ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

C. GOULAOUIC
N. SHIMAKURA

Régularité höldérienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 10, nº 1 (1983), p. 79-108
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1983_4_10_1_79_0>

Regularité Hölderienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés.

C. GOULAOUIC - N. SHIMAKURA

1. – Hypothèses et énoncé des principaux résultats.

Pour $\mu \in]0,1[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous notons

$$C^\mu(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega});\ \|u\|_\mu = \sup |u| + \sup_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu} < \infty \right\}.$$

Nous écrivons aussi $\|u\|_\mu = \|u\|_\infty + [u]_\mu$ où $\|u\|_\infty = \sup_\Omega |u|$. Plus généralement, pour $k \in \mathbf{N}$ et $\mu \in]0,1[$, nous notons encore:

$$C^{k+\mu}(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega});\ D^\alpha u \in C^\mu(\bar{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leqslant k\}$$

muni de la norme naturelle.

Ces espaces $C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$ sont des espaces de Banach dont les propriétés seront rappelées au moment de leur utilisation.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction positive sur Ω équivalente à la distance au bord, c'est-à-dire:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \varphi(x) > 0\} \\ &\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \varphi(x) = 0\} \\ &\text{et } d\varphi \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega\,. \end{aligned} \right.$$

Nous supposons $\bar{\Omega}$ et φ de classe c^∞; en fait, pour les problèmes de régularité C^μ considérés ci-dessous, il suffit de supposer $\bar{\Omega}$ de classe $C^{2+\mu}$ et φ de classe $C^{1+\mu}$, mais un changement de variables conservant la régularité des coefficients des opérateurs différentiels considérés permet tout de suite de supposer plus de régularité sur $\bar{\Omega}$ et φ sans restreindre la généralité.

Pervenuto alla Redazione il 14 Dicembre 1981.

Nous notons, pour $\mu \in]0, 1[$ et φ comme ci-dessus,

$$C_\varphi^{2+\mu} = \{u \in C^{1+\mu}(\bar{\Omega}); \quad \varphi u \in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})\},$$

muni de la norme naturelle notée $\| \quad \|_{2+\mu,\varphi}$.

Nous considérons une classe d'opérateurs différentiels sur Ω de la forme (avec $D_j = \partial/\partial x_j$)

$$\mathcal{A} = -\varphi \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} D_j D_k + \sum_{j=1}^{n} a_j D_j + a_0\,, \tag{2}$$

où les coefficients a_{jk}, a_j, a_0 sont dans $C^\mu(\bar{\Omega})$; nous supposons de plus:

(3) les coefficients a_{jk} sont réels et $a_{jk} = a_{kj}$.

(4) Il existe $C > 0$ tel que l'on ait, pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geqslant C|\xi|^2.$$

L'étude des problèmes aux limites pour de tels opérateurs $\mathcal{A}$ fait intervenir la fonction Z de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j D_j \varphi}{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} D_j \varphi D_k \varphi} \quad \text{sur } \partial\Omega\,. \tag{5}$$

Dans l'essentiel de ce qui suit, nous supposerons de plus

$$a_j - Z \sum_{k=1}^{n} a_{jk} D_k \varphi = O(\varphi) \quad \text{pour } j = 1, \dots, n\,. \tag{6}$$

Il est facile de vérifier que Z est un invariant et que les conditions (2), (3), (4) et (6) ci-dessus sont aussi invariantes par changement de variables et de fonction φ.

La condition (6) assure que l'opérateur $\mathcal{A}$ a une « partie principale fuchsienne transversale à $\partial\Omega$ » et alors $Z + 1$ est une racine caractéristique de cette partie principale, l'autre racine étant 0; ces notions seront plus intuitives lorsque nous considérerons des modèles.

Un exemple typique d'opérateur $\mathcal{A}$ est $-\varphi\Delta + X$ où X est un opérateur du premier ordre et la condition (6) signifie alors que X est de la forme $Z \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} + a_0$ sur $\partial\Omega$; en particulier pour $Z = -1$, nous retrouvons les opérateurs de la forme $-\operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} + a_0$ qui furent étudiés dans [2].

La théorie hilbertienne de tels opérateurs $\mathcal{A}$ (cf. [7], [8] et [3]) a montré que, selon les valeurs de Z, les réalisations de $\mathcal{A}$ font ou ne font pas intervenir des conditions aux limites sur $\partial\Omega$. Nous nous intéressons ici surtout aux cas où les problèmes sont bien posés dans les espaces C^μ sans conditions aux limites, ce qui correspond à $Z < 0$. La condition $Z < 0$ peut encore s'écrire:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j D_j \varphi < 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \,. \tag{7}$$

Nous pouvons maintenant énoncer les principaux résultats obtenus et d'abord une estimation a priori analogue à celle de Schauder pour des opérateurs uniformément elliptiques.

THÉORÈME 1. *Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (2), (3), (4), (6) *et* (7).

1) *Il existe $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in C^{2+\mu}_{\varphi}$,*

$$\|u\|_{2+\mu,\varphi} \leqslant C\left(\|\mathcal{A}u\|_\mu + \|u\|_\mu\right). \tag{8}$$

2) *De plus, Ω et φ étant fixés, la constante C dans* (8) *peut être choisie indépendante des coefficients de $\mathcal{A}$ pourvu que ceux-ci restent dans un borné de $C^\mu(\bar{\Omega})$, que la constante d'ellipticité reste minorée par un nombre > 0 et que les valeurs de Z restent dans un compact de $]-\infty, 0[$.*

Pour obtenir une telle estimation, nous nous ramenons par localisation, difféomorphisme et perturbation au cas d'un opérateur modèle sur $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$ de la forme

$$-x_n \Delta + Z D_n + a_0 \,,$$

pour lequel nous donnons un noyau de Green explicite, ce qui permet d'établir les inégalités C^μ (et aussi L^p pour $1 < p < \infty$).

Ensuite, en supposant de plus tous les coefficients de $\mathcal{A}$ réels et $a_0 > 0$ sur Ω nous montrons que $\mathcal{A}$ est injectif de $C^{2+\mu}_{\varphi}$ dans $C^\mu(\bar{\Omega})$, obtenant en outre des inégalités du type « principe du maximum » pour $Z \leqslant -1$.

En utilisant les résultats connus pour les problèmes à coefficients très réguliers dans le cadre hilbertien, nous obtenons par approximation et par homotopie les résultats d'isomorphisme suivants:

THÉORÈME 2. *Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (2), (3), (4), (6) *et* (7) *et supposons les coefficients de $\mathcal{A}$ réels et $a_0 > 0$ sur $\bar{\Omega}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_{\varphi}$ sur $C^{\mu}(\bar{\Omega})$.

En fait l'unicité a lieu dans $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ si $Z \leqslant -1$ grâce à un principe du maximum avec poids et dans $C^{2+\mu}_{\varphi}$ si $Z < 0$.

THÉORÈME 3. *Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (2), (3), (4) *et* (6) *avec $Z \leqslant -1$ et les coefficients a_{jk} dans $C^2(\bar{\Omega})$ et a_p dans $C^1(\bar{\Omega})$ pour $1 \leqslant j, k, p \leqslant n$. Il existe alors $C > 0$ tel que, pour* $\operatorname{Re} a_0 > C$, *l'opérateur $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_{\varphi}$ sur $C^{\mu}(\bar{\Omega})$.*

En particulier, le théorème 3 implique que les solutions hilbertiennes u des problèmes variationnels associés à $\mathcal{A}$ (pour $Z = -1$) sont dans $C^{2+\mu}_{\varphi}$ lorsque $\mathcal{A}u$ est dans $C^{\mu}(\bar{\Omega})$.

Nous avons laissé en remarque: la régularité höldérienne d'ordre supérieur et les applications à des problèmes elliptiques dégénérés non linéaires.

Quelques lemmes très techniques sont regroupés dans un appendice.

Certains des résultats démontrés ici ont été annoncés brièvement dans [5].

Nous remercions Y. Meyer pour d'enrichissantes conversations à propos de ce travail.

2. – Inégalités à priori dans les espaces C^{μ} (démonstration du théorème 1).

Nous montrons ici un résultat apparemment plus faible que le théorème 1, à savoir:

PROPOSITION 1. *Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant* (2), (3), (4), (6) *et* (7). *Il existe $C > 0$ tel que l'on ait, pour tout $u \in {}^{2+\mu}_{\varphi}$,*

$$\|u\|_{2+\mu,\varphi} \leqslant C(\|\mathcal{A}u\|_{\mu} + \|\varphi u\|_{1+\mu} + \|u\|_{\mu})\,. \tag{9}$$

De plus la constante C peut être choisie indépendante de $\mathcal{A}$ pourvu que soit vérifiée la même uniformité que dans le 2) du théorème 1. Il en sera de même pour les propositions 2 et 3 ci-après. Ceci ne sera plus répété et la vérification sera laissée au lecteur, le calcul des diverses constantes apparaissant dans les inégalités étant suffisamment explicite.

Notons d'abord que la compacité de l'injection de $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ dans $C^{\beta}(\bar{\Omega})$ pour $0 < \beta < \alpha$ implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_{\varepsilon} > 0$ tel que l'on ait, pour tout $u \in C^{\mu+2}_{\varphi}$,

$$\|\varphi u\|_{1+\mu} + \|u\|_{\mu} \leqslant \varepsilon \|u\|_{2+\mu,\varphi} + C_{\varepsilon}\|u\|_{\mu}\,. \tag{10}$$

Le théorème 1 est alors une conséquence immédiate de (10) et de la proposition 1.

