ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FRANÇOIS MURAT

Compacité par compensation : condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 8, nº 1 (1981), p. 69-102

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1981_4_8_1_69_0>

Compacité par compensation: condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant.

FRANÇOIS MURAT

1. – Introduction.

Soient un ouvert Ω de $\boldsymbol{R}^N$ (borné ou non, régulier ou non), un réel p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et des coefficients a_{ijk}:

$$a_{ijk} \in \boldsymbol{R}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant N\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant m\,, \quad 1 \leqslant k \leqslant n\,.$$

Nous considérons dans cet article l'espace:

$$H(\Omega, A, p) = \left\{ u \middle| u \in \big(L^p(\Omega)\big)^m, \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} a_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leqslant k \leqslant n \right\},$$

muni de sa norme naturelle:

$$\|u\|_H = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \|u_j\|^2_{L^p(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n} \left\| \sum_i \sum_j a_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $H(\Omega, A, p)$ est donc le domaine d'un opérateur différentiel A, à valeurs vectorielles et *à coefficients constants* a_{ijk}; d'un autre point de vue, c'est une sorte d'espace de Sobolev a-symétrique.

A toute fonction $f\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ on associe l'application $u \to f(u)$, où $f(u)$ est la fonction composée définie presque partout par:

$$\big(f(u)\big)(x) = f\big(u(x)\big)\,, \qquad \forall x \in \Omega\,.$$

Pervenuto alla Redazione il 18 Dicembre 1979.

Pour que $f(u)$ soit une distribution, une condition raisonnable est que $f(u) \in L^1_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$. C'est pourquoi nous serons amenés à faire des hypothèses de régularité et de croissance à l'infini sur f: par exemple, si u varie dans $(L^p(\Omega))^m$ (p fini), nous supposerons f continue sur $\boldsymbol{R}^m$ et croissant à l'infini au plus comme $|y|^p$; si u varie dans $(L^\infty(\Omega))^m$, il suffit de supposer f continue pour que $f(u)$ appartienne à L^1_{Loc}.

Notre but est de résoudre le problème suivant:

PROBLÈME (*). On se donne un espace $H(\Omega, A, p)$. Trouver toutes les fonctions f satisfaisant:

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } \boldsymbol{R}^m\,, \\ |f(y)| \leqslant \text{cste}\,|y|^p \text{ si } |y| \text{ grand (si } p \text{ fini)}\,, \end{cases}$$

et telles que:

$$\text{(1)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } u^\varepsilon \text{ vérifiant (}^1\text{):} \\ u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ dans } (L^p(\Omega))^m \text{ faible (faible étoile si } p = \infty)\,, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} a_{ijk} \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup \sum_i \sum_j a_{ijk} \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}\,, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n\,, \end{array} \right.$$

on a:

$$\text{(2)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega f(u^\varepsilon(x))\varphi(x)\,dx \to \int_\Omega f(u_0(x))\,\varrho(x)\,dx\,. \qquad \blacksquare \end{array} \right.$$

En d'autres termes, il s'agit de caractériser (et si possible d'expliciter) toutes les fonctions f telles que l'application associée soit séquentiellement *faiblement* continue de $H(\Omega, A, p)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, (où faiblement signifie que $H(\Omega, A, p)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont munis de leurs topologies *faibles* définies par (1) et (2)).

Ce problème (*), et bien d'autres questions connexes, est l'objet de recherches menées en collaboration avec Luc Tartar depuis plusieurs années.

Remarquons que les fonctions f solutions du problème (*) sont nécessairement continues: en effet, considérons une suite de $\boldsymbol{R}^m$ telle que:

$$c^\varepsilon \to c^0 \text{ dans } \boldsymbol{R}^m\,.$$

([1]) Nous considérons toujours des *suites* de nombres ε tendant vers zéro.

Les fonctions u^ε définies par:

$$u^\varepsilon(x) = c^\varepsilon , \qquad \forall x \in \Omega ,$$

vérifient (1); si f est telle que l'on ait (2), on a nécessairement:

$$f(c^\varepsilon) \to f(c^0) \text{ dans } \boldsymbol{R} ,$$

c'est-à-dire la continuité de f.

NOTATIONS. Pour énoncer la solution de ce problème, nous utiliserons les notations suivantes:

$$V = \left\{(\lambda, \zeta) | \lambda \in \boldsymbol{R}^m, \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\}, \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} a_{ijk} \zeta_i \lambda_j = 0, 1 \leqslant k \leqslant n\right\} ,$$

$$\Lambda = \left\{\lambda | \lambda \in \boldsymbol{R}^m, \exists \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\}, \sum_i \sum_j a_{ijk} \zeta_i \lambda_j = 0, 1 \leqslant k \leqslant n\right\} .$$

Notons que Λ n'est autre que la projection de V sur $\boldsymbol{R}^m$.

Soit L le sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{R}^m$ engendré par Λ et soit l sa dimension $(0 \leqslant l \leqslant m)$. On se donne une base $e^1, e^2, \dots, e^m$ de $\boldsymbol{R}^m$ telle que $e^1, e^2, \dots, e^l$ appartiennent à Λ. L'espace $H(\Omega, A, p)$ étant un objet invariant par changement de base, *nous supposerons que cette base est celle que nous avons utilisée dans* $\boldsymbol{R}^m$.

Définissons aussi le symbole de l'opérateur A: pour tout $\zeta \in \boldsymbol{R}^N$, c'est la matrice $(m \times n)$ $a(\xi)$ dont les coefficients sont donnés par (2):

$$(a(\zeta))_{kj} = \sum_{i=1}^{N} a_{ijk} \zeta_i , \qquad 1 \leqslant j \leqslant m , \ 1 \leqslant k \leqslant n .$$

Enfin, étant donné un polynôme $P: \boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}$ à coefficients constants, homogène de degré r, nous définirons une forme r-linéaire associée, notée L_P, par:

$$(3) \qquad \begin{cases} \forall z_1, z_2, \dots, z_r \in \boldsymbol{R}^l , \\ L_P z_1 \dots z_r = P^{(r)}(z) z_1 \dots z_r , \qquad \forall z \in \boldsymbol{R}^l . \end{cases}$$

(2) On notera que, avec cette définition:

$$(\lambda, \zeta) \in V \Leftrightarrow \lambda \in \boldsymbol{R}^m , \qquad \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\} , \qquad a(\zeta)\lambda = 0 ,$$

et que, si $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction u, on a:

$$u \in H(\boldsymbol{R}^N, A, p) \Leftrightarrow u \in (L^p(\boldsymbol{R}^N))^m \qquad \text{et} \qquad a(\cdot)\hat{u}(\cdot) \in (L^2(\boldsymbol{R}^N))^n .$$

On notera que la dérivée $P^{(r)}(z)$ est en fait indépendante de z, que la forme L_p est symétrique et que l'on a:

$$P(z) = \frac{1}{r!} L_P z \dots z\,, \qquad \forall z \in \boldsymbol{R}^l\,.$$

Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME PRINCIPAL. *On considère l'espace $H(\Omega, A, \infty)$ et une fonction $f\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$, continue.*

