ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIUSEPPE TOMASSINI

Sur les algèbres $A^0(\overline{D})$ et $A^\infty(\overline{D})$ d'un domaine pseudoconvexe non borné

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 10, nº 2 (1983), p. 243-256

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1983_4_10_2_243_0>

Sur les algèbres $A^0(\bar{D})$ et $A^\infty(\bar{D})$ d'un domaine pseudoconvexe non borné.

GIUSEPPE TOMASSINI

Soient $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine qui sera toujours supposé à bord C^∞ et $\mathcal{O}(D)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur D. Notons $A^0(\bar{D})$ et $A^\infty(\bar{D})$ respectivement les algèbres de Fréchet $\mathcal{O}(D) \cap C^0(D)$ et $\mathcal{O}(D) \cap C^\infty(\bar{D})$.

Le but de ce travail est d'étendre à ces algèbres certains des résultats démontrés dans [16], [8], [4], où D est supposé borné et pseudoconvexe.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés à l'étude de l'équation $\bar{\partial} u = f$ où $f \in C^k_{(p,q)}(\bar{D})$, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$ et $\bar{\partial} f = 0$.

On démontre d'abord que si D est strictement pseudoconvexe il existe une suite exhaustive $\{K_m\}$ de compacts de $\bar{D}$ à bord C^∞ et strictement pseudoconvexes (Proposition 1).

Ensuite, à l'aide d'un procédé classique, en utilisant les résultats de [12], [17], [9] et le théorème d'approximation de Kerzman ([11]) on démontre que cette équation a une solution $u \in C^{k+\frac{1}{2}}_{(p,q-1)}(\bar{D})$ (Théorème 3).

Comme application à la théorie des fonctions on obtient alors les résultats suivants (Théorèmes 4, 5, 6):

(1) les spectres maximaux de $A^0(\bar{D})$ et de $A^\infty(\bar{D})$ munis de la topologie de Gelfand sont homéomorphes à $\bar{D}$;

(2) tous les idéaux maximaux fermés de $A^\infty(\bar{D})$ sont de type fini tandis que ceux de $A^0(\bar{D})$ sont de type fini si et seulement si ils correspondent aux points de D;

(3) soit V un sous-ensemble analytique (complexe) d'un voisinage de $\bar{D}$, lisse aux points du bord bD de D et « regulièrement séparés » de bD (§ 3); alors si $f_1, \ldots, f_k$ engendrent le faisceau $\mathfrak{J}_V$ des idéaux de V au voisinage de $\bar{D}$, toute fonction $f \in A^\infty(\bar{D})$ nulle sur V est de la forme $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in A^\infty(\bar{D})$.

Pervenuto alla Redazione il 27 Luglio 1982.

Je tiens à remercier ici E. De Giorgi et P. de Bartolomeis qui par leurs observations m'ont permis de surmonter certaines difficultés techniques.

1. – Approximation de polyèdres analytiques.

1) Soit U un domaine de $\mathbb{C}^n$. Un *polyèdre analytique* de U est un sousensemble relativemente compact dans U

$$D = \bigcap_{j=1}^{k} \{z \in U : \varrho_j(z) < 0\},$$

où $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ sont des fonctions C^∞ sur U qui vérifient la condition suivante: si $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant k$ et $\varrho_{j_1}(z) = \ldots = \varrho_{j_q}(z) = 0$, alors $(d\varrho_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\varrho_{j_q})(z) \neq 0$.

En particulier:

(a) pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant k$, l'hypersurface S_j d'équation $\varrho_j = 0$ est lisse;

(b) $\bar{D} = \{z \in U : \varrho_j(z) \leqslant 0, 1 \leqslant j \leqslant k\}$;

(c) l'ensemble $S = \operatorname{Sing}(bD)$ des points où bD n'est pas lisse coïncide avec $\bigcap\limits_{j \neq l} S_j \cap S_l$, $1 \leqslant j, l \leqslant k$.

Un polyèdre analytique D est dit *pseudoconvexe* (respectivement *strictement pseudoconvexe*) si les hypersurfaces $S_1, \ldots, S_k$ sont pseudoconvexes (respectivement strictement pseudoconvexes).

LEMME D'APPROXIMATION. *Soient $D \subset U$ un polyèdre analytique et W un voisinage de $S = \operatorname{Sing}(bD)$. Alors*

(i) *il existe un domaine $D' \subset D$ à bord C^∞ tel que $bD' \setminus bD \subset W$;*

(ii) *si D est strictement pseudoconvexe, D' l'est aussi.*

PREUVE. (1) Supposons d'abord $k = 2$ et D défini par ϱ_1, ϱ_2. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$W_\varepsilon = \{z \in U : |\sup[\varrho_1(z), \varrho_2(z)]| < \varepsilon\} \subset W$$

et soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\chi(t) \geqslant 0$, $\chi(t) = 0$ pour $|t| \geqslant \varepsilon$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)\, dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t\chi(t)\, dt = 0.$$

La fonction $F = \varrho_1 \boxtimes \varrho_2$ définie par

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sup\,[\varrho_1(z),\ \varrho_2(z) + t]\chi(t)\,dt \\ &= \varrho_1(z) \int_{-\infty}^{\varrho_1(z)-\varrho_2(z)} \chi(t)\,dt + \int_{\varrho_1(z)-\varrho_2(z)}^{+\infty} \chi(t)[\varrho_2(z) + t]\,dt \end{aligned}$$

est C^∞ sur U et vérifie $\{F < 0\} \subset D$ et $\{F = 0\} \setminus bD \subset W_\varepsilon$.

