ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

M. DERRIDJ

Inégalités de Carleman et extension locale des fonctions holomorphes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 9, nº 4 (1982), p. 645-669

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1982_4_9_4_645_0>

Inégalités de Carleman et extension locale des fonctions holomorphes.

M. DERRIDJ

1. – Introduction.

Nous montrons ici quelques résultats concernant un « problème de Cauchy pour $\bar{\partial}$ » dont nous déduisons l'extension de formes $\bar{\partial}$-fermées, et de fonctions holomorphes, en utilisant des méthodes L^2 avec poids (L. Hörmander [5]) et des inégalités de type Carleman (A. Andreotti - E. Vesentini [2]).

Globalement énoncé, le problème de Cauchy posé ici s'énonce ainsi: Soient ω un domaine (régulier) et f une forme (dans un espace convenable défini sur un voisinage de $\bar{\omega}$) telle que supp $(f) \subset \bar{\omega}$. Existe-t-il une forme u (dans un espace convenable) telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f \\ \operatorname{Supp}(u) \subset \bar{\omega} \end{cases}$$

(sous la condition nécessaire évidente $\bar{\partial} f = 0$).

Il y a, évidemment, une version locale de ce problème. D'un tel résultat on peut déduire un résultat d'extension d'une forme $\bar{\partial}$-fermée soit global, soit local. Cependant, dans le cas local, notre résultat d'extension n'est satisfaisant que dans le cas des fonctions holomorphes (Théorème 4.3).

Notre objet est, ici, d'étendre au cas où la forme de Levi dégénére et pour des domaines non nécessairement pseudo-convexes des résultats connus. Signalons que R. Nirenberg [8] a utilisé les travaux de A. Andreotti et E. Vesentini [2], pour étudier le problème de Cauchy local dans le cas strict (i.e. un certain nombre de valeurs propres de la matrice de Levi sont stricte-

Pervenuto alla Redazione il 26 Febbraio 1981 ed in forma definitiva il 13 Luglio 1982.

ment positives. Toujours dans ce cas, signalons évidemment le travail de H. Lewy [7], R. O. Wells [9], mais aussi pour le cas des formes J. J. Kohn et H. Rossi [4], A. Andreotti et D. Hill [1].

Dans le cas faiblement pseudoconvexe, signalons l'article récent de E. Bedford et J. E. Fornaess, où ils donnent pour une frontière analytique réelle au voisinage du point considéré, une condition nécessaire et suffisante pour l'extension locale des fonctions holomorphes [3].

2. – Inégalités de Carleman.

Soit φ une fonction positive, de classe C^2 dans $\boldsymbol{C}^n$. On note θ_φ l'adjoint formel de $\bar\partial$ pour le produit scalaire:

$$(u, v)_\varphi = \int e^\varphi u \cdot \bar v\,,$$

c'est-à-dire

$$(\bar\partial u, v)_\varphi = (u, \theta_\varphi v)_\varphi\,, \qquad \forall u, v \in \mathfrak{D}^q(\boldsymbol{C}^n)$$

où

$$\mathfrak{D}^q(\boldsymbol{C}^n) = \Big\{u = \sum_{|I|=q} u_I d\bar z_I,\ u_I \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{C}^n)\Big\} = \mathfrak{D}^q\,.$$

De même, on considère les notations suivantes

$$\|u\|_\varphi^2 = (u, u)_\varphi$$

$$\square_\varphi = \bar\partial\theta_\varphi + \theta_\varphi\bar\partial$$

$$Q_\varphi(u, v) = (\bar\partial u, \bar\partial v)_\varphi + (\theta_\varphi u, \theta_\varphi v)_\varphi$$

(c_{ij}) est la matrice hessienne de φ et on pose

$$u_i^J = \varepsilon_J^{iJ} u_I\,,$$

où ε_J^{iI} est le signe de la permutation qui envoie le multi-indice non ordonné iI, en le même multi-indice, mais ordonné $(iI) = J$.

PROPOSITION 2.1.

$$(2.1) \quad Q_\varphi(u, u) = \sum_{I,i} \left\| \frac{\partial u_I}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_I \right\|_\varphi^2 + \sum_{|J|=q+1} \left(\sum_{i,j \in J} \int e^\varphi c_{ij} u_i^J \bar u_j^J \right) \quad \forall u \in \mathfrak{D}^q.$$

DÉMONSTRATION. Un calcul standard montre que si $u \in \mathfrak{D}^q$, on a

$$\bar\partial u = \sum_{|J|=q+1} \left(\sum_{(iI)=J} \varepsilon_J^{iI} \frac{\partial u_I}{\partial \bar z_i} \right) d\bar z_J$$

$$\theta_\varphi u = \sum_{|K|=q-1} \left(\sum_{i \notin K} \left(\frac{\partial u_{iK}}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \right) u_{iK} \right) d\bar z_K .$$

Donc:

$$\begin{aligned} Q\,(u, u) &= \sum_{|J|=q+1} \left\| \sum_{(iI)=J} \frac{\partial u_I}{\partial \bar z_I} \varepsilon_J^{iI} \right\|_\varphi^2 + \sum_{|K|=q-1} \left\| \sum_{i \notin K} \left(\frac{\partial u_{iK}}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_{iK} \right) \right\|_\varphi^2 \\ &= \sum_{|J|=q+1} \left(\sum_{i \in J} \left\| \frac{\partial u_i^J}{\partial \bar z_i} \right\|_\varphi^2 + \sum_{\substack{i,j \in J \\ i \neq j}} \left(\frac{\partial u_i^J}{\partial \bar z_i}, \frac{\partial u_j^J}{\partial \bar z_j} \right)_\varphi \right) + \sum_{|K|=q-1} \left(\sum_{i \notin K} \left\| \frac{\partial u_{iK}}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_{iK} \right\|_\varphi^2 \right) \\ &+ \sum_{\substack{|K|=q-1 \\ i,j \notin K \\ i \neq j}} \left(\frac{\partial u_{iK}}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_{iK}, \frac{\partial u_{jK}}{\partial z_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} u_{jK} \right)_\varphi . \end{aligned}$$

Il nous suffit maintenant d'utiliser l'identité suivante:

$$\left(\frac{\partial u_I}{\partial \bar z_i}, \frac{\partial u_L}{\partial \bar z_l} \right)_\varphi = \int e^\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar z_i \partial z_l} u_I \bar u_L + \left(\frac{\partial u_I}{\partial z_l} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_l} u_I, \frac{\partial u_L}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_L \right)_\varphi$$

et de remarquer que, si on pose $I = (lK)$, $L = (iK)$, alors

$$\int e^\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar z_i \partial z_l} u_I \bar u_L = \int e^\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_l \partial \bar z_i} \varepsilon_J^{iI} u_I \varepsilon_J^{lL} \bar u_L ,$$

soit

$$\varepsilon_J^{iI} \varepsilon_J^{lL} \int e^\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_l \partial \bar z_i} u_I \bar u_L = \int e^\varphi \frac{\partial^2}{\partial z_l \partial \bar z_i} u_l^J \bar u_i^J$$

et

$$\varepsilon_J^{iI} \varepsilon_J^{lL} \left(\frac{\partial u_I}{\partial z_l} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_l} u_I, \frac{\partial u_L}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_L \right)_\varphi = - \left(\frac{\partial u_{lK}}{\partial z_l} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_l} u_{lK}, \frac{\partial u_{iK}}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_{iK} \right)_\varphi .$$

Pour conclure

COROLLAIRE 2.2. *On obtient l'inégalité*:

$$\sum_{|J|=q+1} \left(\sum_{i,j \in J} \int e^\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar z_j} u_i^J \bar u_j^J \right) \leqslant Q_\varphi(u, u) , \qquad \forall\ u \in \mathfrak{D}^q . \tag{2.2}$$

Pour chaque multi-indice J fixé, considérons la matrice

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar z_j} \right)_{i,j \in J} .$$

Supposons qu'elle vérifie l'inégalité suivante

$$\sum_{i,j\in J} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial \bar{z}_j}(z)\,\alpha_1\bar{\alpha}_j \geqslant \sum_{i\in J} \lambda_{i,J}(z)\,|\alpha|^2$$

où $\lambda_{i,J}$ est une fonction continue, non nécessairement positive. Alors, on obtient

$$\sum_{|J|=q+1}\Big(\sum_{i,j\in J}\int e^{\varphi}\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial \bar{z}_j}\,u_i^J\bar{u}_j^J\Big) \geqslant \sum_{\substack{|J|=q+1\\ i\in J}} \int_{C^n} e^{\varphi}\lambda_{i.J}(\varphi)\,|u_I|^2$$

ou encore:

$$\geqslant \sum_{|I|=q}\int e^{\varphi}\Big(\sum_{i\notin I}\lambda_{i.(iI)}\Big)|u_I|^2 = \sum_{|I|=q}\int e^{\varphi}\lambda_i(\varphi)\,|u|^2$$

si on note $\lambda_I(\varphi) = \sum\limits_{i\notin I}\lambda_{i,(iI)}$.

