ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

B. HELFFER
D. ROBERT

Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 9, nº 3 (1982), p. 405-431
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1982_4_9_3_405_0>

Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques.

B. HELFFER - D. ROBERT

On se propose ici d'étendre les résultats de J. CHAZARAIN [3] et de notre travail [4] à des classes plus générales d'opérateurs. Notre motivation principale est de pouvoir étudier le comportement du spectre des opérateurs de Schrödinger dans $\boldsymbol{R}^n$:

$$P(h) = \frac{h^2}{2}\Delta + V$$

pour des potentiels V du type

$$V(x) = |x|^{2k} + 1\,, \qquad k \text{ entier } \geqslant 1\,,$$

et plus généralement pour des potentiels vérifiant:

(*) Il existe m' et $C > 0$ tels que:

$$V(x) \geqslant C(1 + |x|)^{m'}$$

(**) Il existe $\varrho_0 > 0$ tel que, pour tout multi indice α, il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha V^{((1-\varrho_0|\alpha|)_+}(x)\,.$$

Le cas de l'oscillateur quartique: $V(x) = |x|^4 + 1$ ne rentrait pas en effet dans les études faites auparavant ([3], [4]).

1. – Hypothèses préliminaires. Résultats.

Suivant [4], on se donne une paire de fonctions poids (φ, Φ) au sens de BEALS [2], telle que la métrique associée vérifie les hypothèses de L. HOR-

Pervenuto alla Redazione il 17 Giugno 1981.

MANDER [8]. On fait de plus les hypothèses suivantes:

(1.1) Il existe des constantes $0 < \delta \leqslant 1$, C_0, $C_1 > 0$, telles que:

$$C_0(1 + |x|^2 + |\xi|^2)^\delta \leqslant \varphi(x, \xi)\,\Phi(x, \xi) \leqslant C_1(1 + |x|^2 + |\xi|^2)$$

(1.2) $t\Phi(x, \xi) \leqslant \Phi(tx, t\xi)$

$t\varphi(x, \xi) \leqslant \varphi(tx, t\xi)$

pour tout $(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{2n}$, $t \in [0, 1]$.

(1.3) $\Phi(tx, t\xi)\,\varphi(tx, t\xi) \leqslant \Phi(x, \xi)\,\varphi(x, \xi)$

pour tout $(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{2n}$, $t \in [0, 1]$.

(1.4) Il existe $C_2 > 0$ telle que: $\Phi \geqslant C_2$, $\varphi \geqslant C_2$.
(Hypothèse simplificatrice que nous n'avions pas faite dans [4].)
Comme dans [4], on considère un opérateur admissible d'ordre m $p(h, x, hD_x)$ dont le symbole (usuel) admet le développement:

(1.5) $$p(h, x, \xi) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j p_j(x, \xi)\,.$$

On fait de plus les hypothèses suivantes:

(1.6) Il existe $C_3 > 0$ et $m' > 0$ tels que:

$$|p_0| \geqslant C_3(\Phi \cdot \varphi)^{m'}\,.$$

(1.7) Pour tout j et tous α, β, il existe $C_{j\alpha\beta} > 0$ telle que:

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p_j| \leqslant C_{j\alpha\beta} |p_0| (\Phi \cdot \varphi)^{-j}\,\Phi^{-|\alpha|} \cdot \varphi^{-|\beta|}\,.$$

(1.8) Il existe un réel $\varrho \in]0, \frac{1}{2}]$ tel que:

(1.8)′ $$|p_0^\varrho| \leqslant C \cdot \Phi \cdot \varphi$$

et pour tout j, α, β, il existe $C'_{j,\alpha,\beta} > 0$ telle que l'on ait:

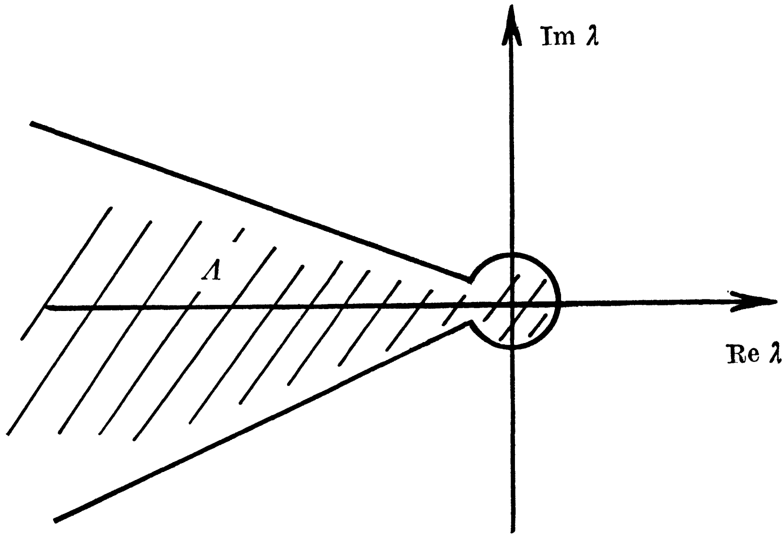
(1.8)″ $$|\partial_\xi^\alpha \partial_\beta^x p_j| \leqslant C'_{j\alpha\beta} |p_0|^{(1-\varrho(|\alpha|+|\beta|+j))}\,.$$

Enfin

(1.9) $$|p_0 - \lambda| \geqslant C_4(|p_0| + |\lambda|)$$

pour $\lambda \in \Lambda$, $(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{2n}$

où Λ est défini par:



REMARQUE 1.1. *Si on pose*:

$$p(h, x, hD) = \tilde{p}^w(h, x, hD)$$

où $\tilde{p}$ *désigne le symbole de Weyl de* $p(h, x, hD)$ (*Cf.* [6] *et* [11]), *on a alors*:

$$\tilde{p}(h, x, \xi) \sim p_0(x, \xi) + \sum_{j \geqslant 1} h^j \tilde{p}_j(x, \xi)$$

où les $\tilde{p}_j(x, \xi)$ *vérifient des propriétés analogues à celles imposées aux* p_j.
Cela résulte de la proposition (2.4) *de* [4].

On a montré dans [4] que l'opérateur:

$$Q(h) = P(h)^s \quad \text{où } s \in \mathbf{R} \quad \big(P(h) = p(h, x, hD_x)\big)$$

est défini par un symbole usuel admissible:

$$q(h, x, \xi) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j q_j(x, \xi) \tag{1.10}$$

et on a en particulier

(1.11) $q_0 = p_0$

(1.12) $\mathrm{Sp}(q) = sp_0^{s-1}\,\mathrm{Sp}(p)\left(\mathrm{Sp}(p) = p_1 - \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x_j \partial \xi_j}\right).$

On suppose désormais que:

(1.13) $s = 2\varrho\,.$

On a alors la proposition suivante:

PROPOSITION 1.2. *Pour tous j, α, β, il existe $C''_{j,\alpha,\beta} > 0$ telle que:*

(1.14) $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_j| \leqslant C''_{j,\alpha,\beta} |q_0|^{(1-(|\alpha|+|\beta|j)/2)_+}.$

En particulier, pour $|\alpha| + |\beta| \geqslant 2$, on a:

(1.15) $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_0 = O(1)\,.$

Cette proposition sera démontrée au § 2.

On suppose dorénavant que $P(h)$ est symétrique (en particulier p_0 est réel), il est alors, pour h assez petit, essentiellement autoadjoint. $Q(h)$ est alors également symétrique pour $h \in]0, h_0]$ et il résulte de (1.11), (1.13), (1.6) et (1.1) que:

(1.16) Il existe $C_5, m'' > 0$ tels que:

$q_0(x, \xi) \geqslant C_5 \lambda^{m''}(x, \xi)$

où

$\lambda(x, \xi) = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\,.$

Comme dans [3] et [4], on pose:

$S_h(t) = \mathrm{Trace}\,[\exp[-ih^{-1}tQ(h)]]$

$I_\tau = \langle S_h(t), \theta(t) \exp[-ih^{-1}\tau t]\rangle; \quad \theta \in C_0^\infty(R)$

$(\lambda_j(h))_{j\geqslant 0}$ la suite des valeurs propres de $P(h)$

$\mu_j(h) = \lambda_j(h)^{2\varrho}\,.$

Pour formuler nos résultats nous utilisons, comme dans [3], la notion d'ensemble de fréquences, due à Guillemin-Sternberg, concernant les familles de distributions dépendant d'un paramètre. Soit Ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^\nu$

et $h \to T_h$ une application de $]0, h_0]$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. L'ensemble de fréquence: $F[T_h] \subset T^*\Omega$ est défini par:

DÉFINITION. *Un point* $(x^0, \xi^0) \in T^*\Omega$ *n'appartient pas à* $F[T_h]$ *si et seulement si il existe* $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\theta(x^0) \neq 0$, *et un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* ξ^0 *tels que*:

$$\langle \theta(x) \exp[-ih^{-1} \cdot x \cdot \xi], T_h \rangle = O(h^\infty), \qquad h \to 0$$

uniformément pour $\xi \in \mathcal{V}$.