De plus $dF = \alpha\, d\varrho_1 + \beta\, d\varrho_2$ où

$$\alpha(z) = \int_{-\infty}^{\varrho_1(z)-\varrho_2(z)} \chi(t)\,dt\,, \qquad \beta(z) = \int_{\varrho_1(z)-\varrho_2(z)}^{+\infty} \chi(t)\,dt\,.$$

Il s'ensuit que si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors pour tout $z \in W_\varepsilon$ on a $dF(z) \neq 0$, c'est à dire que $F = 0$ est une hypersurface lisse.

Soit D' l'ouvert défini par $F < 0$. Le calcul de la forme de Levi de F en un point $z \in bD'$ donne

$$L_z(F) = \alpha(z)L_z(\varrho_1) + \beta(z)L_z(\varrho_2) + \chi\big(\varrho_1(z) - \varrho_2(z)\big)|\,\partial\varrho_1(z) - \partial\varrho_2(z)|^2\,,$$

où l'on a posé $\partial\varrho_s(z) = \sum_{j=1}^{n} (\partial\varrho_s/\partial z_j)(z)u^j$, $s = 1, 2$.

Comme D est strictement pseudoconvexe, on peut supposer $L_z(\varrho_1)$ et $L_z(\varrho_2)$ définies positives pour tout z dans un voisinage de bD, ce qui implique que $L_z(F) > 0$ pour tout $z \in bD'$. Ceci prouve l'affirmation (ii).

(2) Pour traiter le cas général on définit par recurrence la fonction $\varrho_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \varrho_k$ en posant

$$(\varrho_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \varrho_k)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sup\,[(\varrho_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \varrho_{k-1})(z),\ \varrho_k(z) + t]\chi(t)\,dt$$

et on procède comme ci-dessus.

Remarques. (1) Si D est convexe ou strictement convexe, D' a la même propriété.

(2) Tout polyèdre analytique D strictement pseudoconvexe (respectivemente convexe) est l'intersection d'un nombre fini de domaines bornés à bord C^∞ et strictement pseudoconvexes (respectivement convexes)

2) Dans la suite on notera D un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord C^∞ défini par une fonction $\varrho \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$:

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n: \varrho(z) < 0\} \quad \text{avec} \quad d\varrho \neq 0 \ \text{ sur } \ bD .$$

Soit $\{K_m\}$ une suite croissante de compacts de $\overline{D}$. On dit que $\{K_m\}$ est une suite *exhaustive* si les conditions suivantes sont remplies:

(1) $\overline{D} = \bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} K_m$;

(2) $bK_m \cap bK_{m'} \subset bD$ pour tout $m, m' \in \mathbb{N}$;

(3) pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'intérieur $(K_m \cap bD)^0$ de $K_m \cap bD$ dans bD est contenu dans $K_{m+1} \cap bD$.

PROPOSITION 1. *Supposons que D soit strictement pseudoconvexe. Alors il existe une suite exhaustive $\{K_m\}$ de compacts de $\overline{D}$ à bord C^∞ et strictement pseudoconvexes. Si D est convexe les K_m sont convexes.*

PREUVE. C'est une conséquence immédiate du lemme d'approximation. En effet soit $B(r)$ la boule de centre un point fixe, $z^0 \in bD$, et de rayon r, et soit $\{r_m\}$ une suite croissante et non bornée de $\mathbb{R}^+$ telle que bD et $bB(r_m)$ se rencontrent transversalement le long de leur intersection. Il suffit alors d'appliquer pour tout m le lemme d'approximation à la composante connexe de $\overline{D} \cap \overline{B}(r_m)$ qui contient le point z^0.

Dans la suite on utilisera le lemme suivant:

LEMME 2. *Si D est strictement pseudoconvexe alors $\overline{D}$ admet un système fondamental de voisinages de Stein.*

PREUVE. Soit U un voisinage ouvert de $\overline{D}$ et soit $\{G_m\}$ une suite exhaustive de bD où les G_m sont des compacts de bD tels que: $G_m \subset \mathring{G}_{m+1}$ et $\bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} G_m = bD$. Soit ϱ une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}^n$ qui définit D. Considérons la fonction $\varrho' = \exp[c\varrho] - 1$; si c est assez grand, cette fonction est strictement plurisous harmonique sur un voisinage ouvert $U_1 \subset\subset U$ de G_1 dans $\mathbb{C}^n$ et elle est encore une fonction de définition pour D. Soit $U'_1 \subset\subset U_1$ un voisinage ouvert de G_1 dans $\mathbb{C}^n$ et soit $\chi_1 \in C_0^\infty(U_1)$ positive et telle que $\chi_1 \neq 0$ sur $\overline{U}'_1$. Soient $\varepsilon_1 > 0$ et D_1 le sous-ensemble où $\varrho_1 - \varepsilon_1\chi_1 < 0$; on vérifie que $D_1 \subset D \cap U_1$, $bD_1 \cap G_1 = \emptyset$, donc si ε_1 est choisi de telle sorte que $\varrho_1 - \varepsilon_1\chi_1$ soit strictement plurisous harmonique sur U_1, alors D_1 est un ouvert de Stein, $D \subset D_1$, et $D_1 \subset U$.

Envisageons maintenant la fonction $\varrho_2 = \exp[c\psi_1] - 1$ où $\psi_1 = \varrho_1 - \varepsilon_1\chi_1$ et choisissons c de telle sorte que ϱ_2 soit plurisous harmonique sur un voisinage ouvert $U_2 \subset\subset U$ de $G_2' = (G_2 \setminus bD \cup D_1') \cup (U_1 \cap bD_1)$. Soient $U_2' \subset\subset U_2$ un voisinage ouvert de G_2' et $\chi_2 \in C_0^\infty(U_2)$, etc. .... On obtient ainsi une suite croissante $\{D_m\}$ d'ouverts de Stein de U tels que $D \subset D_m$, pour tout m. La réunion D' des D_m est alors eu égard au théorème de Behnke et Stein ([2]) un domaine d'holomorphie et de plus, par construction, on a $\bar{D} \subset D' \subset U$.

