ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

B. DACOROGNA

Quasi-convexité et semi-continuité inférieure faible des fonctionnelles non linéaires

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 9, nº 4 (1982), p. 627-644

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1982_4_9_4_627_0>

Quasi-convexité et semi-continuité inférieure faible des fonctionnelles non linéaires.

B. DACOROGNA

0. – Introduction.

Le but de cet article est d'isoler une condition nécéssaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle non linéaire soit faiblement semi-continue inférieurement (accessoirement, c.f. Théorème 7, nous nous intéresserons aussi à la continuité faible de ces fonctionnelles). Une telle question est importante non seulement d'un point de vue théorique mais aussi du point de vue des applications au calcul des variations et aux équations différentielles aux dérivées partielles (pour plus de détails voir [Da2]).

Plus précisément nous travaillerons dans cet article sous les hypothèses suivantes. Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$, u^ν, u: $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, f: $\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ continue et

$$(H) \qquad \begin{cases} u^\nu \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^\alpha_m(\Omega),\ \alpha > 1 \text{ quand } \nu \to \infty \\ Au = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ijk} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)_{1 \leqslant i \leqslant q}, \qquad a_{ijk} \in \boldsymbol{R} \\ Au^\nu \rightharpoonup Au \quad \text{dans } L^\beta_q(\Omega), \quad \beta \geqslant 1 \\ f(u^\nu) \rightharpoonup l \quad \text{au sens des distributions} \end{cases}$$

(par $\rightharpoonup$ nous dénotons la convergence faible dans L^α, c.f. la section suivante).

La question que nous nous poserons est donc pour quelle fonction continue f a-t-on

$$(0.1) \qquad l \geqslant f(u) \text{ au sens des distributions?}$$

Dans le cas du calcul des variations, lorsqu'on a dans (H)

$$(0.2) \qquad u^\nu = \nabla v^\nu$$

Pervenuto alla Redazione il 19 Dicembre 1981.

avec le A correspondant, i.e.,

$$Au^\nu = \operatorname{rot}(\nabla v^\nu) = 0 \,, \tag{0.3}$$

le problème de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour la semi-continuité inférieure faible a été traité en profondeur (voir par exemple [Ha1], [Ha2], [Mo1], [Mo2]...).

Plus récemment Murat et Tartar ([Mu1]-[Mu3], [Ta1], [Ta2]) ont posé le problème de la semi-continuité inférieure faible dans le contexte plus général de l'hypothèse (H); et ils ont obtenu une condition *ponctuelle* nécessaire (mais non suffisante) généralisant la condition de Legendre-Hadamard du calcul des variations. En s'inspirant des résultats de Morrey [Mo1] dans le cas variationnel et de sa notion de quasi-convexité, nous démontrerons ici (c.f. aussi [Da2]) que l'on peut établir une condition nécessaire et suffisante que nous appellerons *A-quasi-convexité* (dans certain cas A-B-quasi-convexité). Toutefois cette condition est, comme nous le verrons, *non ponctuelle* et, par conséquent, plus difficile à vérifier que celle de Murat et Tartar. Précisons enfin que cette notion de quasi-convexité peut s'avérer utile dans les problèmes de relaxation non convexe (c.f. [Da1], [Da2]).

1. – Le cas général.

Introduisons d'abord quelques notations. Nous dénoterons la convergence faible * dans $L^\infty_m(\Omega)$ par $\overset{*}{\rightharpoonup}$; en d'autres termes on a

$$u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^\infty_m(\Omega) \tag{1.1}$$

si et seulement si

$$\int_\Omega \langle u^\nu(x); \varphi(x)\rangle\, dx \to \int_\Omega \langle u(x); \varphi(x)\rangle\, dx \tag{1.2}$$

pour tout $\varphi \in L^1_m(\Omega)$ et où l'on a dénoté le produit scalaire dans $\boldsymbol{R}^m$ par $\langle .; .\rangle$.

Tout au cours de cet article nous supposerons que Ω est un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$ et

$$(H) \qquad \begin{cases} u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans } L^\infty_m(\Omega) \\ Au = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)_{1\leqslant i\leqslant q} \\ Au^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} Au \quad \text{dans } L^\infty_q(\Omega) \\ f(u^\nu) \overset{*}{\rightharpoonup} l \quad \text{dans } L^\infty(\Omega)\,. \end{cases}$$

REMARQUE. Pour ne pas alourdir les considérations techniques, nous nous sommes limités dans (H) au cas des convergences faibles * dans L^∞; il est évident que les résultats que nous obtiendrons plus bas sont généralisables au cas des convergences faibles dans L^α $(\alpha < \infty)$, pourvu que l'on impose certaines conditions de croissance à f de sorte que $f(u^\nu)$ soit au moins une distribution.

Avant de procéder plus avant, donnons quelques exemples d'opérateurs A que nous avons à l'esprit.

EXEMPLES.

(i) *Cas compact*:

$$Au = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)_{1\leq j\leq m;\,1\leq k\leq n}. \tag{1.3}$$

Ce cas est trivial car, par le Théorème de Rellich ([Ad1]), on déduit alors la convergence forte de la suite u^ν et, par conséquent, n'importe quelle fonction continue est aussi faiblement continue.

