \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-\alpha)) \cong \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \text{falls } \alpha = 0 \\ \mathbb{C} & \text{falls } \alpha > 0 \, . \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist $q_* p^* E$ ein Vektorbündel auf $\Sigma_1(Q_m)$.

1. FALL. $m \geqslant 3$ beliebig und $\alpha = 0$.
Dann ist $q^* q_* p^* E \to p^* E$ ein Isomorphismus!
Sei $x \in Q_m$, $\Gamma_x = \{y_L \in \Sigma_1(Q_m) \colon x \in L\} = q(p^{-1}(x))$.
Dann erhält man folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} q^{-1}(\Gamma_x) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, bend left, "j"] \arrow[ddr, "g"'] & & \Gamma_x \arrow[ll, dashed, bend right, "s"'] \arrow[d, hook, bend right, "j_x"] \\ & \mathbb{F}(Q_m) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & \Sigma_1(Q_m) \\ & Q_m & \end{tikzcd}$$

mit $s(y_L) := (x, y_L)$.

Dann ist $g \circ s = \text{const.}$, $f \circ s = \text{id}$.

Wegen $g^*E = (p\circ j)E = j^*(p^*E)$ ist

$$g^*E|_{f^{-1}(y_L)} = p^*E|_{q^{-1}(y_L)} \cong E|_L \cong \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L\,,$$

und die natürliche Abbildung

$$f^*f_*g^*E \to g^*E$$

ist ebenfalls ein Isomorphismus.

Da

$$f_*g^*E \cong s^*f^*f_*g^*E \cong s^*g^*E = (g\circ s)^*E$$

trivial ist, ist auch $f^*f_*g^*E \cong g^*E$ trivial.

$g\colon q^{-1}(\Gamma_x) \to Q_m$ ist eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten, und für die Fasern gilt:

$$g^{-1}(z) = \begin{cases} (z, \overline{zx}) \cong \mathbb{P}_1 & \text{falls } z \neq x \\ \{z\} \times \Gamma_x \cong Q_{m-2} & \text{falls } z = x\,. \end{cases}$$

Die Fasern von g sind also zusammenhängend, und daher erhält man mit der Projektionsformel:

$$E \cong g_*g^*E\,.$$

Da g^*E trivial ist, muß auch E trivial sein.

2. Fall. $m \geqslant 5$ und $\alpha > 0$.

Dann ist q_*p^*E ein Geradenbündel, und

$$H := q^*q_*p^*E \to p^*E$$

ist ein Bündel-Monomorphismus, der sich zu einer exakten Sequenz von Bündeln

$$0 \to H \to p^*E \to P \to 0 \quad \text{ergänzen läßt}\,.$$

$A := p^{-1}(x)$ ist eine mindestens 3-dimensionale Quadrik und $p^*E|_A$ ist trivial. Schränkt man die ganze Sequenz auf A ein, so erhält man die Beziehung

$$1 = c(H)\cdot c(P)\,.$$

Daraus folgt, daß $c(H) = c(P) = 1$ ist (dieser Schluß läßt sich nicht mehr durchführen, wenn A eine 2-dimensionale Quadrik ist).

Also sind auch H und P über A trivial.

Da $H^1(A, H|_A) \cong H^1(Q_{m-2}, \mathcal{O}) = 0$ ist, ist $R^1 p_* H = 0$ Man erhält somit die exakte Sequenz

$$0 \to p_* H \to p_* p^* E \to p_* P \to 0 .$$

$p_* H$ und $p_* P$ sind wieder Geradenbündel.

Also ist $H^1(Q_m, (q_* P)^* \otimes (p_* H)) = 0$, und die Sequenz spaltet:

$$p_* p^* E \cong p_* H \oplus p_* P .$$

Andererseits ist aber $p_* p^* E \cong E$.

Das bedeutet, daß E in zwei Geradenbündel spaltet.

Lemma 3.4. Sei E ein holomorphes 2-Bündel auf Q_m, $3 \leqslant m \leqslant 4$. Ist E linear-uniform vom Typ $\alpha \geqslant 2$, so spaltet E in zwei Geradenbündel.