2. – L'équation $\bar\partial u = f$.

1) Soit D un domaine de $\mathbf{C}^n$ à bord C^∞. Notons $C^k_{(p,q)}(\bar{D})$ l'espace de Fréchet des (p, q)-formes différentielles de classe C^k sur $\bar{D}$, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$.

THÉORÈME 3. *Soit* $f \in C^k_{(p,q)}(\bar{D})$, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$, *telle que* $\bar\partial f = 0$. *Alors*

(i) *si D est strictement pseudoconvexe l'équation $\bar\partial u = f$ a une solution* $u \in C^{k+\frac{1}{2}}_{(p,q-1)}(\bar{D})$;

(ii) *si D est convexe et $k = +\infty$ l'équation $\bar\partial u = f$ a une solution* $u \in C^\infty_{(p,q-1)}(\bar{D})$.

PREUVE. (1) Supposons d'abord D strictement pseudoconvexe et $q > 1$. Soit $\{K_m\}$ une suite exhaustive de $\bar{D}$ comme dans l'énoncé de la proposition 1. Pour tout $m \in \mathbf{N}$ il existe $u_m \in C^{k+\frac{1}{2}}_{(p,q-1)}(\bar{D})$ telle que $\bar\partial u_m = f$ dans un voisinage de K_m dans $\bar{D}$ ([17]). On peut choisir les u_m de telle sorte que $u_{m+1} = u_m$ dans un voisinage de K_m dans $\bar{D}$. En effet supposons cette propriété vérifiée pour $u_1, \ldots, u_m$ et soit $v \in C^{k+\frac{1}{2}}_{(p,q-1)}(\bar{D})$ telle que $\bar\partial v = f$ sur un voisinage de K_{m+1} dans $\bar{D}$. On a $\bar\partial(v - u_m) = 0$ et donc il existe $w \in C^{k+\frac{1}{2}}_{(p,q-2)}(\bar{D})$ telle que $u_m - v = \bar\partial w$ (dans un voisinage de K_m dans $\bar{D}$). Il suffit alors de poser $u_{m+1} = v + \bar\partial w$ pour avoir $u_{m+1} = u$ et $\bar\partial u_{m+1} = f$ dans un voisinage de K_{m+1}.

(2) Maintenant soit $q = 1$ (et D strictement pseudoconvexe). On emploie la même construction que ci-dessus pour obtenir les fonctions $u_1, \ldots, u_m, \ldots$ mais cette fois-ci on exige que ces fonctions vérifient les inégalités suivantes:

$$(a) \quad \|u_{m+1} - u_m\|^{(k)}_{K_m} = \sup_{K_m} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha u_{m+1} - D^\alpha u_m| < 2^{-m}, \text{ si } k < +\infty;$$

$$(b) \quad \|u_{m+1} - u_m\|^{(m)}_{K_m} < 2^{-m}, \text{ si } k = +\infty.$$

Supposons alors que $u_1, \ldots, u_m$ vérifient (a) ou (b) et soit $v \in C^k_{(p,0)}(\bar{D})$ telle que $\bar\partial v = f$ au voisinage de K_{m+1} (dans $\bar{D}$). Au voisinage de K_m la différence $v - u_m$ est holomorphe. Comme K_m est strictement pseudoconvexe, le théorème d'approximation de Kerzman ([11]) assure qu'il existe $v' \in C^{\infty}_{(p,0)}(\mathbf{C}^n)$, holomorphe au voisinage de K_m qui vérifie les inégalités

$$\|v' - (u_m - v)\|^{(k)}_{K_m} < 2^{-m}\,, \qquad \text{si } k < +\infty$$

et

$$\|v' - (u_m - v)\|^{(m)}_{K_m} < 2^{-m}\,, \qquad \text{si } k = +\infty\,.$$

En fait ici on utilise la « version C^k » du théorème d'approximation de Kerzman qui peut se démontrer de la même façon grâce aux résultats de [17].

Choisissons maintenant r_m, r'_m et $\varepsilon > 0$ de telle sorte que: $r_m < r'_m$, $K_m \subset \{\varrho < \varepsilon\} \cap B(r'_m) = V_{\varepsilon,m}$, que l'hypersurface $\varrho = \varepsilon$ soit strictement pseudoconvexe aux points de $B(r_{m+2})$ et que v' soit holomorphe sur $V_{\varepsilon,m}$. Par construction $V_{\varepsilon,m}$ est de Runge dans $\{\varrho < \varepsilon\} \cap B(r_{m+2})$ donc il existe w, holomorphe dans un voisinage de K_{m+1} dans $\mathbf{C}^n$, qui approche v' et par conséquent $u_m - v$ sur K_m autant qu'on veut. Il s'ensuit que la $(p, 0)$-forme $u_{m+1} = w + v$ vérifie $\bar{\partial} u_{m+1} = f$ dans un voisinage de K_{m+1} ainsi que les inégalités (a), (b).

La série $\sum\limits_{m=2}^{+\infty} (u_m - u_{m-1})$ est alors convergente dans $C^k(\bar{D})$, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. D'autre part, si $K \subset \bar{D}$ est un compact, alors, pour m assez grand, les formes $u_m - u_{m-1}$ sont holomorphes sur $\mathring{K}$: il s'ensuit que la somme u de la série est de classe C^k dans $\bar{D}$, $0 \leqslant k \leqslant +\infty$, et C^∞ dans D. Finalement dans chaque K_m on a $u = u_m + h_m$, où h_m est holomorphe d'où que $\bar{\partial} u = f$.

Ceci achève la démostration de (i).