Nous supposerons dorénavant réalisée l'hypothèse suivante:

$$(H_q): \qquad \lambda_q(\varphi) = \inf_{|I|=q}\lambda_I(\varphi) \geqslant 0\,.$$

PROPOSITION 2.3. *On obtient l'inégalité*

$$\int \lambda_q(\varphi)\,e^{\varphi}|u|^2 \leqslant Q_\varphi(u,\ u) \qquad \forall u\in \mathfrak{D}^q\,. \tag{2.3}$$

Elle découle de la proposition 2.1.

PROPOSITION 2.4. *Soit* $\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z) + \varepsilon|z|^2$; *alors, si* $q<n$, *on a*

$$\int\big(\lambda_q(\varphi)+\varepsilon\big)e^{\varphi_\varepsilon}|u|^2 \leqslant Q_{\varphi_\varepsilon}(u,u)\,, \qquad \forall u\in\mathfrak{D}^q\,. \tag{2.4}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que si:

$$\sum_{i,j\in J}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial\bar{z}_j}\,u_i^J\bar{u}_j^J \geqslant \sum_{i\in J}\lambda_{i,J}|u_i^J|^2,$$

alors

$$\sum_{i,j\in J}\frac{\partial^2\varphi_\varepsilon}{\partial z_i\,\partial\bar{z}_j}\,u_i^J\bar{u}_j^J \geqslant \sum_{i\in J}(\lambda_{i,J}+\varepsilon)\,|u_i^J|^2\,.$$

Par suite:

$$\lambda_I(\varphi_\varepsilon) = \sum_{i\notin I}(\lambda_{i,(iI)}+\varepsilon)$$

et ainsi

$$\lambda_q(\varphi_\varepsilon) = \inf \lambda_I(\varphi_\varepsilon) \geqslant \lambda_q(\varphi) + \varepsilon ,$$

car il existe au moins un indice $i, i \notin I$, puisque $|I| < n$.

PROPOSITION 2.5. *Soit* μ: $\boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$, *de classe* C^2 *telle que* $\mu' \geqslant 1$, $\mu'' \geqslant 0$. *Alors*:

$$\int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)}(\lambda_q(\varphi) + \varepsilon)|u|^2 \leqslant Q_{\mu(\varphi_\varepsilon)}(u, u) \qquad \forall u \in \mathcal{D}^q . \tag{2.5}$$

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que

$$H_{\mu(\varphi_\varepsilon)} = \mu'(\varphi) H_{\varphi_\varepsilon} + \mu''(\varphi)|\partial\varphi_\varepsilon|^2 .$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé et une fonction μ comme dans la proposition 2.5 considérons le complété $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ de $\mathcal{D}^q$ pour le produit scalaire $Q_{\mu(\varphi_\varepsilon)}$. Comme on a l'estimation (2.5), l'espace $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ est un espace de Hilbert tel que, si $f \in L^2_{\mu(\varphi_\varepsilon)}$, il existe une forme $u_{\varepsilon,\mu} \in \mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ vérifiant:

$$Q_{\mu(\varphi_\varepsilon)}(u_{\varepsilon,\mu}, v) = (f, v)_{\mu(\varphi_\varepsilon)} \qquad \forall v \in \mathcal{H}_{\varepsilon,\mu} . \tag{2.6}$$

De plus $u_{\varepsilon,\mu}$ est unique dans $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$.

On déduit de (2.6), de façon standard les faits suivants: l'égalité suivant a lieu, au sens des distributions

$$\square_{\mu(\varphi_\varepsilon)} u_{\varepsilon,\mu} = f . \tag{2.7}$$

D'autre part, si on suppose de plus que: $\bar\partial f = 0$, alors en posant $v_{\varepsilon,\mu} = \theta_{\mu(\varphi_\varepsilon)} u_{\varepsilon,\mu}$ on obtient

$$\bar\partial v_{\varepsilon,\mu} = f \tag{2.8}$$

(voir pour cela [2] [5]).

PROPOSITION 2.6. *Soit* f *tel que* $f^2/\lambda_q(\varphi) \in L^1_{(0,q)}(\boldsymbol{C}^n)$. *Alors*

$$\int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)}|v_{\varepsilon,\mu}|^2 \leqslant 4\int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)} \frac{|f|^2}{\lambda_q(\varphi)} , \quad \forall \varepsilon > 0 , \quad \mu' \geqslant 1 , \quad \mu'' \geqslant 0 . \tag{2.9}$$

DÉMONSTRATION. D'après (2.5) et (2.6) on obtient:

$$Q_{\mu(\varphi_\varepsilon)}(u_{\varepsilon,\mu}, u_{\varepsilon,\mu}) = (f, u_{\varepsilon,\mu})_{\mu(\varphi_\varepsilon)} \geqslant \int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)} \lambda_q(\varphi)|u_{\varepsilon,\mu}|^2$$

entraînant ainsi

$$(2.10)\qquad \int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)}\lambda_q(\varphi)\,|u_{\varepsilon,\mu}|^2 \leqslant Q_{\mu(\varphi_\varepsilon)}(u_{\varepsilon,\mu},\,u_{\varepsilon,\mu}) \leqslant 2\int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)}\frac{|f|^2}{\lambda_q(\varphi)} + \frac{1}{2}\int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)}\lambda_q(\varphi)\,|u_{\varepsilon,\mu}|^2 .$$

Mais:

$$(2.11)\qquad \int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)}|u_{\varepsilon,\mu}|^2 \leqslant Q_{\mu(\varphi_\varepsilon)}(u_{\varepsilon,\mu},\,u_{\varepsilon,\mu}) .$$

Alors (2.9) est une conséquence immédiate de (2.10) et (2.11).

3. – Problème de Cauchy et éxtension globale.

3.1. *Cas d'un domaine régulier.*

Considérons alors le domaine ω, défini par $\{\varphi < c\}$, où φ vérifie l'hypothèse (H_q). L'ouvert ω est supposé borné.

THÉORÈME 3.1. *Soit f une $(0, q)$-forme telle que*:

$$\operatorname{supp}(f) \subset \bar{\omega}\,, \qquad \frac{f^2}{\lambda_q(\varphi)} \in L^1(\boldsymbol{C}^n) \text{ et } \bar{\partial} f = 0 \text{ dans } \boldsymbol{C}^n .$$

Il existe une $(0, q-1)$ forme, dans $L^2_{(0,q-1)}$ telle que

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \bar{\partial} u = f & \text{dans } \boldsymbol{C}^n \\ \operatorname{supp}(u) \subset \bar{\omega} . \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\eta > 0$ fixé. Nous allons montrer qu'il existe $u_\eta \in L^2_{(0,q-1)}$ tel que

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \operatorname{Supp}(u_\eta) \subset \{\varphi \leqslant c + \eta\} \\ \bar{\partial} u_\eta = f \\ \|u_\eta\|_{L^2} \leqslant B\,, \quad B \text{ indépendante de } \eta . \end{cases}$$

Alors le théorème (3.1) en découlera, en considérant une sous-suite de la suite (u_η) vérifiant (3.2), qui convergera faiblement dans L^2 vers un élément u satisfaisant (3.1).