(ii) *Cas variationnel*: Supposons que $m = nr$ ($r\geq 1$ un entier) et que

$$u^\nu = (\operatorname{grad} v_1^\nu, \dots, \operatorname{grad} v_r^\nu) \tag{1.4}$$

où $v_j^\nu\colon \Omega\subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. Pour tour $u\colon \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ nous dénoterons

$$\operatorname{rot} u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n;\, j>i} \in \boldsymbol{R}^{n(n-1)/2}. \tag{1.5}$$

L'opérateur A naturellement associé au problème variationnel est donc

$$Au = \operatorname{rot}\nabla u = (\operatorname{rot}\operatorname{grad} v_1, \dots, \operatorname{rot}\operatorname{grad} v_r) \equiv 0\ . \tag{1.6}$$

(iii) *Cas du rotationnel*: (ce cas est une généralisation du précédent).

Soit $m = nr$ et

$$u = (u_1, \dots, u_r) \tag{1.7}$$

avec $u_j\colon \Omega\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$, $1\leq j\leq r$ et

$$Au = (\operatorname{rot} u_1, \dots, \operatorname{rot} u_r)\ . \tag{1.8}$$

(iv) *Cas de la divergence*: Soit $m = nr$ et u de la forme (1.7) et supposons que

$$Au = (\operatorname{div} u_1, \dots, \operatorname{div} u_r) \in \boldsymbol{R}^r\ . \tag{1.9}$$

(on peut aussi imaginer des exemples d'opérateurs A combinant (1.8) et (1.9)).

(v) Soit $m = n$ et

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \tag{1.10}$$

avec

$$Au = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right). \tag{1.11}$$

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, Morrey [Mo1], dans le contexte du calcul des variations (Exemple (ii) ci-dessus), a isolé une condition nécessaire et suffisante, appelée *quasi-convexité*, pour que pour tout domaine borné D de $\boldsymbol{R}^n$ l'on ait

$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_D f(u^\nu(x))\, dx \geqslant \int_D f(u(x))\, dx \tag{1.12}$$

(D étant arbitraire et pour adopter les notations (H) on peut remarquer que (1.12) implique que $l \geqslant f(u)$).

Dans [Da2] il a été prouvé qu'en adaptant la démonstration de Morrey au cas plus général de l'hypothèse (H), on peut généraliser cette condition et obtenir le théorème ci-dessous. Mais tout d'abord introduisons la définition suivante.

Définition ([Da2]). On dit qu'une fonction continue $f\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ est *A-quasi convexe* si

$$\int_K f(\mu + \zeta(x))\, dx \geqslant \int_K f(\mu)\, dx$$

pour tout hypercube $K \subset \boldsymbol{R}^n$, pour tout $\mu \in \boldsymbol{R}^m$ et pour tout $\zeta \in L(K)$ où

$$L(K) = \left\{\zeta \in L^\infty_m(K)\colon \int_K \zeta(x)\, dx = 0 \ \text{ et } \ A\zeta \equiv 0\right\}.$$

Théorème 1 ([Da2]). (i) *si pour toute suite $\{u^\nu\}$ qui satisfait l'hypothèse (H) on a $l \geqslant f(u)$, c'est-à-dire*

$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_D f(u^\nu(x))\, dx \geqslant \int_D f(u(x))\, dx \tag{1.12}$$

pour tout domaine borné $D \subset \boldsymbol{R}^n$, alors f est A-quasi convexe.

(ii) *Réciproquement si* $\{u^\nu\}$ *et* u *satisfont* (H) *et aussi*

$$(H_0)\, Au^\nu - Au \equiv 0 \text{ pour tout } \nu \geqslant 1$$

et si f *est* A*-quasi convexe alors* $l \geqslant f(u)$ $\big($*i.e.*, (1.12)$\big)$.

Avant de procéder à la démonstration du théorème, il est important de faire quelques remarques sur cette notion de A-quasi-convexité. Quoique « naturelle » comme l'indique le théorème, elle est difficilement vérifiable de par sa nature de condition *non ponctuelle*. A la fin de cette section nous mentionnerons un résultat de Murat et Tartar $\big($[Mu2], [Ta2]$\big)$ qui donne une condition ponctuelle qui est nécessaire pour que l'on ait $l \geqslant f(u)$, mais qui, quoique très utile dans certaines applications, n'est, en général, pas suffisante. Dans le cas variationnel $\big($Exemple (ii)$\big)$, la condition isolée par Murat et Tartar n'est autre que la condition de Legendre-Hadamard.

Dans la section suivante, nous montrerons, et ce sera le résultat principal de cet article, que dans certains cas particuliers importants, comme ceux des Exemples (ii), (iii) et (iv), on peut rendre plus précise la notion de A-quasi-convexité sans toutefois en faire une condition ponctuelle comme celle de Murat et Tartar.

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

DÉMONSTRATION.

(i) Nous reprenons ici la démonstration établie dans [Da2] et qui adapte au cas de l'hypothèse (H) celle de Morrey [Mo1].