On désigne alors par $\mathcal{L}_\tau$, $\tau \in \boldsymbol{R}$, l'ensemble des périodes du champ hamiltonien H_{q_0}, d'énergie $-\tau$ et si I est un intervalle réel on pose:

$$\mathcal{L}_I = \bigcup_{\tau \in I} \mathcal{L}_\tau .$$

Dans ce cadre, les énoncés des théorèmes 2 à 5 de [4] sont encore valables:

THÉORÈME 1.3. *On a*:

$$F[S_h] \subseteq \mathcal{L} \quad \text{où} \quad \mathcal{L} = \overline{\bigcup_{\tau \in \boldsymbol{R}} \mathcal{L}_\tau \times \{\tau\}} .$$

THÉORÈME 1.4. *Supposons qu'il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que*:

$$\operatorname{Supp} \mathcal{O} \cap \bar{\mathcal{L}}_{[\tau_0 - \varepsilon_0, \tau_0 + \varepsilon_0]} = \{0\}$$

et que q_0 *n'ait pas de valeurs critiques dans* $[-\tau_0 - \varepsilon_0, -\tau_0 + \varepsilon_0]$.

Alors

$$I_\tau(h) = (2\pi h)^{1-n} \mathcal{O}(0) \int\limits_{q_0(x,\xi) = -\tau} \frac{dS_\tau}{|\operatorname{grad}_{x,\xi} q_0|} + O(h^{2-n}), \qquad h \to 0$$

pour tout $\tau \in [\tau_0 - \varepsilon_0, \tau_0 + \varepsilon_0]$.

De plus $O(h^{2-n})$ *est uniforme par rapport à* τ (dS_τ *étant la densité riemanienne sur* $(q(x, \xi) = -\tau)$.

THÉORÈME 1.5. *On pose* $N_h(\lambda) = \operatorname{card}\{j, \lambda_j(h) \leqslant \lambda\}$.

Soit $\lambda > 0$ *non valeur critique de* p_0. *On a alors*:

$$N_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \int\limits_{p_0(x,\xi) \leqslant \lambda} dx\, d\xi + O(h^{1-n}); \qquad h \to 0 .$$

Ce théorème améliore dans de nombreux cas les résultats de M. A. Subin [11] et L. Hörmander [7]. Le théorème 5, de [4] est également valable, mais nous n'avons pas d'exemples nouveaux à présenter comme application.

Exemple 1.6. *On considère*

$$P(h) = -\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x^4 + 1 .$$

Les hypothèses précédentes sont vérifiées pour:

$$\Phi(x, \xi) = \varphi(x, \xi) = (\xi^2 + x^4 + 1)^{\frac{1}{4}}, \quad \varrho = \tfrac{1}{4}, \quad m' = 2 .$$

Exemple 1.7.

$$P(h) = -\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + x^4 + 2 + \cos x .$$

On prend alors:

$$\Phi(x, \xi) = (\xi^2 + x^4 + 1)^{\frac{1}{4}}, \quad \varphi(x, \xi) = 1, \varrho \quad = \tfrac{1}{4}, \quad m' = 4 .$$

Exemple 1.8. *Le cas étudié par* J. Chazarain [3].

$$P(h) = -h^2\Delta + V(x)$$

où $V(x)$ *se comporte comme* $|x|^2$ *à l'*∞, *correspond au choix:*

$$\varrho = \tfrac{1}{2}, \quad \Phi = \sqrt{1 + |x|^2 + |\xi|^2}, \quad \varphi = 1, \quad m' = 2 .$$

Plus généralement si $V(x)$ *vérifie* (*) *et* (**) *on prend comme fonctions poids:*

$$\Phi(x, \xi) = \big(1 + |x|^2 + |\xi|^{2N}\big)^{(2N)^{-1}}, \quad \varphi(x, \xi) = 1$$

où N *est un entier* > 0 *tel qu'il existe* $C' > 0$ *vérifiant:*

$$C'\big(1 + |x|^2\big)^{(2N)^{-1}} \leqslant V(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^n .$$

Pour réaliser (1.8)″, *on choisit* ϱ *tel quel* $\varrho < \frac{1}{2}$ *et* $\varrho \leqslant \varrho_0$ *et, pour réaliser* (1.8)′, *on impose:* $\varrho \leqslant (2mN)^{-1}$.

Exemple 1.9.

$$P(h) \sim \lambda + \sum_{\geqslant 0} h^j p_j$$

où les p_j sont des symboles C^∞ vérifiant la propriété de quasi-homogénéité suivante:

Il existe deux multi-indices f et $k \in (\boldsymbol{N}^*)^n$: $f = (f_1, \dots, f_n)$; $k = (k_1, \dots, k_n)$ et un réel $M > 0$ tel que:

$$p_j(r^{f_1}x_1, \dots, r^{f_n}x_n; r^{k_1}\xi_1, \dots, r^{k_n}\xi_n) = r^{M-j}p_j(x, \xi) \tag{1.17}$$

pour tout (x, ξ) tels que $|\xi| + |x| \geqslant 1$

et tout $r \geqslant 1$;

et on fait l'hypothèse sur λ et p_0 que:

$$\lambda + p_0(x, \xi) > 0 \tag{1.18}$$

pour tout $(x, \xi) \in \boldsymbol{R}^{2n}$.

On pose:

$$M_0 = p \cdot p \cdot c \cdot m\{f_1, \dots, f_n, k_1, \dots, k_n\}\,, \qquad f'_i = \frac{M_0}{f_i}\,, \qquad k'_i = \frac{M_0}{k_i}\,.$$

On déduit de (1.17) et (1.18) que:

$$C_1\left(1 + |x_1|^{2f'_1} + \dots + |\xi|^{2k'_n}\right)^{M(2M_0)^{-1}} \leqslant |p_0 + \lambda| \leqslant C_2\left(1 + |x_1|^{2f'_1} + \dots + |\xi|^{2k'_n}\right)^{M/2} \tag{1.19}$$

et que

$$\partial_\alpha^x \partial_\xi^\beta p_j(r^{f_1}x_1, \dots, r^{k_n}\xi_n) = r^{M-\alpha, f-\beta, h-j}p_j(x, \xi) \tag{1.20}$$

pour $|x| + |\xi| \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$.

On satisfait aux hypothèses précédentes, en choisissant

$$\Phi(x, \xi) = \varphi(x, \xi) = \left(1 + |x_1|^{2f'_1} + \dots + |\xi_n|^{2k'_n}\right)^{1/4M_0},$$

$$\varrho = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{M}\right), \qquad m' = M\,.$$

EXEMPLE 1.10.

$$P(h) = -\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + x^2 + y^4 + f(x, y)$$

où f est une fonction C^∞ vérifiant:

(i) $f(x, y) \geqslant C_0$ pour un $C_0 > 0$;

(ii) $\partial^\alpha f = O(1)$ pour tout α.

On peut choisir:

$$\Phi = (1 + x^2 + y^4 + \eta^2 + \xi^2)^{\frac{1}{4}}, \qquad \varphi = 1, \qquad \varrho = \tfrac{1}{4}, \qquad m' = 2 .$$

REMARQUE 1.11. *Le choix de ϱ pour réaliser la condition* (1.8) *et avoir les conclusions des théorèmes* (1.3) *et* (1.4) *pour $Q(h) = P(h)^{2\varrho}$ n'est évidemment pas canonique. Il est clair que si ϱ convient, alors tout réel $\varrho_1 \in]0, \varrho]$ convient aussi.*

Comme dans [4], *le théorème* (1.5) *se déduit du théorème* (1.4). *Posant*:

$$(1.21) \qquad M_h(\lambda) = \operatorname{Card}\{j,\, \lambda_j^{2\varrho}(h) \leqslant \lambda\}$$

on établit d'abord que:

$$(1.22) \qquad M_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \int\limits_{a_0(x,\xi)\leqslant\lambda} dx\, d\xi + O(h)^{1-n}; \qquad h \to 0$$

et on utilise la relation

$$(1.23) \qquad N_h(\lambda) = M_h(\lambda^{2\varrho}) .$$

Ce qui donne:

$$(1.24) \qquad N_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \int\limits_{a_0(x,\xi)\leqslant\lambda} dx\, d\xi + O(h^{1-n}), \qquad h \to 0 .$$

Il y a là une différence importante, au niveau de la méthode, par rapport à l'étude de $N_h(\lambda)$, pour h fixé et $\lambda \to \infty$.