(3) Lorsque D est convexe et $k = +\infty$ on procède de la même façon en envisageant une suite exhaustive $\{K_m\}$ de $\bar{D}$ où les compacts K_m sont des convexes; au lieu du théorème d'approximation de Kerzman il suffit alors d'utiliser le fait élémentaire suivant: si $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ est un domaine convexe borné, alors l'algèbre $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$ est dense dans $C^k(\bar{\Omega})$ pour la norme C^k.

REMARQUES. (1) En utilisant le résultat de Øvrelid ([15]) on peut aussi démontrer que si D est strictement pseudoconvexe et $f \in C^{\infty}_{(p,q)}(D)$ et localement bornée et $\bar{\partial}$-fermée alors l'équation $\bar{\partial} u = f$ a une solution u dans $C^{\infty}_{(p,q-1)}(D) \cap C^{0}_{(p,q-1)}(\bar{D})$.

(2) Kohn m'a comuniqué que si $k = +\infty$ et D est strictement pseudoconvexe la régularisation elliptique de [13], [5] s'applique même si D n'est pas borné pour montrer que la solution u de $\bar{\partial} u = f$ trouvée par Hörmander ([10]) est en fait C^∞ jusqu'au bord.

3. – Applications aux algèbres $A^0(\bar{D})$ et $A^\infty(\bar{D})$.

1) Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert à bord C^∞. Pour tout sous-ensemble $U \subset \bar{D}$, ouvert dans la topologie relative de $\bar{D}$, posons

$$\mathcal{O}^{(k)}_{\bar{D}}(U) = \mathcal{O}(\mathring{U}) \cap C^k(\mathring{U} \cup (bD \cap U)), \qquad 0 \leqslant k \leqslant +\infty,$$

$\mathring{U}$ étant l'intérieur de U comme sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$; $U \mapsto \mathcal{O}^{(k)}_{\bar{D}}(U)$ définit un faisceau sur $\bar{D}$ noté $\mathcal{O}^{(k)}_{\bar{D}}$.

Envisageons $A^0(\bar{D})$, l'algèbre des sections globales de $\mathcal{O}^{(0)}_{\bar{D}}$. Munie de la famille des semi-normes $\|f\|_K = \sup_K |f|$, $K \subset \bar{D}$ compact, $A^0(\bar{D})$ est une algèbre de Fréchet. Soit $M = M(\bar{D})$ le spectre maximal de $A^0(\bar{D})$ muni de la topologie de Gelfand ([7]). M_0 s'identifie à l'ensemble des idéaux maximaux fermés de $A^0(\bar{D})$. En particulier M contient les points de $\bar{D}$ c'est à dire les idéaux maximaux $M_a = \{f \in A^0(\bar{D}) \colon f(a) = 0\}$, $a = (a_1, \ldots, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

THÉORÈME 4. *Supposons D pseudoconvexe. Alors*

(i) *$a \to M_a$ est un homéomorphisme de $\bar{D}$ sur M_0. Si D est strictement pseudoconvexe alors;*

(ii) *un idéal M_a est de type fini si et seulement si $a \in D$ et dans ce cas il est engendré par $z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n$.*

PREUVE. L'affirmation (i) résulte de [8] compte tenu du fait que $M(\bar{D})$ s'identifie à la limite inductive $\varinjlim M(K)$ lorsque K varie dans la famille des compacts de $\bar{D}$.

Pour démontrer (ii) supposons que D soit strictement pseudoconvexe et notons $\tilde{M}$ le faisceau des idéaux de $\{a\}$, $a \in \bar{D}$. Si $a \in D$, l'homomorphisme $\varphi \colon (\mathcal{O}^{(0)}_{\bar{D}})^{\oplus n} \to \tilde{M}$ défini par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(z_j - a_j)$ est surjectif; un raisonnement classique montre alors qu'il existe une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{O}^{(0)\oplus p_n}_{\bar{D}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{(0)\oplus p_1}_{\bar{D}} \to \mathcal{O}^{(0)\oplus n}_{\bar{D}} \xrightarrow{\varphi} \tilde{M} \to 0\,.$$

En découpant $(*)$ en suites exactes courtes et en utilisant le fait que $H^q(\bar{D}, \mathcal{O}^{(0)}_{\bar{D}}) = 0$ pour tout $q \geqslant 1$ (th. 3) on prouve que $H^1(\bar{D}, \operatorname{Ker}\varphi) = 0$ d'où que M_a est engendré par $z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n$.

Soit $a \in bD$. Les germes des éléments de M_a engendrent l'idéal $\tilde{M}_a$ de $\mathcal{O}^{(0)}_{\bar{D},a}$ ([16]) donc pour terminer la démonstration de (ii) il suffit de prouver que avec nos hypothèses $\tilde{M}_a$ ne peut pas être de type fini. Ceci peut se démontrer directement en se ramenant au cas d'une variable (bD étant localement biholomorphe à un convexe).

2) Passons maintenant à l'algèbre $A^\infty(\overline{D})$ dont la topologie de Fréchet est définie par la famille des semi-normes $p_{m,K}(f) = \sup_K \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha f|$ ($K \subset \overline{D}$ compact, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$). Notons $M_\infty = M_\infty(\overline{D})$ le spectre maximal de $A^\infty(\overline{D})$, muni de la topologie de Gelfand.