Soit D un hypercube de $\boldsymbol{R}^n$ de mesure unité et soit $\zeta \in L(D)$. Etendons ζ par périodicité de période 1 dans chaque variable de D à $\boldsymbol{R}^n$. Définissons ensuite pour ν un entier

$$\zeta^\nu(x) = \zeta(\nu x)\,. \tag{1.13}$$

Il est bien connu qu'alors (c.f. par exemple Lemme 1.2 dans [Da2])

$$\zeta^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{dans } L^\infty_m(D) \tag{1.14}$$

$$A\zeta^\nu \equiv 0\,. \tag{1.15}$$

Finalement, on voit immédiatement que

$$\int_D f(\mu + \zeta^\nu(x))\,dx = \frac{1}{\nu^n}\int_{\nu D} f(\mu + \zeta(y))\,dy = \int_D f(\mu + \zeta(x))\,dx\,, \tag{1.16}$$

la dernière égalité étant une conséquence de la périodicité de ζ. Si l'on prend alors la limite inférieure de (1.16) et on utilise (1.12), on obtient

$$(1.17)\qquad \int_D f(\mu + \zeta(x))\,dx = \liminf_{\nu\to\infty} \int_D f(\mu + \zeta^\nu(x))\,dx \geqslant \int_D f(\mu)\,dx\,.$$

Par un changement de variable approprié, l'inégalité (1.17) est vraie pour tout hypercube D, d'où le résultat.

(ii) Nous ne reproduirons pas ici la démonstration de la réciproque établie dans [Da2] (Théorème 2.3) car dans la section suivante nous montrerons que dans des cas particuliers on pourra même établir la partie suffisante tout en supprimant l'hypothèse (H_0). ■

Pour conclure cette section, nous mentionnons le résultat de Murat et Tartar ([Mu2], [Ta2]) dont nous avons parlé au-dessus.

THÉORÈME 2. *Si pour toute suite $\{u^\nu\}$ satisfaisant (H) on a $l \geqslant f(u)$ alors f est convexe dans les directions de Λ, c'est-à-dire $f(a + t\lambda)$ est convexe en t pour tout $a \in \boldsymbol{R}^m$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$ avec*

$$\Lambda = \{\lambda \in \boldsymbol{R}^m \colon \exists \xi \in \boldsymbol{R}^n - \{0\} \colon \sum_{j,k} a_{ijk}\lambda_j \xi_k = 0\}\,.$$

REMARQUE. Dans le cas de l'Exemple (ii) (cas variationnel) et si l'on a que f est C^2 alors le Théorème 2 veut simplement dire que

$$(1.18)\qquad \sum_{i,j,\alpha,\beta} \frac{\partial^2 f(F)}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}\,\lambda_i\lambda_j\mu_\alpha\mu_\beta \geqslant 0$$

pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}^n$, $\mu \in \boldsymbol{R}^m$ et $F = (F_{i\alpha})_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant\alpha\leqslant m}$, (1.18) n'étant alors rien d'autre que la condition de Legendre-Hadamard.

On peut donc maintenant résumer par un tableau toutes les différentes conditions (pour une démonstration de toutes ces implications, on peut se référer à [Da2]).

f convexe $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $l \geqslant f(u) \Rightarrow f$ Λ-quasi convexe $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f convexe dans les directions de Λ.

2. – Le cas de la divergence et du rotationnel.

Nous allons, dans cette section, montrer que dans certains cas particuliers comme ceux des Exemples (ii), (iii) et (iv) de la section précédente, on peut rendre plus précise la notion de A-quasi-convexité.

Introduisons tout d'abord quelques notations et définitions.

NOTATION. Pour un opérateur A défini comme dans la section précédente, à savoir

$$Au = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)_{1\leqslant i\leqslant q} \tag{2.1}$$

on notera par

$$B\colon v(x_1, \ldots, x_n) = (v_1, \ldots, v_p) \to Bv$$

l'opérateur

$$Bv = \left(\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}\right)_{1\leqslant \lambda\leqslant m}, \tag{2.2}$$

avec $b_{\lambda\mu\nu} \in \boldsymbol{R}$, tel que

$$ABv \equiv 0 \quad \text{pour tout } v \in C^2(\Omega, \boldsymbol{R}^p)\,. \tag{2.3}$$

EXEMPLES. (α) Si $m = nr$, $q = n(n-1)r/2$, et si

$$\begin{cases} u(x_1, \ldots, x_n) = (u_1, \ldots, u_r), \text{ avec } u_j\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n,\ 1 \leqslant j \leqslant r\,, \\ Au = (\operatorname{rot} u_1, \ldots, \operatorname{rot} u_r)\,, \\ Bv = \nabla v = (\operatorname{grad} v_1, \ldots, \operatorname{grad} v_r), \text{ avec } v_j\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R},\ 1 \leqslant j \leqslant r\,, \end{cases}$$

alors A et B satisfont (2.1), (2.2) et (2.3).

(β) Si $m = n$ et

$$u(x_1, \ldots, x_n) = (u_1, \ldots, u_n)\,, \quad Au = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)$$

alors le seul B qui satisfait (2.2) et (2.3) est

$$Bu \equiv 0 \qquad \text{pour tout } u \in C^2(\Omega; \boldsymbol{R}^p)\,.$$

DÉFINITION. On dit qu'une fonction continue $f\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ est *A-B-quasi convexe*, pour A et B satisfaisant (2.1), (2.2) et (2.3), si

$$\int_G f(\mu + B\zeta(x))\, dx \geqslant \int_G f(\mu)\, dx \tag{2.4}$$

pour tout $\mu \in \boldsymbol{R}^m$, $\zeta \in W_0^{1,\infty}(G; \boldsymbol{R}^p)$ et $G \subset \boldsymbol{R}^n$ un domaine borné.

REMARQUES.