Supposons que nous ayons réussi à établir: (*cf.* [5] *et remarque suivante*)

$$(1.25) \qquad M_h(\lambda) = \gamma_0 \lambda^n + O(\lambda^{n-1}), \qquad \lambda \to \infty .$$

On déduit de (1.23) *que*:

$$(1.26) \qquad N_h(\lambda) = \gamma_0 \lambda^{2\varrho n} + O(\lambda^{2\varrho n - 2\varrho}), \qquad \lambda \to +\infty .$$

Dans (1.26), *pour $n \geqslant 2$, la puissance de λ du reste dépend de ϱ (ce qui n'était pas le cas de la puissance de h dans* (1.24)).

Dans ce cas, l'efficacité de la méthode viendra du choix d'un ϱ optimal.

REMARQUE 1.12. *Comme dans* [4], *on peut déduire du théorème* (1.5), *une estimation du reste de $N_h(\lambda)$ à h fixé pour $\lambda \to \infty$ lorsqu'on a une propriété d'homogénéité.*

Soit par exemple p_0 un polynôme vérifiant les propriétés de l'exemple (1.9), *on suppose de plus que*:

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n = d$$

$$k_1 = \dots = k_n = g .$$

Soit $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ *la suite des valeurs propres, comptées avec leur multiplicité, de* $p_0(x, D_x)$ *et soit* $N(\lambda) = \operatorname{card}(j;\ \lambda_j \leqslant \lambda)$.

On déduit du théorème (1.5), *le corollaire suivant*:

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n}\lambda^{n(g+d)M^{-1}}\int\limits_{p_0(x,\xi)\leqslant 1} dx\, d\xi + O(\lambda^{(n-1)(g+d)M^{-1}}) . \tag{1.27}$$

(*Une démonstration directe de ce résultat sera donnée ailleurs.*)

En particulier pour:

$$p_0(x, D_x) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^{2j}$$

j entier $\geqslant 1$, *on trouve*

$$N(\lambda) = \gamma_0\lambda^{2^{-1}+(2j)^{-1}} + O(1) \tag{1.28}$$

où

$$\gamma_0 = \pi^{-1}(j+1)^{-1}B\left(\frac{1}{2j}, \frac{1}{2}\right)$$

(cf. [8]) *où B désigne la fonction classique bèta.*

La formule (1.28) *avec cette estimation du reste semble nouvelle.*

La méthode que nous utiliserons pour établir des théorèmes (1.3) et (1.4) est celle de J. Chazarain [3] que nous avions utilisée dans [4] et qui consiste à étudier l'approximation semi-classique de l'équation du type Schrödinger:

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t, x) = q(h, x, hD_x)\Psi(t, x) , \qquad \Psi(0, x) = \Psi_0(x) \tag{S_h}$$

où q vérifie (1.14), (1.15), (1.16).

2. – Démonstration de la proposition 1-2.

La démonstration repose sur le lemme suivant:

Lemme 2.1. *Sous l'hypothèse* (1.7), *le symbole* $q_z(h, x, \xi)$ *de* $P(h)^z$ *admet un développement*:

$$q_z(h, x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j q_{j,z}(x, \xi)$$

et l'on a:

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha q_{j,z}| \leq C_{j,\alpha,\beta} |q_{0,z}| (\Phi\varphi)^{-j} \Phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} \tag{2.1}$$

avec $q_{0,z} = p_0^z$ *pour* $z \in \boldsymbol{C}$.

Démonstration. D'après la démonstration du lemme 5.2 de [9], on a sous l'hypothèse (1.7) et pour $\operatorname{Re} z < 0$:

$$q_{0,z} = p_0^z \tag{2.2}$$

$$q_{j,z} = \sum_{l=1}^{2j} C_{j,z} \gamma_{j,l} p_0^{z-l} \tag{2.3}$$

où les $C_{j,z}$ sont des fonctions de z, et les $\gamma_{j,l}$ vérifient:

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \gamma_{j,l}| \leq C |p_0|^l (\Phi\varphi)^{-j} \Phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}. \tag{2.4}$$

On déduit de (2.2), (2.3) et (2.4), l'inégalité (2.1) pour $\operatorname{Re} z < 0$.

On passe au cas général, en remarquant que le composé de deux opérateurs admissibles $P_1(h)$ et $P_2(h)$ dont les symboles vérifient l'hypothèse (1.7), a un symbole vérifiant (1.7), et en revenant à la définition de $P(h)^z$ pour $\operatorname{Re} z > 0$ (cf. [4]).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 1.2. Il résulte du lemme (2.1), en prenant $z = 2\varrho$, que l'on a:

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_j| \leq C_{\alpha\beta} |q_0| (\Phi\varphi)^{-j} \Phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} \tag{2.5}$$

avec $q_0 = p_0^{2\varrho}$.

Cas $j \geq 2$. Pour $j \geq 2$, (1.14) résulte de (2.5) et (1.8').

Cas $j = 0$. La formule de Leibnitz donne:

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (p_0^{2\varrho}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\alpha| + |\beta| \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \alpha \\ \beta_1 + \ldots + \beta_k = \beta}} C_{\beta_1, \ldots, \beta_k}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} (\partial_\xi^{\alpha_1} \partial_x^{\beta_1} p_0) \ldots (\partial_\xi^{\alpha_k} \partial_x^{\beta_k} p_0) p_0^{2\varrho - k}. \tag{2.6}$$

Pour $|\alpha| + |\beta| = 1$, (1.14) résulte de (2.6) (avec $k = 1$) et de (1.8)''.

Pour $|\alpha| + |\beta| \geq 2$, la démonstration est légèrement plus délicate.

On doit majorer des termes du type:

$$E = (\partial_\xi^{\alpha_1}\partial_x^{\beta_1}p_0)\dots(\partial_\xi^{\alpha}\partial_x^{\beta}p_0)p_0^{2\varrho-k}$$

avec

$$(2.7)\qquad 1\leqslant k\leqslant|\alpha|+|\beta|\,,\quad \sum\alpha_i=\alpha\,,\quad \sum\beta_i=\beta\,,\quad |\alpha|+|\beta|\geqslant 2\,.$$

Quitte à réordonner les (α_i, β_i), il existe l et l' tels que

$$0\leqslant l\leqslant l'\leqslant k$$

tels que:

$$(2.8)\qquad \begin{cases} |\alpha_i|+|\beta_i|=1 & \text{pour } 1\leqslant i\leqslant l\\ 2\leqslant|\alpha_i|+|\beta_i|\leqslant\dfrac{1}{\varrho} & \text{pour } l+1\leqslant i\leqslant l'\\ \dfrac{1}{\varrho}<|\alpha_i|+|\beta_i| & \text{pour } l'<i\leqslant k\,. \end{cases}$$

On déduit de (2.6), (1.8)″, (1.6) et (1.4) que:

$$|E|\leqslant C|p_0|^{\varrho(2+l-2l')-k+l'}\,.$$

Si $2+l-2l'\leqslant 0$, on a immédiatement

$$|E|\leqslant\tilde{C}$$

car $k\geqslant l'$.

Si $2+l-2l'>0$, on utilise que $\varrho\leqslant\frac{1}{2}$, pour obtenir

$$|E|\leqslant\tilde{\tilde{C}}|p_0|^{1+l/2-k}\,.$$

Lorsque $k\geqslant 2$, la majoration $|E|\leqslant C$ est évidente, car $l\leqslant k$.

Si $k=1$, on a nécessairement, compte-tenu de (2.7) et (2.9), $l=0$ et par conséquent $1+l/2-k=0$.

Ceci termine la démonstration du cas: $j=0$, $|\alpha|+|\beta|\geqslant 2$.

Cas $j=1$. Compte tenu de ce qui précède et de (1.12), il suffit de démontrer que:

$$(2.9)\qquad |\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta q_1'|\leqslant C''_{1,\alpha,\beta}q_0^{(1-((|\alpha|+|\beta|+1)/2))_+}$$

avec

$$q_1' = 2\varrho p_0^{2\varrho-1}(p_1') \quad \text{et} \quad p_1' = p_1 - \sum_i \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x_j \partial \xi_j}.$$

D'après la formule de Leibnitz, on a:

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_1' = \sum_{\substack{\alpha'+\alpha''=\alpha \\ \beta'+\beta''=\beta}} C_{\alpha,\beta}^{\alpha',\beta'} \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} (p_0^{2\varrho-1}) \partial_x^{\alpha''} \partial_\xi^{\beta''} (p_1'). \tag{2.10}$$

Le cas: $|\alpha| + |\beta| = 0$ se traite facilement en utilisant (1.7) et (1.8)$'$. On suppose donc dorénavant: $|\alpha| + |\beta| \geqslant 1$, et on doit montrer

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_1'| < C. \tag{2.11}$$

Comme précédemment, on doit majorer des termes de la forme:

$$E = \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} (p_0^{2\varrho-1}) \partial_x^{\alpha''} \partial_\xi^{\beta''} (p_1')$$

avec $\alpha' + \alpha'' = \alpha$, $\beta' + \beta'' = \beta$, $|\alpha| + |\beta| \geqslant 1$.