Beweis. Aus Satz 2.10 ergibt sich, daß E nicht semistabil sein kann.

Insbesondere ist dann $H^0(Q_m, E_{\text{norm}}) \neq 0$.

Es ist $c_1(E) = -\alpha$.

Ist $\alpha \equiv 0 \bmod 2$, so ist $E_{\text{norm}} = E(\alpha/2)$, mit $\alpha/2 \geqslant 1$;

ist $\alpha \equiv 1 \bmod 2$, so ist $E_{\text{norm}} = E((\alpha-1)/2)$, mit $(\alpha-1)/2 \geqslant \frac{1}{2}$.

In jedem Fall gibt es ein $k_0 \geqslant 0$, so daß $E_{\text{norm}} = E(k_0)$ ist.

Da $E(-1)|_L \cong \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(-1-\alpha)$ für alle Geraden $L \subset Q_m$ ist, muß $H^0(Q_m, E(-1)) = 0$ sein.

Nun sei k mit $0 \leqslant k \leqslant k_0$ so gewählt, daß

$$H^0(Q_m, E(k)) \neq 0 \quad \text{und} \quad H^0(Q_m, E(k-1)) = 0 \quad \text{ist}.$$

Dann ist

$$-\alpha + 2k = c_1(E) + 2k \leqslant c_1(E) + 2k_0 = c_1(E(k_0)) = c_1(E_{\text{norm}}) \leqslant 0 .$$

Sei $\sigma \in H^0(Q_m, E(k))$, $\sigma \neq 0$.

1. Fall. Wenn σ keine Nullstellen hat, dann definiert σ eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O} \to E(k) \to \mathcal{O}(2k-\alpha) \to 0$$

und die muß offensichtlich spalten.

Also ist $E \cong \mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k-\alpha)$ und $k = 0$.

2. FALL. Wenn σ Nullstellen hat und E nicht spaltet, dann ist $Z := \{x \in Q_m\colon \sigma(x) = 0\}$ lokal vollständiger Durchschnitt der Codimension 2. Es gibt dann zwei Geraden

$$L, L' \subset Q_m \quad \text{mit} \quad L \cap Z = \emptyset \quad \text{und} \quad L' \cap Z \neq \emptyset, \quad \text{aber } L' \not\subset Z.$$

(Der Beweis dafür ergibt sich aus einfachen geometrischen Überlegungen)

Die Sequenz $0 \to \mathcal{O}_L \to E(k)|_L \to \mathcal{O}_L(2k-\alpha) \to 0$ ist exakt, und da $2k - \alpha \leqslant 0$ ist, spaltet sie. Es folgt, daß $k = 0$ ist.

Andererseits ist $E(k)|_{L'} \cong \mathcal{O}_{L'}(a) \oplus \mathcal{O}_{L'}(b)$ mit $a \geqslant b$ und $a + b = 2k - \alpha = -\alpha < 0$.

Dann muß $b < 0$ sein, und da $\sigma|_{L'}$ nicht-trivial ist und Nullstellen hat muß $a > 0$ sein.

Also ist $a - b = 2a - (a + b) = 2a + \alpha > \alpha$.

Da E linear-uniform vom Typ α ist, muß andererseits $a = k$ und $b = k - \alpha$ sein, also $a - b = \alpha$. Das ist ein Widerspruch!

Es sind nur noch die Ausnahmefälle zu untersuchen.

A) $m = 2$, $\alpha > 0$.

Man benutzt wieder die Projektionen

$$\begin{tikzcd} & Q_2 \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\ \mathbb{P}_1 & & \mathbb{P}_1 \end{tikzcd}$$

Dann sind

$$\mathrm{pr}_1^*(\mathrm{pr}_1)_* E = \mathcal{L}_{a',0} \quad \text{und} \quad \mathrm{pr}_2^*(\mathrm{pr}_2)_* E = \mathcal{L}_{0,a''}$$

Untergeradenbündel von E, und man hat exakte Sequenzen

$$0 \to \mathcal{L}_{a',0} \to E \to \mathcal{L}_{-a'-\alpha,-\alpha} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{L}_{0,a''} \to E \to \mathcal{L}_{-\alpha,-a''-\alpha} \to 0\,.$$