THÉORÈME 5. – *Supposons D pseudoconvexe. Alors*

(i) *$a \mapsto M_a$ est un homéomorphisme de $\overline{D}$ sur $M_\infty(\overline{D})$.*

(ii) *Si D est strictement pseudoconvexe alors tout idéal M_a est de type fini et engendré par $z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n$.*

PREUVE. La seule chose à prouver est que M_a est engendré par $z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n$ même quand $a \in bD$ (D étant strictement pseudoconvexe). C'est vrai pour $n = 1$. Supposons donc $n > 1$ et remarquons que si L est un hyperplan complexe d'équation $l(z) = 0$ qui n'est pas tangent à bD et si $L \cap D$ est à bord C^∞ alors l'homomorphisme de restriction $A^\infty(\overline{D}) \to A^\infty(L \cap \overline{D})$ est surjectif. En effet l'homomorphisme de restriction r: $\mathcal{O}_{\overline{D}}^{(\infty)} \to \mathcal{O}_{L\cap\overline{D}}^{(\infty)}$ est surjectif et $\operatorname{Ker} r$ est engendré par $l(z)$ ([4], Lemma 2); le théorème 3 implique alors que $H^1(\overline{D}, \operatorname{Ker} r) = 0$ et donc que $A^\infty(\overline{D}) \to A^\infty(L \cap \overline{D})$ est surjectif.

Cela étant on achève la démonstration par récurrence.

Signalons encore pour terminer deux autres conséquences du théorème 3, à savoir:

(1) si D est strictement pseudoconvexe, alors pour tout $a \in bD$ il existe $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^\infty(\overline{D} \setminus \{a\})$ telle que $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$;

(2) si de plus $H^2(\overline{D}, \mathbb{Z}) = 0$, alors pour tout $a \in bD$ il existe $f \in A^\infty(\overline{D})$ nulle au point a et telle que $f(z) \neq 0$ pour $z \neq a$.

3) Supposons maintenant que V soit un sous-ensemble analytique de $\overline{D}$ (i.e. d'un voisinage de $\overline{D}$) et notons $\mathcal{J}_V$ le faisceau des idéaux de V. Si le rang de $\mathcal{J}_V$ reste borné sur $\overline{D}$ et si D est strictement pseudoconvexe, alors un théorème de Forster et Ramspott ([6], [3]) et le lemme 2 assurent qu'il existe un nombre fini de fonctions $f_1, \ldots, f_k$ qui engendrent $\mathcal{J}_V$ au voisinage de $\overline{D}$.

Soit $\overline{V} = V \cap \overline{D}$. Notons $\mathcal{J}_{\overline{V}}^{(\infty)}$ le faisceau de germes de $\mathcal{O}_{\overline{D}}^{(\infty)}$ nuls sur V et posons $I^\infty(\overline{V}) = \mathcal{J}_{\overline{V}}^{(\infty)}(\overline{D})$.

Dans ce qui suit nous allons démontrer que si D est strictement pseudoconvexe, et si V est lisse aux points de bD et régulièrement séparé de bD (selon la définition ci-dessous) alors $f_1, \dots, f_k$ engendrent l'idéal $I^\infty(\bar{V})$.

Lorsque D est borné ce théorème a été prouvé dans [4] et la démonstration qu'on va donner ici suit le même schéma.

Avant de donner l'énoncé précis du théorème nous allons rappeler deux définitions.

On dit que V et bD sont *régulièrement séparés* si pour tout point $z^0 \in bD \cap V$ il existe $N \in \mathbf{N}$, $c > 0$ et un voisinage U de z^0 tels que

$$\operatorname{dist}(z, bD \cap V \cap U)^N \leqslant c \operatorname{dist}(z, V \cap U)$$

pour tout $z \in bD \cap U$ ([4]).

On dit que V et bD sont $\mathbf{C}$-*transverses* si $V \cap bD$ est lisse, de dimension réelle $2d-1$, $d = \dim_{\mathbf{C}} V$, et si pour tout point $p \in V \cap bD$ on a $T_p^{\mathbf{C}}(V \cap bD) = T_p^{\mathbf{C}}(V) \cap T_p^{\mathbf{C}}(bD)$, $T_p^{\mathbf{C}}(\cdot)$ étant l'espace complexe tangent en p.

Remarquons que cette propriété implique la précédente.

Le théorème qu'on veut prouver est le suivant:

THÉORÈME 6. *Supposons que D soit strictement pseudoconvexe et que V soit un sous-ensemble analytique de $\bar{D}$, lisse aux points de bD et régulièrement séparé de bD.*

Soient $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(\bar{D})$ qui engendrent $\mathfrak{J}_V$ au voisinage de $\bar{D}$. Alors toute fonction $f \in A^\infty(\bar{D})$ nulle sur V peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in A^\infty(\bar{D})$.

Rappelons les pas essentiels de la démonstration de [4] (lorsque D est borné).

(I) L'énoncé est vrai pour les espaces linéaires. Pour le démontrer on suppose d'abord que V soit l'hyperplan d'équation $z_n = 0$. Alors f peut se mettre sous la forme $gz_n + h\bar{z}_n$ où g et h sont dans $C^\infty(\bar{D})$.

Comme pour tout $l \geqslant 1$ on a $\partial^l f/\partial \bar{z}_n^l|V = 0$, pour tout $l \geqslant 1$ il existe u, $v \in C^\infty(\bar{D})$ tels que $f = z_n u + \bar{z}_n^l v$. Il s'ensuit que $z_n^{-1} f$ est C^∞ sur $\bar{D}$ et donc que $z_n^{-1} f \in A^\infty(\bar{D})$.

Compte tenu de ce résultat le cas où $\dim_{\mathbf{C}} V < n-1$ se ramène par récurrence à prouver que si V est l'hyperplan $z_n = 0$ la restriction $A^\infty(\bar{D}) \to \to A^\infty(\bar{V})$ est un homomorphisme surjectif.

Pour cela notons $\pi: \mathbf{C}^n \to V$ la projection naturelle et pour tout $f \in A^\infty(\bar{V})$ soient $\tilde{f}: V \to \mathbf{C}$ une extension C^∞ de f et $\tilde{F} = \tilde{f} \circ \pi|\bar{D}$. On a:

$\tilde{F} \in C^\infty(\bar{D})$, $\bar{\partial}\tilde{F} = \sum_{j=1}^{n} b_j d\bar{z}^j$ où $\partial^l b_j / \partial \bar{z}_n^l | V = 0$ pour tout $l \geqslant 1$ et $j = 1, \ldots, n$ ($z_n = 0$ étant l'équation de V).