Pour que l'application $u \to f(u)$ soit séquentiellement faiblement continue de $H(\Omega, A, \infty)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, les conditions suivantes sont nécessaires:

i) *la fonction f est une somme finie de polynômes P_α en $y_1, \dots, y_l$, homogènes, à coefficients constants, de degré au plus égal à* $\inf(N, l)$, *les coefficients de cette somme étant des fonctions c_α qui ne dépendent que de $y_{l+1}, \dots, y_m$: i.e.:*

$$\forall y \in \boldsymbol{R}^m, \quad f(y) = \sum_\alpha c_\alpha(y_{l+1}, \dots, y_m) P_\alpha(y_1, \dots, y_l)\,. \tag{4}$$

ii) *chacun de ces polynômes P_α vérifie, si son degré r est supérieur ou égal à 2:*

$$\left|\begin{array}{l} \forall(\lambda_1, \zeta_1), (\lambda_2, \zeta_2), \dots, (\lambda_r, \zeta_r) \in V\,, \\ \text{tels que rang } (\xi_1, \dots, \xi_r) \leqslant r - 1\,, \\ L_{p_\alpha} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r = 0\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Réciproquement, si le rang de $a(\zeta)$ est constant pour tout $\zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\}$, ces conditions sont suffisantes. ■

Dans chaque cas particulier où l'on se donne les coefficients a_{ijk} de l'opérateur A, les conditions (4) et (5) permettent d'expliciter complétement les fonctions f solutions éventuelles du problème $(*)$. Si le symbole $a(\zeta)$ de A est de rang constant, nous avons donc résolu ce problème.

Le reste de cet article est consacré à la démonstration du théorème principal et de résultats voisins (cas où p est fini). Le paragraphe 2 traite des conditions nécessaires; une grande partie de ces résultats a été exposée, de façon différente, dans [19]. Le paragraphe 3 traite des conditions suffisantes; nous les avions déjà établies dans [18], [19], [12] sans hypothèse de rang constant sur $a(\zeta)$, pour des polynômes de degré 2; l'originalité de cet article est que nous les établissons ici dans le cas général. Malheureusement, la méthode de démonstration employée, qui reprend celle de [11], nous conduit à supposer que le symbole de l'opérateur A est de rang constant.

Il s'agit donc d'un résultat nouveau mais un peu insatisfaisant. Enfin, le paragraphe 4 est consacré à deux exemples.

2. – Conditions nécessaires.

Ce paragraphe est notamment consacré à établir la partie « conditions nécessaires » du théorème principal. Une démonstration d'une grande partie des résultats énoncés a été donnée dans [19], par une méthode inspirée de la même idée.

REMARQUES 2.1. Le théorème principal donne des conditions nécessaires i) et ii) que doivent vérifier les fonctions f auxquelles sont associées des applications faiblement continues de $H(\Omega, A, \infty)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En fait, la démonstration de ces conditions nécessaires n'utilise que la continuité de l'application $u \to f(u)$ sur certaines suites particulières de $H(\Omega, A, \infty)$; ces suites ont notamment les deux propriétés suivantes:

1) elles vérifient $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} a_{ijk}(\partial u_j/\partial x_i) = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$: les u^ε utilisés sont des éléments du noyau de l'opérateur A;

2) elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs: cette particularité est importante dans le cas où l'on s'intéresse à des suites u^ε convergeant faiblement dans $H(\Omega, A, p)$ qui sont astreintes à prendre leurs valeurs dans un ensemble fixe K, i.e.:

$$u^\varepsilon(x) \in K\,, \qquad \forall x \in \Omega\,, \qquad \forall \varepsilon\,.$$

Notons que pour de telles fonctions u^ε measurables, il suffit que f soit *à valeurs finies* pour que $f(u^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)$.

D'autre part, on remarque que comme l'espace $H(\Omega, A, \infty)$ est inclus [3] avec injection continue dans $H(\Omega, A, p)$, le théorème principal donne des conditions nécessaires que doivent vérifier les fonctions f solutions du problème $(*)$, quel que soit l'indice p.

Enfin le théorème principal ne donne aucun renseignement sur la dépendance de f par rapport à $y_{l+1}, \ldots, y_m$. Ceci est normal, puisque comme on le verra au paragraphe 3, toute application $u \to c(u_{l+1}, \ldots, u_m)$ est faible-

(3) Cette affirmation est inexacte quand Ω n'est pas borné puisqu'on n'a pas alors $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ (p fini) mais seulement $L^\infty(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$; mais cette dernière propriété suffit puisqu'on considère toujours le produit de $f(u^\varepsilon)$ par une fonction φ à support compact.

ment continue dès que c est une fonction continue de $\boldsymbol{R}^{m-l}$ dans $\boldsymbol{R}$ vérifiant des conditions de croissance à l'infini. ■

LEMME 2.2. *Soit $f: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ une fonction à valeurs finies. Si pour toute suite u^ε définie par:*

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon(x) = y + \chi\left(\dfrac{x\cdot\zeta}{\varepsilon}\right)\lambda\,, \quad \forall x \in \Omega\,, \\ \textit{où } y \in \boldsymbol{R}^m,\ (\lambda, \zeta) \in V\,, \\ \chi: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \textit{ fonction périodique, de période } 1, \\ \chi = 1 \textit{ sur } [0, \theta[,\ \chi = 0 \textit{ sur } [\theta, 1[,\ (0 \leqslant \theta \leqslant 1)\,, \end{array} \right.$$

on a:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u^0) \textit{ dans } L^\infty(\Omega) \textit{ faible étoile}, \\ \textit{où } u^0 = y + \theta\lambda\,, \end{array} \right.$$

alors nécessairement f vérifie:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} t \to f(y + t\lambda) \textit{ est affine de } \boldsymbol{R} \textit{ dans } \boldsymbol{R}, \\ \forall y \in \boldsymbol{R}^m\,, \quad \forall \lambda \in \Lambda\,. \quad ■ \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION. On a bien sûr:

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ dans } \big(L^\infty(\Omega)\big)^m \text{ faible étoile,}$$

et de même, comme:

$$f\big(u^\varepsilon(x)\big) = \left\{ \begin{array}{ll} f(y + \lambda) & \text{si } 0 \leqslant \dfrac{x\cdot\zeta}{\varepsilon} < \theta \text{ modulo } 1\,, \\ f(y) & \text{si } \theta \leqslant \dfrac{x\cdot\zeta}{\varepsilon} < 1 \text{ modulo } 1\,, \end{array} \right.$$

on a:

$$f(u^\varepsilon) \rightharpoonup \theta f(y + \lambda) + (1 - \theta) f(y) \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile}\,.$$

Grâce à ces résultats, on déduit facilement (9) de la propriété de continuité (8). ■

COROLLAIRE 2.3. *Si f vérifie les hypothèses du lemme 2.2., alors f est un polynôme en $y_1, \ldots, y_l$ de degré au plus égal à l, dont les coefficients sont des fonctions de $y_{l+1}, \ldots, y_m$.* ■

DÉMONSTRATION. En écrivant $y \in \mathbf{R}^m$ sous la forme $y = \sum_{j=1}^{m} y_j e^j$, où e^j est la base que nous avons introduite ($e^j \in \Lambda$ si $1 \leq j \leq l$), on a d'après (9):

$$\begin{aligned} f(y) &= f\Big(\sum_{j=2}^{m} y_j e^j + y_1 e^1\Big) \\ &= y_1 f\Big(e^1 + \sum_{2}^{m} y_j e^j\Big) + (1-y_1) f\Big(\sum_{2}^{m} y_j e^j\Big) \\ &= y_1\Big\{y_2 f\Big(e^1 + e^2 + \sum_{3}^{m} y_j e^j\Big) + (1-y_2) f\Big(e^1 + \sum_{3}^{m} y_j e^j\Big)\Big\} \\ &+ (1-y_1)\Big\{y_2 f\Big(e^2 + \sum_{3}^{m} y_j e^j\Big) + (1-y_2) f\Big(\sum_{3}^{m} y_j e^j\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, ce qui implique le résultat. ■