Daraus folgt:

$$H^0(Q_2, E \otimes \mathcal{L}_{-a',0}) \neq 0\,, \quad H^0(Q_2, E \otimes \mathcal{L}_{-a'-1,0}) = 0$$

und

$$H^0(Q_2, E \otimes \mathcal{L}_{0,-a''}) \neq 0\,, \quad H^0(Q_2, E \otimes \mathcal{L}_{0,-a''-1}) = 0\,.$$

Wenn E spaltet, dann muß $E \cong \mathfrak{L}_{0,0} \oplus \mathfrak{L}_{-\alpha,-\alpha}$ (und $a' = a'' = 0$) sein,

$$\text{oder} \quad E \cong \mathfrak{L}_{0,-\alpha} \oplus \mathfrak{L}_{-\alpha,0} \quad (\text{und } a' = a'' = -\alpha) .$$

Wenn E nicht spaltet, dann muß $H^1(Q_2, \mathfrak{L}_{2a'+\alpha,\alpha}) \neq 0$ und $H^1(Q_2, \mathfrak{L}_{\alpha,2a''+\alpha}) \neq 0$ sein.

Das ist nur möglich, wenn

$$a' \leqslant -1 - \frac{\alpha}{2}, \qquad \text{und} \qquad a'' \leqslant -1 - \frac{\alpha}{2} \text{ ist}.$$

Schränkt man die beiden exakten Sequenzen auf Geraden ein, so erhält man sogar:

$$a' \leqslant \min(-\alpha, -2), \qquad a'' \leqslant \min(-\alpha, -2).$$

Sei etwa $a' = a'' = -\alpha$ und $\alpha \geqslant 2$.

Dann erhält man die exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{L}_{-\alpha,0} \to E \to \mathfrak{L}_{0,-\alpha} \to 0 .$$

Die Cohomologiesequenz ergibt (nach Tensorieren mit $\mathfrak{L}_{0,\alpha}$):

$$0 \to H^0(E \otimes \mathfrak{L}_{0,\alpha}) \xrightarrow{\iota} H^0(\mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathfrak{L}_{-\alpha,\alpha}) \to \dots .$$

Da $H^0(E \otimes \mathfrak{L}_{0,\alpha}) \neq 0$ ist, nach Definition von a'', ist ι ein Isomorphismus und $\mathrm{Im}(\delta) = 0$.

$\mathrm{Im}(\delta)$ enthält aber das Hindernis zur Spaltung der obigen Sequenz. So erhält man schließlich:

$$a' \leqslant -\alpha - 1 \qquad \text{oder} \qquad a'' \leqslant -\alpha - 1 .$$

Die exakten Sequenzen

$$0 \to \mathfrak{L}_{a',+\alpha,0} \to E \otimes \mathfrak{L}_{\alpha,0} \to \mathfrak{L}_{-a'-\alpha} \to 0$$

und

$$0 \to \mathfrak{L}_{\alpha,a''} \to E \otimes \mathfrak{L}_{\alpha,0} \to \mathfrak{L}_{0,-a''-\alpha} \to 0$$

zeigen, daß E doppelt reduzibel ist.

Die Bündel $E^{(\alpha)} = f^* f_* \mathfrak{L}_{-\alpha,1}$ bilden Beispiele für den extremen Fall $a' = a'' = -\alpha - 1$.

$B)$ $m = 4$, $\alpha = 1$.

Offensichtlich ist $c_1(E) = -1$ Darüber hinaus kann man aber zeigen:

LEMMA 3.5. Ist E unzerlegbar, so ist $c_2(E) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$.