Il découle de ce qu'on vient de démontrer que $z_n^{-1}\,\bar{\partial}\tilde{F} \in C^\infty(\bar{D})$ et donc que $z_n^{-1}\,\bar{\partial}\tilde{F} = \bar{\partial}u$, $u \in C^\infty(\bar{D})$, eu égard au théorème de Kohn ([12]). La fonction $F = \tilde{F} - z_n u$ est l'extension de f cherchée.

(II) Considérons maintenant l'application holomorphe $F\colon D' \to \mathbf{C}^k$, où $F(z) = (f_1(z), \ldots, f_k(z))$ et $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(D')$, D' étant un voisinage de $\bar{D}$. Soit $\Gamma \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$ le graphe de F. Considérons un domaine B de $D' \times \mathbf{C}^k$, borné et à bord C^∞ avec les propriétés suivantes: $B \cap (D' \times \{0\}) = D$ et Γ rencontre bB transversalement. Comme $f_1, \ldots, f_k$ engendrent $\mathfrak{J}_V$ et V est lisse aux points de bD, Γ et D' se coupent transversalement le long de bB. Soient $Z = D' \cup \Gamma$ et $\bar{Z} = (D' \cup \Gamma) \cap \bar{B}$ et soit $f \in A^\infty(\bar{D})$ telle que $f|_V = 0$. Considérons la fonction $\tilde{f}\colon \bar{Z} \to \mathbf{C}$ définie par les conditions: $\tilde{f} = f$ sur D et $\tilde{f} = 0$ ailleurs. Puisque Γ et D se coupent transversalement le long de bB, f est holomorphe sur Z et C^∞ sur $\bar{Z}$ i.e. $\tilde{f} \in A^\infty(\bar{Z})$. Alors compte tenu de (I) et du fait que Γ est holomorphiquement équivalent à un espace linéaire, la démonstration du théorème de factorisation est ramenée à prouver que

(III) la restriction $A^\infty(\bar{B}) \to A^\infty(\bar{Z})$ est un homomorphisme surjectif ([4], Th. 4).

L'essentiel de cette méthode de démonstration peut utilement s'exprimer dans le théorème suivant:

THÉORÈME 7. *Soit $D \subset \mathbf{C}^n$ un ouvert borné et strictement pseudoconvexe et V un sous-ensemble analytique de $\bar{D}$. Soient $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(\bar{D})$ qui engendrent $\mathfrak{J}_V$ au voisinage de $\bar{D}$ et supposons que:*

(i) *$f_1, \ldots, f_k$ engendrent $\mathfrak{J}_{\bar{V}}^{(\infty)}$;*

(ii) *l'homomorphisme de restriction $\mathcal{O}_{\bar{D}}^{(\infty)} \to \mathcal{O}_{\bar{V}}^{(\infty)}$ est surjectif.*

Alors $f_1, \ldots, f_k$ engendrent l'idéal $I^\infty(\bar{V})$.

PREUVE. (1) Compte tenu de la construction (II) il suffit de démontrer que l'homomorphisme $A^\infty(\bar{B}) \to A^\infty(\bar{Z})$ est surjectif.

Pour cela on va démontrer d'abord que $\mathcal{O}_{\bar{B}}^{(\infty)} \to \mathcal{O}_{\bar{B},z}^{(\infty)}$ est surjectif. Soient $z \in \bar{Z} \cap bB$ et $f \in \mathcal{O}_{\bar{Z},z}^{(\infty)}$. On peut supposer $f|_V = 0$ à cause de l'hypothèse (ii). Soit f_1 le germe de fonction défini par: $f_1 = f$ sur $\bar{D}$ et $f_1 = 0$ sur $\bar{\Gamma}$; on a $f = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathcal{O}_{\bar{D},z}^{(\infty)}$, à cause de (i).

Si $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_k \in \mathcal{O}_{\bar{B},z}^{(\infty)}$ sont des extensions de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivement, le germe $\sum_{j=1}^{k} \tilde{\lambda}_j (f_j - w_j)$ est une extension de f_1. Maintenant soit f_2 le germe de fonction défini par: $f_2 = 0$ sur D et $f_2 = f$ sur $\bar{\Gamma}$. Soit φ un biholomorphisme $\Gamma \to D'$: alors $g = f \cdot \varphi^{-1} \in \mathcal{O}^{(\infty)}_{\bar{D},z}$ et pour toute extension $\tilde{g} \in \mathcal{O}^{(\infty)}_{\bar{B},z}$ on a $\tilde{g} - f_2 = 0$ sur $\bar{\Gamma}$. De ce qu'on vient de démontrer il résulte que $\tilde{g} - f_2$ (et par conséquent f_2) admet une extension sur $\bar{B}$ (au voisinage de z). Il s'ensuit que $f = f_1 + f_2$ est la restriction à $\bar{Z}$ d'un germe de $\mathcal{O}^{(\infty)}_{\bar{B},z}$.

(2) Donc on a prouvé que la suite

$$0 \to \mathcal{J}^{(\infty)}_{\bar{Z}} \to \mathcal{O}^{(\infty)}_{\bar{B}} \to \mathcal{O}^{(\infty)}_{\bar{Z}} \to 0$$

est exacte. La surjectivité de l'homomorphisme $A^\infty(\bar{B}) \to A^\infty(\bar{Z})$ est ainsi réduite à prouver que $H^1(\bar{B}, \mathcal{J}^{(\infty)}_{\bar{Z}}) = 0$ c'est à dire que si $F \in C^\infty_{(0,1)}(\bar{B})$ est $\bar{\partial}$-fermée et nulle sur Z alors $F = \bar{\partial} u$ où $u \in C^\infty(\bar{B})$ et $u = 0$ sur Z. La démonstration que nous donnons ici reprend mot pour mot celle de la deuxième partie du théorème 4 de [4].