Commençons par choisir des fonctions μ_l, $l \in \boldsymbol{N}$ par

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \mu_l(t) = t & \text{si } t \in \left[0, c + \dfrac{\eta}{2}\right] \\ \mu_l(t) \geqslant lt & \text{si } t \in [c + \eta, \infty[\\ \mu_l'(t) \geqslant 1\,, \quad \mu_l''(t) \geqslant 0 . \end{cases}$$

Maintenant, comme ω est borné, il existe $\varepsilon(\eta) > 0$ tel que si $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\eta)$, on a $\varphi_\varepsilon(z) \leqslant c + \eta/2$ pour $z \in \bar{\omega}$. Donc

$$\int e^{\mu_l(\varphi_\varepsilon)} \frac{|f|^2}{\lambda_q(\varphi)} \leqslant \int e^{c+\eta/2} \frac{|f|^2}{\lambda_q(\varphi)}, \qquad \forall l \in \boldsymbol{N}.$$

En particulier, en prenant $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$ et on notant: $v_{\eta,l} = v_{\varepsilon(\eta),\mu_l}$, on obtient

$$\int e^{\mu_l(\varphi_{\varepsilon(\eta)})} |v_{\eta,l}|^2 \leqslant e^{c+\eta/2} \int \frac{|f|^2}{\lambda_q(\varphi)} \leqslant B. \tag{3.4}$$

L'inégalité (3.4) entraîne que la suite $(v_{\eta,l})_l$ est bornée dans L^2, en extrayant une sous-suite faiblement convergente dans L^2, on obtient l'existence d'une forme v_η dans L^2 telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial} v_\eta = f \\ \|v_\eta\| \leqslant B. \end{cases} \tag{3.5}$$

D'autre part, sur l'ensemble $\{\varphi_{\varepsilon(\eta)} > c + \eta\}$, on a:

$$e^{l(c+\eta)} \int_{\varphi_{\varepsilon(\eta)} > c+\eta} |v_{\eta,l}|^2 \leqslant B. \tag{3.6}$$

De (3.6), on déduit que la limite faible v_η est nulle sur $\{\varphi_{\varepsilon(\eta)} > c + \eta\}$, donc a fortiori sur l'ensemble $\{\varphi > c + \eta\}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

REMARQUE 3.2. L'hypothèse du théorème est vérifiée si on suppose que f est dans L^∞ et que $[\lambda_q(\varphi)]^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{C}^n)$.

Du théorème 3.1, nous déduisons alors le

THÉORÈME 3.3. *Soit ω un ouvert relativement compact dans $\boldsymbol{C}^n$, défini par $\{\varphi < c\}$, où φ est une fonction positive de classe C^2 dans $\boldsymbol{C}^n$, vérifiant (H_{q+1}). Soit f une $(0, q)$ forme $\bar{\partial}$-fermée dans $\boldsymbol{C}^n|\bar{\omega}$, de classe C^1 dans $\boldsymbol{C}^n|\omega$ $q \geqslant 0$. Supposons que $[\lambda_{q+1}(\varphi)]^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{C}^n)$ (ou de classe L^1 dans un voisinage de $\bar{\omega}$). Alors il existe une $(0, q)$ forme F, $\bar{\partial}$-fermée dans $\boldsymbol{C}^n$ telle que, $F|_{\complement\bar{\omega}} = f$, $F \in L^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{C}^n)$.*

DÉMONSTRATION. Soit g une extension C^1 de f dans $\boldsymbol{C}^n$. Alors

$$\begin{cases} \operatorname{Supp}(\bar{\partial} g) \subset \bar{\omega} \\ \bar{\partial} g \in L^\infty_{(0,q+c)}(\boldsymbol{C}^n). \end{cases}$$

Comme $\bar\partial g$ est $\bar\partial$-fermée, on peut appliquer le théorème 3.1; donc, il existe une $(0, q)$ forme h dans $L^2_{(0,q)}$ telle que

$$\begin{cases} \bar\partial h = \bar\partial g \\ \operatorname{Supp}(h) \subset \bar\omega . \end{cases}$$

Posons alors $F = g - h$; on a alors:

$$\begin{cases} \bar\partial F = 0 \\ F|_{\complement\bar\omega} = g|_{\complement\bar\omega} = f . \end{cases}$$

Exemple. Prenons un domaine pseudoconvexe de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2p_i} < 1 \quad \text{dans } C^n .$$

On prend $\varphi = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2p_i}$, $p_i \geqslant 1$.

La Hessienne de φ est diagonale: les termes de la diagonale sont égaux à $p_i^2 |z_i|^{2(p_i-1)}$. Alors

$$\lambda_I = \sum_{i \notin I} p_i^2 |z_i|^{2(p_i-1)} .$$

On exige, pour appliquer le théorème 3.3, que pour tout I tel que $|I| = q + 1$, on ait $\lambda_I^{-1} \in L^1(\Omega)$, où Ω est un voisinage de $\bar\omega$.

La somme $\sum_{i \notin I}$ contient $(n - q - 1)$ éléments de la forme

$$\sum_{j \in J} p_j^2 |z_j|^{2(p_j-1)} \qquad \text{où } |J| = n - q - 1 .$$

Il suffit évidemment que l'inverse de la somme précédente soit localement intégrable dans C^{n-q-1}, pour tout multi-indice J tel que $|J| = n - q - 1$. Soit $p = \max (p_j)$; alors on a:

$$\sum_{j \in J} p_j^2 |z_j| \geqslant c\Big(\sum_{j \in J} |z_j|^{2(p-1)}\Big) \text{ localement} .$$

Il suffit donc que la fonction $1/|z|^{2(p-1)}$ soit localement intégrable dans C^{n-q-1} donc que $2(p - 1) < 2(n - q - 1)$, c'est-à-dire $p < n - q$.

3.2. *Cas d'une intersection de domaines réguliers.*

Nous aurons besoin des propositions suivantes:

PROPOSITION 3.4. *Soient* $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, *p fonction de classe* C^2 *et* $\varphi = \sup(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$. *Supposons que*:

$$\forall i\colon (H_{\varphi_i}u, u) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |u_j|^2 \quad \textit{dans } \Omega \tag{3.7}$$

où Ω *est un ouvert de* $\mathbf{C}^n$ *et* λ_j *des fonctions continues dans* Ω.

Alors, on a, au sens des distributions:

$$(H_\varphi u, u) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |u_j|^2 \quad \text{dans } \Omega . \tag{3.8}$$

DÉMONSTRATION. On veut montrer que l'on a, pour tout vecteur $u = (u_1, \ldots, u_n)$:

$$\sum_{i,j} \left\{ \int_\Omega \varphi(z) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\, dz \right) \right\} u_i \bar{u}_j \geqslant \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(z) \theta(z)\, dz |u_j|^2 \quad \forall \theta \in \mathfrak{D}(\Omega),\ \theta \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Supposons d'abord que les fonctions, λ_j sont constantes. Alors considérons les fonctions $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |z_j|^2$. Les fonctions $\tilde{\varphi}_i$ sont plurisousharmoniques. Donc $\tilde{\varphi} = \varphi - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |z_j|^2$ qui est le sup des fonctions $\tilde{\varphi}_i$ est plurisousharmonique ce qui montre qu'au sens des distributions on a

$$H_\varphi(u, u) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |u_j|^2 . \tag{3.10}$$

Maintenant, comme les fonctions λ_i sont continues, $\forall z_0 \in \Omega$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V = V(z_0, \varepsilon)$ tel que

$$|\lambda_i(z) - \lambda_i(z_0)| \leqslant \varepsilon , \qquad \forall z \in V(z_0, \varepsilon) . \tag{3.11}$$

Donc dans V on a bien:

$$H_\varphi(u, u) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \big(\lambda_i(z_0) - \varepsilon\big) |u_i|^2 \quad \text{dans } V . \tag{3.12}$$

Soit alors $\theta \in \mathcal{D}(V)$, $\theta \geqslant 0$. De (3.12) on tire:

$$\int_\Omega \varphi\left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) u_i \bar{u}_j \geqslant \int_{V(z_0)} \sum_{i=1}^n (\lambda_i(z_0) - \varepsilon)\theta |u_i|^2 \geqslant \int_{V(z_0)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(z) - 2\varepsilon)\theta |u_i|^2 . \tag{3.13}$$

Si $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$, par partition de l'unité et compte-tenu de (3.13), on obtient:

$$\int_\Omega \varphi\left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) u_i \bar{u}_j \geqslant \int_\Omega \sum_{i=1}^n (\lambda_i(z) - 2\varepsilon)\theta |u_i|^2 .$$

Comme ε est arbitrairement petit, on aboutit à (3.9).