BEWEIS. Sei $c_2(E) = (a, b)$.
Ist $\Lambda' = \sigma(0, 2)$ eine α-Ebene und $\Lambda'' = \sigma(1, 1)$ eine β-Ebene, so folgt:

$$c_2(E|_{\Lambda'}) = a, \; c_2(E|_{\Lambda''}) = b.$$

Die 2-Bündel E auf $\mathbf{P}_2$, die auf jeder Geraden $L \subset \mathbf{P}_2$ in der Form $E|_L = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1)$ spalten, sind bekannt.
Es gibt nur 4 Möglichkeiten:

Fall	$E\|_{\Lambda'}$	$E\|_{\Lambda''}$	$c_2(E)$
I	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$	$(0, 0)$
II	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$	$\Omega^1(1)$	$(0, 1)$
III	$\Omega^1(1)$	$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$	$(1, 0)$
IV	$\Omega^1(1)$	$\Omega^1(1)$	$(1, 1)$

Im Fall I spaltet E auf $\Lambda' \cup \Lambda'' = F_2^2$ und muß daher schon selbst spalten,
Der Fall II ist zugelassen.

Sei nun $E|_{\Lambda'} \simeq \Omega^1(1)$, also $c_2(E) = (1, b)$ mit $b \in \{0, 1\}$. E ist auf *jedem* Schubertzykel vom Typ $\sigma(0, 2)$ isomorph zu $\Omega^1(1)$.

Es genügt zu zeigen, daß es irgendeinen Schubertzykel vom Typ $\sigma(1, 1)$ gibt, auf dem E ein triviales Unterbündel besitzt. Sei $\sigma(1, 1) = \mathbb{G}(E)$, wobei $E = \mathbf{P}(H) \subset \mathbf{P}_3$ eine Hyperebene ist. Ist $V \in \sigma(1, 1) \subset G_{2,4}$, so gibt es ein $G \in G_{1,4}$ (abhängig von V) mit $G \subset V \subset H \subset \mathbf{C}^4$. Dann liegt V/G in $\mathbf{P}(\mathbf{C}^4/G)$ also V in $\{V' \in G_{2,4}: G \subset V'\} = \sigma(0, 2)$.

Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \Omega^1_{\mathbf{P}(\mathbf{C}^4/G)}(1) \to \mathbf{P}(\mathbf{C}^4/G) \times (\mathbf{C}^4/G)^* \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathbf{C}^4/G)}(1) \to 0$$

erhält man die exakte Sequenz

$$0 \to E_V \to (\mathbf{C}^4/G)^* \to (V/G)^* \to 0 \, ,$$

also

$$E_V = \operatorname{Ker}\left(\{\lambda \in (\mathbf{C}^4)^*: \lambda|_G \equiv 0\} \xrightarrow{\text{res}} \{\lambda \in V^*: \lambda|_G \equiv 0\}\right) .$$

Aber $(\mathbf{C}^4/H)^* = \{\lambda \in (\mathbf{C}^4)^*: \lambda|_H \equiv 0\}$ liegt in diesem Kern, unabhängig von der Wahl von V und G.

Also ist $\sigma(1,1)\times(\mathbb{C}^4/H)^* \hookrightarrow E|_{\sigma(1,1)}$ ein triviales Unterbündel. Damit ist Fall IV ausgeschlossen und alles bewiesen.

LEMMA 3.6. Ist (unter obigen Voraussetzungen) $c_2(E) = (0, 1)$, so ist $E \cong S_{2,4}$.

Ist $c_2(E) = (1, 0)$, so ist $E \cong Q^*_{2,4}$.

BEWEIS. Man kann sich auf den 1. Fall beschränken, der zweite wird ganz analog bewiesen.

Verwendet wird das folgende Fahnendiagramm:

$$\begin{tikzcd} F := \{(V, L) \in G_{2,4}\times G_{1,4}\colon L \subset V\} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & G_{1,4} \cong \mathbf{P}_3 \\ G_{2,4} \cong Q_4 & \end{tikzcd}$$

Es ist

$$p^{-1}(V) \cong G_1(V) \cong \mathbf{P}_1 \qquad \text{und} \qquad q^{-1}(L) \cong \sigma_{0,2}(L) \cong \mathbf{P}_2\,.$$

Da $H^0\big(q^{-1}(L), p^*E|_{q^{-1}(L)}\big) \cong H^0\big(\sigma_{0,2}(L), E|_{\sigma_{0,2}(L)}\big) \cong H^0\big(\mathbf{P}_2, \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)\big) = \mathbb{C}$ für alle $L \in G_{1,4}$ ist, ist q_*p^*E ein Geradenbündel auf $\mathbf{P}_3$ und $q^*q_*p^*E$ ein Unterbündel von p^*E.