LEMME 2.4. *Soit $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ une fonction à valeurs finies. Si pour toute suite u^ε définie par:*

$$(10)\quad \begin{cases} u^\varepsilon(x) = y + \chi_1\Big(\dfrac{x\cdot\zeta_1}{\varepsilon}\Big)\lambda_1 + \chi_2\Big(\dfrac{x\cdot\zeta_2}{\varepsilon}\Big)\lambda_2 + \chi_3\Big(\dfrac{x\cdot\zeta_3}{\varepsilon}\Big)\lambda_3, \\ \textit{où } y \in \mathbf{R}^m,\ (\lambda_1, \zeta_1),\ (\lambda_2, \zeta_2),\ (\lambda_3, \zeta_3) \in V, \\ \textit{avec rang } (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 2,\ \xi_1, \xi_2, \xi_3 \textit{ indépendants deux à deux}, \\ \chi_s: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \textit{ fonction périodique, de période } T_s,\ 1 \leq s \leq 3, \\ \chi_s = 1 \textit{ sur } [0, \theta T_s[,\ \chi_s = 0 \textit{ sur } [\theta T_s, T_s[,\ (0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}), \end{cases}$$

on a:

$$(11)\quad \begin{cases} f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(u^0) \textit{ dans } L^\infty(\Omega) \textit{ faible étoile}, \\ \textit{où } u^0 = y + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \end{cases}$$

alors nécessairement f vérifie:

$$(12)\quad \begin{cases} \begin{cases} \forall (\lambda_1, \zeta_1),\ (\lambda_2, \zeta_2),\ (\lambda_3, \zeta_3) \in V, \\ \textit{tels que rang } (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 2,\ \xi_1, \xi_2, \xi_3 \textit{ indépendants deux à deux}, \\ \forall y \in \mathbf{R}^m, \quad \forall \theta \in [0, \tfrac{1}{2}], \end{cases} \\ \begin{cases} f(y + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) = \\ = \tfrac{1}{2}\theta^2\{f(y + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + f(y + \lambda_1 + \lambda_2) + f(y + \lambda_2 + \lambda_3) + \\ + f(y + \lambda_3 + \lambda_1) - 3f(y + \lambda_1) - 3f(y + \lambda_2) - 3f(y + \lambda_3) + 5f(y)\} + \\ + \theta\{f(y + \lambda_1) + f(y + \lambda_2) + f(y + \lambda_3) - 3f(y)\} + f(y)\,. \end{cases} \end{cases}$$

■

DÉMONSTRATION. On a bien sûr, d'après (10):

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \text{ dans } \left(L^\infty(\Omega)\right)^m \text{ faible étoile}\,.$$

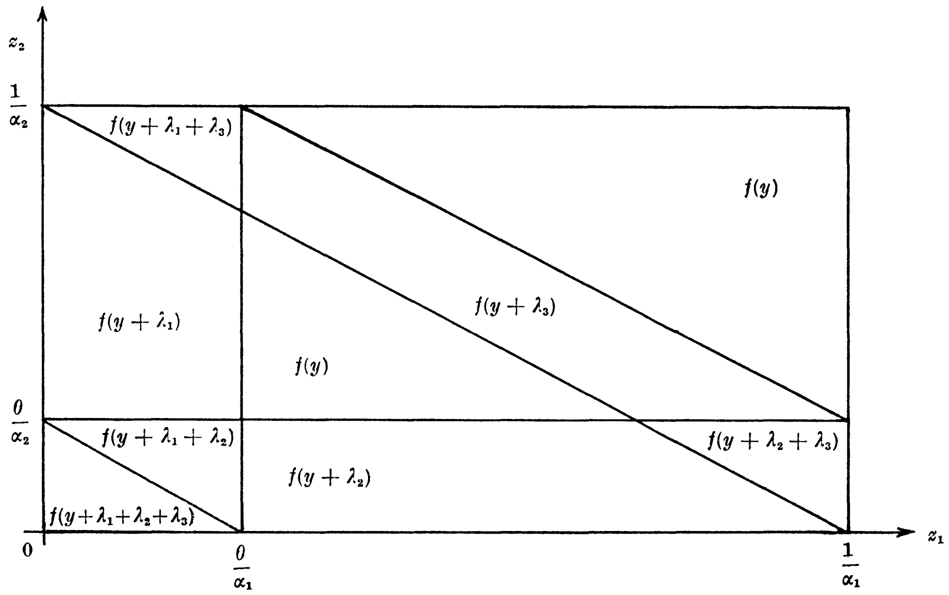
Puisque rang $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 2$, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ étant deux à deux indépendants, on a:

$$\zeta_3 = \alpha_1\zeta_1 + \alpha_2\zeta_2 \quad \text{avec } \alpha_1 \neq 0\,,\ \alpha_2 \neq 0\,.$$

Choisissons maintenant $T_1 = 1/\alpha_1$, $T_2 = 1/\alpha_2$, $T_3 = 1$.

Comme $x\cdot\zeta_3 = \alpha_1(x\cdot\zeta_1) + \alpha_2(x\cdot\zeta_2)$, u^ε est une fonction ne dépendant que des variables $z_1 = x\cdot\zeta_1$ et $z_2 = x\cdot\zeta_2$ et périodique par rapport à chacune d'entre elles, de périodes $1/\alpha_1$ et $1/\alpha_2$, de sorte que $f(u^\varepsilon)$ est périodique en z_1 et z_2 avec les mêmes périodes.

La figure ci-dessous donne les valeurs de $f(u^\varepsilon)$ sur le pavé de périodes:



Valeurs de $f(u^\varepsilon)$ sur le pavé de périodes.

Si l'on a un peu de courage pour calculer les différentes surfaces, on en déduit que $f(u^\varepsilon)$ converge dans $L^\infty(\Omega)$ faible étoile vers:

$$\frac{1}{2}\theta^2\left\{f(y+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + f(y+\lambda_1+\lambda_2) + f(y+\lambda_2+\lambda_3) + f(y+\lambda_3+\lambda_1)\right\} +$$

$$+\left(\theta-\frac{3}{2}\theta^2\right)\{f(y+\lambda_1)+f(y+\lambda_2)+f(y+\lambda_3)\}$$
$$+\frac{1}{2}\{(1-2\theta)^2+(1-\theta)^2\}f(y)\,.$$

De ce résultat et de l'hypothèse de continuité (11), on déduit (12). ■

REMARQUE 2.5. Si u^ε est défini par (7), on a:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}=\frac{\zeta_i}{|\zeta|}\lambda T_\varepsilon\,,\quad 1\leqslant i\leqslant N\,,$$

où T_ε est (au signe près) la mesure superficielle portée par les hyperplans $(x\cdot\zeta)/\varepsilon=0$ ou θ (modulo 1). Puisque $(\lambda,\zeta)\in V$, u^ε vérifie:

$$\sum_i\sum_j a_{ijk}\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}=\frac{T_\varepsilon}{|\zeta|}\sum\sum a_{ijk}\zeta_i\lambda_j=0\,.$$