(i) Dans le cas variationnel (Exemple (ii) de la section précédente), c'est-à-dire $m = nr$ et

$$\begin{cases} u(x_1, \dots, x_n) = (u_1, \dots, u_r), \text{ avec } u_j\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n , \\ Au = \operatorname{rot} u = (\operatorname{rot} u_1, \dots, \operatorname{rot} u_r) , \\ Bv = \nabla v = (\operatorname{grad} v_1, \dots, \operatorname{grad} v_r), \text{ avec } v_j\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} , \end{cases}$$

la définition que nous donnons de l'A-B-quasi-convexité correspond exactement à la notion de quasi-convexité introduite par Morrey [Mo1] dans le contexte du calcul des variations.

(ii) Il est important de noter que cette notion de A-B-quasi-convexité est plus précise que la condition de A-quasi-convexité donnée dans la section précédente à cause de la condition sur le support de ζ (i.e., $\zeta \in W_0^{1,\infty}$).

Enfin on a facilement

PROPOSITION 3. – *Si f est A-quasi convexe alors f est A-B-quasi convexe.*

DÉMONSTRATION. Soit G un domaine de $\boldsymbol{R}^n$ et soit K un hypercube de $\boldsymbol{R}^n$ contenant G. Soit $\zeta \in W_0^{1,\infty}(G; \boldsymbol{R}^p)$; étendons ζ à K tout entier de sorte que

$$\zeta \equiv 0 \text{ sur } K - G . \tag{2.5}$$

On déduit alors que $B\zeta \in L(K)$, c'est-à-dire

$$B\zeta \in L_m^\infty(K) , \quad \int_K B\zeta(x)\, dx = 0 , \quad A(B\zeta) \equiv 0 . \tag{2.6}$$

Utilisant la A-quasi-convexité de f on obtient

$$\int_K f(\mu + B\zeta(x))\, dx \geqslant \int_K f(\mu)\, dx , \tag{2.7}$$

et donc

$$\int_G f(\mu + B\zeta(x))\, dx = \int_K f(\mu + B\zeta(x))\, dx - \int_{K-G} f(\mu)\, dx \geqslant \int_G f(\mu)\, dx . \tag{2.8}$$ ■

Avant d'énoncer le théorème principal de cet article, rappelons notre hypothèse (H).

$$(H)\qquad \begin{cases} u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans } L^\infty_m(\Omega) \\ Au = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jik}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)_{1\leqslant i\leqslant q}, \qquad a_{jik}\in \mathbf{R} \\ Au^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} Au \quad \text{dans } L^\infty_q(\Omega) \\ f(u^\nu) \overset{*}{\rightharpoonup} l \quad \text{dans } L^\infty(\Omega)\,, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ et $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ est continue.

THÉORÈME 4.

(i) *Si pour toute suite* $\{u^\nu\}$ *satisfaisant* (H) *on a* $l \geqslant f(u)$, *c'est-à-dire*

$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_D f(u^\nu(x))\,dx \geqslant \int_D f(u(x))\,dx \tag{2.9}$$

pour tout domaine borné D *de* $\mathbf{R}^n$, *alors* f *est* A-B-*quasi convexe.*

(ii) *Réciproquement: Supposons tout d'abord que* f *satisfait*

$$|f(u)-f(v)| \leqslant a(1+|u|^{\beta-1}+|v|^{\beta-1})\,|u-v|\,, \tag{2.10}$$

$a>0$, $\beta\geqslant 1$, u, $v\in\mathbf{R}^m$. *Supposons, en outre, que* $\{u^\nu\}$ *et* u *vérifient l'hypothèse* (H) *et que* A *et* B (pour la définition de B voir (2.2) et (2.3)) *satisfont*

$$(H_{AB})\qquad \begin{cases} \textit{Pour toute suite } u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \textit{ et } Au^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} 0, \textit{ il existe} \\ v^\nu \in W^{1,\beta}_0(\Omega;\mathbf{R}^p) \textit{ et } w^\nu\in L^\beta_m(\Omega) \textit{ tels que} \\ u^\nu = Bv^\nu + w^\nu & (2.11) \\ v^\nu \rightharpoonup 0 \textit{ dans } W^{1,\beta}(\Omega;\mathbf{R}^p) \\ w^\nu \to 0 \textit{ dans } L^\beta_m(\Omega)\,. & (2.12) \end{cases}$$

Alors, si f *est* A-B-*quasi convexe,* $l\geqslant f(u)$.

Avant de procéder à la démonstration du théorème faisons quelques remarques. Tout d'abord la partie (i) du théorème est une conséquence directe du Théorème 1 et de la Proposition 3. Dans la partie réciproque du théorème, notons que l'hypothèse (2.10) n'est que purement technique, la condition importante étant (H_{AB}). On peut, en effet, se demander quels sont les opérateurs A et B satisfaisant cette hypothèse. On verra plus bas (Théorème 6) que si A = divergence et B = rotationnel ou si A = rotationnel et $B =$ gradient (et donc en particulier pour le cas variationnel) ou pour un cas mixte $A =$ (divergence, rotationnel) et $B =$ (rotationnel, gradient) l'hypothèse (H_{AB}) est satisfaite; par contre, si l'opérateur A est comme dans l'Exemple (β) ci-dessus, elle ne l'est pas.

Il est enfin intéressant de rapprocher l'hypothèse (H_{AB}) de la condition de rang constant utilisée par Murat dans [Mu3]. Utilisant un résultat de Schulenberger et Wilcox ([SW1], [Ka1]), l'hypothèse de Murat implique (Lemme 3.6, [Mu3]) une condition très proche de (H_{AB}). Toutefois les techniques que nous utiliserons dans le Théorème 6 sont sensiblement différentes des siennes, même si les résultats sont dans le même esprit.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème.