Sei $q_*p^*E = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(l)$. Dann gibt es ein Geradenbündel P auf F und eine exakte Sequenz

$$0 \to q^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(l) \to p^*E \to P \to 0$$

Daraus folgt:

$$P \cong q^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-l) \otimes \det(p^*E) \cong q^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(-l) \otimes p^*\mathcal{O}_{Q_4}(-1)\,.$$

Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß $l = -1$ ist:

Dazu wähle man einen Schubertzykel $\Lambda'' = \sigma(1,1) \subset G_{2,4}$ und betrachte das eingeschränkte Diagramm

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "p'"] & G_{1,3} \cong \mathbf{P}_2 \\ \Lambda'' \cong \mathbf{P}_2 & \end{tikzcd}$$

So erhält man die exakte Sequenz

$$0 \to (q')^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(l) \to (p')^*E|_{\Lambda''} \to (q')^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-l) \otimes (p')^*\mathcal{O}_{\Lambda''}(-1) \to 0\,.$$

Cohomologiering von F' ist bekannt, er wird erzeugt von

$$H = (p')^* h \quad \text{und} \quad K = (q')^* k ,$$

wobei

$$h \in H^2(\Lambda''; \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad k \in H^2(G_{1,3}; \mathbb{Z})$$

kanonische Erzeugende sind.

Außerdem gilt die Relation:

$$KH - K^2 - H^2 = 0$$

(vgl. [3]).
Wegen $c_2(E) = (0, 1)$ ist nun

$$\begin{aligned} H^2 = (p')^* h^2 = (p')^* c_2(E|_{\Lambda''}) & \\ &= c_1((q')^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(l)) \cdot c_1((q')^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-l) \otimes (p')^* \mathcal{O}_{\Lambda''}(-1)) \\ &= l \cdot K \cdot (-l \cdot K - H) = -l^2 K^2 - l \cdot K \cdot H \\ &= (-l^2 - l) K^2 - l H^2 , \quad \text{also } l = -1 . \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Sequenz über F ein und wendet man den direkten Bildfunktor an, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 \to p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-1) \to E \to p_*(q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1) \otimes p^* \mathcal{O}_{Q_4}(-1)) & \\ \to R^1 p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-1) \to \ldots . \end{aligned}$$

Es ist $R^1 p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-1) = 0$ und $p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-1) = 0$.
Daraus folgt: $E \cong (p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)) \otimes \mathcal{O}_{Q_4}(-1) \cong S_{2,4}$.

C) $m = 3$, $\alpha = 1$.

Zu zeigen bleibt:
Ist E unzerlegbar, so ist $c_1(E) = -1$, $c_2(E) = 1$ und $E \cong i^* S_{2,4} = i^* Q_{2,4}^*$, wobei $i: Q_3 \hookrightarrow Q$- die kanonische Einbettung ist.

Beweis. Verwendet wird das folgende Standard-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(Q_3) = \{(x, L) \in Q_3 \times \Sigma_1(Q_3) : x \in L\} & \xrightarrow{q} & \Sigma_1(Q_3) \cong \mathbb{P}_3 \\ \Big\downarrow p & & \\ Q_3 & & \end{array}$$

Es ist $q^{-1}(L) \cong L$, $p^{-1}(x) \cong \Gamma_x \cong Q_1 \cong \mathbb{P}_1$.

Vermöge der Einbettung

$$i\colon Q_3 \hookrightarrow Q_4 = G_{2,4} \quad \text{kann man} \quad \mathbb{F}(Q_3) = \mathbb{P}(i^* S_{2,4}) \xrightarrow{p} Q_3$$

als projektives Bündel auffassen.