Les suites définies par (7) et (10) sont donc des cas particuliers de suites vérifiant (1). ■

PROPOSITION 2.6. *Soit $f\colon \boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$, continue. Si l'application $u\to f(u)$ est séquentiellement faiblement continue de $H(\Omega,A,\infty)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors on a pour tout entier $r\geqslant 2$:*

$$(13)_r\qquad\left\{\begin{array}{l}\forall(\lambda_1,\zeta_1),\ (\lambda_2,\zeta_2),\ \dots,\ (\lambda_r,\zeta_r)\in V\,,\\ \textit{tels que rang}\ (\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_r)\leqslant r-1\,,\\ \forall y\in\boldsymbol{R}^m\,,\\ f^{(r)}(y)\lambda_1\dots\lambda_r=0\,.\quad\blacksquare\end{array}\right.$$

Notons que la formule $(13)_r$ a bien un sens: en effet, d'après le corollaire 2.3., f est un polynôme en $y_1,\dots,y_l$, donc indéfiniment dérivable par rapport à ces variables; or, ce sont ces dérivées partielles (et non celles par rapport à $y_{l+1},\dots,y_m$) qui interviennent dans $(13)_r$:

DÉMONSTRATION.

Cas $r=2$. Soit f vérifiant les hypothèses de la proposition 2.6.. Alors, d'après le remarque 2.5., f vérifie a fortiori les hypothèses du lemme 2.2. Si (λ_1,ζ_1), $(\lambda_2,\zeta_2)\in V$ avec rang $(\zeta_1,\zeta_2)\leqslant 1$, c'est que ζ_1 et ζ_2 sont colinéaires à un $\zeta\in\boldsymbol{R}^N-\{0\}$.

Alors λ_1, λ_2 et $(\lambda_1 + \lambda_2)$ appartiennent à Λ et on déduit de (9) que:

$$f''(y)\lambda_1\lambda_1 = f''(y)\lambda_2\lambda_2 = f''(y)(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2) = 0 ,$$

d'où $(13)_2$.

Cas $r = 3$. Soit f vérifiant les hypothèses de la proposition 2.6.. Alors d'après la remarque 2.5., f vérifie a fortiori les hypothèses du lemme 2.4.. Considérons (λ_1, ζ_1), (λ_2, ζ_2), $(\lambda_3, \zeta_3) \in V$ avec rang $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \leqslant 2$.

Si le rang est 1, c'est qu'il existe un ζ tel que (λ_1, ζ), (λ_2, ζ), $(\lambda_3, \zeta) \in V$ et alors on a d'après $(13)_2$:

$$f^{(2)}(y + t\lambda_3)\lambda_1\lambda_2 = 0 , \quad \forall t \in \boldsymbol{R} ,$$

d'où l'on déduit en dérivant par rapport à t, que:

$$f^{(3)}(y)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 .$$

Si le rang est 2, considérons d'abord le cas où deux des ζ (par exemple ζ_1 et ζ_2) sont colinéaires. Alors d'après $(13)_2$ on a:

$$f^{(2)}(y + t\lambda_3)\lambda_1\lambda_2 = 0 , \quad \forall t \in \boldsymbol{R} ,$$

d'où par dérivation $(13)_3$. Si l'on est dans le cas où les ζ sont deux à deux indépendants, on obtient en dérivant dans (12) par rapport à θ, puisque le second membre est du 2ème degré en θ, que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^3 f(y + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))\Big|_{\theta=0} = f^{(3)}(y)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 = 0 . \tag{14}$$

Mais la dérivée $f^{(3)}(y)\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma$ est nulle dès qu'un indice est repété: en effet d'après $(13)_2$, on a:

$$f''(y + t\lambda_\alpha)\lambda_\beta\lambda_\beta = 0 , \quad \forall t \in \boldsymbol{R} .$$

En developpant dans (14), on obtient donc que:

$$f^{(3)}(y)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 ,$$

c'est-à-dire $(13)_3$.

Cas $r \geqslant 4$. La démonstration est analogue à celle du cas $r = 3$. Signalons quand même qu'il n'est nullement nécessaire d'établir une formule analogue à (12), ce qui nécessiterait de calculer des volumes dans l'espace $\boldsymbol{R}^{r-1}$: il suffit de se convaincre que la limite de $f(u^\varepsilon)$ où

$$u^\varepsilon(x) = y + \sum_{s=1}^{r} \chi_s\left(\frac{x\cdot\zeta_s}{\varepsilon}\right)\lambda_s$$

est un polynôme de degré $r-1$ en θ .... ■

Corollaire 2.7. *Si f vérifie les hypothèses de la proposition* 2.6., *alors f est un polynôme en $y_1, \ldots, y_l$ de degré au plus égal à* $\inf(N, l)$, *dont les coefficients sont des fonctions de $y_{l+1}, \ldots, y_m$.* ■

Démonstration. Une partie du résultat est déjà connue par le corollaire 2.3.. Le reste découle de $(13)_{N+1}$: considérons, en effet, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N+1} \in \Lambda$; les $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{N+1}$ correspondants sont forcément de rang au plus N puisque ζ varie dans $\boldsymbol{R}^N$. Dans ces conditions:

$$\begin{cases} \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_{N+1} \in \Lambda, \quad \forall y \in \boldsymbol{R}^m, \\ f^{(N+1)}(y)\lambda_1 \ldots \lambda_{N+1} = 0, \end{cases}$$

et comme Λ engendre $L = \boldsymbol{R}^l$, f est un polynôme de degré au plus N sur $\boldsymbol{R}^l$. ■

Démonstration de la partie « conditions nécessaires » du théorème principal. Nous avons déjà démontré la plus grande partie des conditions nécessaires: la proposition 2.6. et le corollaire 2.7. résument ce qui est déjà acquis. Si f vérifie les hypothèses de la proposition 2.6., on a donc:

$$f(y) = \sum_{0 \leqslant s \leqslant \inf(N,l)} g_s(y), \quad \forall y \in \boldsymbol{R}^m,$$

où g_s est un polynôme homogène de degré s en $y_1, \ldots, y_l$ dont les coefficients dépendent de $y_{l+1}, \ldots, y_m$. En utilisant $(13)_r$, on obtient pour $r \geqslant 2$:

$$(15) \qquad \begin{cases} \forall(\lambda_1, \zeta_1), \ldots, (\lambda_r, \zeta_r) \in V, \\ \text{tels que rang}\,(\zeta_1, \ldots, \zeta_r) \leqslant r-1, \\ \forall y \in \boldsymbol{R}^m, \\ g_r^{(r)}(y)\lambda_1 \ldots \lambda_r + g_{r+1}^{(r)}(y)\lambda_1 \ldots \lambda_r + \ldots + g_{\inf(N,l)}^{(r)}(y)\lambda_1 \ldots \lambda_r = 0, \end{cases}$$

puisque la dérivée d'ordre r des polynômes g_s de degré $s < r$ est nulle. Notons que $g_r^{(r)}(y)$ ne dépend en fait que de $y_{l+1}, \ldots, y_m$ et prenons