Proposition 3.5. *Soit φ de la proposition précédente. Posons*

$$\varphi_\varepsilon = \varphi * \chi_\varepsilon$$

$$\lambda_{j,\varepsilon} = \lambda_j * \chi_\varepsilon$$

où χ_ε est une suite régularisante donnée par $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n}\chi(z/\varepsilon)$, χ ne dépendant que de $|z_i|$. Alors

$$(H_{\varphi_\varepsilon}(u, u) \geqslant \sum_{j=1}^n \lambda_{j,\varepsilon} |u_i|^2 . \tag{3.14}$$

Démonstration. De (3.9), on tire pour $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\theta \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \int \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\theta(z) u_i \bar{u}_j &= \sum_{i,j} \int \varphi_\varepsilon(z) \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) u_i \bar{u}_j \\ &= \sum_{i,j} \iint \varphi(z-\eta)\chi_\varepsilon(\eta) \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\, dz\, d\eta\, u_i \bar{u}_j \\ &= \sum_{i,j} \int \chi_\varepsilon(\eta) \left[\int \varphi(z-\eta) \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\, dz\right] d\eta\, u_i \bar{u}_j . \end{aligned}$$

Mais, pour η fixé on a, d'après (3.9):

$$\sum_{i,j} \int \varphi(z-\eta) \frac{\partial^2\theta}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\, dz\, u_i \bar{u}_j \geqslant \int \sum_{j=1}^n \lambda_j(z-\eta)\theta(z) |u_j|^2 .$$

Par suite, la somme précédente est minorée par:

$$\sum_{j=1}^n \int \chi_\varepsilon(\eta)\lambda_j(z-\eta)\theta(z)\, dz |u|^2$$

c'est-à-dire par:

$$\sum_{=1}^{n} \int \lambda_{j,\varepsilon}(z)\theta(z)\,dz|u|^2$$

ce qui termine la démonstration.

PROPOSITION 3.6. *Supposons que* $g^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}^n)$. *Alors* $g_\varepsilon^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}^n)$ *et pour tout compact* K *on a*

$$\|g_\varepsilon^{-1}\|_{L^1(K)} \leqslant \|g^{-1}\|_{L^1(K_1)} \qquad \forall \varepsilon \leqslant 1 , \tag{3.15}$$

où $K_1 = \{z|d(z, K) \leqslant 1\}$ *(ici* $g \geqslant 0$).

DÉMONSTRATION. On a pour $x \in K$

$$1 = \int_{|x-y|<\varepsilon} \chi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{y\in K_\varepsilon} g^{\frac{1}{2}}(y) g^{-\frac{1}{2}}(y)\chi_\varepsilon(x-y)\,dy .$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$1 \leqslant \int_{y\in K_\varepsilon} g(y)\chi_\varepsilon(x-y)\,dy \int_{y\in K_\varepsilon} g^{-1}(y)\chi_\varepsilon(x-y)\,dy .$$

Donc:

$$g_\varepsilon^{-1}(x) \leqslant (g^{-1} * \chi_\varepsilon)(x) .$$

Mais, en posant $h = g^{-1} \in L^1_{K_\varepsilon}$, $h \geqslant 0$, on obtient

$$\int_K \int_{|\eta|\leqslant\varepsilon} h(z-\eta)\chi_\varepsilon(\eta)\,d\eta\,dz \leqslant \int_{|\eta|\leqslant\varepsilon} \chi_\varepsilon(\eta)\Big[\int_{z\in K} h(z-\eta)\,dz\Big]d\eta$$

$$\leqslant \|h\|_{L^1(K_1)} \int \chi_\varepsilon(\eta)\,d\eta = \|h\|_{L^1(K_1)} \qquad \text{si } \varepsilon \leqslant 1 .$$

Nous allons déduire un corollaire qui permettra de montrer le théorème qui suivra. Soit $\varphi = \max(\varphi_i)$. On suppose $\lambda_I(\varphi_i) \geqslant \lambda_I$, $\forall i$ où λ_I continue et $\lambda^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}$, $|I| = q+1$.

On a alors le

COROLLAIRE 3.7. *On a*:

$$\sum_{i,j\in J} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial z_i\,\partial \bar z_j}(z)\,a_i \bar a_j \geqslant g_\varepsilon(z)|a|^2 \qquad \forall a = (a_1, \dots, a_n)$$

avec $g_\varepsilon^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}$ *et* $\|g_\varepsilon^{-1}\|_{L^1(K)} \leqslant B$ *(B indépendante de* ε).

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la proposition 3.4, en considérant le Hessien partiel de φ: $(\partial\varphi/\partial z_i\,\partial\bar{z}_j)_{i,j\in J}$, les propositions 3.5 et 3.6, en posant:

$$g_\varepsilon = \inf_{|I|=q+1} \lambda_{I,\varepsilon}\,.$$

Dans la suite, en conformité avec les notations utilisées jusqu'ici, on pose $\lambda_{q+1}(\varphi_\varepsilon) = g_\varepsilon$.

Ce corollaire sera utilisé dans ce qui suit.

THÉORÈME 3.8. *Soit $\varphi = \sup(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ où $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont des fonctions positives de classe C^2 dans $\mathbf{C}^n$ telles que l'on ait:*

$$\lambda_I(\varphi_i) \geqslant g\,, \qquad |I| = q\,, \qquad g^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{C}^n)\,.$$

Soit f une $(0,q)$ forme, $\bar\partial$-fermée dans $\mathbf{C}^n$, à support dans $\bar\omega = \{\varphi \leqslant c\}$, avec $f \in L^\infty_{(0,q)}$ $q \geqslant 1$. Alors il existe une $(0,q-1)$ forme $u \in L^2_{(0,q-1)}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{l} \bar\partial u = f \quad \textit{dans } \mathbf{C}^n \\ \operatorname{Supp}(u) \subset \bar\omega\,. \end{array}\right. \tag{3.16}$$

DÉMONSTRATION. Soit φ_ε, régularisée de φ, comme dans la proposition 3.5. Le corollaire 3.7 assure qu'il existe une constante B, indépendante de ε telle que

$$[\|\lambda_q(\varphi_\varepsilon)]\|_{L^1(K)} \leqslant B$$

où K est un compact au voisinage de $\bar\omega$.

Comme $\operatorname{supp}(f) \subset \{\varphi \leqslant c\}$ et que φ est continue, pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_\delta > 0$ t.q. $\operatorname{supp}(f) \subset \{\varphi_{\varepsilon_\delta} \leqslant c + \delta\}$.

D'autre part, ε_δ peut être choisi, tendant vers 0, pour $\delta \to 0$.

En utilisant, le cas d'un ouvert régulier, il existe une forme $u_\delta \in L^2_{(0,q-1)}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{l} \bar\partial u_\delta = f \\ \operatorname{Supp}(u_\delta) \subset \{\varphi_{\varepsilon_\delta} \leqslant c + \delta\} \\ \|u_\delta\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_\infty \end{array}\right. \tag{3.17}$$

où C est indépendante de δ. On obtient alors une famille (u_δ) bornée dans L^2. On peut en extraire une sous-suite, notée encore (u_δ) faiblement convergente vers une forme $u \in L^2_{(0,q-1)}$ qui vérifiera (3.16).

Dans la suite, pour le cas local, on utilisera le cas où g est le module d'une fonction holomorphe h: $g = |h|$:

THÉORÈME 3.9. *Supposons satisfaites les hypothèses précédentes avec* $g = |h|$, *où* h *est une fonction holomorphe. Soit* f *une* $(0, q)$ *forme* $\bar\partial$-*fermée dans* $\boldsymbol{C}^n$, *à support dans* $\bar\omega = \{\varphi \leqslant c\}$, *s'écrivant*: $f = hf_1$, *où* $f_1 \in L^2_{(0,q)}$. *Alors il existe une* $(0, q-1)$ *forme* $u \in L^2$ *telle que*

$$(3.18)\qquad \begin{cases} \bar\partial u = f & \textit{dans } \boldsymbol{C}^n \\ \operatorname{Supp}(u) \subset \bar\omega\,. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Ici, en fait la démonstration est plus simple. En effet g est plurisousharmonique. Donc on a $g_\varepsilon \downarrow g$ (voir L. Hörmander [6, th. 2.6.3]). Donc, en considérant les fonctions φ_ε, on peut résoudre le problème suivant

$$(3.19)\qquad \begin{cases} \bar\partial u_{\varepsilon\delta} = f \\ \|u_{\varepsilon\delta}\|_{L^2} \leqslant \|f_1\|_{L^2} \\ \operatorname{Supp}(u_{\varepsilon\delta}) \subset \{\varphi_\varepsilon \leqslant c + \delta\}\,. \end{cases}$$

Il suffit en effet d'utiliser le théorème 3.1, et le fait que:

$$\|hf_1 g_{\varepsilon\delta}^{-1}\|_{L^2} \leqslant \|f_1\|_{L^2}\,, \qquad \text{puisque } g_{\varepsilon\delta} \geqslant g\,.$$

Le reste de la démonstration est maintenant standard.