1) *Pour prouver la proposition* 1, *nous commençons par une localisation.*

Soient $(\Omega_j)_{j=0,\dots,N}$ un recouvrement ouvert de $\bar{\Omega}$ et $(\varphi_j)_{j=0,\dots,N}$ tels que:

$$\bar{\Omega}_0 \subset \Omega\,, \qquad \bar{\Omega} \subset \bigcup_{j=0}^{N} \Omega_j$$

$$\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j) \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{N} \varphi_j = 1 \qquad \text{sur } \bar{\Omega}\,.$$

Pour montrer (9) pour $u \in C_\varphi^{2+\mu}$, il suffit de le faire pour chaque $\varphi_j u$; pour $\varphi_0 u$ cela résulte des estimations classiques de Schauder pour les opérateurs uniformément elliptiques; pour chaque $\varphi_j u$ avec $j \in \{1, \dots, N\}$, nous sommes ramenés par un difféomorphisme Θ, tel que $(\varphi \circ \Theta)(x) = x_n$, à un problème analogue dans $\mathbb{R}^n_+$:

Pour $\omega \subset \mathbb{R}^n_+$, nous notons $\underline{\omega}$ son adhérence dans $\omega \cup \{(x', 0);\ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, $C_{x_n}^{2+\mu}(\bar{\omega}) = \{u \in C^{1+\mu}(\bar{\omega});\ x_n u \in C^{2+\mu}(\bar{\omega})\}$ muni de la norme du graphe notée ici $\|\ \|_{2+\mu,x_n,\omega}$. Nous notons aussi

$$\omega_R = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+\,;\ |x| < R\}$$

et $\mathcal{B}$ l'opérateur déduit de $\mathcal{A}$ par Θ; nous avons:

$$(2') \qquad \begin{cases} \mathcal{B} = -x_n \sum\limits_{j,k=1}^{n} b_{jk}(x) D_j D_k + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x) D_j + b_0(x) \\ \text{où tous les coefficients sont dans } C^\mu(\bar{\omega}_R)\,. \end{cases}$$

De plus:

(3′) Les coefficients b_{jk} sont réels et $b_{jk} = k_{kj}$.

(4′) Il existe $C > 0$ tel que l'on ait pour tout $x \in \bar{\omega}_R$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geqslant C |\xi|^2\,.$$

(6′) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $(b_{nn} b_j - b_n b_{nj})(x) = O(x_n)$.

(7′) $b_n < 0$ pour $x_n = 0$.

Remarquons que nous avons $Z = b_n / b_{nn}$. La proposition 1 résulte de l'inégalité a priori locale suivante:

PROPOSITION 2. *Soit un opérateur* $\mathcal{B}$ *vérifiant* (2′), (3′), (4′), (6′) *et* (7′). *Pour r assez petit, il existe* $C > 0$ *tel que l'on ait, pour tout* $u \in C^{2+\mu}_{x_n}(\bar{\omega}_{2r})$,

$$\|u\|_{2+\mu,x_n,\omega_r} \leqslant C(\|\mathcal{B}u\|_{\mu,\omega_{2r}} + \|x_n u\|_{1+\mu,\omega_{2r}} + \|u\|_{\mu,\omega_{2r}})$$

où $\| \ \|_{\mu,\omega}$ *désigne la norme dans* $C^\mu(\bar{\omega})$.

La démonstration de la proposition 2 se fait en comparant $\mathcal{B}$ et un opérateur modèle. Notons

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(x, D) = -x_n \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(0) D_j D_k + \sum_{j=1}^{n} b_j(0) D_j .$$

Les hypothèses (3′), (4′) impliquent en particulier $b_{nn}(0) \neq 0$; nous effectuons un changement de variables de la forme

$$\begin{cases} x_n = b_{nn}(0) y_n \\ x_j = y_j + b_{nj}(0) y_n \qquad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant n-1 , \end{cases}$$

qui transforme $\mathcal{B}_0$ en l'opérateur

$$\tilde{\mathcal{B}}_0 = \sum_{j,k=j}^{n} y_n\big(b_{jk}(0) b_{nn}(0) - b_{nk}(0) b_{nj}(0)\big) D_j D_k - y_n D_n^2 + Z(0) D_n$$

et les hypothèses (3′), (4′) assurent l'existence d'un changement de variables linéaires dans $\mathbb{R}^{n-1}$ qui transforme $\tilde{\mathcal{B}}_0$ en l'opérateur (en réutilisant les variables x_j):

$$\mathcal{L} = -x_n \sum_{j=1}^{n} D_j^2 + Z(0) D_n . \tag{11}$$

Pour $r > 0$, nous notons $\mathcal{O}_r$ l'image de ω_r dans le changement de variable qui fait passer de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{L}$ et pour $F \subset \mathbb{R}^n$ nous notons $\mathcal{E}'(F)$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}^n$ à support compact dans F.

Admettons provisoirement l'inégalité a priori suivante:

PROPOSITION 3. *Soit* $r > 0$; *il existe* $C > 0$ *tel que, pour tout* $u \in C^{2+\mu}_{x_n}(\bar{\mathcal{O}}_r) \cap \cap\, \mathcal{E}'(\underline{\mathcal{O}}_r)$, *on ait*

$$\|u\|_{2+\mu,x_n,\mathcal{O}_r} \leqslant C(\|\mathcal{L}u\|_{\mu,\mathcal{O}_r} + \|u\|_{\mu,\mathcal{O}_r}) .$$

Il en résulte immédiatement l'existence de $C > 0$ tel que, pour tout $v \in C^{2+\mu}_{x_n}(\bar{\omega}_r) \cap \mathcal{E}'(\underline{\omega}_r)$, on ait:

$$\|v\|_{2+\mu,x_n,\omega_r} \leqslant C(\|\mathcal{B}_0 v\|_{\mu,\omega_r} + \|v\|_{\mu,\omega_r}) . \tag{12}$$

Montrons que (12) implique la proposition 2, par une méthode classique de perturbation. Soient $r \in]0, R/2[$ et $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule $B(0, 2r)$ de centre 0 et rayon $2r$ et valant 1 sur la boule $B(0, r)$; pour $u \in C_{x_n}^{2+\mu}(\bar{\omega}_{2r})$ nous notons $v = \Theta u$ et nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{B}(x, D) = \mathcal{B}_0(x, D) + \mathcal{R}(x, D) + b_0(x) \qquad \text{où} \\ \mathcal{R}(x, D) = -x_n \sum_{j,k=1}^{n} \big(b_{jk}(x) - b_{jk}(0)\big) D_j D_k + \sum_{j=1}^{n} \big(b_j(x) - b_j(0)\big) D_j\,, \end{array}\right.$$

$$\mathcal{B}(\theta u) = \theta \mathcal{B} u + [\mathcal{B}, \theta] u \qquad \text{et}$$

$$\mathcal{B}(\theta u) = \mathcal{B}_0 \theta u + \mathcal{R}(\theta u) + b_0 \theta u;$$

d'où il résulte d'après (12):

$$\|u\|_{2+\mu, x_n \omega_R} \leqslant C\big(\|\theta \mathcal{B} u + [\mathcal{B}, \theta] u - \mathcal{R}(\theta u) - b_0 \theta u\|_{\mu, \omega_R} + \|\theta u\|_{\mu, \omega_R}\big) \tag{13}$$

et comme les coefficients de $\mathcal{R}$ s'annulent en 0, nous pouvons trouver $r_0 > 0$ assez petit pour que, pour $0 < r \leqslant r_0$, on ait

$$C\|\mathcal{R}(\theta u)\|_{\mu, \omega_{2r}} \leqslant \tfrac{1}{2} \|\theta u\|_{2+\mu, x_n, \omega_{2r}}; \tag{14}$$

ceci ne suppose que la continuité des coefficients de l'opérateur $\mathcal{B}$; a fortiori r_0 est déterminé par la norme C^μ des coefficients.

D'autre part l'opérateur $[\mathcal{B}, \theta]$ est du premier ordre à coefficients $C^\mu(\bar{\omega}_{2r})$ et les termes du premier ordre s'annulent comme x_n sur $x_n = 0$; donc il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\|[\mathcal{B}, \theta] u\|_{\mu, \omega_{2r}} \leqslant C_1\big(\|x_n u\|_{1+\mu, \omega_{2r}} + \|u\|_{\mu, \omega_{2r}}\big) \tag{15}$$

et C_1 ne dépend aussi que de la norme C^μ des coefficients de $\mathcal{B}$.

Il résulte alors de (13), (14) et (15):

$$\|\theta u\|_{2+\mu, x_n, \omega_{2r}} \leqslant 2C\big(\|\theta \mathcal{B} u\|_{\mu, \omega_{2r}} + C_1 \|x_n u\|_{1+\mu, \omega_{2r}} + C_1 \|u\|_{\mu, \omega_{2r}} + \|u\|_{\mu, \omega_{2r}}\big)$$

ce qui implique la proposition 2. Nous avons pu constater que la constante C dans cette proposition ne dépend que de la norme C^μ de tous les coefficients de $\mathcal{B}$ et de la constante d'ellipticité (qui intervient au moment du changement de variable pour la réduction au modèle).

Donc la démonstration du théorème 1 est complète si nous montrons la proposition 3, ce qui va faire l'objet du paragraphe suivant:

2) *Etude du modèle dans* $\mathbb{R}^n_+$.

Nous considérons donc un opérateur $\mathcal{L}$ à n variables indépendantes $x = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $n \geqslant 2$ défini par (11)

$$\mathcal{L}u(x) = -x_n \sum_{j=1}^{n} D_j^2 u(x) + z D_n u(x)$$

dans le demi-espace $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$, où z est un paramètre complexe tel que $\mathcal{R}e\, z < 0$ (correspondant à $Z(0)$ dans (11)).