Démonstration. (ii) La démonstration que nous allons donner s'inspire de celle de Morrey ([Mo1], [Mo2]) dans le contexte du calcul des variations.

Approchons Ω par une union d'hypercubes D_k d'arête $1/k$, soit

$$\left\{\begin{array}{ll} H_k = \bigcup\limits_{i=1}^{I} D_{k_i} & \\ \operatorname{mes}(\Omega - H_k) \to 0 & \text{si } k \to \infty \\ \operatorname{mes} D_{k_i} = \dfrac{1}{k^n}, & 1 \leqslant i \leqslant I. \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Définissons, de plus, pour $x \in H_k$

$$\bar{u}_k(x) = \frac{1}{\operatorname{mes} D_{k_i}} \int_{D_{k_i}} u(\xi)\, d\xi, \qquad \text{pour } x \in D_{k_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant I. \tag{2.14}$$

De (2.14) on déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k suffisamment grand pour que

$$\left| \int_{H_k} [f(u + (u^\nu - u)) - f(\bar{u}_k + (u^\nu - u))]\, dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.15}$$

$$\left| \int_{H_k} [f(\bar{u}_k) - f(u)]\, dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.16}$$

On a donc en utilisant (2.15) et (2.16) que

$$\int_{H_k} [f(u^\nu) - f(u)]\, dx + \varepsilon \geqslant \int_{H_k} f(\bar{u}_k + (u^\nu - u))\, dx - \int_{H_k} f(\bar{u}_k)\, dx. \tag{2.17}$$

Soit maintenant

$$\xi^\nu = u^\nu - u. \tag{2.18}$$

On déduit immédiatement de l'hypothèse (H) que

$$\xi^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{dans } L^\infty_m(\Omega) \tag{2.19}$$

$$A\xi^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{dans } L^\infty_q(\Omega)\,. \tag{2.20}$$

Mais de l'hypothèse (H_{AB}), on obtient l'existence de $\varphi^\nu_k \in W^{1,\beta}_0(D_k;\boldsymbol{R}^p)$ et $\psi^\nu_k \in L^\beta_m(D_k)$ tels que

$$\xi^\nu = B\varphi^\nu_k + \psi^\nu_k\,, \tag{2.21}$$

$$\varphi^\nu_k \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } W^{1,\beta}(D_k;\boldsymbol{R}^p)\,, \quad \text{quand } \nu\to\infty\,, \tag{2.22}$$

$$\psi^\nu_k \to 0 \quad \text{dans } L^\beta_m(D_k)\,, \quad \text{quand } \nu\to\infty\,. \tag{2.23}$$

Remarquons qu'on a trivialement

$$\begin{aligned}\int_{H_k}[f(\bar u_k+\xi^\nu)-f(\bar u_k)]\,dx &=\\ &=\int_{H_k}[f(\bar u_k+\xi^\nu)-f(\bar u_k+B\varphi^\nu_k)]\,dx+\int_{H_k}[f(\bar u_k+B\varphi^\nu_k)-f(\bar u_k)]\,dx\,.\end{aligned} \tag{2.24}$$

En faisant intervenir la majoration (2.10) dans (2.24) on a

$$\left|\int_{H_k}[f(\bar u_k+\xi^\nu)-f(\bar u_k+B\varphi^\nu_k)]\,dx\right|\leqslant K\int_{H_k}|\psi^\nu_k(x)|^\beta\,dx, \tag{2.25}$$

où K est une constante ne dépendant pas de ν.

Utilisant (2.25) dans (2.17), on obtient

$$\int_{H_k}[f(u^\nu)-f(u)]\,dx+\varepsilon+K\|\psi^\nu_k\|^\beta_{L^\beta(H_k)}\geqslant\int_{H_k}[f(\bar u_k+B\varphi^\nu_k)-f(\bar u_k)]\,dx\,. \tag{2.26}$$

Faisons intervenir maintenant le fait que f est A-B-quasiconvexe, i.e.

$$\int_{D_k}f(\bar u_k+B\varphi^\nu_k)\,dx\geqslant\int_{D_k}f(\bar u_k)\,dx\,, \tag{2.27}$$

pour déduire que

$$\int_{H_k}[f(u^\nu)-f(u)]\,dx+\varepsilon+K\|\psi^\nu_k\|^\beta_{L^\beta(H_k)}\geqslant 0\,. \tag{2.28}$$

Laissons enfin ν tendre vers l'infini dans (2.28) et en utilisant (2.23), on a

$$\liminf_{\nu\to\infty}\int_{H_k} f(u^\nu)\,dx + \varepsilon \geqslant \int_{H_k} f(u)\,dx\,.$$

En utilisant (2.13) et le fait que ε est arbitraire on a bien établi (2.9). ■

Pour conclure cette section, nous allons montrer qu'un opérateur A de la forme divergence ou rotationnel (et donc, en particulier, pour le cas variationnel) satisfait l'hypothèse (H_{AB}). En fait l'essentiel de la démonstration de cela reposera sur la régularité des opérateurs elliptiques. Il nous faut pour cela introduire tout d'abord quelques notations.

NOTATIONS.