Si $|\alpha''| + |\beta''| \geqslant 1$, on majore facilement E par:

$$|E| \leqslant |p_0|^{2\varrho-1} |p_0|^{((1-\varrho(|\alpha''|+|\beta''|+1))_+} \leqslant C.$$

Le seul cas restant est donc celui où: $|\alpha''| + |\beta''| = 0$, et donc où: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$.

Avec les notations du cas: $j = 0$ $\big(|\alpha| + |\beta| \geqslant 2\big)$, on obtient que:

$$|E| \leqslant C |p_0|^{\varrho(1+l-2l')-k+l'}$$

avec $k \geqslant 1$, $0 \leqslant l \leqslant l' \leqslant k$.

Si $1 + l - 2l' \leqslant 0$, la majoration est claire.

Si $1 + l - 2l' > 0$, (cas qui ne peut se produire qu'avec $l = l' = 0$), on a immédiatement: $|E| \leqslant C |p_0|^{\frac{1}{2}-k} \leqslant \tilde{C}$.

Ceci termine la démonstration de la proposition (1.2).

3. – Approximation semi-classique de l'équation de Schrödinger. L'équation caractéristique.

Soit à étudier:

$$\partial_t S(t, x, \eta) + q_0(x, \partial_x S(t, x, \eta)) = 0\,, \qquad S(0, x, \eta) = x \cdot \eta\,. \tag{3.1}$$

La méthode de Hamilton-Jacobi nous amène à étudier le système:

$$\tag{3.2} \begin{aligned} &\partial_t x(t, y, \eta) = \partial_\xi q_0(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \\ &\partial_t \xi(t, y, \eta) = -\partial_x q_0(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)) \\ &x(0, y, \eta) = y\,, \qquad \xi(0, y, \eta) = \eta \end{aligned}$$

(1.15) implique que la matrice:

$$A(t, y, \eta) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x,\xi} q_0 & \partial^2_{\xi,\xi} q_0 \\ \partial^2_{x,x} q_0 & \partial^2_{x,\xi} q_0 \end{pmatrix}$$

est à coefficients bornés.

Comme dans [3] et [4] (lemme 3.4), on obtient le:

Lemme 3.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T' > 0$ tel que, pour $t \leqslant T'$, on ait:*

$$\tag{3.3} \begin{cases} \|\partial_y x(t, y, \eta) - I\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n)} \leqslant \varepsilon \\ \|\partial_\eta x(t, y, \eta)\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n)} \leqslant \varepsilon \\ \|\partial_y \xi(t, y, \eta)\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n)} \leqslant \varepsilon \\ \|\partial_\eta \xi(t, y, \eta) - I\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n)} \leqslant \varepsilon\,. \end{cases}$$

En particulier, il existe $T > 0$ tel que: $y \mapsto x(t, y, \eta)$ soit un C^∞ difféomorphisme de $\boldsymbol{R}^n$ sur $\boldsymbol{R}^n$ pour tout t tel que $|t| < T$ et tout $\eta \in \boldsymbol{R}^n$.

On désigne alors par $x \to y(t, x, \eta)$ l'application inverse de $y \to x(t, y, \eta)$ qui est une fonction C^∞ de (t, x, η). Le lemme (3.5) de [4] devient le:

Lemme 3.2. *Il existe $T > 0$ tel que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{N}^n \times \boldsymbol{N}^n$, tout $p \in \boldsymbol{N}$ tel que $|\alpha| + |\beta| + p \geqslant 1$, on ait:*

$$\tag{3.4} \begin{cases} \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta x(t, y, \eta) = 0\big(q_0^{p/2}(y, \eta)\big) \\ \partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \xi(t, y, \eta) = 0\big(q_0^{p/2}(y, \eta)\big)\,. \end{cases}$$

Démonstration. Si $p = 0$ et $|\alpha| + |\beta| = 1$, alors (3.4) découle immédiatement de (3.3).

Si $p = 1$, $|\alpha| + |\beta| = 1$, on considère l'équation aux variations:

$$\tag{3.5} Z'(t) = A(t, y, \eta) Z(t)$$

où

$$z(t)=\begin{pmatrix}\partial_y x(t,y,\eta) & \partial_\eta x(t,y,\eta)\\ \partial_y \xi(t,y,\eta) & \partial_\eta \xi(t,y,\eta)\end{pmatrix}$$

d'où il résulte que:

$$\partial_t \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta x(t,y,\eta)=O(1) \tag{3.6}$$

$$\partial_t \partial_\eta^\alpha \partial_\beta^y \xi(t,y,\eta)=O(1) \tag{3.7}$$

pour $|\alpha|+|\beta|=1$, et en dérivant (3.5) par rapport à y ou η, pour tout $|\alpha|+|\beta|\geqslant 1$.

Si $p=1$, $|\alpha|+|\beta|=0$, on utilise (3.2) et (1.14) pour obtenir qu'il existe $C>0$ telle que:

$$|\partial_t x(t,y,\eta)|\leqslant Cq_0^{\frac{1}{2}}(x(t,y,\eta),\xi(t,y,\eta)) .$$

Utilisant la conservation de l'énergie, on obtient:

$$|\partial_t x(t,y,\eta)|\leqslant Cq_0^{\frac{1}{2}}(y,\eta) \tag{3.8}$$

et de même

$$|\partial_t \xi(t,y,\eta)|\leqslant Cq_0^{\frac{1}{2}}(y,\eta) . \tag{3.9}$$

Le cas: $p=0$, $|\alpha|+|\beta|\geqslant 1$, se déduit de la dérivation de (3.5) par rapport à (y,η).

Supposons maintenant la propriété démontrée pour: $p\leqslant p_0$, $\forall\alpha,\beta$ tel que $|p|+|\alpha|+|\beta|\geqslant 1$, avec $p_0\geqslant 1$.

Dérivant (3.2) p_0 fois par rapport à t et (α,β) fois par rapport à (y,η), on obtient le résultat au cran (p_0+1).

Le lemme (3.6) de [4] devient:

Lemme 3.3. *Pour tout* $(\alpha,\beta)\in N^n$ *et tout* p *tel que* $p+|\alpha|+|\beta|\geqslant 1$, *on a*:

$$\partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta y(t,x,\eta)=0\big(q_0^{p/2}(y(t,x,\eta),\eta)\big) \tag{3.10}$$

$$\partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta \zeta(t,x,\eta)=0\big(q_0^{p/2}(y(t,x,\eta),\eta)\big) \tag{3.11}$$

où l'on a posé: $\zeta(t,x,\eta)=\xi\big(t,y(t,x,\eta),\eta\big)$.

Démonstration. On part de l'identité:

$$x\big(t,y(t,x,\eta),\eta\big)=x . \tag{3.12}$$

Dérivant (3.12) par rapport à t, y ou η, on obtient:

$$\partial_t y(t,x,\eta) = -(\partial_y x)^{-1}(t, y(t,x,\eta),\eta)\cdot\partial_t x(t, y(t,x,\eta),\eta) \tag{3.13}$$

$$\partial_x y(t,x,\eta) = (\partial_y x)^{-1}(t, y(t,x,\eta),\eta) \tag{3.14}$$

$$\partial_\eta y(t,x,\eta) = -(\partial_y x)^{-1}\partial_\eta x(t, y(t,x,\eta),\eta)\,. \tag{3.15}$$

Ces trois équations permettent (compte tenu de (3.3) et (3.4)) d'obtenir (3.10) pour $|\alpha|+|\beta|+|p|=1$. En les dérivant par rapport à (t,x,η), on obtient (3.10) dans le cas général grâce à (3.4).

(3.11) se déduit de (3.10), (3.4) et de la définition de $\zeta(t,x,\eta)$.

Les lemmes précédents suggèrent qu'on doit remplacer les poids $\lambda(y,\eta)$ et $\lambda(x,\eta)$ apparaissant dans les articles précédents ([3], [4]) par $q_0^{\frac12}(y,n)$ et $q_0^{\frac12}(y(t,x,\eta),\eta)$.

On pose donc:

$$\mu(t,x,\eta) = q_0^{\frac12}(y(t,x,\eta),\eta)\,. \tag{3.16}$$

La comparaison des deux poids peut se faire grâce au lemme suivant (cf. lemme 3.7 de [4]).