Etant donnés deux points x et y distincts de $\mathbb{R}^n_+$, nous définissons

$$E(x, y) = \gamma y_n^{-z-1} \int_0^1 \{|x-y|^2 \theta + |x - \check{y}|^2 (1-\theta)\}^{(z+2-n)/2} \{\theta(1-\theta)\}^{-(z+2)/2}\, d\theta \tag{16}$$

avec $\check{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}, -y_n)$ et

$$\gamma = \gamma(z) = 2^{-z-2} \pi^{-n/2} \Gamma\left(\frac{n-2-z}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{-z}{2}\right).$$

Lemme 1. *$E(x, y)$ est une solution élémentaire de $\mathcal{L}$, c'est-à-dire, plus précisément*:

i) *Si $x \in \mathbb{R}^n_+$, $E(x, y)$ est localement sommable par rapport à y sur $\overline{\mathbb{R}^n_+}$;*

ii) *Si $f \in C^0(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^n_+})$*

$$Ef(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} E(x, y) f(y)\, dy \tag{17}$$

est une solution de l'équation $\mathcal{L}u(x) = f(x)$ dans $\mathbb{R}^n_+$;

iii) *Si $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, nous avons $E\mathcal{L}u(x) = u(x)$ dans $\mathbb{R}^n_+$.*

C'est à dire que E est le noyau de Green de la réalisation associée à $\mathcal{L}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ avec pour domaine la fermeture de $C^2(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour la norme du graphe.

En particulier pour $z = -1$, $E(x, y)$ prend une forme plus simple

$$E(x, y) = \tfrac{1}{2} \pi^{(1-n)/2} f_{(n-1)/2}(|x-y|^2, |x-\check{y}|^2),$$

où les fonctions $f_\sigma(a, b)$, pour $a > 0$, $b > 0$ et $2\sigma = 1, 2, \ldots$ sont définies par

$$f_\sigma(a, b) = \frac{\Gamma(\sigma)}{\pi} \int_0^1 \{a\theta + b(1-\theta)\}^{-\sigma} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

Nous avons les deux formules de récurrence:

$$f_\sigma(a, b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sigma+\frac{1}{2}}(a+\xi^2, b+\xi^2)\, d\xi\,,$$

$$f_{\sigma+1}(a, b) = -\left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b}\right) f_\sigma(a, b)\,.$$

La première signifie que $E(x, y)$ à n variables s'obtient à partir de $E(\tilde{x}, \tilde{y})$ à $(n+1)$ variables avec $\tilde{x} = (x_0, x)$ par intégration par rapport à x_0. La deuxième dit que $E(x, y)$ à $(n+2)$ variables peut se calculer à partir de celle à n variables par différentiation et substitution.

Ce qui est fondamental est alors de connaître $f_{\frac{1}{2}}$ et f_1. La première est une intégrale elliptique, tandis que

$$f_1(a, b) = 1/\sqrt{ab}\,.$$

Pour $z = -1$ et $n = 3$, nous avons en particulier

$$E(x, y) = \frac{1}{2\pi|x-y||x-\check{y}|}$$

qui a aussi un sens dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf sur $x = y, \check{y}$ et elle est une solution élémentaire de l'opérateur

$$-\sum_{j=1}^{n} D_j |x_n| D_j \qquad \text{sur } \mathbb{R}^n\,.$$

Le lemme 1 est essentiellement un corollaire de la construction dans [7] d'une solution élémentaire $\mathbb{Z}(t, x, y)$ pour l'opérateur d'évolution associé à $\mathfrak{L}$, à savoir

$$D_t - x_n \sum_{j=1}^{n} D_j^2 - zD_n\,.$$

Le noyau E est obtenu par

$$E(x, y) = \int_0^\infty \mathbb{Z}(t, x, y)\, dt\,.$$

Nous renvoyons à l'appendice A.1 pour les détails.

Notons que l'on trouve dans les travaux de Olevskii (D.A.N., 64-6 (1949), pp. 767-770) et de A. Weinstein (par exemple: Bull. A.M.S., 59 (1953), pp. 20-38 ou Coll. C.N.R.S. LXXI Nancy 1956, pp. 179-186) des expressions de noyaux de Green et de Poisson associés à des opérateurs du genre de ceux qui nous servent ici de modèle.

Par ailleurs, nous avons le résultat:

PROPOSITION 4. *Soit K l'un quelconque des opérateurs intégraux associés aux noyaux $D_{x_j}E$ ou $D_{x_j}D_{x_k}x_nE$ pour $1 \leqslant j, k \leqslant n$.*

Pour tout compact F de $]-\infty, 0[$, il existe une constante C telle que l'on ait pour tout $R > 0$, tout $z \in F$ et tout $f \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ nulle pour $|x| \geqslant R$,

$$[Kf]_\mu \leqslant C\|f\|_\mu \tag{18}$$

et

$$\|Kf\|_\infty \leqslant C(\|f\|_\infty + R^\mu[f]_\mu)\,. \tag{19}$$

Cette proposition 4 et le lemme 1 impliquent évidemment la proposition 3. La preuve de la proposition 4 s'inspire d'une méthode classique dans $\mathbb{R}^n$; soit $K(x, y)$ une distribution sur $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ associée à une fonction localement intégrable K vérifiant:

(K1) Il existe $\alpha \in [0, 1[$ et $C_1 > 0$ tels que l'on ait, pour $x \neq y$,

$$|K(x, y)| \leqslant C_1 y_n^{-\alpha}|x - y|^{\alpha-n}$$

$$|D_{x_j}K(x, y)| \leqslant C_1 y_n^{-\alpha}|x - y|^{\alpha-1-n} \qquad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant n\,.$$

(K2) Il existe $C_2 > 0$ et une fonction non négative $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 pour $|x| \leqslant 1$, 0 pour $|x| \geqslant n$ et telle que l'on ait pour $\varrho > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n_+$,

$$\|K(\xi_{\varrho,a})\|_\infty \leqslant C_2 \qquad \text{où } \xi_{\varrho,a}$$

est définie sur $\mathbb{R}^n_+$ par

$$\xi_{\varrho,a}(x) = \xi\left(\frac{x - a}{\varrho}\right) \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n_+\,.$$

(K3) Il existe $C_3 > 0$ et une fonction non négative $\eta \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ valant 1 au voisinage de l'origine et telle que l'on ait pour $R \geqslant 1$,

$$[K(\eta_R)]_\mu \leqslant C_3 \qquad \text{où } \eta_R(x) = \eta\left(\frac{x}{R}\right).$$

Notons que $K(f)(x)$ est défini pour $x \in \mathbb{R}^n_+$ et $f \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ d'après (K1), ce qui permet d'écrire (K2) et (K3). Nous avons alors le résultat:

LEMME 2. *Pour tout compact* $F \subset]0,1[$ *il existe* $C > 0$ *tel que, pour tout* K *vérifiant* (K1), (K2) *et* (K3) *avec* $\alpha \in F$, *pour tout* $R > 0$ *et pour tout* $f \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap \mathcal{E}'(\underline{\omega}_R)$, *on ait*:

$$\|K(f)\|_\infty \leqslant C\big((C_1 + C_2)\|f\|_\infty + C_1 R^\mu [f]_\mu\big) \tag{20}$$

$$[K(f)]_\mu \leqslant C\big(C_3\|f\|_\infty + (C_1 + C_2)[f]_\mu\big)\,. \tag{21}$$

Démontrons ce lemme 2; nous notons C toute constante ne dépendant que de F. Soit $a \in \mathbb{R}^n_+$; pour $|a| \geqslant 2R$ nous avons $|K(f)(a)| \leqslant CC_1\|f\|_\infty$ grâce à (K1); pour $|a| \leqslant 2R$, nous écrivons $f = f_1 + f_2$ avec

$$f_1 = \big(f - f(a)\big)\xi_{3R,a}$$
$$f_2 = f(a)\xi_{3R,a}\,;$$

alors

$$|K(f_2)(a)| \leqslant C_2\|f\|_\infty \quad \text{grâce à (K2) et}$$
$$|K(f_1)(a)| \leqslant CC_1[f]_\mu R^\mu \quad \text{grâce à (K1)}\,,$$

ce qui démontre (20).

Pour montrer (21), considérons $(a, b) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ avec $a \neq b$ et notons $\varrho = 2|a - b|$. Soit $R' \geqslant 1$ et assez grand pour que $\eta_{R'}(x) = 1$ pour $|x| \leqslant R + 2\varrho$. Nous notons $f = f_1 + f_2 + f_3$ avec

$$f_1 = \big(f - f(a)\big)\xi_{\varrho,a}$$
$$f_2 = \big(f - f(a)\big)(\eta_{R'} - \xi_{\varrho,a})$$
$$f_3 = f(a)\eta_{R'}\,.$$

D'abord (K3) implique

$$|(Kf_3)(a) - (Kf_3)(b)| \leqslant C_3\varrho^\mu\|f\|_\infty;$$

puis nous avons:

$$|K(f_1)(a)| \leqslant CC_1[f]_\mu\varrho^\mu \quad \text{et} \quad |Kf_1(b)| \leqslant C(C_1 + C_2)[f]_\mu\varrho^\mu$$

et enfin

$$|Kf_2(a) - Kf_2(b)| \leqslant CC_1[f]_\mu\varrho^\mu;$$

ce qui entraîne

$$|Kf(a) - Kf(b)| \leqslant C_3\|f\|_\infty\varrho^\mu + C(C_1 + C_2)[f]_\mu\varrho^\mu\,,$$

c'est-à-dire (21).

La première étape de la démonstration de la proposition 4 consiste à vérifier que les noyaux $K_j = D_{x_j}E$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, satisfont aux conditions (K1), (K2) et (K3) du lemme 2. (Nous renvoyons aux appendices pour certains calculs.)