$y_1 = y_2 = \ldots = y_l = 0$ dans (15); comme la dérivée $g_s^{(r)}(y)$ est pour $s > r$ un polynôme de degré $s - r (\geqslant 1)$ en $y_1, \ldots, y_l$, on obtient que

$$(16) \qquad \begin{cases} \forall (\lambda_1, \zeta_1), \ldots, (\lambda_r, \zeta_r) \in V , \\ \text{tels que rang}\, (\zeta_1, \ldots, \zeta_r) \leqslant r - 1 , \\ \forall (y_{l+1}, \ldots, y_m) \in \boldsymbol{R}^{m-l} , \\ g_r^{(r)}(y_{l+1}, \ldots, y_m) \lambda_1 \ldots \lambda_r = 0 . \end{cases}$$

Soit maintenant $\boldsymbol{Q}^r$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré r en $y_1, \ldots, y_l$, *à coefficients constants*, qui vérifient (5): c'est un espace vectoriel de dimension finie; soit $Q_1^r, \ldots, Q_a^r$ une base de $\boldsymbol{Q}^r$. Pour tout $y_{l+1}, \ldots, y_m$ fixé, les relations (16) signifient que g_r appartient à $\boldsymbol{Q}^r$; c'est donc que:

$$g_r(y) = \sum_\alpha c_{\alpha,r}(y_{l+1}, \ldots, y_m) Q_\alpha^r(y_1, \ldots, y_l) , \qquad \forall y \in \boldsymbol{R}^m .$$

Ceci achève la démonstration des conditions nécessaires. ■

Terminons ce paragraphe par un résultat facile:

PROPOSITION 2.8. *Si $f \colon \boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}$ est un polynôme de degré $r \geqslant 2$ à coefficients constants, il est équivalent d'avoir* (5) *ou d'avoir* $(13)_s$ *pour tout entier* $s \geqslant 2$. ■

DÉMONSTRATION. Que $(13)_s$ pour tout $s \geqslant 2$ entraîne (5) est évident puisque (5) n'est autre que $(13)_r$.

La réciproque se démontre par récurrence descendante sur s: en effet (5) implique $(13)_r$; supposons que (5) implique $(13)_s$ pour un $s \leqslant r$ et démontrons que (5) implique $(13)_{s-1}$ (avec $(s-1) \geqslant 2$).

Définissons pour cela pour $(\lambda_1, \zeta_1), \ldots, (\lambda_{s-1}, \zeta_{s-1}) \in V$ tels que:

$$\text{rang}\, (\zeta_1, \ldots, \zeta_{s-1}) \leqslant s - 2 ,$$

une fonction g par:

$$g(z) = f^{(s-1)}(z) \lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} , \qquad \forall z \in \boldsymbol{R}^l .$$

Pour tout élément e^j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ de la base de $\boldsymbol{R}^l$, il existe $\alpha_j \in \boldsymbol{R}^N$ tel que $(e^j, \alpha_j) \in V$ et on a rang $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{s-1}, \alpha_j) \leqslant s - 1$. La relation $(13)_s$ entraîne que:

$$\frac{\partial g}{\partial z_j}(z) = f^{(s)}(z) \lambda_1 \ldots \lambda_{s-1} e^j = 0 , \quad 1 \leqslant j \leqslant l .$$

Comme $g(0) = 0$, puisque g est homogène de degré $r-(s-1) \geqslant 1$, on a $g(z) = 0$ pour tout $z \in \boldsymbol{R}^l$ c'est-à-dire $(13)_{s-1}$. Q.E.D. ■

3. – Conditions suffisantes.

Ce paragraphe est notamment consacré à établir la partie « conditions suffisantes » du théorème principal. Rappelons d'abord un résultat que nous avons déjà établi (voir [18], [19], [12]):

THÉORÈME 3.1. *Soit* $P\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ *un polynôme homogène de degré* 2. *Si* P *vérifie*:

$$\forall \lambda \in \Lambda\,, \quad P(\lambda) = 0\,, \tag{17}$$

alors l'application $u \to P(u)$ *est séquentiellement faiblement continue* (*au sens* (1) *implique* (2)) *de* $H(\Omega, A, 2)$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$. ■

En notant que si $(\lambda_1, \zeta_1), (\lambda_2, \zeta_2) \in V$ avec rang $(\zeta_1, \zeta_2) \leqslant 1$, alors λ_1, λ_2 et $\lambda_1 + \lambda_2$ appartiennent à Λ, et que si P est un polynôme homogène de degré 2, on a:

$$P(\lambda) = \frac{1}{2!} L_P \lambda \lambda\,, \quad \forall \lambda \in \Lambda\,,$$

(où L_P est la forme bilinéaire symétrique définie sur $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^m$ et associée à P, voir (3)), il est clair que (17) est équivalent à (5).

Dans le cas où f est un polynôme de degré 2 sur $\boldsymbol{R}^m$, la condition (5) est donc *nécessaire et suffisante* pour que f soit solution du problème (*), et ceci sans avoir besoin de faire l'hypothèse que $a(\zeta)$ est de rang constant.

COROLLAIRE 3.2. *L'application* $u \to (u_{l+1}, \dots, u_m)$ *est compacte de* $H(\Omega, A, 2)$ *dans* $(L^2_{\mathrm{Loc}}(\Omega))^{m-l}$. ■

DÉMONSTRATION. Considérons une suite u^ε qui converge vers u^0 dans $H(\Omega, A, 2)$ faible. En appliquant le théorème 3.1. au polynôme P défini par $P(y) = y_j^2$ $(l+1 \leqslant j \leqslant m)$, qui vérifie l'hypothèse (17) en raison du choix que nous avons fait pour la base de $\boldsymbol{R}^m$, et en utilisant dans (2) des fonctions test $\varrho = \phi^2$, où $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on voit que $\phi u_j^\varepsilon \to \phi u_j^0$ dans $L^2(\Omega)$ fort, d'où le résultat. ■

Comme conséquence de ce corollaire on obtient (en extrayant des sous-suites qui convergent presque partout et en utilisant le théorème d'Egorov et l'inégalité de Hölder) la:

PROPOSITION 3.3. *Soient* p *tel que* $2 \leqslant p \leqslant +\infty$ *et* c *une fonction* $c\colon \boldsymbol{R}^{m-l} \to \boldsymbol{R}$, *continue, vérifiant* (si p est fini):

$$\begin{cases} |c(y_{l+1}, \ldots, y_m)| \leqslant \text{cste}\,(|y_{l+1}| + \ldots + |y_m|)^q\,, \\ si\ |y_{l+1}| + \ldots + |y_m|\ grand,\ avec\ q < p\,. \end{cases}$$

Alors pour toute suite u^ε *telle que* (*au sens de* (1)):

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad dans\ H(\Omega, A, p)\ faible\,, \tag{18}$$

on a:

$$c(u^\varepsilon_{l+1}, \ldots, u^\varepsilon_m) \to c(u^0_{l+1}, \ldots, u^0_m) \quad dans\ L^1_{\text{Loc}}(\Omega)\ fort\,. \tag{19}$$ ■

Enonçons maintenant le résultat le plus nouveau de cet article:

THÉORÈME 3.4. *Nous supposerons que*:

$$\forall \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\}\,, \qquad \text{rang}\, a(\zeta) = \text{cste}\,. \tag{20}$$

Soit r *un entier tel que* $3 \leqslant r \leqslant \inf(N, l)$.
Si $P\colon \boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}$ *est un polynôme homogène de degré* r *vérifiant*:

$$\begin{cases} \forall (\lambda_1, \zeta_1), (\lambda_2, \zeta_2), \ldots, (\lambda_r, \zeta_r) \in V\,, \\ tels\ que\ \text{rang}\,(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r) \leqslant r - 1\,, \\ L_P \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r = 0\,, \end{cases} \tag{21}$$

alors l'application $u \to P(u)$ *est séquentiellement faiblement continue de* $H(\Omega, A, 2r-2)$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ (*au sens* (1) *implique* (2)). ■

Dans l'énoncé du théorème 3.4., nous nous sommes limités à $3 \leqslant r \leqslant \inf(N, l)$. En effet, le cas $r = 1$ est trivial (P est alors linéaire), le cas $r = 2$ a été traité au théorème 3.1., et on déduit facilement de (21) que P est nul si $r > \inf(N, l)$.