Lemme 3.4. *Il existe des constantes $C_1, C_2>0$ telles que*:

$$C_1\lambda^{m''/2}(x,\eta)\leqslant\mu(t,x,\eta)\leqslant C_2\lambda(x,\eta) \tag{3.17}$$

pour tout $(t,x,\eta)\in\,]-T,T[\times\boldsymbol{R}^{2n}$ (*m'' est défini en* 1.16).

Démonstration. On a l'égalité de conservation de l'énergie:

$$q_0(y(t,x,\eta),\eta) = q_0(x,\zeta(t,x,\eta))\,. \tag{3.18}$$

La minoration (3.17) se déduit immédiatement de (3.16), (3.18) et (1.16).

Pour la majoration, on montre d'abord le lemme suivant qui sera utile ultérieurement.

Lemme 3.5.

$$\begin{cases} y(t,x,\eta) = O(\lambda(x,\eta)) \\ \zeta(t,x,\eta) = O(\lambda(x,\eta)) \end{cases} \tag{3.19}$$

pour $|t|\leqslant T$ *et* $(x,\eta)\in\boldsymbol{R}^{2n}$.

Démonstration du lemme 3.5. On vérifie immédiatement que:

$$|y(t,x,\eta)|\leqslant\sup_{t\in[-T,T]}|y(t,0)| + \lambda(x,\eta)\sup_{\substack{t\in[-T,T]\\(x,\eta)\in\boldsymbol{R}^{2n}}}\left(|\partial_x y|+|\partial_\eta y|\right),$$

(3.19) pour $y(t, x, \eta)$ s'en déduit immédiatement compte tenu de (3.10). La démonstration pour $\zeta(t, x, \eta)$ est analogue.

Terminons la démonstration du lemme (3.4).

(1.15) implique l'existence de $C' > 0$ telle que:

$$q_0(x, \eta) \leqslant C' \lambda^2(x, \eta) . \tag{3.20}$$

La majoration résulte immédiatement de (3.18), (3.19) et (3.20).

D'après la théorie de Hamilton-Jacobi, on sait que:

$$\partial_x S(t, x, \eta) = \zeta(t, x, \eta) \tag{3.21}$$

$$\partial_\eta S(t, x, \eta) = y(t, x, \eta) . \tag{3.22}$$

Le contrôle de la phase $S(t, x, \eta)$ est l'objet du lemme suivant: (cf. les points (7), (8) et (9) du § 3.1 dans [4])

LEMME 3.6.

(3.23) *Il existe* $C_0'' > 0$ *telle que*: $|\partial_t S(t, x, \eta)| \geqslant C_0'' \lambda^{m''}(x, \eta)$.

(3.24) $\partial_t S(t, x, \eta) = -\mu^2(t, x, \eta)$.

(3.25) $\partial_x S(t, x, \eta) = O(\lambda(x, \eta))$.

(3.26) $\partial_\eta S(t, x, \eta) = O(\lambda(x, \eta))$.

(3.27) *Pour* $p + |\alpha| + |\beta| \geqslant 2$, *on a*: $\partial_t^p \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta S(t, x, \eta) = O(\mu^p(t, x, \eta))$.

DÉMONSTRATION. (3.24) résulte de (3.11), (3.21), (3.18) et (3.16).

Compte tenu de (3.24), (3.23) n'est autre que (3.17).

(3.25) et (3.26) résultent de (3.21), (3.22) et (3.19).

Pour $|\alpha| + |\beta| \geqslant 1$, (3.27) résulte immédiatement du lemme (3.3).

Considérons donc le cas où $|\alpha| + |\beta| = 0$ et $p \geqslant 2$. On a:

$$\partial_t S(t, x, \eta) = -q_0(y(t, x, \eta), \eta) \tag{3.28}$$

d'où

$$\partial_t^2 S = -\partial_x q_0(y(t, x, \eta), \eta)\, \partial_t y . \tag{3.29}$$

L'estimation résulte alors de (1.14) et (3.10).

En dérivant (3.29) par rapport à t, on obtient aisément le cas général.

4. – Approximation semi-classique de l'équation de Schrödinger: équations de transports.

On modifie les classes $A^{m,p}$ de J. Chazarain [3] (cf. déf 3.1 de [4]) en posant la définition suivante:

DÉFINITION 4.1. *Soient T et h_0 des réels > 0 fixés. Pour $p, l \in \mathbf{R}$, on désigne par $A^{p,l}$ l'espace des fonctions $b(t, x, \eta, h) \in C^\infty(]-T, T[\times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times]0, h_0])$ telles que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$, $s \in \mathbf{N}$, il existe $C_{\alpha,\beta,s}$ telle que*:

$$|\partial_t^s \partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta b(t, x, \eta, h)| \leqslant C_{\alpha,\beta,s} h^l \mu^{p+s}(t, x \eta) \tag{4.1}$$

pour tout $(t, x, \eta, h) \in]-T, T[\times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times]0, h_0[$.

De même, on introduit la classe de symboles suivante:

DÉFINITION 4.2. *Pour $m, k \in \mathbf{R}$, on désigne par $S^{m,k}$ l'espace des fonctions $s \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times]0, h_0])$ telles que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta}$ telle que*:

$$|\partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta s(x, \xi, h)| \leqslant C_{\alpha,\beta} h^k q_0^{(m-|\alpha|-|\beta|)/2}(x, \xi) . \tag{4.2}$$

Soient maintenant $s \in S^{m,k}$ $a \in A^{p,l}$ $(p \geqslant 0)$; S étant la phrase déterminée au § 3, on pose, comme au § 3.1 de [4]:

$$\begin{aligned} b(t, x, \eta, h) &= \\ &= \exp[-ih^{-1}S(t, x, \eta)]\, s(x, hD_x, h)[\exp[ih^{-1}S(t, \cdot, \eta)]a(t, \cdot, \eta, h)](x) . \end{aligned} \tag{4.3}$$

On suit ici les calculs du § 3.1 de [4].

On a:

$$b(t, x, \eta, h) = \sum_{|\alpha|<N} b_\alpha(t, x, \eta, h) + b^{(N)}(t, x, \eta, h) \tag{4.4}$$

où

$$b_\alpha(t, x, \eta, h) = h^{|\alpha|}(\alpha!)^{-1}\, \partial_\xi^\alpha s\big(x, \partial_x S(t, x, \eta), h\big)\, C_\alpha(t, x, \eta, h) \tag{4.5}$$

$$C_\alpha(t, x, \eta, h) = D_y^\alpha[\exp[ih^{-1}\psi(t, x, \eta, h)\, a(t, y, \eta, h)]]|_{y=x} \tag{4.6}$$

$$\psi(t, x, y, \eta) = S(t, y, \eta) - S(t, x, \eta) + \langle x - y, \partial_x S(t, x, \eta)\rangle \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} b^{(N)}(t, x, \eta, h) = h^{-N} \int_{y,\xi} \int_0^1 &\exp[ih^{-1}\langle x, y, \xi\rangle](1-\sigma)^{N-1} \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{|\alpha|=N} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha s)\left(x, \frac{\partial S}{\partial x} + \sigma\xi\right)\right] \exp[ih^{-1}\psi] \cdot a(t, y, \eta, h)\, dy\, d\xi\, d\sigma. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Le lemme (3.1) de [4] devient le:

LEMME 4.3. *Sous les hypothèses précédentes:*

$$b_\alpha \in A^{(m-|\alpha|)_+ + p, k+l+|\alpha|/2} \qquad si\ |\alpha|\ est\ pair\,,$$

$$b_\alpha \in A^{(m-|\alpha|)_+ + p, k+l+(|\alpha|+1)/2} \qquad si\ |\alpha|\ est\ impair\,.$$

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle du lemme (3.1) de [4], en remplaçant le poids $\lambda(x,\eta)$ qui intervenait par $\mu(t,x,\eta)$ et en remarquant que si

$$s(x,\xi,h) \in S^{m,k} \qquad \text{alors:} \qquad s\big(x, \partial_x S(t,x,\eta), h\big) \in A^{m,k}\,.$$

Le lemme 3.2 de [4] devient le:

LEMME 4.4. *Sous les hypothèses précédentes, pour tout entier $N \geqslant 1$, on a*

$$b^{(N)} \in A^{(m-N)_+ + p, k+l+N/2}\,.$$

DÉMONSTRATION. On a:

$$b^{(N)} = \sum_{N \leqslant |\alpha| < M} b_\alpha + b^{(M)}\,.$$

Compte-tenu du lemme (4.3), il suffit d'établir la propriété pour $b^{(M)}$ avec M assez grand. La démonstration du lemme (3.2) [4] s'adapte (en remplaçant $\lambda(x,\eta)$ par $\mu(t,x,\eta)$) sous réserve de démontrer le:

LEMME 4.5 (cf. lemme 3.3 de [4]). *Si* $|\tilde\alpha| + |\tilde\beta| + |\tilde\gamma| + \tilde k = 1$, *on a:*

$$|\partial_x^{\tilde\alpha}\partial_y^{\tilde\beta}\partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{\tilde k}\psi| \leqslant C_{\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma,\tilde k}|x-y|\big(\mu(t,x,\eta) + |x-y|\big)^{\tilde k}\,. \tag{4.9}$$

Si $|\tilde\alpha| + |\tilde\beta| + |\tilde\gamma| + \tilde k \geqslant 1$, on a:

$$|\partial_x^{\tilde\alpha}\partial_y^{\tilde\beta}\partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{k}\psi| \leqslant C_{\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma,\tilde k}(1 + |x-y|)\big(\mu(t,x,\eta) + |x-y|\big)^{\tilde k}\,. \tag{4.10}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME (4.5). Rappelons que

$$\psi(t,x,y,\eta) = S(t,y,\eta) - S(t,x,\eta) + \left\langle x-y, \frac{\partial S}{\partial x}(t,x,\eta)\right\rangle\,.$$

On a:

$$\partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{\tilde k}\psi = (\partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{\tilde k}S)(t,y,\eta) - (\partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{\tilde k}S)(t,x,\eta) + \langle x-y, \partial_\eta^{\tilde\gamma}\partial_t^{\tilde k}\partial_x S(t,x,\eta)\rangle\,.$$

De (3.27), on déduit pour $|\tilde{\gamma}| + |\tilde{k}| \geqslant 1$:

$$|\partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi| \leqslant C|x-y|\left(\mu(t,x,\eta)^{\tilde{k}} + \sup_{\tilde{x}\in[x,y]} \left(\mu(t,\tilde{x},\eta)\right)^{\tilde{k}}\right). \tag{4.11}$$

On remarque maintenant que (compte-tenu de (3.24) et (3.27))

$$(\partial_x \mu)(t,x,\eta) = -\frac{1}{2} \frac{(\partial_t \partial_x S)(t,x,\eta)}{\sqrt{(-\partial_t S)(t,x,\eta)}} = O(1).$$

Par conséquent:

$$\operatorname*{Sup}_{\tilde{x}\in[x,y]} \mu(t,\tilde{x},\eta) \leqslant C[\mu(t,x,\eta) + |x-y|]. \tag{4.12}$$

De (4.11) et (4.12), on déduit:

$$|\partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi| \leqslant |x-y|(\mu(t,x,\eta) + |x-y|)^{k}. \tag{4.13}$$

Or: $\partial_{x_i}\psi = \langle \partial^2 S/(\partial x\, \partial x_i), x-y \rangle$, d'où:

$$|\partial_{x_i} \partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi| \leqslant C|x-y|\mu(t,x,\eta)^{\tilde{k}} \tag{4.14}$$

et pour $|\alpha| \geqslant 2$:

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi| \leqslant C(1 + |x-y|)\, \mu(t,x,\eta)^{\tilde{k}}. \tag{4.15}$$

Or $\partial_{y_i}\psi = (\partial S/\partial x_i)(t,y,\eta) - (\partial S/\partial x_i)(t,x,\eta)$.
De (4.12), on déduit:

$$|\partial_{y_i} \partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi| \leqslant C|x-y|(\mu(t,x,\eta) + |x-y|)^{\tilde{k}}. \tag{4.16}$$

De: $\partial_{x_i}\partial_{y_j}\psi = -(\partial^2 S/(\partial x_i\, \partial x_j))((t,x,\eta)$, on tire:

$$|\partial_{x_i} \partial_{y_i} \partial_x^{\tilde{\alpha}} \partial_y^{\tilde{\beta}} \partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi| \leqslant C(\mu(t,x,\eta))^{\tilde{k}}. \tag{4.17}$$

De $\partial_{y_j}\partial_{y_i}\psi = (\partial^2 S/(\partial x_i\, \partial x_j))(t,y,\eta)$, il vient:

$$|\partial_{y_i} \partial_{y_j} \partial_x^{\tilde{\alpha}} \partial_y^{\tilde{\beta}} \partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \partial_t^{\tilde{k}} \psi| \leqslant C(\mu(t,x,\eta) + |x-y|)^{\tilde{k}}. \tag{4.18}$$

Les cas (4.13) à (4.18) permettent d'obtenir (4.9) et (4.10).

Comme dans [3] et [4], on peut maintenant construire des approximations $U_h^{(N)}(t)$ du groupe unitaire: $U_h(t) = \exp[-ih^{-1}tQ(h)]$ où:

$$Q(h) = q(h, x, hD_x).$$

On cherche $U_h^{(N)}(t)$ sous la forme:

$$(4.19)\quad U_h^{(N)}(t)f(x) = h^{-n}\iint \exp[ih^{-1}(S(t,x,\eta) - y\cdot\eta)]\Big[\sum_{j=0}^{N} h^j a_j(t,x,\eta)\Big] f(y)\, dy\, d\eta$$

avec $a_j(t,x,\eta)\in A^{0,0}$, de sorte que l'on ait:

$$(4.20)\quad \exp[-ih^{-1}S(t,x,\eta)](ih\partial_t - Q(h))\exp[ih^{-1}S(t,x,\eta)]\cdot \cdot\Big(\sum_{j=0}^{N} h^j a_j(t,x,\eta)\Big)\in A^{0,N+2-n}.$$

Compte-tenu des lemmes (4.3) et (4.4), on réalise (4.20) en déterminant les a_j par des équations de transport du type:

$$(4.21)\quad \begin{cases} \partial_t b(t,x,\eta) + \partial_\xi q(x,\partial_x S)\,\partial_x b(t,x,\eta) + \\ + \frac{1}{2}\left(\partial^2_{\xi\xi} q_0(x,\partial_x S)\right)\cdot(\partial^2_{x,x}S)\, b(t,x,\eta) + iq_1(x,\partial_x S)\, b(t,x,\eta) = f(t,x,\eta) \\ b(0,x,\eta) = b_0 \end{cases}$$

où $f\in A^{(0,0)}$, $b_0\in \boldsymbol{R}$.

La proposition 3.3 de [4] devient:

PROPOSITION 4.6. *Sous les hypothèses précédentes* (*rappelons que* $Sp(q)$ *est réel*), *si* $f\in A^{(0,0)}$, *la solution* b *de* (4.21) *est dans* $A^{(0,0)}$.

Si on pose:

$$J(t,x,\eta) = \det\left(\partial_x y(t,x,\eta)\right)^{-1}$$

$$G(t,s,x,\eta) = \int_0^s Sp(q)\Big(x(\sigma, y(t,x,\eta),\eta),\ \xi(\sigma, y(t,x,\eta),\eta)\Big)\, d\sigma\,.$$

La solution de (4.21) s'écrit:

$$(4.22)\quad b(t,x,\eta) = J^{-\frac{1}{2}}(t,x,\eta)\exp[-iG(t,t,x,\eta)]\cdot \cdot\Big[b_0 + \int_0^t \exp[iG(t,s,x,\eta)]\big(J(s,y(t,x,\eta),\eta)\big)^{\frac{1}{2}} f\big(s, x(s,y(t,x,\eta),\eta)\big)\, ds\Big]\,.$$

La démonstration est, compte-tenu de ce qui a été établi précédemment, analogue à celle de la proposition 3.3 de [4]. Elle se déduit aisément des trois lemmes suivants. Le lemme (3.8) de [4] devient:

LEMME 4.7. *Soit* $g \in C^\infty([-T, T]\times \mathbf{R}^{2n})$ *et* $\tilde{g}(t, y, \eta) = g(t, x(t, y, \eta), \eta)$.

Alors $g \in A^{(0,0)}$ *si et seulement si* g *vérifie*: *pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$, *tout* $l \in \mathbf{N}$, *il existe* $C_{\alpha,\beta}$, *telle que, pour* $t \in [-T, T]$, $(y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$:

$$|\partial_t^l \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \tilde{g}(t, y, \eta)| \leqslant C_{l,\alpha,\beta} q_0^{l/2}(y, \eta) . \tag{4.23}$$

Le lemme résulte des lemmes (3.2) et (3.3).

LEMME 4.8. *Pour tout* $\sigma \in \mathbf{R}$, $J(t, x, \eta)^\sigma \in A^{(0,0)}$.

LEMME 4.9. *Posons*

$$R(t, y, \eta) = \exp\left[-i\int_0^t Sp(q)\big(x(s, y, \eta), \xi(s, y, \eta)\big)\, ds\right].$$

Alors R *vérifie* (4.23).

DÉMONSTRATION. R est bornée car $Sp(q)$ est réel.