D'abord, ils satisfont à (K1) (voir Lemme A.1) avec $\alpha = \operatorname{Max}(0, 1 + \mathcal{R}e\, z)$. Posons ensuite

$$\eta(x) = \tilde{\eta}(x_n)$$

où $0 \leqslant \tilde{\eta} \leqslant 1$, $\tilde{\eta} \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ et telle que $\tilde{\eta} = 1$ si $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ et que $\tilde{\eta} = 0$ si $x_n \geqslant 2$. Alors nous avons

$$K_j \eta_R(x) \equiv 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-1)\,,$$

et

$$K_n \eta_R(x) = -\int_0^1 t^{-z-1} \tilde{\eta}(x_n t/R)\, dt\,,$$

d'après (A.18) et (A.25). Donc

$$|K_n \eta_R(x) - K_n \eta_R(y)| \leqslant [\tilde{\eta}]_\mu \int_0^1 t^{-z'-1} \left| \frac{x_n t}{R} - \frac{y_n t}{R} \right|^\mu dt = C[\tilde{\eta}]_\mu \big(|x_n - y_n|/R\big)^\mu,$$

c'est-à-dire que K_j, pour $1 \leqslant j \leqslant n$, satisfait à (K3).

Nous allons maintenant démontrer que les K_j satisfont aussi à (K2) avec un choix convenable de ξ. A cause de l'homogénéité, nous avons

$$(K_j \xi_{\varrho,a})(x) = (K_j \xi_{1,b}) \left(\frac{x'}{\varrho} - a', \frac{x_n}{\varrho} \right)$$

pour $\varrho > 0$ et $a = (a', a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, où $b = (0, a_n/\varrho) \in \mathbb{R}^n_+$. Donc pour évaluer $\|K_j \xi_{\varrho,a}\|_\infty$, nous n'avons qu'un seul paramètre essentiel $a_n > 0$. Posons de nouveau

$$\xi(x, a_n) = \alpha(x')\beta(x_n - a_n)\,,$$

où $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ces fonctions ont des supports dans $|x'| \leqslant \sqrt{2}$ et $|x_n| \leqslant \sqrt{2}$, elles valent 1 pour $|x'| \leqslant 1$ et $|x_n| \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{R}$ respectivement. Nous fixons α et β une fois pour toutes. Nous avons alors à évaluer les normes $\|\cdot\|_\infty$ des

$$V_j(x, a_n) = \big(K_j \xi(\cdot, a_n)\big)(x) \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

indépendamment de $a_n > 0$.

Par (A.30), nous pouvons les écrire

$$V_j(x, a_n) = \int_0^{+\infty} \beta(y_n - a_n)\, U_j(x, y_n)\, dy_n \qquad (1 \leqslant j \leqslant n) .$$

Commençons par les cas $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Nous avons, par (A.33),

$$|V_j(x, a_n)| \leqslant C \int_0^{+\infty} |\beta(y_n - a_n)|\, y_n^{\sigma-1}\, dy_n ,$$

où σ est un nombre vérifiant (A.31). Mais le domaine d'intégration à droite est contenu dans un intervalle du longueur $2\sqrt{2}$ autour de $y_n = a_n$. Donc, nous avons

$$|V_j(x, a_n)| \leqslant C \int_0^{2\sqrt{2}} y_n^{\sigma-1}\, dy_n = C' < +\infty \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-1)$$

uniformément par rapport à (x, a_n).

Considérons maintenant V_n. D'après (A.34), nous avons

$$V_n = V_n^1 + V_n^2 ,$$

avec

$$V_n^1(x, a_n) = -\alpha(x') \int_0^1 t^{-z-1} \beta(x_n t - a_n)\, dt ,$$

et V_n^2 a la même majoration que les V_j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$. Evidemment $|V_n^1| \leqslant C''$ indépendamment de (x, a_n). Par conséquent, la condition (K2) est satisfaite et cette première étape est terminée.

Considérons maintenant $K = D_{x_j} D_{x_k} x_n E$. Soit $f \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ à support dans $\underline{\omega}_R$. Posons $u(x) = Ef(x)$ et $v(x) = x_n u(x)$. Alors $v(x)$ est une solution du problème de Dirichlet pour $-\Delta$ dans le demi-espace:

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = f(x) - (z+2)\, D_n u(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n_+ \\ v(x) = 0 \quad \text{sur } x_n = 0 . \end{cases}$$

Soit $G(x, y)$ la fonction de Green, c'est-à-dire,

$$G(x, y) = G_0(x - y) - G_0(x - \check{y}) ,$$

avec

$$G_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{|x|} & \text{si } n = 2, \\ \Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)|x|^{2-n}/(4\pi^{n/2}) & \text{si } n \geqslant 3 . \end{cases}$$

Et nous posons

$$H(x) = v(x) - Gf(x) + (z+2)G\, D_n u(x) .$$

Alors, h est harmonique dans $\mathbb{R}^n_+$, a une trace nulle sur $x_n = 0$, $h(x) = O(|x|^\alpha)$ à l'infini avec $\alpha = \mathrm{Max}\,(0, 1 + \mathcal{R}\mathrm{e}\, z)$ et $D_n h$ reste bornée dans $\mathbb{R}^n_+$. Donc, par un résultat du type théorème de Liouville, h est identiquement nulle, c'est-à-dire,

$$x_n u(x) = Gf(x) - (z+2)G\, D_n u(x)$$

dans $\mathbb{R}^n_+$.

Dans cette égalité, $f - (z+2)\, D_n u$ appartient à $C^\mu(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ par hypothèse et d'après la première étape. Nous pouvons donc appliquer le résultat de Agmon-Douglis-Nirenberg [1] pour obtenir les assertions (18) et (19) pour $D_{x_j} D_{x_k} x_n E$ (d'abord dans le cas $R = 1$ et puis dans le cas général $R > 0$ par homothétie).

La proposition 4 est démontrée.

Remarque 1. Les opérateurs intégraux énumérés dans la Proposition 4 sont continus de $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ dans lui-même si

$$\mathrm{Max}\,(1, -1/\mathcal{R}\mathrm{e}\, z) < p < +\infty .$$

Preuve. Pour les $D_{x_j} E$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, ceci sera démontré dans le Lemme A.4. Pour les secondes dérivées de $x_n E$, nous pouvons le démontrer comme la seconde étape de la démonstration de la proposition 4.

3. – Existence et unicité des solutions.

Nous démontrons d'abord une inégalité analogue au « Principe du maximum », à savoir:

Théorème 4. *Soit un opérateur $\mathcal{A}$, à coefficients réels, vérifiant les hypothèses* (2), (3), (4) *et* (6) *avec $a_0 > 0$ sur $\overline{\Omega}$ et $Z \leqslant -1$ sur $\partial\Omega$. Il existe $C > 0$ et $k > 0$ tels que pour tout $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ réelle et vérifiant $\mathcal{A}u = f$*

sur Ω, on ait:

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|\frac{u(x)}{C-\operatorname{Log}\varphi(x)}\right|\leqslant k\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{f(x)}{C-\operatorname{Log}\varphi(x)}\right|.$$

DÉMONSTRATION. En notant $\psi = C - \operatorname{Log}\varphi$ et $u = \psi v$, nous avons: $v\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, $v=0$ sur $\partial\Omega$ et, dans Ω,

$$\mathcal{A}u = -\psi\varphi\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}D_jD_kv + \mathcal{T}(v) + \tilde{a}_0 v = f,$$

où $\mathcal{T}$ est un opérateur homogène du premier ordre et

$$\tilde{a}_0 = \sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}D_jD_k\varphi - \frac{1}{\varphi}\left(\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}D_j\varphi\, D_k\varphi + \sum_{j=1}^{n}a_jD_j\varphi\right) + a_0\psi.$$

Pour $Z\leqslant -1$, c'est-à-dire:

$$\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}D_j\varphi\, D_k\varphi + \sum_{j=1}^{n}a_jD_j\varphi\leqslant 0$$

sur $\partial\Omega$, nous avons $\tilde{a}_0>0$ au voisinage de $\partial\Omega$ et nous pouvons trouver C et $k>0$ tels que $\psi>0$ et $\tilde{a}_0\geqslant k^{-1}\psi$ sur Ω. Maintenant, si v a un maximum >0, il est atteint en un point $x_0\in\Omega$ tel que

$$\tilde{a}_0(x_0)v(x_0)\leqslant f(x_0),$$

donc

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}v(x)\leqslant\sup_{x\in\overline{\Omega}}\frac{f(x)}{\tilde{a}_0(x)}\leqslant k\sup_{x\in\overline{\Omega}}\frac{f(x)}{\psi(x)};$$

en raisonnant de même pour $-v$, nous obtenons bien l'inégalité annoncée dans le théorème 4.

Ce théorème implique évidemment l'unicité dans $C_0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ (et a fortiori dans $C_\varphi^{2+\mu}$ de la solution u de $\mathcal{A}u=f\in C^\mu(\overline{\Omega})$. En fait nous avons une unicité un peu plus faible pour $Z<0$; plus précisément:

PROPOSITION 5. *Soit un opérateur $\mathcal{A}$ à coefficients réels vérifiant les hypothèses* (2), (3), (4) *et* (7) *avec $a_0>0$ sur $\overline{\Omega}$. Alors: $u\in C_\varphi^{2+\mu}$ et $\mathcal{A}u=0$ impliquent $u=0$.*

DÉMONSTRATION. Soit donc $u\in C_\varphi^{2+\mu}$ et $\mathcal{A}u=0$; si $u\neq 0$, son maximum sur $\overline{\Omega}$ est atteint nécessairement en $x_0\in\partial\Omega$; nous pouvons supposer $u(x_0)>0$

(sinon nous considérons $-u$); au voisinage de x_0 nous avons en coordonnées locales (avec $y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n_+$)

$$\mathfrak{L}\tilde{u} + \mathfrak{R}\tilde{u} + a_0\tilde{u} = 0$$

avec $\mathfrak{L} = -y_n \sum_{j=1}^{n} D_j^2 + Z(x_0)D_n$ et $\mathfrak{R}$ est un opérateur du second ordre de la forme $y_n \sum_{j,k=1}^{n} C_{jk}D_jD_k + \sum_{j=1}^{n} C_jD_j$ et $C_j(0) = C_{jk}(0) = 0$.