COROLLAIRE 3.10. *Sous les hypothèses du théorème* 3.9, *avec* $q+1$, *soit* $f \in C^1_{(0,q)}(\boldsymbol{C}^n|\omega)$ *telle que* $\bar\partial f = 0$ *dans* $\boldsymbol{C}^n|\bar\omega$ *et* $f = hf_1$. *Il existe* $\tilde f \in L^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{C}^n)$ *telle que*

$$(3.20)\qquad \begin{cases} \bar\partial \tilde f = 0 & \textit{dans } \boldsymbol{C}^n \\ \tilde f|_{\boldsymbol{C}^n|\bar\omega} = f\,. \end{cases}$$

La démonstration est identique à celle du théorème 3.3.

4. – Le problème local.

Ici nous montrons comment, avec cette méthode, obtenir des résultats d'extension locale. Plus précisément soient $z_0 \in \partial\omega$, U voisinage de z_0, f une fonction de classe C^1 dans $U \cap \complement\omega$, holomorphe dans $U \cap \complement\bar\omega$: existe-t-il un voisinage V de z_0, tel que f s'étende en une fonction holomorphe dans V. On suppose toujours ω défini par $\omega = \{\varphi < c\}$ où φ est une fonction positive de classe C^2 dans $\boldsymbol{C}^n$.

Considérons un certain nombre d'hypothèses qui seront évoquées par la suite.

$(C_{1,q})$: $\lambda_q(\varphi)$ et $\lambda_{q+1}(\varphi)$ majorent, au voisinage de z_0, le module d'une fonction holomorphe h, $h \not\equiv 0$.

$(C_{2,q})$: Pour tout voisinage V de z_0, il existe une fonction positive, de classe C^2, notée φ_V telle que:

$$\omega \cap \{\varphi_V > 1\} \subset V\,, \quad \varphi_V(z_0) > 1 \qquad \text{et } \lambda_q(\varphi_V) \text{ et } \lambda_{q+1}(\varphi_V) \text{ majorent } |h|\,.$$

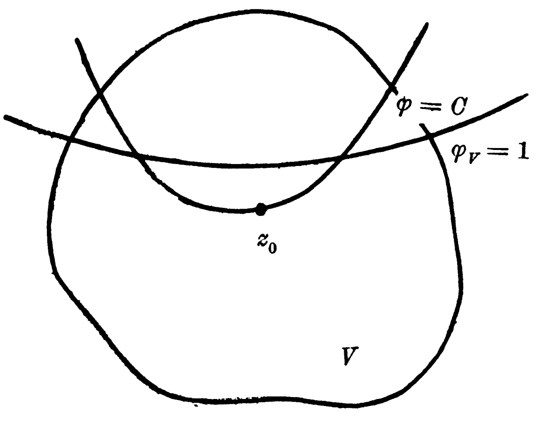
(C): les composantes irréductibles de h, au voisinage de z_0, notées $h_1, \ldots, h_a$ satisfont la condition:

$$Z(h_i) \cap \complement\bar{\omega} \neq \emptyset \qquad \forall i$$

où $Z(h_i)$ désigne l'ensemble des zéros de h_i:

Remarques 4.1.

1) La condition $(C_{2,q})$ est une condition de nature géométrique sur ω, au voisinage de z_0 (voir dessin)



2) La condition (C) est liée au bord de ω.

Par exemple (C) est toujours vérifiée si $\partial\omega$ est pseudoconvexe au voisinage de z_0 et ne contient pas d'hypersurface analytique complexe (voir le remarque 4.4).

Nous allons commencer par résoudre le problème de Cauchy local au voisinage de z_0, pour certaines formes liées à h, à savoir:

THÉORÈME 4.1. *Supposons les conditions* $(C_{1,q})$, $(C_{2,q})$ *satisfaites.*

Soit f *une* $(0, q)$ *forme s'écrivant* $f = h^2 g$ *avec* $g \in L^2(U)$, $\operatorname{supp}(g) \subset U \cap \bar{\omega}$, $\bar{\partial} g = 0$ *dans* U.

Il existe une voisinage V *de* z_0 *et* $u \in L^2_{(0,q-1)}(V)$ *telle que*

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \bar{\partial} u = f & \text{dans } V \\ \operatorname{supp}(u) \subset V \cap \bar{\omega} . \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Prenons $\tilde{\varphi}(z) = |z|^2 + 1$ qui est strictement plurisousharmonique. Soit θ_ε une fonction $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$ de classe C^∞, telle que:

$$\theta_\varepsilon = 1 \qquad \text{si } t < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\theta_\varepsilon = 0 \qquad \text{si } t > 1 + \varepsilon .$$

On prend ε assez petit pour que $B(0, 2\varepsilon) \subset U$, en supposant ici que $z_0 = 0$. Notons $\varphi_1 = \sup(\varphi, \tilde{\varphi})$ et $k = (1/h)\bar{\partial}(\theta_\varepsilon(\tilde{\varphi})\cdot f)$. Alors k est une $(0, q+1)$ forme, $\bar{\partial}$-fermée dans $\boldsymbol{C}^n$, de la forme $k = hk_1$, avec $k_1 \in L^2$ et:

$$\operatorname{Supp}(f) \subset S = \{\varphi \leqslant c, \tilde{\varphi} \leqslant 1 + \varepsilon, \varphi_V \leqslant 1\}, \qquad \text{avec } V \text{ convenable.}$$

D'après le théorème (3.9), il existe $v \in L^2_{(0,q)}$ tel que

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \bar{\partial} v = k \\ \operatorname{Supp}(v) \subset S . \end{cases}$$

Posons alors $w = hv$. On obtient ainsi:

$$(4.3) \qquad \begin{cases} \bar{\partial}(\theta_\varepsilon(\tilde{\varphi})\cdot f - w) = 0 \\ \operatorname{Supp}(\theta_\varepsilon(\tilde{\varphi})\cdot f - w) \subset S_1 = \{\varphi \leqslant c, \tilde{\varphi} \leqslant 1 + \varepsilon\} . \end{cases}$$

De plus on a

$$\theta_\varepsilon(\tilde{\varphi})\cdot f - w = hg$$

où g est une $(0, q)$ forme dans L^2.

En réutilisant de nouveau le théorème 3.9, il existe une $(0, q-1)$ forme t telle que:

$$(4.4) \qquad \begin{cases} \bar{\partial} t = \theta_\varepsilon(\tilde{\varphi})\cdot f - w \\ \operatorname{Supp}(t) \subset S_1 \\ t \in L^2 . \end{cases}$$

Comme v est à support dans $S \subset \{\varphi_V \leqslant 1\}$, il s'ensuit de (4.3) et (4.4) que l'on a sur V:

$$\begin{cases} \bar{\partial} t = f & \text{dans } V \\ \operatorname{Supp}(t) \subset \bar{\omega} \cap V \end{cases}$$

ce qui termine la démonstration de ce théorème.