En rassemblant les résultats des théorèmes 3.1. et 3.4. et de la proposition 3.3., il est clair que nous avons démontré que *si* $a(\zeta)$ *est de rang constant*, les conditions i) et ii) du théorème principal sont suffisantes (et donc *nécessaires et suffisantes*) pour que l'application $u \to f(u)$ soit séquentiellement faiblement continue [4] de $H(\Omega, A, \infty)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

[4] On pourrait améliorer légèrement ce résultat pour obtenir la continuité faible sur $H(\Omega, A, p)$ (p fini) en utilisant le fait que f est nécessairement un polynôme de degré au plus égal à $\inf(N, l)$ en $y_1, \ldots, y_l$ et que chaque polynôme homogène de degré r est continu faiblement sur $H(\Omega, A, 2r-2)$.

REMARQUE 3.5. Tel qu'il est énoncé, le théorème 3.4. est insatisfaisant à un double point de vue:

— si P est un polynôme de degré r, nous démontrons la faible continuité de l'application $u \to P(u)$ sur $H(\Omega, A, 2r-2)$, alors que cette application est correctement définie sur $H(\Omega, A, r)$. Toutefois, il ne s'agit là que d'un inconvénient mineur; notons d'ailleurs que nous avons seulement supposé que les dérivées $\sum_i \sum_j a_{ijk}(\partial u_j/\partial x_i)$ sont dans $L^2(\Omega)$ et non dans un espace $L^q(\Omega)$ avec $q \geqslant 2$; ceci compense en partie cela. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 4;

— plus gênante est l'hypothèse (20) que le symbole de l'opérateur A est de rang constant: en effet, cette hypothèse exclut du cadre de notre étude certains espaces $H(\Omega, A, p)$. Nous sommes convaincus que cette hypothèse doit pouvoir être levée, peut être en utilisant une démonstration analogue à celle donnée dans [18], [19], [12] dans le cas d'un polynôme de degré deux. Mais nous n'avons pas réussi à adapter cette démonstration; aussi nous avons suivi la méthode que nous avions utilisée dans [11], et qui impose de faire l'hypothèse (20); cette méthode reprend des idées exprimées dans les articles de L. Sarason [15] et T. Kato [7], qui font suite à deux articles de J. R. Schulenberger et C. H. Wilcox [16], [17]. ■

Avant de démontrer le théorème 3.4., donnons deux lemmes empruntés à ces auteurs; dans ces deux lemmes l'hypothèse (20) de rang constant est essentielle. Nous considérerons désormais $a(\zeta)$ comme *une matrice à coefficients réels mais opérant de* $\boldsymbol{C}^m$ *dans* $\boldsymbol{C}^n$.

LEMME 3.6 [15]. *On fait l'hypothèse que:*

$$\forall \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\}\,, \qquad \operatorname{rang} a(\zeta) = \text{cste}\,. \tag{20}$$

Alors il existe $c > 0$ tel que:

$$\begin{cases} \forall \zeta \in \boldsymbol{R}^N\,, \quad \forall w \in (\operatorname{Ker} a(\zeta))^\perp\,, \\ \text{on a: } |\zeta|_{\boldsymbol{R}^N} |w|_{\boldsymbol{C}^m} \leqslant c |a(\zeta) w|_{\boldsymbol{C}^n}\,. \end{cases} \tag{22}$$ ■

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que l'hypothèse (20) implique que l'application qui à $\zeta \in \boldsymbol{R}^N$ associe la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} a(\zeta))^\perp$ est continue en tout point $\zeta \in R^N - \{0\}$ à valeurs dans $\mathfrak{L}(C^m, C^m)$. (Ceci peut se démontrer de façon élémentaire en considérant une base orthonormée *quelconque* $e^1(\zeta), \ldots, e^m(\zeta)$ de $\boldsymbol{C}^m$, dont les q premiers vecteurs engendrent $\operatorname{Ker} a(\zeta)$, pour tout ζ, et en extrayant des sous-suites).

Démontrons maintenant le lemme par l'absurde: si (22) n'est pas vérifié, c'est qu'il existe deux suites ζ^ε et w^ε telles que:

$$\begin{cases} \zeta^\varepsilon \in \boldsymbol{R}^N , & |\zeta^\varepsilon| = 1 , \\ w^\varepsilon \in \boldsymbol{C}^m , & |w^\varepsilon| = 1 , \quad w^\varepsilon \in \big(\operatorname{Ker} a(\zeta)\big)^\perp , \\ a(\zeta^\varepsilon) w^\varepsilon \to 0 & \text{dans } \boldsymbol{C}^n . \end{cases}$$

Extrayant une sous-suite et passant à la limite, on obtient que:

$$|\zeta^0| = 1 , \qquad |w^0| = 1 , \qquad a(\zeta^0) w^0 = 0 , \qquad w^0 \in \big(\operatorname{Ker} a(\zeta^0)\big)^\perp ,$$

ce qui est absurde. ■

LEMME 3.7 [7]. *Pour tout $\zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\}$, soit $\pi(\zeta)$ la projection orthogonale de $\boldsymbol{C}^m$ sur $\big(\operatorname{Ker} a(\zeta)\big)^\perp$.*

Si on fait l'hypothèse que:

$$\forall \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\} , \qquad \operatorname{rang} a(\zeta) = \text{cste} , \tag{20}$$

alors π est un multiplicateur de Fourier dans $L^p(\boldsymbol{R}^N, \boldsymbol{C}^m)$, pour tout $1 < p < +\infty$, i.e. (5):

$$\begin{cases} u \in L^p(\boldsymbol{R}^N, \boldsymbol{C}^m) \ \textit{entraîne} \ \overline{\mathscr{F}}\big(\pi \mathscr{F}(u)\big) \in L^p(\boldsymbol{R}^N, \boldsymbol{C}^m) \\ \textit{avec} \ \|\overline{\mathscr{F}}\big(\pi \mathscr{F}(u)\big)\|_{L^p} \leqslant C_p \|u\|_{L^p} , \qquad (1 < p < \infty) , \\ \textit{où} \ \forall y \in \boldsymbol{R}^N , \\ \Big(\overline{\mathscr{F}}\big(\pi \mathscr{F}(u)\big)\Big)(y) = \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^N_\zeta} \exp[2i\pi\zeta \cdot y] \pi(\zeta) \Big(\int_{\boldsymbol{R}^N_x} \exp[-2i\pi \cdot \zeta] u(x)\, dx \Big) d\zeta . \end{cases} \quad ■$$

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que, si (20) est vérifiée, $\zeta \to \pi(\zeta)$ est analytique (6) sur $\boldsymbol{R}^N - \{0\}$; en remarquant que:

$$\operatorname{Ker} a(\zeta) = \operatorname{Ker}\big({}^t a(\zeta) a(\zeta)\big) ,$$

(5) Pour être tout à fait correct, il faudrait définir $\overline{\mathscr{F}}(\pi\mathscr{F})$ sur un ensemble de fonctions denses dans $(L^p)^m$ sur lequel les transformées de Fourier $\mathscr{F}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ sont correctement définies, par example $(L^p \cap L^2)^m$.