Nous avons donc

$$(-y_nD_n^2 + Z(x_0)D_n + a_0)\tilde{u} = g$$

avec

$$g(0) = 0\ , \qquad g \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}^n_+})\ , \qquad \tilde{u} \in C^{2+\mu}_{y_n}(\mathbb{R}^n_+)\ .$$

Il en résulte que $y_nD_n^2\tilde{u}$ a une trace pour $y_n = 0$ et que cette trace est nulle puisque $D_n\tilde{u}$ est bornée donc

$$Z(x_0)\, D_n\tilde{u}(0) + a_0\tilde{u}(0) = 0$$

ce qui implique (avec $a_0 > 0$ et $Z(x_0) < 0$): $D_n\tilde{u}(0) > 0$ et donc une contradiction.

La démonstration ci-dessus suppose seulement en fait que l'on a $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et $\varphi u \in C^2(\bar{\Omega})$; elle ne fait pas non plus intervenir l'hypothèse (6).

De l'estimation a priori du théorème 1 et du résultat d'unicité ci-dessus nous déduisons, par un argument d'analyse fonctionnelle, une estimation a priori plus forte.

PROPOSITION 6. *Soit un opérateur $\mathcal{A}$ à coefficients réels vérifiant les hypothèses* (2), (3), (4), (6) *et* (7) *avec $a_0 > 0$ sur $\bar{\Omega}$. Il existe $C > 0$ tel que l'on ait, pour tout $u \in C^{2+\mu}_\varphi$,*

$$\|u\|_{2+\mu,\varphi} \leqslant C\|\mathcal{A}u\|_\mu\ .$$

DÉMONSTRATION. Lorsque $Z \leqslant -1$, la proposition 6 est un corollaire immédiat des théorèmes 1 et 4. Pour $Z < 0$ seulement, nous raisonnons par l'absurde. Si la proposition n'est pas vraie, il existe une suite $(u_j)_{j\in\mathbf{N}}$ telle que

$$j\|\mathcal{A}u_j\|_\mu \leqslant \|u_j\|_{2+\mu,\varphi} = 1\ . \tag{22}$$

Nous pouvons trouver une sous-suite (notée encore u_j) qui converge faiblement dans $C^{2+\mu}_\varphi$ et fortement dans $C^\mu(\bar{\Omega})$ vers $u \in C^{2+\mu}_\varphi$; donc $\mathcal{A}u_j$ tend vers $\mathcal{A}u$ faiblement dans $C^\mu(\bar\Omega)$ et vers 0 dans $C^\mu(\bar\Omega)$ d'après (22); donc $u=0$ d'après la proposition 5 et donc $\|u_j\|_\mu \to 0$, ce qui avec (22) contredit l'inégalité a priori (8) du théorème 1.

Nous pouvons maintenant déduire du théorème 1 et de la proposition 6 un résultat d'existence (le théorème 2) en utilisant une méthode de continuité; notons d'abord

$$\mathcal{A}_0 = -\operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} + 1 .$$

Il est démontré dans [2] par des méthodes hilbertiennes que $\mathcal{A}_0$ est un isomorphisme de $C^\infty(\bar\Omega)$ sur $C^\infty(\bar\Omega)$. Nous avons aussi:

PROPOSITION 7. *L'opérateur $\mathcal{A}_0$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_\varphi$ sur $C^\mu(\bar\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Nous utilisons ici les propriétés suivantes bien connues des espaces C^μ (cf. [4] par exemple):

(A) *Pour $a \in C^\mu(\bar\Omega)$, il existe une suite $(a^m)_{m\in\mathbf{N}}$ telle que $a^m \in C^\infty(\bar\Omega)$, $\|a^m\|_\mu \leqslant 2\|a\|_\mu$ et, quel que soit $\nu \in [0, \mu[$, $\|a^m - a\|_\nu \to 0$.*

(B) *Si une suite $(a^m)_{m\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $C^\mu(\bar\Omega)$ et de Cauchy dans $C^0(\bar\Omega)$ elle est de Cauchy dans tout $C^\nu(\bar\Omega)$ pour $\nu \in [0, \mu]$ et sa limite a est dans $C^\mu(\bar\Omega)$.*

L'opérateur $\mathcal{A}_0$ étant linéaire continu et injectif de $C^{2+\mu}_\varphi$ dans $C^\mu(\bar\Omega)$, il suffit de montrer qu'il est surjectif: soit $f \in C^\mu(\Omega)$, d'après (A), il existe $(f^m)_{m\in\mathbf{N}}$ avec $f^m \in C^\infty(\bar\Omega)$, $\|f^m\|_\mu \leqslant 2\|f\|_\mu$ et pour $\nu \in [0, \mu[$, $\|f^m - f\|_\nu \to 0$. Pour chaque $m \in \mathbf{N}$, il existe $u^m \in C^\infty(\bar\Omega)$ tel que $\mathcal{A}_0 u^m = f^m$ et, d'après les estimations a priori (8), $\|u^m\|_{2+\mu,\varphi}$ reste borné et (u^m) est une suite de Cauchy dans $C^{2+\nu}_\varphi$ pour $0 \leqslant \nu < \mu$; d'après (B) la limite de (u^m) dans $C^{2+\nu}_\varphi$ est alors un élément $u \in C^{2+\mu}_\varphi$ et, par passage à la limite dans $C^\nu(\Omega)$, de $\mathcal{A}_0 u^m = f^m$, on déduit $\mathcal{A}_0 u = f$; ce qui prouve la proposition 7.

Nous considérons maintenant la famille $(\mathcal{A}_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ d'opérateurs définis par

$$\mathcal{A}_t = (1-t)\mathcal{A}_0 + t\mathcal{A} .$$

Ces opérateurs sont tous des applications linéaires continues de $C^{2+\mu}_\varphi$ dans $C^\mu(\bar\Omega)$ et pour $t=0$, $\mathcal{A}_0$ est un isomorphisme.

Soit $I = \{t \in [0,1];\ \mathcal{A}_t$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_\varphi$ sur $C^\mu(\bar\Omega)\}$; d'après ce que nous venons de voir (proposition 7), $0 \in I$; évidemment I est ouvert; pour montrer que $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_\varphi$ sur $C^\mu(\bar\Omega)$, il suffit de montrer que I est fermé. Nous allons, pour cela, utiliser les estimations a priori valables avec la même constante pour tous les opérateurs $\mathcal{A}_t$; soit $t_\infty \in \bar I$

et (t_m) une suite d'éléments de I tendant vers t_∞; soit $f \in C^\mu(\bar{\Omega})$; pour tout m, il existe $u^m \in C_\varphi^{2+\mu}$ tel que

$$\mathcal{A}_{t_m} u^m = f$$

et

$$\|u^m\|_{2+\mu,\varphi} \leqslant C(\|f\|_\mu + \|u\|_\mu)\,.$$

Pour tout $\nu \in [0, \mu[$, la suite (u^m) est de Cauchy dans $C_\varphi^{2+\nu}$ et sa limite est $u \in C_\varphi^{2+\mu}$; montrons que l'on a: $\mathcal{A}_{t_\infty} u = f$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{t_\infty} u &= f + \mathcal{A}_{t_\infty} u - \mathcal{A}_{t_m} u + \mathcal{A}_{t_m}(u - u^m)\\ &= f + (t_\infty - t)(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0)u + \mathcal{A}_{t_m}(u - u^m)\,.\end{aligned}$$

Or $|t_\infty - t_m|\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0)u\|_\mu \to 0$ quand $m \to \infty$ et pour tout $\nu \in [0, \mu[$,

$$\|\mathcal{A}_{t_m}(u - u^m)\|_\nu \leqslant C\|u - u^m\|_{2+\nu,\varphi}$$

$$\|\mathcal{A}_{t_m}(u - u^m)\|_\nu \to 0 \qquad \text{quand } m \to \infty\,.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 2.

Montrons rapidement comme s'obtient le théorème 3; nous ne pouvons plus utiliser un principe du maximum pour démontrer l'unicité, mais nous remplaçons cet argument par l'utilisation de la théorie hilbertienne de tels opérateurs, laquelle est bien connue (cf. [8] et [3]).

Tout le reste de la démonstration reste identique; il suffit donc de prouver le

LEMME 3. *Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (2), (3), (4) *et* (6) *avec $Z \leqslant -1$ et les coefficients a_{jk} dans $C^2(\bar{\Omega})$ et a_p dans $C^1(\bar{\Omega})$ pour $1 \leqslant j, k, p \leqslant n$; il existe $C > 0$ tel que pour* $\operatorname{Re} a_0 > C$ *l'opérateur $\mathcal{A}$ est injectif de $C_\varphi^{2+\mu}$ dans $C^\mu(\bar{\Omega})$.*

Et ce lemme est une conséquence immédiate de la 2ème inégalité de la proposition 3 de [8] dont on vérifie immédiatement qu'elle est valable pour $Z < -\frac{1}{2}$.

4. – Applications et remarques.