Corollaire 4.2. *Supposons les conditions $(C_{1,q})$, $(C_{2,q})$ satisfaites. Soit f une $(0, q-1)$ forme telle que $f = h^2 g$, avec: $g \in C^1(U \cap \complement\omega)$, $\bar{\partial} g = 0$ dans $\complement\bar{\omega} \cap U$. Il existe une $(0, q-1)$ forme, $\tilde{f}$, $\bar{\partial}$-fermée dans un voisinage V de z_0 telle que*

$$\text{(4.5)} \qquad \begin{cases} \tilde{f} \in L^2(V) \\ \tilde{f}|_{\complement\bar{\omega} \cap V} = f\,. \end{cases}$$

Démonstration. Soit g_1 une extension C^1 de g à U et soit $f_1 = \bar{\partial} h^2 g_1$. Alors on a:

$$\text{(4.6)} \qquad \begin{cases} f_1 = h^2 g_2 \text{ avec } g_2 \in C^0(U)\,, \quad \bar{\partial} f_1 = 0 \\ \operatorname{Supp}(f_1) \subset U \cap \bar{\omega}\,. \end{cases}$$

En utilisant le théorème 4.1, on obtient une $(0, q-1)$ forme $u \in L^2$ telle que:

$$\text{(4.7)} \qquad \begin{cases} \bar{\partial} u = f_1 = \bar{\partial} h^2 g_1 & \text{dans } U \\ \operatorname{Supp}(u) \subset U \cap \bar{\omega}\,. \end{cases}$$

Soit $\tilde{f} = h^2 g_1 - u$; alors

$$\text{(4.8)} \qquad \begin{cases} \bar{\partial} \tilde{f} = 0 & \text{dans } U \\ \tilde{f}|_{U \cap \complement\bar{\omega}} = h^2 g_1|_{U \cap \complement\bar{\omega}} = f\,. \end{cases}$$

Le corollaire précédent n'a évidemment pas beaucoup d'intérêt en soi, puisqu'il faut avoir des formes dans $U \cap \complement\bar{\omega}$, qui soient divisibles par h^2; cependant nous verrons que dans le cas des fonctions, on en déduira, moyennant l'hypothèse (C) un théorème de prolongement pour les fonctions holomorphes; la condition (C) est automatiquement vérifiée si $\partial\omega$ est pseudoconvexe et ne contient pas d'hypersurface analytique complexe (ce fait nous a été signalé par A. Douady et N. Sibony, voir remarque 4.4).

THÉORÈME 4.3. *Supposons les conditions* $(C_{1,a})$ $(C_{2,a})$ *et* (C) *satisfaites. Soit* f *une fonction holomorphe dans* $U \cap \complement\bar{\omega}$, *de classe* C^1 *dans* $U \cap \complement\omega$. *Alors* f *se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage* V *de* z_0.

DÉMONSTRATION. Considérons $g = h^2 f$. D'après le corollaire 4.2, il existe une fonction $\tilde{g}$ holomorphe dans un voisinage V de z_0 telle que:

$$\tilde{g}|_{\complement\bar{\omega}} = h^2 f\,.$$

Donc la fonction holomorphe $\tilde{g}$ est divisible dans $\complement\bar{\omega} \cap V$ par la fonction holomorphe h^2. Soient $h_1, \ldots, h_k$ les composantes irréductibles de h i.e.

$$h^2 = h_1^{\alpha_1} \cdot h_2^{\alpha_2} \ldots h_k^{\alpha_k}\,, \qquad \alpha_i \in \mathbf{N}, \text{ au voisinage de } z_0\,.$$

Alors $\tilde{g}$ est divisible par $h_i^{\alpha_i}$ dans $\complement\bar{\omega} \cap V = \bar{\omega}$. Comme $Z(h_i) \cap \omega^- \neq \emptyset$, il s'ensuit que g est divisible par $h_i^{\alpha_i}$ dans V. Par suite il existe une fonction holomorphe f dans V telle que $\tilde{g} = h^2 \tilde{f}$ dans V. Il s'ensuit immédiatement que

$$\tilde{f}|_{\omega^-} = f\,.$$

REMARQUE 4.4. Supposons que $\partial\omega$ est pseudoconvexe et ne contient pas d'hypersurface analytique complexe. Alors (C) est vérifiée. Cette condition est la condition de Bedford-Fornaess [3] dans le cas où $\partial\omega$ est pseudoconvexe et analytique réelle. Voici la preuve telle qu'elle nous a été indiquée par A. Douady et N. Sibony.

Soit ψ une fonction d'exhaustion de ω, qui soit plurisousharmonique dans ω, continue dans $\bar{\omega}$: supposons qu'il existe en z_0 un germe d'hypersurface complexe X, contenu dans $\bar{\omega}$, qui touche $\partial\omega$ en un ensemble qui contient z_0. Soit $\vec{k}$ la normale extérieure à ω, en z_0. Soit z_1 un point de X qui soit dans ω. Soit $\theta\colon D \to X$ une application holomorphe du disque unité de $\boldsymbol{C}$ dans X telle que $\theta(0) = z_0$, $\theta(1) = z_1$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a alors

$$(\psi\circ\theta_\varepsilon)(0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\psi\circ\theta_\varepsilon)(e^{ix})\,dx$$

où $\theta_\varepsilon(t) = \theta(t) - \varepsilon\vec{k}$. En effet $\psi\circ\theta_\varepsilon$ est sous-harmonique dans $\bar{D}$. Par continuité on aurait

$$(\psi\circ\theta)(\theta) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\psi\circ\theta)(e^{ix})\,dx$$

soit

$$0 = \psi(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi \circ \theta)(e^{ix})\, dx \,,$$

ce qui constitue une contradiction puisque ψ est strictement négative dans ω.

EXEMPLE. Soit ω défini par

$$\omega = \Big\{ z \in \boldsymbol{C}^4 \big| |z_1|^2 + |z_4|^2 \big(8(|z_2|^2 + |z_3|^2) - |z_4|^2 \big) < 1 \Big\} .$$

Considérons le point $z_0 = (1, 0, 0, 0)$. On pose $z' = (z_2, z_3)$; en prenant donc $\omega = \{\varphi < 1\}$, le hessienne de φ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8|z_4|^2 & 0 & 8\bar{z}_2 z_4 \\ 0 & 0 & 8z_4|^2 & 8\bar{z}_3 z_4 \\ 0 & 8z_2\bar{z}_4 & 8z_3\bar{z}_4 & 8|z'|^2 - 4|z_4|^2 \end{pmatrix} .$$

Commençons par remarquer que ω n'est pas pseudoconvexe au voisinage de z_0. Un calcul montre que la condition $(C_{1,1})$ est vérifiée en prenant $h = z_2 z_3 z_4$ (i.e. $\lambda_1(\varphi) \geqslant |h|$, $\lambda_2(\varphi) \geqslant |h|$).

D'autre part en remarquant que φ, peut s'écrire

$$|z_1 - 1|^2 + 8|z_4|^2|z'|^2 - |z_4|^4 + 2\,\mathrm{Re}\, z_1 < 2 \,,$$

on considère les domaines $\omega_{a,b,c,\varepsilon}$ définis par:

$$\omega_{a,b,c,\varepsilon} = \{\varphi_{a,b,c,\varepsilon} < 2 - \varepsilon\}$$

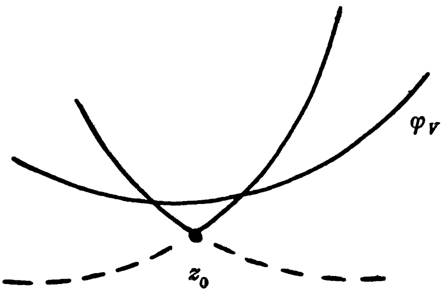
où

$$\tilde{\varphi}_{a,b,c,\varepsilon}(z) = a|z_1 - 1|^2 + 8b|z_4|^2|z'|^2 - c|z_4|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z_1$$

avec $a < 1$, $b < 1$, $c > 1$, $\varepsilon > 0$.

On remarque que si $(1 - a)$, $(1 - b)$ et $(c - 1)$ sont très petits, les conditions $\lambda_1(\tilde{\varphi}) \geqslant |h|$ et $\lambda_2(\tilde{\varphi}) \geqslant |h|$ sont aussi satisfaites. Maintenant, en choisissant ε très petit, le domaine défini par $\{\varphi < 2\} \cap \{\varphi_{a,b,c,\varepsilon} > 2 - \varepsilon\}$ est contenu dans un petit voisinage de z_0.

REMARQUE. En résolvant le problème d'extension, on a considéré ω défini par $\omega = \{\varphi < c\}$, où φ est de classe C^2, donc on a supposé que ω est de classe C^2 au voisinage de z_0. Cependant, il est immédiat que z_0 peut être un point d'intersection de domaines $\omega_i = \{\varphi_i < c\}$ où les fonctions φ_i vérifient l'hypothèse $(C_{1,q})$, $\varphi = \max(\varphi_i)$ vérifie l'hypothèse $(C_{2,q})$ et (C).



5. – Cas de dégénérescence isolée.

Ici nous complétons et précisons les résultats précédents dans le cas de dégénérescence isolée (voir les définitions dans la suite); en particulier nous obtenons des résultats d'extension locale même pour des formes $\bar{\partial}$-fermées; en fait l'hypothèse de dégénérescence isolée permet d'allèger les hypothèses faites précédemment (en particulier on évite l'hypothèse $C_{2,q}$). Dans le cas des fonctions, on a en fait un théorème d'extension des fonctions C.R. sur $\partial\omega \cap U$ (Théorème 5.5).