Envisageons un recouvrement fini $\{B_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant q$, de bB où $B_j = B(\zeta_j, \varrho)$ est la boule ouverte de centre ζ_j et rayon ϱ, de telle sorte que $\{B(\zeta_j, \varrho/2)\}$, $1 \leqslant j \leqslant q$, soit encore un recouvrement. Compte tenu du « lemme des furoncles » de Andreotti et Grauert ([1], p. 23) on peut trouver une famille croissante $\{D_j\}$, $0 \leqslant j \leqslant q$, de domaines à bord C^∞ et strictement pseudoconvexes, tels que:

$$D_0 = B\,, \qquad D_{j-1} \cup \{\zeta\} \subset D_j \subset D_{j-1} \cup B(\zeta_j, \varrho/2)\,,$$

$\bar{B} \subset D_q$ (et que Z soit fermé dans D_q).

Soit $\alpha_1 \in C^\infty(\bar{B})$ telle que $F = \bar{\partial}\alpha_1$. Aux points réguliers de Z on a $\bar{\partial}\alpha_1 = 0$, donc compte tenu d'un théorème de Malgrange ([14]), la restriction de α_1 à Z est holomorphe. Comme on a prouvé que $\mathcal{O}^{(\infty)}_{\bar{B}} \to \mathcal{O}^{(\infty)}_{\bar{Z}}$ est un homomorphisme surjectif on peut aussi supposer qu'il existe $g_1 \in A^\infty(\overline{B \cap B_1})$ telle que $g_1 = \alpha_1$ sur Z. Il s'ensuit que $u_1 = \alpha_1 - g_1$ est C^∞ sur $\overline{B \cap B_1}$, que $\bar{\partial} u_1 = F$ sur $B \cap B_1$ et que $u_1 = 0$ sur Z. Soit $\eta_1 \in C^\infty_0(B_1)$ telle que $\eta_1 = 0$ sur $B(\zeta_1, \varrho/2)$ et soit $F_1 = \bar{\partial}[(1 - \eta_1)u_1]$; F_1 est C^∞ sur $\bar{B}$, $\bar{\partial}$-fermée et nulle aux points de $Z \cap B_1$, de plus sur $\bar{B}$ on a $F_1 = F - \bar{\partial}\beta_1$ où $\beta_1 = \eta_1 u_1 \in C^\infty(\bar{B})$ et $\beta_1|_Z = 0$. Par itération on obtient une forme F_q, C^∞ sur D_q avec les propriétés suivantes: $\bar{\partial} F_q = 0$, $F_q|_Z = 0$ et $F_q|_B = F - \bar{\partial}\beta_q$ où $\beta_q \in C^\infty(\bar{B})$ et $\beta_q|_Z = 0$.

Soit maintenant $\gamma \in C^\infty(D_q)$ telle que $\bar{\partial}\gamma = F_q$; sa restriction à Z est holomorphe donc il existe une fonction G, holomorphe sur D_q telle que $G = \gamma$ sur Z. Posons $u = \gamma - G + \beta_q$; u est C^∞ sur $\bar{B}$, nulle aux points de Z et $\bar{\partial} u = F$. La démonstration du théorème est ainsi achevée.

COROLLAIRE 8. *Supposons que V soit réunion $V_1 \cup V_2$ de sous-ensembles* *analytiques de $\overline{D}$, tels que:*

(i) V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ *soient lisses aux points de* bD;

(ii) V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ *et* bD *soient régulièrement séparés*;

(iii) V_1 *et* V_2 *se rencontrent transversalement le long de* bD.

Alors si $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(\overline{D})$ *engendrent* $\mathfrak{J}_V$, *ils engendrent* $I^\infty(\overline{V})$.

PREUVE. Il faut vérifier les conditions du théorème 7 et pour cela soit $z \in V_1 \cap V_2 \cap bD$. Il est possible de choisir des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ telles que, au voisinage de z, V_1 soit défini par $z_1 = \ldots = z_h = 0$ et V par $z_s = \ldots = z_m = 0$ où $s \leqslant h+1$ ([4], Lemma 5); on est donc ramené au cas où V est réunion de deux sous-espaces linéaires V_1 et V_2.

La surjectivité de l'homomorphisme $\mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{D},z} \to \mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{V},z}$ a déjà été prouvée.

Pour démontrer que $f_1, \ldots, f_k$ engendrent $\mathfrak{J}^{(\infty)}_{\overline{V},z}$ supposons que $s = h+1$.

Soit $f \in \mathfrak{J}^{(\infty)}_{\overline{V},z}$; alors $f|_{V_1} = f|_{V_2} = 0$, donc $f = \sum_{j=1}^{h} \lambda_j z_j = \sum_{i=h+1}^{m} \mu_i z_i$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$, $\mu_{h+1}, \ldots, \mu_m \in \mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{D},z}$.

Soit L_q l'espace linéaire d'équations $z_j = 0$, $j \in [1, \ldots, m] \setminus \{q\}$. La relation précédente dit que $\lambda_j|_{L_j} = 0$, $j = 1, \ldots, h$ et que $\mu_i|_{L_i} = 0$, $i = h+1, \ldots, m$; il s'ensuit que λ_q appartient à l'idéal de $\mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{D},z}$ engendré par $z_1, \ldots, z_{q-1}, z_{q+1}, \ldots, z_m$, $q = 1, \ldots, m$, d'où que f appartient à l'idéal de $\mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{D},z}$ engendré par les monômes $z_i z_j$, $i, j = 1, \ldots, m$. Il s'ensuit que f est une combinaison linéaire des $f_1, \ldots, f_k$ à coefficients dans $\mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{D},z}$.