(i) Soit A l'opérateur défini par (2.1), à savoir

$$Au = \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)_{1\leqslant i\leqslant q}$$

on notera par A^* l'opérateur défini par

$$\int_\Omega \langle A^*u(x)\,;\, v(x)\rangle dx = \int_\Omega \langle u(x)\,;\, Av(x)\rangle dx\,,$$

pour tout $u\in C_0^\infty(\Omega;\boldsymbol{R}^q)$, $v\in C_0^\infty(\Omega;\boldsymbol{R}^m)$.

(ii) En particulier on notera par rot* l'opérateur A^* associé à $A=\mathrm{rot}$, i.e.,

$$\mathrm{rot}\,u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n;\, j>i} =$$

$$= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right)_{j\geqslant 2};\quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_j}-\frac{\partial x_j}{\partial u_2}\right)_{j\geqslant 3};\ \dots;\quad \left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n}-\frac{\partial u_n}{\partial x_{n-1}}\right)$$

donc ici $q=n(n-1)/2$. Si on dénote par

$$\sigma(p) = (p-1)n - \frac{p(p-1)}{2}\,,\qquad 1\leqslant p\leqslant n-1$$

on a donc pour

$$v(x_1,\dots,x_n) = (v_1, v_2, \dots, v_{n(n-1)/2})$$

$$\mathrm{rot}^*\, v = \left(\sum_{\nu=1}^{p-1}\frac{\partial v_{p-\nu+\sigma(p)}}{\partial x_\nu} - \sum_{\nu=p+1}^{n}\frac{\partial v_{\nu-p+\sigma(\nu)}}{\partial x_\nu}\right)_{1\leqslant p\leqslant n}.$$

On déduit facilement des définitions ci-dessus

LEMME 5.

(i) *Si* $u: \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$

$$\operatorname{rot}^* \operatorname{rot} u = -\Delta_n u + \operatorname{grad} \operatorname{div} u, \text{ pour tout } u \in C^2, \tag{2.29}$$

où on a dénoté par

$$\Delta_n u = (\Delta u_1, \ldots, \Delta u_n) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2}, \ldots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j^2}\right). \tag{2.30}$$

(ii) *Si* $u: \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n(n-1)/2}$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot}^* u \equiv 0, \text{ pour tout } u \in C^2, \tag{2.31}$$

et

$$\operatorname{rot}^* \Delta_{n(n-1)/2} u = \Delta_n \operatorname{rot}^* u, \text{ pour tout } u \in C^3. \tag{2.32}$$

(iii) *Si* $u: \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$

$$\operatorname{rot} \Delta_n u = \Delta_{n(n-1)/2} \operatorname{rot} u, \text{ pour tout } u \in C^3. \tag{2.33}$$

THÉORÈME 6.

(i) *Si* $m = n$, $A = \operatorname{rot}$, $B = \operatorname{grad}$, *alors* A *et* B *satisfont l'hypothèse* (H_{AB}) *du Théorème* 4.

(ii) *Si* $m = n$, $A = \operatorname{div}$, $B = \operatorname{rot}^*$, *alors* A *et* B *satisfont l'hypothèse* (H_{AB}).

REMARQUE. Si $m = nr$, $s \leqslant r$ et

$$\left\{\begin{aligned} &u(x_1, \ldots, x_n) = (u_1, \ldots, u\ , u_{s+1}, \ldots, u_r), \\ &Au = (\operatorname{rot} u_1, \ldots, \operatorname{rot} u_s, \operatorname{div} u_{s+1}, \ldots, \operatorname{div} u_r), \\ &Bu = (\operatorname{grad} u_1, \ldots, \operatorname{grad} u_s, \operatorname{rot}^* u_{s+1}, \ldots, \operatorname{rot}^* u_r), \end{aligned}\right.$$

alors le théorème ci-dessus implique que A et B satisfont (H_{AB}).

DÉMONSTRATION.

(i) Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{R}^n$, suffisamment régulier et supposons donc que

$$u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{dans } L_n^\infty(\Omega) \tag{2.34}$$

$$Au^\nu = \operatorname{rot} u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{dans } L_{n(n-1)/2}^\infty(\Omega). \tag{2.35}$$

On veut montrer que, $\beta \geqslant 1$ étant donné, on peut trouver $v^\nu \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ et $w^\nu \in L_n^\beta(\Omega)$ tels que

$$u^\nu = \operatorname{grad} v^\nu + w^\nu \,, \tag{2.36}$$

$$v^\nu \rightharpoonup 0 \text{ dans } W^{1,\beta}(\Omega)\,, \tag{2.37}$$

$$w^\nu \to 0 \text{ dans } L_m^\beta(\Omega)\,. \tag{2.38}$$

Pour cela considérons l'équation

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad} v^\nu(x); \operatorname{grad} \varphi(x)\rangle \, dx = \int_\Omega \langle u^\nu(x); \operatorname{grad} \varphi(x)\rangle dx \tag{2.39}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,\alpha'}(\Omega)$ $\alpha' \geqslant 1$ étant donné.
Alors, d'après les résultats classiques sur les équations uniformément elliptiques (voir par exemple Théorème 7.2 dans [Si1]), on déduit l'existence d'une solution $v^\nu \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, où α est donné par $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$, telle que

$$\|v^\nu\|_{W^{1,\alpha}} \leqslant K \|\operatorname{div} u^\nu\|_{W^{-1,\alpha}} \tag{2.40}$$

où K est une constante ne dépendant pas de ν et $W^{-1,\alpha}$ dénote le dual de $W_0^{1,\alpha'}$ (pour plus de détails sur les espaces $W^{-1,\alpha}$ voir [Ad1]).