Man geht nun wie im Beweis zu Lemma 3.6 vor und erhält eine exakte Sequenz

$$0 \to q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(l) \to p^* E \to q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-l) \otimes p^* \mathcal{O}_{Q_3}(-1) \to 0$$

Sei h das Erzeugende der Cohomologie von $\Sigma_1(Q_3) \cong \mathbb{P}_3$ und $H^*(Q_3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\eta \oplus \mathbb{Z}\gamma \oplus \mathbb{Z}\varepsilon$ mit $\eta^2 = 2\gamma$ und $\eta\gamma = \varepsilon$.

Nach Leray-Hirsch ist $H^*(\mathbb{F}(Q_3); \mathbb{Z})$ freier $H^*(Q_3; \mathbb{Z})$-Modul mit Basis 1, q^*h.

Zur Abkürzung sei $B = q^*h$ und $C = p^*\eta$ gesetzt.

BEHAUPTUNG. $B \cdot C^3 = B^2 \cdot C^2 = 2$.

BEWEIS.

1) Sei $\Lambda_0 \subset Q_4$ eine β-Ebene, $H \subset \mathbb{P}_5$ eine Hyperbene mit $Q_3 = Q_4 \cap H$.

Dann ist $E_0 = \{\Lambda \cap H : \Lambda \in \Sigma_{2,+} \text{ und } \Lambda \cap \Lambda_0 \neq \emptyset\}$ eine Ebene in $\Sigma_1(Q_3) \cong \mathbb{P}_3$.
Man kann das folgendermaßen einsehen:
Sei $E \subset \mathbb{P}_3$ die Ebene, die Λ_0 definiert.
Dann ist $\Lambda_0 = \{L \in \mathbb{G}_{1,3} : L \subset E\}$, und für jede α-Ebene $\mathbb{G}(x) \in \Sigma_{2,+}$ ist

$$\mathbb{G}(x) \cap \Lambda_0 = \{L \in \mathbb{G}_{1,3} : x \in L \subset E\}.$$

Also ist $E_0 \cong \{\mathbb{G}(x) \in \Sigma_{2,+} : x \in E\}$, und das ist eine Ebene.

Ein Punkt $x_0 \in Q_3$ kann als Element $L_0 \in \mathbb{G}_{1,3}$ aufgefaßt werden. Wählt man x_0 so, daß $x_0 \notin \Lambda_0$ ist, so bedeutet das, daß $L_0 \not\subset E$ ist.

Daher folgt:

$$\begin{aligned} q^{-1}(E_0) \cap p^{-1}(x_0) &= \{(x, L) \in \mathbb{F}(Q_3) : x = x_0,\ L \in E_0\} \\ &\cong \{\Lambda \in \Sigma_{2,+} : \Lambda \cap \Lambda_0 \neq \emptyset \text{ und } L_0 \in \Lambda\} \\ &\cong \{x \in \mathbb{P}_3 : x \in E \text{ und } x \in L_0\} = E \cap L_0 \end{aligned}$$

ist eine 1-punktige Menge.

Also ist $q^*h \cdot p^*\varepsilon = 1$ und $B \cdot C^3 = 2$.

2) $\Gamma_{x_0} = \{\Lambda \cap H : \Lambda \in \Sigma_{2,+} : L_0 \in \Lambda\} \cong \{x \in \mathbb{P}_3 : x \in L_0\}$ ist eine Gerade in $\Sigma_1(Q_3)$.

Wählt man eine Gerade $L_1 \subset Q_3$ mit $x_0 \notin L_1$, so folgt:

$$\begin{aligned} & q^{-1}(\Gamma_{x_0}) \cap p^{-1}(L_1) = \\ & = \{(x, L) \in \mathbb{F}(Q_3) \colon x \in L_1 \cap L \text{ und } x_0 \in L\} \\ & = \{(x, \overline{xx_0}) \colon x \in L_1 \text{ und } \overline{xx_0} \subset Q_3\} \,. \end{aligned}$$