5.1. *Quelques définitions.*

DEFINITION 5.1. On dira que $z_0 \in \Omega$ est un point de q-dégénérescence pour φ si $\lambda_q(\varphi)(z_0) = 0$.

DEFINITION 5.2. On dira que $z_0 \in \Omega$ est un point de q-dégénérescence isolé pour φ, s'il existe un voisinage de z_0 dans lequel z_0 est le seul point de q-dégénérescence de φ.

5.2 *Résultats.*

Notre but est essentiellement de montrer le

THÉORÈME 5.1. *Supposons $\lambda_q(\varphi) \geqslant 0$ et $\lambda_{q+1}(\varphi) \geqslant 0$ au voisinage de z_0, que $\lambda_q^{-1}(\varphi)$ et $\lambda_{q+1}^{-1}(\varphi)$ sont dans $L^1(U)$, où U est un voisinage de z_0 et que z_0 est un point de q-dégénérescence et de $(q+1)$, dégénérescence isolé $(1 \leqslant q \leqslant n-1)$. Soit $\omega = \{\varphi < c\}$, avec $\varphi(z_0) = c$. Soit f une $(0, q)$ forme, $\bar{\partial}$-fermée dans U, de classe $C^1(U)$, avec* $\operatorname{supp}(f) \subset \bar{\omega} \cap U$. *Il existe un voisinage V de z_0 et une*

$(0, q-1)$ *forme* u *dans* $L^2(V)$ *tels que*

$$\begin{cases} \bar\partial u = f & \textit{dans } V \\ \operatorname{supp}(u) \subset \bar\omega \cap V . \end{cases}$$

THÉORÈME 5.2. *Supposons que* $\lambda_q(\varphi)$ *et* $\lambda_{q+1}(\varphi)$ *majorent, dans un voisinage de* z_0 *le module d'une fonction holomorphe* h *et que* z_0 *est un point de* q*-dégénérescence et de* $q+1$*-dégénérescence isolé. Soit* f *une* $(0, q)$ *forme telle que*

$$f = h^2 f_1 , \quad \operatorname{supp}(f) \subset \bar\omega \cap U , \quad \bar\partial f = 0 \qquad \textit{dans } U$$

$$f_1 \in C^1(U) , \qquad \textit{où } U \textit{ est un voisinage de } z_0 .$$

Il existe un voisinage V *de* z_0 *et* u *une* $(0, q-1)$ *forme dans* $L^2(V)$ *tels que*:

$$\begin{cases} \bar\partial u = f & \textit{dans } V \\ \operatorname{supp}(u) \subset \bar\omega \cap V . \end{cases}$$

COROLLAIRE 5.3. *Sous les hypothèses du théorème* 5.1, *soit* f *une* $(0, q-1)$ *forme,* $\bar\partial$*-fermée dans* $U \cap \complement\bar\omega$, *de classe* C^2 *dans* $U \cap \complement\bar\omega$. *Il existe un voisinage* V *de* z_0 *et une* $(0, q-1)$ *forme* F, *dans* $L^2(V)$, $\bar\partial$*-fermée dans* V *telles que*

$$F|_{\complement\bar\omega \cap V} = f .$$

COROLLAIRE 5.4. *En plus des hypothèses du théorème* 5.2, *on suppose vérifiée l'hypothèse* C) (*qui rappelons-le, est toujour vérifiée si* ω *est pseudoconvexe au voisinage de* z_0). *Soit* f *une fonction holomorphe dans* $U \cap \complement\bar\omega$, *de classe* C^1 *dans* $U \cap \complement\omega$. *Alors* f *se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de* z_0:

THÉORÈME 5.5. *Supposons* $d\varphi(z_0) \neq 0$, $z_0 \in \partial\omega$, $\inf\big(\lambda_2(\varphi), \lambda_1(\varphi)\big) \geqslant 0$ $\lambda_2^{-1}(\varphi) \in L^1(U)$, $\lambda_1^{-1}(\varphi) \in L^1(U)$ *et que* z_0 *est un point isolé de* 2*-dégénérescence et* 1*-dégénérescence.*

Soit f *une fonction de classe* C^4 *sur* $\partial\omega \cap U$ $\bar\partial_b$*-fermée. Il existe un voisinage* V *de* z_0 *et une fonction* $\tilde f$ *holomorphe dans* $\omega \cap V$ *de classe* C^1 *sur* $\bar\omega \cap V$ *telle que* $\tilde f|_{\partial\omega \cap V} = f$.

5.3. *Démonstrations des résultats.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1. On peut poser $z_0 = 0$. Notons $\varrho(z) = \|z\|^2$. Le domaine $\{\varphi < c\} \cap \{\varrho < \varepsilon\}$ est contenu dans U si ε est assez petit. Soit θ une fonction $[0, +\infty[\to [0, 1]$ telle que $\theta(t) = 1$ pour $t \leqslant \varepsilon/2$, $\theta(t) = 0$ pour $t \geqslant \varepsilon$, θ étant de classe C^∞.

La forme $\bar\partial(\chi(p)f)$ est une $(0, q+1)$ forme $\bar\partial$-fermée dans U, dans $L^\infty(U)$ et a son support contenu dans $S_1 = \{\varphi \leqslant c\} \cap \{\varepsilon/2 \leqslant p \leqslant \varepsilon\}$.

Supposons pour le moment (voir lemme 5.6) qu'il existe une fonction $\tilde\varphi$ de classe C^2, telle que S_1 soit contenu dans $S_2 = \{\varphi \leqslant c\} \cap \{\varrho \leqslant \varepsilon\} \cap \{\tilde\varphi \leqslant \alpha\}$, où α est un certain nombre positif tel que

a) $\tilde\varphi$ n'a pas de point de $(q+1)$-dégénérescence dans U

b) $\tilde\varphi(z_0) > \alpha$.

Alors, en utilisant le théorème 3.7, on peut résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} \bar\partial u = \bar\partial(\chi(\varrho)f) \\ \operatorname{supp}(u) \subset S_2 \\ u \in L^2(U)\,. \end{cases}$$

Considérons maintenant la forme $\chi(\varrho)f - u$; c'est une $(0, q)$ forme $\bar\partial$-fermée dans $L^2(U)$. Supposons de nouveau pour un instant (lemme 5.7) que l'on peut résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} \bar\partial v = \chi(\varrho)f - u \\ \operatorname{supp}(v) \subset \bar\omega \cap \{\varrho \leqslant \varepsilon\} \\ v \in L^2(U)\,. \end{cases}$$

Si V est un voisinage assez petit de z_0, on a

$$\begin{cases} \bar\partial v = f \quad \text{dans } V \text{ (car } u = 0 \text{ dans } V \text{ et } \chi(\varrho) = 1) \\ \operatorname{supp}(v) \subset \bar\omega \cap U \end{cases}$$

ce que l'on cherchait. Donc il nous reste à montrer les lemmes suivants.

LEMME 5.6. *Sous l'hypothèse que* 0 *est un point de* $(q+1)$*-dégénérescence isolé, il existe une fonction* $\tilde\varphi$ *telle que*:

a) S_1 *est contenu dans* S_2

b) $\tilde\varphi$ *n'a pas de point de* $(q+1)$*-dégénérescence dans* U

c) $\tilde\varphi(0) > \alpha > 0$ (*α assez petit*).