(6) Nous reprenons ici une démonstration de [17].

on peut, puisque ${}^t a(\zeta) a(\zeta)$ est une matrice symétrique, utiliser la formule de Cauchy:

$$I-\pi(\zeta) = I-\mathrm{Proj}_{(\mathrm{Ker}({}^t a(\zeta)a(\zeta)))^\perp} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(\zeta)} \left(zI - {}^t a(\zeta)a(\zeta)\right)^{-1} dz\,,$$

qui est valable pour tout $\zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\}$ dès que $C(\zeta)$ est un cercle de $\boldsymbol{C}$ de rayon assez petit, inférieur par exemple à la moitié de l'inf des valeurs absolues des valeurs propres non nulles de ${}^t a(\zeta)a(\zeta)$. Il est facile de démontrer la continuité de ces valeurs propres par rapport à ζ. Le fait que ${}^t a(\zeta)a(\zeta)$ soit de rang constant (puisque l'on a $\mathrm{Ker}\, a(\zeta) = \mathrm{Ker}\, {}^t a(\zeta)a(\zeta)$ et que l'on a fait l'hypothèse (20)) entraîne que l'on peut choisir $C(\zeta) = C(\zeta_0)$ au voisignage d'un point $\zeta_0 \neq 0$; du fait que $\zeta \to {}^t a(\zeta)a(\zeta)$ est analytique sur $\boldsymbol{R}^N - \{0\}$ et de la formule de Cauchy, on déduit que $\zeta \to \pi(\zeta)$ est également analytique.

Le lemme 3.7. est alors une simple application du théorème de Mikhlin (voir, par exemple, l'appendice de [8]) puisque la fonction π est très régulière dans $R^N - \{0\}$ et homogène de degré 0. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.4. Pour simplifier les notations, nous effectuerons la démonstration dans le cas $r = 3$ (on a alors $2r-2=4$); le cas général est analogue et est laissé aux lecteurs courageux.

Rappelons que si P est un polynôme homogène de degré 3, on a (cf. (3)):

$$\left\{\begin{array}{ll} \forall z \in \boldsymbol{R}^l\,, & P(z) = \dfrac{1}{3!} L_P z\,z\,z = \dfrac{1}{3!}\displaystyle\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}\, z_\alpha z_\beta z_\gamma\,, \\ \text{où } p_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{\partial^3 P}{\partial z_\alpha \partial z_\beta \partial z_\gamma}\,, & 1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant l\,. \end{array}\right.$$

1*ère étape*: *localisation.*

Nous devons montrer que si U^ε est une suite qui vérifie:

$$\left\{\begin{array}{l} U^\varepsilon \rightharpoonup U^0 \text{ dans } (L^4(\Omega))^m \text{ faible}\,, \\ \displaystyle\sum_i \sum_j a_{ijk} \frac{\partial U_j^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup \sum_i \sum_j a_{ijk} \frac{\partial U_j^0}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n\,, \end{array}\right.$$

et si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors on a:

$$\int_\Omega \varphi P(U^\varepsilon)\, dx \to \int_\Omega \varphi P(U^0)\, dx\,.$$

Choisissons $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction telle que $\Psi \equiv 1$ sur support φ, et posons:

$$V^\varepsilon = \begin{cases} \varphi U^\varepsilon & \text{dans } \Omega\,, \\ 0 & \text{ailleurs}\,, \end{cases} \qquad W^\varepsilon = \begin{cases} \Psi U^\varepsilon & \text{dans } \Omega\,, \\ 0 & \text{ailleurs}\,. \end{cases}$$

On a alors:

$$\left| \begin{aligned} &\int_\Omega \varphi P(U^\varepsilon)\,dx = \int_\Omega \varphi P(U^\varepsilon)\Psi^2\,dx \\ &= \frac{1}{3!}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{l} \int_\Omega p_{\alpha\beta\gamma}\,\varphi U^\varepsilon_\alpha\,\Psi U^\varepsilon_\beta\,\Psi U^\varepsilon_\gamma\,dx \\ &= \frac{1}{3!}\int_\Omega L_P V^\varepsilon W^\varepsilon W^\varepsilon\,dx = \frac{1}{3!}\int_{\mathbf{R}^N} L_P V^\varepsilon W^\varepsilon W^\varepsilon\,dx\,. \end{aligned} \right.$$

Compte tenu de l'identité:

$$\begin{cases} 6\,L_P VWW + 2\,L_P VVV = \\ \qquad = L_P(V+W)(V+W)(V+W) + L_P(V-W)(V-W)(V-W)\,, \end{cases}$$

et du fait que:

$$\begin{cases} V^\varepsilon \rightharpoonup V_0 \text{ dans } (L^4(\mathbf{R}^N))^m \text{ faible}\,, \\ \displaystyle\sum_i\sum_j a_{ijk}\frac{\partial V^\varepsilon_j}{\partial x_i} \rightharpoonup \sum_i\sum_j a_{ijk}\frac{\partial V^0_j}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(\mathbf{R}^N) \text{ faible}\,, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n\,, \end{cases}$$

(et de l'analogue pour W^ε), on voit qu'il suffit de montrer le résultat suivant:

Pour toute suite u^ε telle que:

$$(23) \qquad \left| \begin{aligned} &u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ dans } (L^4(R^N))^m \text{ faible}\,, \\ &\sum_i\sum_j a_{ijk}\frac{\partial u^\varepsilon_j}{\partial x_i} \rightharpoonup \sum_i\sum_j a_{ijk}\frac{\partial u^0_j}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(R^N) \text{ faible}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n\,, \\ &u^\varepsilon \text{ à support dans un compact fixe } K\,, \end{aligned} \right.$$

on a:

$$(24) \qquad \int_{\mathbf{R}^N} P(u^\varepsilon)\,dx \to \int_{\mathbf{R}^N} P(u_0)\,dx\,.$$

En somme, on a remplacé Ω par $\mathbf{R}^N$ et φ par 1, les fonctions u^ε devenant à support dans le compact K.

2ème étape: décomposition de u^ε.

Si la suite u^ε vérifie (23), définissons deux suites v^ε et w^ε par:

$$v^\varepsilon = \overline{\mathcal{F}}\big((I-\pi)\mathcal{F}(u^\varepsilon)\big)\,,$$
$$w^\varepsilon = \overline{\mathcal{F}}\big(\pi\mathcal{F}(u^\varepsilon)\big)\,,$$

avec les notations du lemme 3.7..