1) Dans les résultats ci-dessus nous avons considéré un second membre $f \in C^\mu(\bar{\Omega})$ avec $0 < \mu < 1$. Si cette donnée f et les coefficients de l'opérateur $\mathcal{A}$ sont plus réguliers, nous obtenons aussi plus de régularité pour la solution donnée par le théorème 2, dont nous avons le

COROLLAIRE 1. *Soit $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses* (2), (3), (4), (6) *et* (7) *avec μ remplacé par $k+\mu$ et $k \in \mathbf{N}$. Supposons les coefficients de $\mathcal{A}$ réels et $a_0 > 0$ sur $\bar{\Omega}$; alors $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de*

$$\{u \in C^{k+1+\mu}(\bar{\Omega});\ \varphi u \in C^{k+2+\mu}(\bar{\Omega})\} \quad \textit{sur}\ C^{k+\mu}(\bar{\Omega})\ .$$

Un tel résultat s'obtient par récurrence sur k, en localisant et gagnant d'abord les dérivations tangentielles au bord, puis les dérivées normales en utilisant une inégalité de Hardy.

2) Nous avons toujours supposé $Z < 0$; sinon le problème aux limites fait intervenir des conditions de traces et peut être traité comme ci-dessus en utilisant de plus le noyau de Poisson.

Des résultats dans cette direction (le problème de Dirichlet pour les opérateurs modèles dans certains espaces de Hölder avec poids) se trouvent dans un travail de C. R. Graham dont le preprint « The Dirichlet Problem for the Bergman Laplacian » vient de nous parvenir.

3) Un opérateur tel que $-\operatorname{div}\varphi\operatorname{grad}$ a le même spectre dans le cadre hilbertien et comme opérateur de $C^{2+\mu}_\varphi$ dans $C^\mu(\bar{\Omega})$; en particulier, pour $f \in C^\mu(\bar{\Omega})$ et vérifiant $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$, il existe une fonction $u \in C^{2+\mu}_\varphi$ définie à une constante près et vérifiant $\operatorname{div}\varphi\operatorname{grad} u = f$; en notant $w = -\varphi\operatorname{grad} u$, nous obtenons alors une solution w dans $(C^{1+\mu}(\bar{\Omega}))^n$ de $\operatorname{div} w = f$ et $w = 0$ sur $\partial\Omega$ (et w vérifie de plus $\operatorname{rot} w/\varphi = 0$).

4) *Problèmes non linéaires.* Les estimations obtenues ci-dessus permettent de prouver des résultats d'existence dans des espaces höldériens pour des problèmes quasilinéaires elliptiques dégénérés du type

$$\mathcal{A}(u) \equiv -\varphi\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x, u, \varphi\operatorname{grad} u)\, D_j D_k u + \sum_{j=1}^n a_j(x, u)\, D_j u = f(x, u, \varphi\operatorname{grad} u)$$

sous des hypothèses sur a_{jk}, a_j, f permettant d'utiliser le théorème de Leray-Schauder ou la méthode par continuité; le point essentiel consiste à montrer que, pour un certain $a_0 \in \mathbf{R}$, $\{v;$ il existe $\tau \in]0,1[$ avec $\mathcal{A}(v) + (1-\tau)a_0 v = \tau f(x, v, \varphi\operatorname{grad} v)\}$ est borné dans $\{v \in C^\mu(\bar{\Omega});\ \varphi u \in C^{1+\mu}(\bar{\Omega})\}$. Considérons par exemple l'équation

$$-\operatorname{div}\varphi\operatorname{grad} u + u^3 = f; \tag{23}$$

nous lui associons, pour $\tau \in]0,1[$,

$$-\operatorname{div}\varphi\operatorname{grad} v + (1-\tau)v = \tau(f - v^3) \tag{24}$$

et, en multipliant les deux membres de (24) par v^{2k+1} pour $k \in \mathbb{N}$ et en intégrant sur Ω, nous obtenons

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \left(\|f\|_{L^{p/3}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{pour tout } p \geqslant 4 \,.$$

Il en résulte, d'après la remarque A1, que les solutions de (24) restent dans un borné de $\{v \in L^p(\Omega),\ D_j u \in L^p(\Omega) \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n\}$ et donc dans un borné de $C^\mu(\bar{\Omega})$ et enfin, grâce au théorème 1, dans un borné de $C^{2+\mu}_\varphi$; cela implique l'existence d'une solution de (23). Par ailleurs l'unicité ici est immédiate (si u et $u + w$ sont deux solutions de (23), nous avons

$$-\operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} w + (u + w)^3 - u^3 = 0$$

d'où

$$\int_\Omega \varphi |\operatorname{grad} w|^2 dx + \int_\Omega w^2(u^2 + uw + w^2)\, dx = 0$$

ce qui implique $w = 0$).

5. - Appendices.

A.1. *Démonstration du lemme* 1.

Nous posons

$$\begin{aligned}
&A(x, y, \theta) = \{|x - y|^2\theta + |x - \tilde{y}|^2(1 - \theta)\}^{\frac{1}{2}} \\
\text{(A.1)}\qquad &F(x, y, \theta) = \gamma y_n^{-z-1} A(x, y, \theta)^{z+2-n}\{\theta(1 - \theta)\}^{-(z+2)/2} \\
&G(x, y, \theta) = 2(n - 2 - z)\gamma y_n^{-z-1} A(x, y, \theta)^{z-n}\{\theta(1 - \theta)\}^{-z/2}
\end{aligned}$$

pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ et $0 < \theta < 1$. Alors nous avons par définition

$$\text{(A.2)}\qquad E(x, y) = \int_0^1 F(x; y, \theta)\, d\theta \,.$$

Preuve de (i). Puisque $A(x, y, \theta) > |x - y|$, nous avons

$$\text{(A.3)}\qquad |E(x, y)| \leqslant \frac{\Gamma(-z'/2)^2}{\Gamma(-z')} y_n^{-z'-1} |x - y|^{z'+2-n}, \qquad \text{si } z' = \Re e z < 0 \,.$$

Notons aussi que $A(x, y, \theta) \geqslant \sqrt{1 - \theta}(x_n + y_n)$. Si donc $z' \leqslant -1$, on a

$$|F(x, y, \theta)| \leqslant |\gamma| |x - y|^{1-n} / \sqrt{\theta(1 - \theta)} \,,$$

d'où

$$|E(x, y)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-z'/2)}{\Gamma((1-z')/2)} |x-y|^{1-n}, \quad \text{si } z' \leqslant -1 . \tag{A.4}$$

(A.3) dans le cas $-1 < z' < 0$ et (A.4) dans le cas $z' \leqslant -1$ montrent que $|E(x, y)|$ est localement intégrable par rapport à y sur $\overline{\mathbf{R}^n_+}$.

Preuve de (ii). Soit $0 < \varepsilon < 1$ et posons

$$E_\varepsilon(x, y) = \int_0^{1-\varepsilon} F(x, y, \theta)\, d\theta . \tag{A.5}$$

Cette fonction, que nous appelons solution élémentaire approchée, n'a de singularité que sur $y_n = 0$. Et de plus, nous avons

$$\mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x, y, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \{y_n G(x, y, \theta)\} ,$$

d'où l'égalité suivante, en notant que $G(x, y, 0) = 0$,

$$\mathcal{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E_\varepsilon(x, y) = y_n G(x, y, 1-\varepsilon) . \tag{A.6}$$

Soit maintenant $f \in C^0(\overline{\mathbf{R}}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\overline{\mathbf{R}}^n_+)$ et nous définissons $E_\varepsilon f(x)$ comme dans (17). Alors, (A.6) implique

$$\mathcal{L} E_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbf{R}^n_+} y_n G(x, y, 1-\varepsilon) f(y)\, dy .$$

Passons à la limite quand $\varepsilon \downarrow 0$. D'abord, $y_n G(x, y, 1-\varepsilon)$ tend vers 0 uniformément dans chaque compact de $\{y \in \overline{\mathbf{R}^n_+} ; y \neq x\}$. Ensuite, étant donnés un compact $K \subset \mathbf{R}^n_+$ et x à l'intérieur de K, on a

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_K y_n G(x, y, 1-\varepsilon)\, dy = 1 . \tag{A.7}$$

Donc, $\mathcal{L} E_\varepsilon f(x)$ tend vers $f(x)$. La limite de $E_\varepsilon f(x)$ étant $Ef(x)$, nous avons $\mathcal{L} Ef(x) = f(x)$ dans $\mathbf{R}^n_+$.

PREUVE DE (iii). Soit ${}^t\mathcal{L}$ le transposé de $\mathcal{L}$, c'est-à-dire,

$$ {}^t\mathcal{L}v = -\sum_{j=1}^{n} D_j^2(y_n v) - zD_n v. $$

Alors nous avons l'identité

$$ (\mathcal{L}u)v - u\,{}^t\mathcal{L}v = \sum_{j=1}^{n-1} D_j y_n(u\, D_j v - v\, D_j u) - D_n\big(y_n v\, D_n u - y_n^{-z} u\, D_n(y_n^{z+1} v)\big)\,. $$

Nous l'appliquons à $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)$ et à $v(y) = F(x, y, \theta)$ et intégrons chaque membre sur $\mathbb{R}^n_+$ par rapport à y. Par la compacité du support de f, les intégrales de la première somme à droite s'annulent. Et, $y_n F$ et $y_n^{-z}(\partial/\partial y_n)(y_n^{z+1} F)$ s'annulent aussi sur $y_n = 0$. Donc nous avons

$$ \int_{R^n_+} F(x, y, \theta)\,\mathcal{L}u(y)\, dy = \int_{R^n_+} u(y)\,{}^t\mathcal{L}F(x, y, \theta)\, dy\,. $$

Intégrons chaque membre sur l'intervalle $0 < \theta < 1 - \varepsilon$ en utilisant

$$ \text{(A.8)} \qquad {}^t\mathcal{L}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) F(x, y, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\{x_n G(x, y, \theta)\}\,. $$

Alors nous avons

$$ E_\varepsilon \mathcal{L}u(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n G(x, y, 1-\varepsilon)\, u(y)\, dy\,, $$

ce qui donne $E\mathcal{L}u(x) = u(x)$ dans $\mathbb{R}^n_+$, car

$$ \text{(A.9)} \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n G(x, y, 1-\varepsilon)\, dy = 1 \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}^n_+\,. $$

Le lemme est établi.