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.6. Soit $\theta(z) = \theta_1(|z|^2)$, où θ_1 a la forme suivante:

$$\theta_1' = 1 \quad \text{si } |z|^2 < \eta\,, \quad \eta \text{ assez petit}$$

$$\theta_1(0) > 0\,.$$

Posons

$$\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z) + \gamma\theta - c$$

où γ est une constante à choisir. Alors on a, en notant par H le hessien:

$$H_{\tilde{\varphi}} = H_\varphi + \gamma\{(\theta_1'(|z|^2)\delta_i^j + \theta_1''(|z|^2)z_i\bar{z}_j\}$$

pour $|z|^2 < \eta$, on a $\theta_1'' = 0$, $\theta_1' = 1$, donc

$$H_{\tilde{\varphi}} = H_\varphi + \gamma I \quad \text{et par suite } H_{\tilde{\varphi}} \geqslant \gamma \text{ pour } |z|^2 \leqslant \eta\,.$$

D'autre part si $|z|^2 \geqslant \eta$, on sait que

$$\sum_{|J|=q+2}\Bigl(\sum_{i,j\in J}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial z_i\,\partial\bar{z}_j}u_i^J u_j^J\Bigr)\bar{u} \geqslant \lambda_{q+1}(\varphi)\sum_{\substack{i\in J\\ |J|=q+2}}|u_i^J|^2 \geqslant c_0 \sum_{\substack{i\in J\\ |J|=q+1}}|u_i^J|^2\,,$$

puisque $\lambda_{q+1}(\varphi)$ est continue,

non nulle en dehors de 0 (car alors $\lambda_{q+1}(\varphi) \geqslant c_0 > 0$, si $|z|^2 \geqslant \eta$). Alors, en choisissant γ assez petit, on aura

$$\sum_{|J|=q+2}\Bigl(\sum_{i,j\in J}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial z_i\,\partial\bar{z}_j}u_i^J\bar{u}_j^J\Bigr) \geqslant \frac{c_0}{2}\sum_{\substack{i\in I\\ |J|=q+2}}|u_i^J|^2\,, \qquad \text{pour } |z|^2 \geqslant \eta\,.$$

Donc si γ est assez petit, on a

$$\sum_{|J|=q+2}\Bigl(\sum_{i,j\in J}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial z_i\,\partial\bar{z}_j}u_i^J\bar{u}_j^J\Bigr) \geqslant \gamma \sum_{\substack{i\in I\\ |J|=q+2}}|u_i^J|^2 \quad \text{dans } U\,.$$

Donc l'assertion b) est vérifiée.

L'assertion c) est immédiate car $\tilde{\varphi}(0) = \gamma(\theta_1(0)) > \alpha$ en choisissant α assez petit, strictement positif.

Montrons qu'en choisissant convenablement α, on a aussi l'assertion a). Pour montrer a), il suffit de montrer que

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\varphi}(z) &> \alpha\\ \varphi(z) &\leqslant c\end{aligned}\right\} \Rightarrow |z|^2 \leqslant \varepsilon/2\,.$$

D'après l'expression de $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}(z) > \alpha$ et $\varphi(z) \leqslant c$ entraînent que $\gamma\theta(z) \geqslant \alpha$. Ce qui donne bien que si α est positif assez petit, cela correspond à $|z|^2 \leqslant \delta < \varepsilon/2$.

LEMME 5.7. *Il existe* $v \in L^2(U)$ *tel que*

$$\begin{cases} \bar{\partial} v = \chi(\varrho) f - u \\ \operatorname{supp}(v) \subset \bar{\omega} \cap \{\varrho \leqslant \varepsilon\} . \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. D'après la démonstration du théorème 3.7, il suffit de montrer que

$$\int_U \frac{|\chi(\varrho) f - u|^2}{[\lambda_q(\varphi)]_\varepsilon} \leqslant B ,$$

où B est indépendante de ε. Comme u est à support compact dans S_2, soit W un voisinage de 0 sur lequel $u = 0$. Alors

$$\int_U \frac{|\chi(\varrho) f - u|^2}{[\lambda_q(\varphi)]_\varepsilon} = \int_W \frac{|\chi(\varrho) f|^2}{\lambda_q(\varphi)]_\varepsilon} + \int_{U/W} \frac{|\chi(\varrho) f - u|^2}{[\lambda_q(\varphi)]_\varepsilon} .$$

Mais

$$\int_W \frac{|\chi(\varrho) f|^2}{\lambda_q(\varphi)]_\varepsilon} \leqslant \|f\|^2_{L^\infty(W)} \left\| \frac{1}{[\lambda_q(\varphi)]_\varepsilon} \right\|_{L^1(W)} \leqslant \|f\|^2_{L^\infty(W)} \left\| \frac{1}{\lambda_q(\varphi)} \right\|_{L^1(U)} \qquad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$$

d'après la proposition 3.5.

D'autre part, sur $U|W$, $\lambda_q(\varphi)$ est minorée par une costante positive c_0. Alors si ε_0 est assez petit, on a $[\lambda_q(\varphi)]_\varepsilon \geqslant c_0/2$ sur $U|W$, pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Ainsi on obtient bien:

$$\int_U \frac{|\chi(\varphi) u - f|^2}{|\lambda_q(\varphi)|_\varepsilon} \leqslant B \qquad \text{pour } \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$$

avec

$$B = \frac{4}{c_0} \int_{U/W} |f|^2 + |u|^2) + \|f\|^2_\infty \left\| \frac{1}{\lambda_q(\varphi)} \right\|_{L^1(U)}$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.2. En fait ce théorème n'est autre que le théorème 4.1, avec en moins l'hypothèse $(C_{2,q})$. Mais cette hypothèse découle aisément du lemme 5.1, sous l'hypothèse de $(q+1)$-dégénérescence isolée.

Démonstration des corollaires 5.3. et 5.4. Compte-tenu des théorèmes 5.1 et 5.2, elles sont identiques à celles des corollaires 3.10 et 4.2.

Remarque 5.8. Pour pouvoir montrer un résultat local dans le cas des formes, on a eu recours à l'hypothèse de q-dégénérescence isolée. Cependant cette hypothèse (qui est assez restrictive) peut être abandonnéee dans le case où on peut résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f & \text{dans } U, \ f \text{ assez régulière} \\ \operatorname{supp}(u) \subset \bar{\omega} \cap U \end{cases}$$

avec u assez régulière ($u \in L^2(U)$ ne suffit pas) par exemple $u \in L^\infty(U)$ suffirait. Il se pose d'ailleurs la question de savoir si la solution u qui a été construite en utilisant les inégalités de Carleman a une certaine régularité lorsque f est assez régulière (si f est une 1-forme, le problème ne se pose évidemment, pas, puisque $\bar{\partial}$ est hypoelliptique dans ce cas).

Demonstration du théorème 5.5. En utilisant la démonstration du théorème 2.3.2′ de [6] il existe une fonction F de classe C^2 dans $\bar{\omega} \cap U$ telle que $\bar{\partial} F = O(\varphi^2)$ sur $\bar{\omega} \cap U$.

Considérons alors

$$g = \begin{cases} \bar{\partial} F & \text{sur } \omega \cap U \\ 0 & \text{sur } U/\omega \cap U \end{cases}$$

g est $(0, 1)$ forme, $\bar{\partial}$-fermée dans U, de classe $C^1(U)$, à support dans $\bar{\omega} \cap U$. D'après le théorème 5.1., il existe un voisinage V de z_0 et $u \in L^2(V)$ avec

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = g \\ \operatorname{supp}(u) \subset \bar{\omega} \cap V \, . \end{cases}$$

Comme $\bar{\partial}$ est hypoelliptique sur les $(0, 1)$ formes, on a $u \in C^1(V)$. Par suite, on a $u/\partial\omega \cap V = 0$. Ainsi $\tilde{f} = F - u$ est une fonction de classe C^1 sur $\bar{\omega} \cap V$, holomorphe dans $\omega \cap V$ qui vérifie $\tilde{f}| = F| = f$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti - C. D. Hill, *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. Part I: Reduction to vanishing theorems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26** (1972), pp. 325-363.

[2] A. ANDREOTTI - E. VESENTINI, *Carleman estimates for the Laplace Beltrami equation on complex manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., vol. 24-25.

[3] E. BEDFORD - J. E. FORNAESS, *Local extension of C.R. functions from weakly pseudo-convex boundaries*, Michigan Math. J., **25** (1978), pp. 259-262.

[4] J. J. KOHN - H. ROSSI, *On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold*, Ann. of Math., **81** (1965), pp. 451-472.

[5] L. HÖRMANDER, *L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator*, Acta Math., **113** (1965), pp. 89-152.

[6] L. HÖRMANDER, *Introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand (1968).

[7] H. LEWY, *On the local character ...*, Ann. of Math., **64** (1956), pp. 514-522.

[8] R. NIRENBERG, *On the H. Lewy extension phenomenon*, Trans. Amer. Math. Soc., **468** (1972), pp. 337-356.

[9] R. O. WELLS, *On the local holomorphic hull ...*, Comm. Pure Appl. Math., **19** (1966), pp. 145-165.

[10] M. LANDUCCI, *Solutions with precise compact support*, Bull. Soc. Math. France, **104** (1980), pp. 273-299.

Université de Paris-Sud
Equipe de recherche associée au CNRS (296)
Analyse Harmonique
Mathématique (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex,
et
Université de Rouen
76 Mont Saint-Aignon, France