On a ensuite:

$$\partial_t R(t, y, \eta) = -iSp(q)\big(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)\big)\cdot R(t, y, \eta) .$$

D'où d'après (1.14):

$$|\partial_t R(t, y, \eta)| \leqslant C q_0^{\frac{1}{2}}\big(x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta)\big) \leqslant C q_0^{\frac{1}{2}}(y, \eta)$$

$$\partial_{y_j} R(t, y, \eta) = -i\int_0^t \left(\left(\partial_{x_i} Sp(q)\frac{\partial x_i}{\partial y_j} + \partial_{\xi_i} Sp(q)\frac{\partial \xi_i}{\partial y_j}\right) ds\right) R(t, y, \eta) .$$

On utilise cette fois-ci (1.14), la conservation de l'énergie et (3.4) pour conclure.

On majore les autres dérivées de manière analogue.

5. – Estimation de l'erreur.

Pour $f \in S(\mathbf{R}^n)$, on pose:

$$\big(U_h^{(N)}(t)f\big)(x) = h^{-n}\iint \exp\left[ih^{-1}\big(S(t, x, \eta) - y\eta\big)\right]\left(\sum_{j=0}^N h^j a_j(t, x, \eta)\right) f(y)\, dy\, d\eta . \tag{5.1}$$

On a:

$$(5.2)\qquad \begin{cases} (ih\partial_t - Q(h))\, U_h^{(N)}(t) = R_h^{(N)}(t) f \\ U_h^{(N)}(0) f = f \end{cases}$$

où $R_h^{(N)}(t)$ est un opérateur du même type que $U_h^{(N)}(t)$.

$$(5.3)\qquad (R_h^{(N)}(t) f)(x) = \iint \exp\left[ih^{-1}\big(S(t,x,\eta) - y\eta\big)\right] r_N(t,x,\eta,h) f(y)\, dy\, d\eta\,.$$

Or il résulte du § 4 que $a_j \in A^{(0,0)}$ et $r_N \in A^{(0,N+2-n)}$.

Comme dans [3], [4], il résulte du théorème de continuité L^2 de Asada-Fujiwara [1] que l'on a les estimations suivantes:

$$(5.4)\qquad \sup_{|t|\leqslant T} \| U_h^{(N)}(t) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = O(1)$$

$$(5.5)\qquad \sup_{|t|\leqslant T} \| R_h^{(N)}(t) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = O(h^{N+2})$$

$$(5.6)\qquad \sup_{|t|\leqslant T} \| U_h(t) - U_h^{(N)}(t) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = O(h^{N+1}) \qquad \text{pour } h \to 0,\ h > 0\,.$$

6. – Etude asymptotique de la distribution S_h, $h \to 0$ et applications.

La plupart des démonstrations de [4] s'appliquant mot à mot, nous ne détaillons que les points nouveaux, renvoyant à [4] sans le préciser pour les autres points.

Soit:

$$(6.1)\qquad S_t(t) = \operatorname{Trace}\left(\exp[-ih^{-1} t Q(h)]\right)$$

$$(6.2)\qquad I_\tau(h) = \langle S_h(t), \Theta(t) \exp[-ih^{-1} t\tau]\rangle\,, \qquad \Theta \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})\,.$$

On suppose que: supp $\Theta \in]-T, T[$, $T > 0$ assez petit déterminé par le § 3.

On pose:

$$(6.3)\qquad J_\tau^{(N)}(h) = \operatorname{Tr}\left(\int U_h^{(N)}(t)\, \Theta(t) \exp[-ih^{-1} t\tau]\, dt\right).$$

Proposition 6.1 (cf. prop. 4.1 de [4]). *Il existe deux entiers n_0 et $n_1 \geqslant 1$ tels que, pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe $C(N) > 0$ telle que, pour tout $f \in C_0^\infty(]-T, T[)$ et tout $h \in]0, h_0[$, on ait*:

$$(6.4)\qquad \left|\operatorname{Tr}\left[\int \big(U_h(t) - U_h^{(N)}(t)\big) f(t)\, dt\right]\right| \leqslant C(N)\, h^{N-n_0} \Big(\sup_{\substack{0\leqslant j\leqslant n_1 \\ t\in]-T,T[}} |f^{(j)}(t)|\Big)\,.$$

DÉMONSTRATION. On a besoin du lemme:

LEMME 6.2 (cf. corollaire 2 § 2 de [4]). *Il existe $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$ il existe $C_k > 0$ vérifiant:*

$$\mathrm{Tr}\,(Q(h)^{-k}) \leqslant C_k h^{-n} \quad \textit{pour tout } h \in]0, h_0] . \tag{6.5}$$

De plus, si $(\mu_j(h))_{j\geqslant 1}$ désigne la suite croissante des valeurs propres de $Q(h)$, on a alors:

$$M_h(\lambda) = \mathrm{card}\,\{j,\ \mu_j(h) \leqslant \lambda\} \leqslant C_k h^{-n} \cdot \lambda^k \tag{6.6}$$

pour tout $h \in]0, h_0]$ et tout $\lambda > 0$.

DÉMONSTRATION. On a: $Q(h)^{-k} = P(h)^{-2k\varrho}$. Or il résulte de [4] (prop. 2.6) que

$$P(h) \in \mathfrak{L}_{ad}^{-2k\varrho m'} .$$

Donc si $p_{(-2k\varrho)}(h)$ désigne le symbole de Weyl de $P(h)^{-2k\varrho}$, alors il existe $C_k > 0$ telle que:

$$p_{(-2k\varrho)}(h, x, \xi) \leqslant (\phi\varphi)^{-2k\varrho m'} . \tag{6.7}$$

Or on a:

$$\mathrm{Trace}\,(Q(h)^{-k}) = h^{-n} \iint p_{(-2k\varrho)}(h, x, \xi)\, dx\, d\xi \tag{6.8}$$

(6.7), (6.8) et (1.1) entraînent alors (6.5). On a également:

$$\mathrm{Trace}\,(Q(h)^{-k}) = \int_0^{+\infty} \frac{dM_h(\tau)}{\tau^k}$$

et l'inégalité:

$$\frac{1}{\lambda^k} \int_0^{\lambda} dM_h(\tau) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dM_h(\tau)}{\tau^k}$$

d'où l'on déduit (6.6).

Suite de la démonstration de la proposition 6.1.

On pose $\Delta_h^{(N)}(t) = U_h(t) - U_h^{(N)}(t)$.
On a:

$$\Delta_h^{(N)}(t) = Q(h)^{-k} (ih\partial_t)^k \Delta_h^{(N)}(t) - \sum_{j=0}^{k-1} Q(h)^{-j-1} (ih\partial_t)^j R_h^{(N)}(t) . \tag{6.9}$$

Il résulte de (6.5) qu'il existe un entier k_0 et un réel $C_{k_0} > 0$ tels que:

$$|\mathrm{Trace}\,[Q(h)^{-k_0}]| \leqslant C_{k_0} h^{-n}. \tag{6.10}$$

On obtient alors, compte tenu de (5.5)

$$\left\| Q(h)^{-k_0} \int (ih\partial_t)^{k_0} \Delta_h^{(N)}(t) f(t)\, dt \right\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant C h^{N+2+k_0-n} \sup_{\substack{0 \leqslant j \leqslant k_0 \\ |t| < T}} |f^{(j)}(t)|\,. \tag{6.11}$$

Or on a:

$$\left| \mathrm{Tr}\left\{ Q(h)^{-j-1} \int [(ih\partial_t) R(t)] f(t)\, dt \right\} \right| \leqslant \tag{6.12}$$
$$\leqslant h^j \|Q(h)^{-k_0}\|_{\mathrm{Tr}} \left\| \int \left(Q(h)^{k_0-j-1} \circ R_h^{(N)}(t)\right) f^{(j)}(t)\, dt \right\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)}.$$

D'après le lemme (4.3) itéré $(k_0 - j - 1)$ fois, on a:

$$\left(Q(h)^{k_0-j-1} \circ R_h^{(N)}(t)\right) u(x) = \tag{6.13}$$
$$= \iint \exp\,[ih^{-1}(S(t, x, \eta) - y\eta)\, r_j'(t, x, \eta, h)\, u(y)\, dy\, d\eta$$

pour tout u dans $S(\boldsymbol{R}^n)$ avec:

$$r_j' \in A^{2(k_0-1-j), N+2-n}\,.$$

Pour conclure, on a besoin du:

Lemme 6.3. *Soit*

$$M = h(i\partial_t S)^{-1}\, \partial_t\,,$$

on a alors:

$$^t M b \in A^{m-1, p+1} \qquad \textit{pour tout } b \in A^{m,p}\,. \tag{6.14}$$

Admettons un instant ce lemme et terminons la démonstration de la proposition 6.1. On fait $2(k_0 - 1 - j)$ intégrations par parties à l'aide de M et on obtient:

$$\left\| \int Q(h)^{k_0-j-1} R_h^{(N)}(t) f^{(j)}(t)\, dt \right\| \leqslant C h^{N+\mathrm{k}+2(h-1-j)-n} \operatorname*{Sup}_{\substack{r \leqslant 2(k_0-1) \\ |t| \leqslant T}} |f^{(r)}(t)|\,. \tag{6.15}$$

D'où

$$\left| \mathrm{Tr}\left[Q(h)^{-j-1} \int \left((ih\partial_t)^j R_h^N(t)\right) f(t)\, dt \right] \right| \leqslant C h^{N+\mathrm{k}+2(k_0-1)-n-n} \operatorname*{Sup}_{r \leqslant 2(k_0-1)} |f^{(r)}(t)|\,. \tag{6.16}$$

Compte-tenu de (6.9), la proposition se déduit de (6.11) et (6.16).