De (2.34) (i.e., $\operatorname{div} u^\nu \in W^{-1,\infty}$), de (2.39) et de (2.40), on déduit immédiatement que

$$v^\nu \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } W^{1,\alpha}\,;$$

α étant arbitraire on a (2.37).

Soit maintenant $w^\nu \in L_m^\alpha(\Omega)$ défini par

$$w^\nu = u^\nu - \operatorname{grad} v^\nu \,, \tag{2.41}$$

en combinant (2.34) et (2.37), on obtient

$$w^\nu \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L_m^\alpha(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \geqslant 1\,. \tag{2.42}$$

Pour terminer la démonstration, il nous faut montrer que la convergence est forte dans (2.42). Pour cela fixons $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^n)$ et observons que par le Lemme 5, on a

$$\int_\Omega \langle w^\nu; \Delta_n \varphi\rangle \, dx = -\int_\Omega \langle w^\nu; \operatorname{rot}^* \operatorname{rot} \varphi\rangle \, dx + \int_\Omega \langle w^\nu; \operatorname{grad} \operatorname{div} \varphi\rangle \, dx\,. \tag{2.43}$$

et donc en utilisant (2.41), on a pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; \boldsymbol{R}^n)$

$$\int_\Omega \langle w^\nu; \Delta_n \varphi\rangle\, dx = \int_\Omega \langle \operatorname{rot} u^\nu; \operatorname{rot}\varphi\rangle\, dx + \int_\Omega \langle \operatorname{grad} v^\nu; \operatorname{rot}^* \operatorname{rot}\varphi\rangle\, dx + \int_\Omega \langle u^\nu; \operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi\rangle\, dx - \int_\Omega \langle \operatorname{grad} v^\nu; \operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi\rangle\, dx\,. \tag{2.44}$$

De (2.39), on déduit donc que

$$\int_\Omega \langle w^\nu; \Delta_n\varphi\rangle\, dx = \int_\Omega \langle \operatorname{rot} u^\nu; \operatorname{rot}\varphi\rangle\, dx\,;$$

d'où l'on déduit que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega \langle w^\nu; \Delta_n\varphi\rangle\, dx\right| \leqslant \|\operatorname{rot} u^\nu\|_{L^\alpha} \|\operatorname{rot}\varphi\|_{L^{\alpha'}} \leqslant K \|\operatorname{rot} u^\nu\|_{L^\alpha} \|\varphi\|_{W^{1,\alpha'}} \tag{2.45}$$

avec $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$; rappelons aussi que par (2.35) $\operatorname{rot} u^\nu \in L^\infty$.

Utilisant à nouveau la régularité locale des opérateurs elliptiques (c.f. par exemple, [Ag1] Théorème 6.2 si $\alpha = 2$ et [Si1] Théorème 9.5 si $\alpha \neq 2$), on obtient en utilisant (2.42) que

$$\|w^\nu\|_{W^{1,\alpha}(\Omega')} \leqslant K\big(\|\operatorname{rot} u^\nu\|_{L^\alpha(\Omega)} + \|w^\nu\|_{L^\alpha(\Omega)}\big)\,, \tag{2.46}$$

où Ω' est tel que $\Omega' \subset\subset \Omega$ et K est une constante. Et donc en utilisant le Théorème de Rellich et (2.42), on déduit que

$$w^\nu \to 0 \qquad \text{dans } L_m^\gamma(\Omega)$$

pour $\gamma < \alpha$; mais α étant arbitraire, on a bien (2.38).

(ii) Cette partie est démontrée de manière analogue à la précédente et nous passerons donc plus vite sur les détails. Soit

$$u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \qquad \text{dans } L_m^\infty(\Omega) \tag{2.47}$$

$$\operatorname{div} u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \qquad \text{dans } L^\infty(\Omega)\,. \tag{2.48}$$

Définissons comme précédemment $v^\nu \in W_0^{1,\alpha}(\Omega; \boldsymbol{R}^{n(n-1)/2})$ la solution faible de

$$\begin{aligned} -\Delta_{n(n-1)/2} v^\nu &= \operatorname{rot} u^\nu && \text{dans } \Omega \\ v^\nu &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.49}$$

qui satisfait

$$\|v^\nu\|_{W^{1,\alpha}} \leqslant K \|\operatorname{rot} u^\nu\|_{W^{-1,\alpha}} \tag{2.50}$$

où K est une constante. On déduit donc de (2.47), (2.49) et (2.50) que

$$v^\nu \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } W^{1,\alpha}(\Omega; \boldsymbol{R}^{n(n-1)/2}) . \tag{2.51}$$

Soit maintenant

$$w^\nu = u^\nu - \operatorname{rot}^* v^\nu . \tag{2.52}$$

De (2.47), (2.51) et (2.52), on déduit que

$$w^\nu \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^\alpha_n(\Omega) . \tag{2.53}$$

On a aussi de (2.52) que

$$\Delta_n w^\nu = \Delta_n u^\nu - \Delta_n \operatorname{rot}^* v^\nu , \quad \text{au sens des distrib.} . \tag{2.54}$$