Supposons maintenant $s < h+1$ et soit W l'espace linéaire d'équations $z_s = \ldots = z_h = 0$; W est l'espace engendré par V_1 et V_2.

Soient $g = f|_W$ et $\tilde{g} \in \mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{D},z}$ une extension de g. De ce qu'on vient de démontrer il découle que $g = \sum_{i,j} \gamma_{ij} z_i z_j$ où $i, j \in [1, \ldots, s-1] \cup [h+1, \ldots, m]$ et $\gamma_{ij} \in \mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{W},z}$. Soient alors $\tilde{\gamma}_{ij} \in \mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{D},z}$ une extension de γ_{ij} et $F = f - \sum_{i,j} \tilde{\gamma}_{ij} z_i z_j$. On a $F|_W = 0$, donc $F = \sum_{r=s}^{h} \theta_r z_r$, $\theta_r \in \mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{D},z}$ et par conséquent $f = \sum_{i,j} \tilde{\gamma}_{ij} z_i z_j + \sum_{r=s}^{h} \theta_r z_r$, où les monômes $z_i z_j$ et $z_s, \ldots, z_h$ sont dans l'idéal de $\mathcal{O}^{(\infty)}_{\overline{D},z}$ engendré par $f_1, \ldots, f_k$.

Ceci prouve le corollaire.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 6.

PREUVE DU THÉORÈME 6. On suit le même schéma que dans le cas borné.

La démonstration du point (I) est la même compte tenu du théorème 3.

La construction du point (II) reste valable; on est donc ramené à prouver que $A^\infty(\overline{B}) \to A^\infty(\overline{Z})$ est un homomorphisme surjectif.

Soit donc $f \in A(\bar{Z})$ et soit $\{K_m\}$ une suite exhaustive de $\bar{B}$ comme dans la proposition 1.

Pour tout m il existe $u_m \in C^\infty(\mathbf{C}^n)$, holomorphe sur un voisinage de $K_m \cap B$ dans B et telle que $u_m = f$ sur $\bar{Z}$ ([4], th. 4). On va choisir les fonctions $u_1, \ldots, u_m, \ldots$ de telle sorte que $\|u_{m+1} - u_m\|_{K_m}^{(m)} < 2^{-m}$.

Pour cela supposons les inégalités vérifiées par $u_1, \ldots, u_m$ et soit $v \in C^\infty(\mathbf{C}^n)$, holomorphe sur un voisinage U de $K_{m+1} \cap B$ dans B et telle que $v = f$ sur $\bar{Z}$. Alors $v - u_m = 0$ sur U, donc, compte tenu du corollaire 8, $v - u_m = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont C^∞ sur K_m et holomorphes sur $\mathring{K}_m$. A partir d'ici on peut répéter la construction faite dans la démonstration du théorème 3 pour approcher $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ pour la norme $\|\cdot\|_{K_m}^{(m)}$ par des fonctions holomorphes au voisinage de K_{m+1}. Il s'ensuit que la série $\sum_{m=2}^{+\infty} (u_m - u_{m-1})$ est convergente et que la somme u est holomorphe sur B, C^∞ sur $\bar{B}$ et telle que sa restriction à Z coïncide avec f.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti - H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), pp. 193-255.

[2] H. Behnke - K. Stein, *Konvergente Folgen nichtschlichter Regularitätsbereiche*, Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV, **28** (1949), pp. 317-326.

[3] S. Coen, *Sul rango dei fasci coerenti*, Boll. Un. Mat. Ital., **22** (1967), pp. 373-382.

[4] P. de Bartolomeis - G. Tomassini, *Finitely generated ideals in $A^\infty(D)$*, à paraître aux Advances in Math.

[5] G. B. Folland - J. J. Kohn, *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex*, Ann. of Math. Studies n. 75, Princeton Univ. Press, 1972.

[6] O. Forster - K. J. Ramspott, *Homotopieklassen von Idealbasen in Steinschen Algebren*, Invent. Math., **5** (1968), pp. 255-276.

[7] T. Gamelin, « *Uniform Algebras* », Series in Modern Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.

[8] M. Hakim - N. Sibony, *Spectre de $A(\bar{\Omega})$ pour des domaines bornés faiblement pseudoconvexes réguliers*, J. Functional Analysis, vol. 37, No **2** (1980), pp. 127-135.

[9] G. M. Henkin, *The Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds*, Russian Math. Surveys, **32**:**3** (1977), pp. 59-130.

[10] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several complex variables*, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[11] N. Kerzman, *Hölder and L_p Estimates for Solutions of $\bar{\partial} u = f$*, Comm. Pure Appl. Math., **24** (1971), pp. 301-379.

[12] J. J. Kohn, *Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds*, Ann. of Math., **78** (1963), pp. 112-148; (1964), pp. 450-472.

[13] J. J. Kohn - L. Nirenberg, *Non-coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), pp.443-492.

[14] B. Malgrange, *Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques*, Bull. Soc. Math. France, **91** (1963), pp. 113-117.

[15] N. Øvrelid, *Integral representation formulas and L^p-estimates for the $\bar\partial$-equation*, Math. Scand., **29** (1971), pp. 137-160.

[16] N. Øvrelid, *Generators of the Maximal Ideals of $A(D)$*, Pacific J. Math., vol. 39, no **1** (1971), pp. 219-223.

[17] Y. T. Siu, *The $\bar\partial$-problem with uniform bounds on derivatives*, Math. Ann., **207** (1974), pp. 163-176.

Scuola Normale Superiore
56100 Pisa