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.3. On a:

$$ {}^{t}M(b) = -ih[(\partial_t b)(\partial_t S)^{-1} - b\partial_t^2 S(\partial_t S)^{-2}]. \tag{6.17} $$

On conclut en utilisant (3.24), (3.27) et en dérivant (6.17).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.3. Comme dans [4], on se restreint au cas où supp $\Theta \in]-T, T[$.

D'après la proposition (6.1), il suffit, en choisissant N assez grand, d'étudier l'intégrale:

$$ J_\tau^{(N)}(h) = \iiint \exp[ih^{-1}\varphi(t, x, \eta, \tau)]\,\Theta(t)a(t, x, \eta, h)\,dt\,d\eta\,dx \tag{6.18} $$

où l'on a posé: $\varphi(t, x, \eta, \tau) = S(t, x, \eta) - x\eta - t\tau$

$$ a(t, x, \eta, h) = \sum_{j=0}^{N} h^j a_j(t, x, \eta). $$

D'après (3.23), on a:

$$ -\partial_t S(t, x, \eta) \geqslant C_0'' \lambda^{m''}(x, \eta). $$

Il existe donc $C > 0$ telle que $\lambda(x, \eta) \geqslant C$ entraine:

$$ |\partial_t S(t, x, \eta) - \tau'| \geqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{pour tout } \tau' \in [\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0]. $$

Or il est clair que l'opérateur $M_\tau = h(i\partial_t S - \tau)^{-1}\partial_t$ a la même propriété que M dans la zone où $\lambda(x, \eta) \geqslant C$, i.e., ${}^tM_\tau$ envoie $A^{p,m}$ dans $A^{p+1,m-1}$. Par des intégrations par parties à l'aide de M_τ, on voit donc que la contribution de la zone: $\lambda(x, \eta) \geqslant C$, $|t| \leqslant T$ dans l'intégrale (6.18) est $O(h^\infty)$. Le théorème de la phase non stationnaire implique alors le théorème 1.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.4. Comme précédemment, on est ramené à étudier la contribution de la zone:

$$ \lambda(x, \eta) \leqslant C \quad \text{et} \quad |t| \leqslant T. $$

Comme dans Chazarain [3], le théorème de la phase stationnaire donne le résultat.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.5. La preuve du théorème (1.5) est analogue à celle donnée dans [4], § 5, dans le cas elliptique.

Il suffit d'établir le théorème pour $Q(h)$. Soit alors $\Theta \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ à support assez petit autour de O telle que $\Theta(0) = 1$, $\hat{\Theta} \geqslant 0$, Θ est paire et $\hat{\Theta} > 0$ sur $[-\delta_0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$. On pose $\Theta_h(\lambda) = (2\pi h)^{-1}\hat{\Theta}(-h^{-1}\lambda)$.

On commence pour étudier $N_h * \Theta_h$.

On a facilement: $N_h * \Theta_h(\lambda) = (2\pi h)^{-1}\int_{-\infty}^{\lambda} I_{-\tau}(h)\, d\tau$.

Soit $\chi \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, $\chi = 1$ sur $]-\infty, -2]$, $\chi = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

LEMME 6.4. *Pour tout entier $N \geqslant 1$ il existe $\tilde{C}_N > 0$ telle que:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\tau) I_{-\tau}(h)\, d\tau \leqslant \tilde{C}_N h^N \quad \textit{pour tout } h \in]0, h_0]. \tag{6.19}$$

DÉMONSTRATION. On a:

$$I_{-\tau}(h) = \sum_{j\geqslant 1} \hat{\Theta}\big(h^{-1}(\mu_j(h) - \tau)\big). \tag{6.20}$$

D'autre part: pour tout M, il existe $C'_M > 0$ telle que:

$$\big|\hat{\Theta}\big(h^{-1}(\mu_j(h) - \tau)\big)\big| \leqslant C'_M h^M |\mu_j(h) - \tau|^{-M}. \tag{6.21}$$

Posons $-\tau = s + 1$, $s \geqslant 0$. On a l'inégalité élémentaire:

$$(\mu_j(h) + s + 1)^{-1} \leqslant (s+1)^{\nu-1}(\mu_j(h) + 1)^{-\nu}, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 1. \tag{6.22}$$

D'après (6.5) on a alors:

$$\sum_{j\geqslant 1} (\mu_j(h) + 1)^{-\nu M} \leqslant C_{\nu M} h^{-n} \quad \text{pour } \nu M \geqslant k_0. \tag{6.23}$$

On obtient (6.19) en choisissant M et ν tels que:

$$M > N + n, \quad \nu M \geqslant k_0 \quad \text{et} \quad (1-\nu)M > 1.$$

En procédant comme dans [4] on obtient alors:

PROPOSITION 6.5. *Si λ n'est pas valeur critique de q_0, on a alors:*

$$N_h * \Theta_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \int_{q_0(x,\xi)\leqslant\lambda} dx\, d\xi + O(h^{-n+1}) \quad \textit{lorsque } h \to 0. \tag{6.24}$$

On termine alors la démonstration du théorème (1.5) en comparant $N_h(\lambda)$ et $N_h * \Theta_h(\lambda)$. Cela résulte du:

LEMME 6.6. *Supposons que λ_0 ne soit pas valeur critique de q_0. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $k \geqslant 1$ tels que*

$$|N_h(\lambda + \tau h) - N_h(\lambda)| \leqslant C_0(1 + |\tau|)^k h^{-n+1} \tag{6.25}$$

pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0]$, $h \in]0, h_0]$ *et* $\tau \in \boldsymbol{R}$.

DÉMONSTRATION. Elle est analogue à celle du lemme (5.2) de [4]. Pour $|\tau h| \geqslant \varepsilon_0$ on utilise (6.6).

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. ASADA - D. FUJIWARA, *On some oscillatory integral transformation in $L^2(\boldsymbol{R}^n)$*, Japan J. Math., **4** (1978), pp. 299-361.

[2] R. BEALS, *A general calculus of pseudodifferential operators*, Duke Math. J,. **42** (1975), pp. 1-42.

[3] J. CHAZARAIN, *Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique*, Comm. Partial Diff. Equat., **5**, no. 6 (1980), pp. 595-644.

[4] B. HELFFER - D. ROBERT, *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques*, Annales de l'Institut Fourier, **31**, fasc. 3 (1981), pp. 169-223.

[5] B. HELFFER - D. ROBERT, *Comportement asymptotique précisé du spectre d'opérateurs globalement elliptiques dans $\boldsymbol{R}^n$*, C. R. Acad. Sci. Paris, **292**, 9 Février 1981, p. 363.

[6] B. HELFFER - D. ROBERT, *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), p. 47.

[7] L. HÖRMANDER, *The Weyl calculus of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl. Math., **32** (1979), pp. 359-443.

[8] L. HÖRMANDER, *On the asymptotic distribution of eigenvalues of pseudo-differential operators in R^n*, Ark. för Math., **17**, no. 2 (1979), pp. 296-313.

[9] PHAM THE LAI - D. ROBERT, *Valeurs propres d'une classe d'équations différentielles singulières sur une demi-droite*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Série IV, **6**, no. 2 (1979), pp. 335-366.

[10] D. ROBERT, *Propriétès spectrales d'opèrateurs pseudodifférentiels*, Comm. Partial Diff. Equat., **3** (1978), pp. 755-826.

[11] M. A. SUBIN, *Pseudo-differential operators and spectral theory*, Nauka, Moskva (1978).

[12] A. VOROS, *An algebra of pseudodifferential operators and the asymptotics of quantum mechanics*, J. Functional Analysis, **29**, no. 1 (1978), pp. 104-132.

Université de Nantes
Institut de Mathématique et d'Informatique
2 Chemin de la Houssinière
44072 Nantes - France