A.2. *Quelques égalités et inégalités contenant $D_x E(x, y)$.*

Nous posons dès maintenant

$$ \text{(A.10)} \qquad K_j(x, y) = D_{x_j}(x, y)\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,, \quad \text{et} \quad K_r(x, y) = -D_r E(x, y) $$

où $r = |x'-y'|$. Et nous utilisons les notations suivantes:

$$\begin{aligned} B(x_n, y_n, \theta) &= \{(x_n-y_n)^2\theta + (x_n+y_n)^2(1-\theta)\}^{\frac{1}{2}}, \\ \xi(x_n, y_n, \theta) &= x_n + (1-2\theta)y_n, \\ k(x_n, y_n) &= (x_n-y_n)/(x_n+y_n), \end{aligned} \tag{A.11}$$

pour $x_n > 0$, $y_n > 0$ et $0 < \theta < 1$. Si nous posons encore

$$\begin{aligned} F_r(x, y, \theta) &= \gamma' r y_n^{-z-1} A(x, y, \theta)^{z-n} \\ F_n(x, y, \theta) &= -\gamma' \xi y_n^{-z-1} A(x, y, \theta)^{z-n} \end{aligned} \tag{A.12}$$

avec $\gamma'(z) = (n-2-z)\gamma(z)$, nous avons

$$K_*(x, y) = \int_0^1 F_*(x, y, \theta) \ \{\theta(1-\theta)\}^{-(z+2)/2} \, d\theta, \tag{A.13}$$

avec $* = r$ ou n.

$$K_j(x, y) = \frac{y_j - x_j}{\gamma} K_r(x, y), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{A.14}$$

$K_r(x, y)$ est positive presque partout si z est réel et négatif. Les $K_j(x, y)$ $(1 < j \leqslant n$ et $j = r)$ sont homogènes de degré $-n$ par rapport à (x, y). Un raisonnement analogue à celui fait pour avoir (A.3) et (A.4) nous donne:

LEMME A.1. *Soit F un compact de $]-\infty, 0[$; il existe $C > 0$ tel que pour $1 \leqslant j, k \leqslant n$, pour $z' = \operatorname{Re} z \in F$ et pour $(x, y) \in \mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}_+^n$ avec $x \neq y$, nous avons*

$$|K_j(x, y)| \leqslant \begin{cases} C y_n^{-z'-1} |x-y|^{z'+1-n}, & si \ -1 \leqslant z' < 0, \\ C|x-y|^{-n}, & si \ z' \leqslant -1; \end{cases} \tag{A.15}$$

$$|D_{x_k} K_j(x, y)| \leqslant \begin{cases} C y_n^{-z'-1} |x-y|^{z'-n}, & si \ -1 \leqslant z' < 0, \\ C|x-y|^{-n-1}, & si \ z' \leqslant -1. \end{cases} \tag{A.16}$$

Ensuite, nous avons besoin d'évaluer les intégrales

$$\begin{aligned} k_j(x_n, y_n) &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K_j(x, y)\, dy', \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \\ \tilde{k}_j(x_n, y_n) &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |K_j(x, y)|\, dy', \qquad 1 \leqslant j \leqslant n \text{ ou } j = r. \end{aligned} \tag{A.17}$$

Naturellement, (A.14) implique

$$k_j(x_n, y_n) = 0 \leqslant \tilde{k}_j(x_n, y_n) \leqslant \tilde{k}_r(x_n, y_n) , \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1 . \tag{A.18}$$

Donc, ce sont k_n, $\tilde{k}_n$ et $\tilde{k}_r$ qui restent. Posons $\left(\text{avec } \int = \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}}\right)$

$$\begin{aligned} h_n(x_n, y_n, \theta) &= \int F_n(x, y, \theta)\, dy' \\ \tilde{h}_n(x_n, y_n, \theta) &= \int |F_n(x, y, \theta)|\, dy' \\ \tilde{h}_r(x_n, y_n, \theta) &= \int |F_r(x, y, \theta)|\, dy' . \end{aligned} \tag{A.19}$$

Alors par (A.13), nous avons:

$$\begin{aligned} k_n(x_n, y_n) &= \int_0^1 h_n(x_n, y_n, \theta)\{\theta(1-\theta)\}^{-(z+2)/2}\, d\theta , \\ \tilde{k}_n(x_n, y_n) &\leqslant \int_0^1 \tilde{h}_n(x_n, y_n, \theta)\big(\theta(1-\theta)\big)^{-(z'+2)/2}\, d\theta \\ \tilde{k}_r(x_n, y_n) &\leqslant \int_0^1 \tilde{h}_r(x_n, y_n, \theta)\big(\theta(1-\theta)\big)^{-(z'+2)/2}\, d\theta . \end{aligned} \tag{A.20}$$

Il faut calculer d'abord h_n, $\tilde{h}_n$ et $\tilde{h}_r$. Comme $A = \sqrt{r^2 + B^2}$, nous pouvons passer aux coordonnées polaires

$$\begin{aligned} h_n(x_n, y_n, \theta) &= -(1-k)^{-z-1}\varphi_z(k, \theta)/(x_n + y_n) , \\ \tilde{h}_n(x_n, y_n, \theta) &\leqslant C_1(1-k)^{-z'-1}\varphi_{z'}(|k|, \theta)/(x_n + y_n) , \\ \tilde{h}_r(x_n, y_n, \theta) &\leqslant C_2(1-k)^{-z'-1}\omega_{z'}(k, \theta)/(x_n + y_n) \end{aligned} \tag{A.21}$$

où k a été définie par (A.11), $C_1 = |\gamma'(z)/\gamma'(z')|$, $C_2 = C_1\Gamma(n/2)/\big(\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)\big)$, et les $\varphi_z(k, \theta)$ et $\omega_{z'}(k, \theta)$ sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \varphi_z(k, \theta) &= \left\{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Big/\big(\sqrt{\pi}\,\Gamma(-z/2)\big)\right\}(k\theta + 1 - \theta)(k\theta^2 + 1 - \theta)^{(z-1)/2} \\ \omega_{z'}(k, \theta) &= (k^2\theta + 1 - \theta)^{z'/2} . \end{aligned} \tag{A.22}$$

LEMME A.2. *Soient $z' = \Re e\, z < 0$, k réel et $0 < k^2 < 1$. Alors*

$$\int_0^1 \varphi_z(k,\theta)\{\theta(1-\theta)\}^{-(z+2)/2}\,d\theta = 2(k+1)^z Y(k)\,, \tag{A.23}$$

où $Y(k) = 1$ si $k > 0$ et $Y(k) = 0$ si $k < 0$. Et

$$\int_0^1 \omega_{z'}(k,\theta)\{\theta(1-\theta)\}^{-(z'+2)/2}\,d\theta \leqslant 2^{1-z'/2}\left(-\frac{4}{z'} + |\mathrm{Log}\, 2k^2|\right). \tag{A.24}$$

PREUVE. Posons $s = |k|\theta/(1-\theta)$ et $\varepsilon = \mathrm{sgn}\, k$. Alors

$$\left\{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{-z}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\right\}\int_0^1 \varphi_z(k,\theta)\{\theta(1-\theta)\}^{-(z+2)/2}\,d\theta$$
$$= |k|^{z/2}\int_0^{+\infty}\left(\varepsilon\sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{s}}\right)\left(s + \frac{1}{s} + |k| + \frac{1}{|k|}\right)^{(z-1)/2}\frac{ds}{s}.$$

Soit $k < 0$ ($\varepsilon = -1$). Par le changement de variables $s \to 1/s$, on voit que le membre de droite est nul. Soit par contre $k > 0$. Dans ce cas, nous posons $\sqrt{s} - 1/\sqrt{s} = (\sqrt{k} + 1/\sqrt{k})u$. Alors le membre de droite est égal à

$$2(k+1)^z\int_{-\infty}^{+\infty}(u^2+1)^{(z-1)/2}\,du = 2(k+1)^z\sqrt{\pi}\,\Gamma(-z/2)\Big/\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right),$$

ce qui montre (A.23).

Ensuite, l'intégrale à gauche de (A.24) s'écrit

$$\int_0^1 \{\theta + k^2(1-\theta)\}^{z'/2}\{\theta(1-\theta)\}^{-(z'+2)/2}\,d\theta = \int_0^{\frac12} + \int_{\frac12}^1 \equiv I_1 + I_2\,.$$

Quant à I_1, on a

$$I_1 \leqslant 2^{1-z'/2}\int_0^{\frac12}\left(\frac{\theta+k^2}{\theta}\right)^{z'/2}\frac{d\theta}{\theta} = 2^{1-z'/2}\int_0^{1/(2k^2)}\left(\frac{\theta+1}{\theta}\right)^{z'/2}\frac{d\theta}{\theta}$$
$$\leqslant 2^{1-z'/2}\left(-\frac{2}{z'} + \left|\log\frac{1}{2k^2}\right|\right).$$

De même, on obtient $|I_2| \leqslant 2^{1-z'/2}((-2)/z')$. Ce qui implique le lemme A.2.