Sei P_0 die von x_0 und L_1 aufgespannte Ebene in $\mathbb{P}_4$.
Dann ist $P_0 \cap Q_3 = L_1 \cup L_1'$ mit $x_0 \in L_1'$ und $L_1 \cap L_1' = \{y_0\}$.
$q^{-1}(\Gamma_{x_0}) \cap p^{-1}(L_1) = \{(y_0, \overline{y_0 x_0})\}$ ist daher ebenfalls eine 1-punktige Menge.
Wie oben ergibt sich damit: $q^* h^2 \cdot p^* \gamma = 1$, also $B^2 \cdot C^2 = 2$.
Es gibt ganze Zahlen λ, μ, so daß

$$\lambda B^2 + \mu BC = C^2 \in H^4(\mathbb{F}(Q_3); \mathbb{Z}) \quad \text{ist} .$$

Daraus folgt:

$$C^2 B^2 = B^4 + B^3 C \,, \qquad C^4 = B^2 C^2 + BC^3$$

und

$$BC^3 = \lambda B^3 C + \mu B^2 C^2$$

also $\mu + \lambda = 0$ und $\mu^2 - \mu + \lambda = 0$.
Damit ist $C^2 = -2B^2 + 2BC$.
Weiter ist

$$\begin{aligned} c_2(E) \cdot C^2 &= 2c_2(p^*E) \\ &= 2[lq^*h(-lq^*h - p^*\eta)] \\ &= -2l^2 B^2 - 2lBC \,. \end{aligned}$$

Daraus folgt: $c_2(E) = l^2 = -l$.

1. Fall. $l = 0$.
Man wende den Bildgarbenfunktor auf die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}(Q_3)} \to p^*E \to q^*\mathcal{O}_{Q_3}(-1) \to 0 \quad \text{an} .$$

Da $p_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(Q_3)} = \mathcal{O}_{Q_3}$ und $R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathbb{F}(Q_3)} = 0$ ist, ist die folgende Sequenz exakt:

$$0 \to \mathcal{O}_{Q_3} \to E \to \mathcal{O}_{Q_3}(-1) \to 0 \,.$$

Also spaltet E.

2. Fall. $l = -1$.

Auf dem gleichen Wege wie eben erhält man die exakte Sequenz

$$0 \to p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-1) \to E \to \big(p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)\big) \otimes \mathcal{O}_{Q_3}(-1) \to 0$$

Da $p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-1) = 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} E &\cong \big(p_* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)\big) \otimes \mathcal{O}_{Q_3}(-1) \\ &\cong \big(p_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(i^* S_{2,4})}(1)\big) \otimes \mathcal{O}_{Q_3}(-1) \\ &\cong (i^* S^*_{2,4}) \otimes \mathcal{O}_{Q_3}(-1) \\ &\cong i^* S_{2,4}\,. \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung.

Der Beweis des Theorems ist damit abgeschlossen.

LITERATUR

[1] W. Barth - A. van de Ven, *On the Geometry in Codimension 2 of Grassmann Manifolds*, in: *Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, **412** (1974), pp. 1-35.

[2] W. Barth - A. van de Ven, *Fano Varieties of lines on hypersurfaces*, Arch. Math., **31** (1978), pp. 96-104.

[3] G. Elencwajg, *Les fibrés uniformes de rang* 3 *sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ *sont homogènes*, Math. Ann., **231** (1978), pp. 217-227.

[4] K. Fritzsche, *Holomorphe Vektorbündel auf komplex-projektiven Quadriken*, Habilitationsschrift, Universität Göttingen, 1981.

[5] Ph. Griffiths - J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[6] P. E. Newstead - R. L. E. Schwarzenberger, *Reducible vector bundles on a quadric surface*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **60** (1964), pp. 421-424.

[7] Ch. Okonek - M. Schneider - H. Spindler, *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[8] R. L. E. Schwarzenberger, *Vector bundles on algebraic surfaces*, Proc. London Math. Soc., (3) **11** (1961), pp. 601-622.

[9] R. L. E. Schwarzenberger, *Vector bundles on the projective plane*, Proc. London Math. Soc., (3) **11** (1961), pp. 623-640.

[10] R. L. E. Schwarzenberger, *Reducible vector bundles on a quadric surface*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **58** (1962), pp. 209-216.

Habilitationsschrifts
Universität Göttingen
Freiburg, W. Germany