En utilisant le Lemme 5, on déduit de (2.54) que

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_n w^\nu &= \Delta_n u^\nu - \operatorname{rot}^* \Delta_{n(n-1)/2} v^\nu , \\ &= \Delta_n u^\nu + \operatorname{rot}^* \operatorname{rot} u^\nu , \quad \text{au sens des distrib.} , \end{aligned}\right. \tag{2.55}$$

dans la dernière équation, on a utilisé (2.49). Finalement en utilisant à nouveau le Lemme 5, on a

$$\Delta_n w^\nu = \operatorname{grad} \operatorname{div} u^\nu , \quad \text{au sens des distrib} . \tag{2.56}$$

Et donc, comme précédemment, de (2.48), de (2.53) et de la régularité du Laplacien, on déduit

$$w^\nu \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \boldsymbol{R}^m) , \text{ pour tout } \alpha \geqslant 1$$

d'où en utilisant le Théorème de Rellich et (2.53), on déduit

$$w^\nu \to 0 \quad \text{dans } L^\beta_m(\Omega),\ \beta < \alpha . \quad \blacksquare$$

En guise de conclusion, on peut remarquer que des résultats précédents sur la semi-continuité inférieure faible (i e , $l \geqslant f(u)$) on déduit facilement des résultats de continuité faible (on pourra les comparer à ceux de Murat [Mu3], c.f. aussi [Da2]).

DÉFINITION ([Da2]). On dit qu'une fonction continue $f: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ est *A-quasi affine* (resp. *A-B-quasi affine*) si f et $-f$ sont A-quasi convexes (resp. A-B-quasi convexes).

REMARQUE. Dans le contexte du calcul des variations Ball [Ba1] appelle les fonctions A-B-quasi affines, nul-Lagrangiens.

THÉORÈME 7. *Sous les hypothèses du Théorème* 4, *on a*

(i) *Si pour toute suite* $\{u^\nu\}$ *satisfaisant* (H), *on a*

$$l = f(u) \tag{2.57}$$

alors f est A-quasi affine, et donc, à fortiori, f est A-B-quasi affine.

(ii) *Réciproquement*: (α) *Si* $\{u^\nu\}$ *et u satisfont* (H) *et*

$$(H_0) Au^\nu - Au \equiv 0$$

et si f est A-quasi affine alors $l = f(u)$.

(β) *Si A et B satisfont l'hypothèse* (H_{AB}) *du Théorème* 4, $\{u^\nu\}$ *et u satisfont* (H) *et si f est A-B-quasi affine alors* $l = f(u)$.

(iii) *Soit* $g: \boldsymbol{R}^s \to \boldsymbol{R}$ *convexe et supposons que*

$$f(u) = g(\Phi_1(u), \dots, \Phi_s(u)) \tag{2.58}$$

avec $\Phi_1, \dots, \Phi_s$ A-quasi *affine* (*resp. A-B-quasi affine*) *alors f est A-quasi-convexe* (*resp. A-B-quasi convexe*).

DÉMONSTRATION. (i) et (ii) sont une conséquence directe des Théorèmes 1 et 4 appliqués à f et $-f$. (iii) n'est qu'une conséquence élémentaire des propriétés des fonctions convexes (c.f. Corollaire 2.5 de [Da2]). ■

RÉFÉRENCES

[Ad1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York (1975).
[Ag1] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand (1965).

[Ba1] J. M. BALL, *Convexity conditions and existence theorems in non-linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **63** (1977), pp. 337-403.

[Da1] B. DACOROGNA, *A generic result for nonconvex problems in the calculus of variations*, J. Functional Analysis, **46** (1982), pp. 102-118.

[Da2] B. DACOROGNA, *Weak continuity and weak lower semicontinuity of non-linear functionals*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, vol. **922** (1982).

[Ha1] J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Hermann, Paris (1903).

[Ha2] J. HADAMARD, *Sur quelques questions du calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France, **33** (1905), pp. 73-80.

[Ka1] T. KATO, *On a coerciveness theorem by Schulenberger and Wilcox*, Indiana Univ. Math. J., **24** (1975), pp. 979-985.

[Mo1] C. B. MORREY, *Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals*, Pacific J. Math., **2** (1952), pp. 25-53.

[Mo2] C. B. MORREY, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer Verlag, Berlin (1966).

[Mu1] F. MURAT, *Compacité par compensation*, Ann, Scuola Norm. Sup. Pisa, **5** (1978), pp. 489-507.

[Mu2] F. MURAT, *Compacité par compensation*, II, Proc. of the International Meeting dans Recent Meth. in Nonlin. Anal., édité par E. De Giorgi, E. Magenes, U. Mosco, Bologne (1979), pp. 245-256.

[Mu3] F. MURAT, *Compacité par compensation: condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **8** (1981), pp. 69-102.

[Si1] C. G. SIMADER, *On Dirichlet's boundary value problem*, Lecture Notes in Math., vol. 268, Springer Verlag (1972).

[Sw1] J. R. SCHULENBERGER - C. H. WILCOX, *Coerciveness inequalities for nonelliptic systems of partial differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl., **88** (1971), pp. 229-306.

[Ta1] L. TARTAR, *Une nouvelle méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Lecture Notes in Math., Vol. 665, Springer Verlag (1977), pp. 228-241.

[Ta2] L. TARTAR, *Compensated Compactness*, Heriot-Watt Symposium, Vol. 4, Pitman (1978).

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Département de Mathématiques
Ecublens, 1015 Lausanne, Suisse