Ce lemme combiné avec (A.20) et (A.21) nous donne tout de suite le

LEMME A.3. *Soit F un compact de* $]-\infty, 0[$; *il existe* $C > 0$ *tel que, pour* $z' = \Re e\, z \in F$, $x_n > 0$, $y_n > 0$ *avec* $x_n \neq y_n$, *on ait*:

$$k_n(x_n, y_n) = -x_n^z y_n^{-z-1} Y(x_n - y_n)\,, \tag{A.25}$$

$$\tilde{k}_n(x_n, y_n) \leqslant C \operatorname{Min}\{1, (x_n/y_n)^{z'}\}/y_n\,, \tag{A.26}$$

$$\tilde{k}_r(x_n, y_n) \leqslant C y_n^{-z'-1}(x_n + y_n)^{z'}\left(1 + \log\left|\frac{x_n + y_n}{x_n - y_n}\right|\right). \tag{A.27}$$

Comme une application de ce lemme, nous pouvons démontrer la continuité des opérateurs intégraux

$$f(x) \to K_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} K_j(x, y) f(y)\, dy\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{A.28}$$

dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^n_+)$:

LEMME A.4. *Soit* $z' = \Re e\, z < 0$. *Alors, les opérateurs intégraux* K_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *sont linéaires et continus de* $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ *dans lui-même si*

$$\operatorname{Max}(1, -1/z') < p < +\infty\,. \tag{A.29}$$

PREUVE. D'après le théorème de Hardy-Littlewood-Polya [6], la norme de l'opérateur K_j dans $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ est majoré par l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \tilde{k}_j(1, t)\, t^{-1/p}\, dt$$

qui est finie si p satisfait à (A.29).

REMARQUE A.1. Du lemme A.4 nous pouvons déduire, par la méthode utilisée aux paragraphes II et III, les résultats analogues aux théorèmes 1, 2 et 3 où les espaces de Hölder sont remplacés par les espaces $L^p(\Omega)$.

A.3. *Les fonctions auxiliaires* $\{U_j(x, y_n)\}$.

Nous allons étudier les fonctions

$$U_j(x, y_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(x, y)\, \alpha(y')\, dy'\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{A.30}$$

définies pour $x \in \mathbb{R}^n_+$ et $0 < y_n \neq x_n$, où $\alpha(x')$ est un élément de $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ fixé une fois pour toutes.

Soit F un compact de $\mathbb{R}^2$ contenu dans $\{(z', \sigma);\ z' < 0$ et $0 < \sigma < \mathrm{Min}\,(1, -z')\}$. Posons encore

$$\begin{aligned}[\alpha]_{1+\sigma} &= \mathrm{Max}\,\{[D_j\alpha]_\sigma;\ 1 \leqslant j \leqslant n-1\}\,,\\ H &= \mathrm{Max}\,(\|\alpha\|_\infty,\ [\alpha]_\sigma,\ [\alpha]_{1+\sigma})\,.\end{aligned} \tag{A.32}$$

LEMMA A.5. *Soit $0 < \sigma < \mathrm{Min}\,(1, -z')$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n_+$ et $0 < y_n \neq x_n$, nous avons*

$$|U_j(x, y_n)| \leqslant C y_n^{\sigma-1}\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \tag{A.33}$$

$$|U_n(x, y_n) + \alpha(x') x_n^z y_n^{-z-1} Y(x_n - y_n)| \leqslant C y_n^{\sigma-1}\,, \tag{A.34}$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de (α, F, n).

DÉMONSTRATION. Posons, pour $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$N_z(y') = \gamma'(z)(1 + |y'|^2)^{(z-n)/2}\,. \tag{A.35}$$

Alors cette fonction satisfait aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned}&\int |N_z(y')|(1 + |y'|)^{1+\sigma}\, dy' < \infty\,,\\ &\int y_j N_z(y')\, dy' = 0\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1\,,\\ &\int N_z(y')\, dy' = 2^{-z-1}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Big/\left(\sqrt{\pi}\,\Gamma(-z/2)\right) \equiv \beta(z)\,,\end{aligned} \tag{A.36}$$

où les intégrales sont prises sur $\mathbb{R}^{n-1}$. Soient

$$\Phi_j(x', B) = \int y_j N_z(y')\alpha(x' - By')\, dy'\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1 \tag{A.37}$$

$$\Phi_n(x', B) = \int N_z(y')\alpha(x' - By')\, dy'\,. \tag{A.38}$$

Les U_j définies par (A.30) s'écrivent encore

$$U_j(x, y_n) = -\int_0^1 y_n^{-z-1} B^z \Phi_j(x', B)\{\theta(1-\theta)\}^{-(z+2)/2}\, d\theta\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1\,, \tag{A.39}$$

$$(\mathrm{A}.40)\qquad U_n(x, y_n) = -\int_0^1 \zeta y_n^{-z-1} B^{z-1}\Phi_n(x', B)\{\theta(1)\theta)\}^{-(z+2)/2}\, d\theta$$

où les B et ζ ont été définies par (A.11). Il faut donc étudier les $\Phi_j(x', B)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ comme fonctions de B.

LEMME A.6.

$$(\mathrm{A}.41)\qquad |\Phi_j(x', B)| \leqslant C\,\mathrm{Min}\,(1, B^\sigma)\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1\,,$$

$$(\mathrm{A}.42)\qquad |\Phi_n(x', B) - \beta(z)\alpha(x')| \leqslant C\,\mathrm{Min}\,(1, B^{\sigma+1})\,,$$

où C est une constante dépendant seulement de α, β, F et n.

PREUVE DU LEMME A.6. Nous utilisons (A.36). Puisque α est bornée, les membres à gauche de (A.41) et de (A.42) sont plus petits que

$$C_1 = \|\alpha\|_\infty \int (2 + |y'|)|N_z(y')|\, dy'\,.$$

Soit maintenant $0 < B \leqslant 1$. Pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $\alpha(x' - By')$ dans l'intégrale de (A.37) se remplace par $\alpha(x' - By') - \alpha(x')$ dont le module est plus petit que $[\alpha]_\sigma(B|y'|)^\sigma$. Donc, $|\Phi_j|$ ne dépasse pas $C_2 B^\sigma$, où

$$C_2 = [\alpha]_\sigma \int |y'|^{1+\sigma}|N_z(y')|\, dy'\,.$$

Par conséquent, $|\Phi_j| \leqslant \mathrm{Min}\,(C_1, C_2 B^\sigma) \leqslant C\,\mathrm{Min}\,(1, B^\sigma)$. Considérons $\Phi_n(x', B) - \beta(z)\alpha(x')$ pour $0 < B \leqslant 1$, qui est représentée par (A.38) avec $\alpha(x' - By')$ remplacée par $\alpha(x' - By') - \alpha(x')$. Mais celle-ci se remplace encore par

$$\alpha(x' - By') - \alpha(x') + B\sum_{j=1}^{n-1} y_j D_j\alpha(x') = B\sum_{j=1}^{n-1} y_j \int_0^1 \{D_j\alpha(x') - D_j\alpha(x' - \tau By')\}\, d\tau$$

dont le module ne dépasse pas $[\alpha]_{1+\sigma}(B|y'|)^{1+\sigma}$. Donc, $|\Phi_n(x', B) - \beta(Z)\alpha(x')|$ est plus petit que $C_3 B^{\sigma+1}$, où

$$C_3 = [\alpha]_{1+\sigma} \int |y'|^{1+\alpha}|N_z(y')|\, dy'\,.$$

Par conséquent, nous avons (A.42).

Le lemme est démontré.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU LEMME A.5. Posons

$$L = \int_0^1 B^{z'+\sigma}\{\theta(1-\theta)\}^{-(z'+2)/2}\,d\theta \tag{A.43}$$

avec B donnée par (A.11). Puisque $z'+\sigma<0$ à cause de (A.31) et que $B \geqslant y_n\sqrt{1-\theta}$, nous avons

$$0 < L \leqslant C_4 y_n^{z'+\sigma} \tag{A.44}$$

avec

$$C_4 = \int_0^1 \theta^{-(z'+2)/2}(1-\theta)^{-(z'+\sigma+2)/2}\,d\theta < \infty\,.$$

Pour obtenir (A.33), nous utilisons (A.39) et (A.41) qui impliquent $|U_j| \leqslant \leqslant C y_n^{-z'-1} L \leqslant C y_n^{\sigma-1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

Passons maintenant à la preuve de (A.34). Nous nous souvenons de (A.25) qui signifie

$$\beta(Z)\int_0^1 \zeta y_n^{-z-1} B^{z-1}\{\theta(1-\theta)\}^{-(z+2)/2}\,d\theta = x_n^z y_n^{-z-1}\,Y(x_n - y_n)\,.$$

Alors, d'après (A.40) et (A.42), le membre à gauche de (A.34) est majoré par

$$C\int_0^1 y_n^{-z'-1} B^{z'}\,\mathrm{Min}\,(1, B^{\sigma+1})\{\theta(1-\theta)\}^{-(z'+2)/2}\,d\theta \leqslant C y_n^{-z'-1} L\,,$$

car $|\zeta/B| \leqslant 1$ et $\mathrm{Min}\,(1, B^{\sigma+1}) \leqslant B^{\sigma}$, d'où (A.34) grâce à (A.44). Le lemme A.5 est établi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), pp. 623-727.

[2] M. S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC, *Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Arch. Rational Mech. Anal., **34-5** (1969), pp. 361-379.

[3] P. Bolley - J. Camus, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables*, Bull. Soc. Math. France, **34** (1973), pp. 55-140.
[4] D. Gilbarg - N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer.
[5] C. Goulaouic - N. Shimakura, *Régularité höldérienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés*, Coll. S.M.F. de St. Jean de Monts, 1981.
[6] G. Hardy - J. E. Littlewood - G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, 1952.
[7] N. Shimakura, *Les fonctions de Green pour certains opérateurs paraboliques dégénérés dans le demi-espace*, Proc. Japan Acad., **47** (1971), pp. 699-704.
[8] N. Shimakura, *Problème de Dirichlet pour des opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre*, Proc. Japan Acad., **47** (1971), pp. 861-866.

Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex, France

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Kyoto
606 Sakyoku, Kyoto, Japon