Si on désigne par $\hat{\phi}$ la transformée de Fourier $\mathcal{F}\phi$ d'une fonction ϕ:

$$\hat{\phi}(\zeta) = \int_{\boldsymbol{R}^N_x} \exp[-2i\pi x\cdot\zeta]\phi(x)\,dx\,, \qquad \forall\zeta\in\boldsymbol{R}^N,$$

on voit que la définition de v^ε et w^ε est équivalente à:

$$\text{(25)}\qquad \begin{cases} \hat{v}^\varepsilon(\zeta) = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Ker}\,a(\zeta)}\,\hat{u}^\varepsilon(\zeta)\,, \\ \\ \hat{w}^\varepsilon(\zeta) = \mathrm{Proj}_{(\mathrm{Ker}\,a(\zeta))^\perp}\,\hat{u}^\varepsilon(\zeta)\,. \end{cases} \qquad \forall\zeta\in R^N,$$

On a bien sûr:

$$u^\varepsilon = v^\varepsilon + w^\varepsilon\,,$$

et on montre facilement que v^ε et w^ε sont à valeurs dans $\boldsymbol{R}^m$ et non dans $\boldsymbol{C}^m$.

Examinons maintenant quelles sont les propriétés des suites v^ε et w^ε. Le lemme 3.7. et le fait que:

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \text{ dans } \big(L^q(\boldsymbol{R}^N)\big)^m \text{ faible,} \quad 1\leqslant q\leqslant 4\,,$$

entraînent que:

$$\text{(26)}\qquad \begin{cases} v^\varepsilon \rightharpoonup v_0 \\ \\ w^\varepsilon \rightharpoonup w_0 \end{cases} \text{dans } \big(L^q(\boldsymbol{R}^N)\big)^m \text{ faible, } 1<q\leqslant 4\,.$$

De (25), on déduit que:

$$\begin{cases} a(\zeta)\,\hat{v}^\varepsilon(\zeta) = 0\,, \\ \\ a(\zeta)\,\hat{w}^\varepsilon(\zeta) = a(\zeta)\,\hat{u}^\varepsilon(\zeta)\,, \end{cases} \qquad \forall\zeta\in R^N,$$

d'où par la transformation de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$:

$$\begin{cases} \sum_i \sum_j a_{ijk} \dfrac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_i} = 0 \,, \\ \sum_i \sum_j a_{ijk} \dfrac{\partial w_j^\varepsilon}{\partial x_i} = \sum_i \sum_j a_{ijk} \dfrac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \,, \end{cases}$$

et en joignant cette information à (26), on obtient que:

$$\text{(27)} \qquad \left. \begin{array}{l} v^\varepsilon \rightharpoonup v^0 \\ \\ w^\varepsilon \rightharpoonup w^0 \end{array} \right\} \quad \text{dans } H(\boldsymbol{R}^N, A, q) \text{ faible}, \ 1 < q \leqslant 4 \,.$$

Reprenant encore (25), on note que:

$$\text{(28)} \qquad \forall \zeta \in \boldsymbol{R}^N \,, \quad \big((\operatorname{Re} \hat{v}^\varepsilon(\zeta)), \zeta\big) \in V \ \text{ et } \ \big((\operatorname{Im} \hat{v}^\varepsilon(\zeta)), \zeta\big) \in V \,,$$

et que, en raison du lemme 3.6., on a:

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} \forall \varepsilon \,, \quad \forall \zeta \in \boldsymbol{R}^N \,, \\ |\zeta| |\hat{w}^\varepsilon(\zeta)| \leqslant c |a(\zeta)\, \hat{w}^\varepsilon(\zeta)| = c |a(\zeta)\, \hat{u}^\varepsilon(\zeta)| \,. \end{cases}$$

On a donc:

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} |\zeta|^2 |\hat{w}^\varepsilon(\zeta)|^2 \, d\zeta \leqslant c^2 \int_{\boldsymbol{R}^N} |a(\zeta)\, \hat{u}^\varepsilon(\zeta)|^2 \, d\zeta \,,$$

ou, ce qui est équivalent [7], puisque nous savons déjà par (26) que w^ε est borné dans $\big(L^2(\boldsymbol{R}^N)\big)^m$:

$$w^\varepsilon \text{ borné dans } \big(H^1(\boldsymbol{R}^N)\big)^m \,.$$

En utilisant (26) et le théorème d'injection compacte de $H^1(\boldsymbol{R}^N)$ dans $L^2_{\text{Loc}}(\boldsymbol{R}^N)$, cela entraîne que:

$$\text{(30)} \qquad w^\varepsilon \to w_0 \text{ dans } \big(L^q_{\text{Loc}}(\boldsymbol{R}^N)\big)^m \text{ fort} \,, \quad 1 \leqslant q < 4 \,.$$

[7] Ce résultat est un cas particulier de celui de J. R. Schulenberger et C. H. Wilcox, amélioré par L. Sarason et T. Kato, cf. [16], [17], [15], [7].

Enfin, comme u^ε est à support dans un compact fixe K, on a:

$$\hat{u}^\varepsilon(\zeta) = \int_K \exp[-2i\pi x\cdot\zeta]u^\varepsilon(x)\,dx\,, \qquad \forall\zeta\in\boldsymbol{R}^N\,,$$

et donc:

$$\begin{cases} \hat{u}^\varepsilon(\zeta)\to\hat{u}^0(\zeta)\,, & \forall\zeta\in\boldsymbol{R}^N\,,\\ \|\hat{u}^\varepsilon\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^N;\,\boldsymbol{C}^m)}\leqslant C_K\,. \end{cases}$$

Comme en tout point ζ, $\hat{v}^\varepsilon(\zeta)$ et $\hat{w}^\varepsilon(\zeta)$ sont les projections de $\hat{u}^\varepsilon(\zeta)$, on a donc:

$$\begin{cases} \hat{v}^\varepsilon(\zeta)\to\hat{v}^0(\zeta)\,, \quad \hat{w}^\varepsilon(\zeta)\to\hat{w}^0(\zeta)\,, & \forall\zeta\in\boldsymbol{R}^N\,,\\ \|\hat{v}^\varepsilon\|_{L^\infty}\leqslant C_K\,,\quad \|\hat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty}\leqslant C_K\,, \end{cases}$$

ce qui entraîne d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue que:

$$(31)\qquad \begin{cases} \hat{v}^\varepsilon\to\hat{v}^0 \\ \\ \hat{w}^\varepsilon\to\hat{w}_0 \end{cases} \qquad \text{dans } L^q_{\mathrm{Loc}}(\boldsymbol{R}^N;\boldsymbol{C}^m) \text{ fort } 1\leqslant q<+\infty\,.$$

En conclusion, on a décomposé u^ε en la somme de deux termes dont l'un v^ε appartient au noyau de l'opérateur A et dont l'autre w^ε est «compact».

3ème étape: *passage à la limite.*

Comme $u^\varepsilon = v^\varepsilon + w^\varepsilon$, et comme d'après (26), u^ε, v^ε et w^ε appartiennent à $(L^3(\boldsymbol{R}^N))^m$, nous pouvons écrire:

$$(32)\qquad \begin{cases} 3!\int_{\boldsymbol{R}^N} P(u^\varepsilon)\,dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} L_P u^\varepsilon u^\varepsilon u^\varepsilon\,dx = \\ = \int_{\boldsymbol{R}^N} L_P u^\varepsilon u^\varepsilon w^\varepsilon\,dx + \int_{\boldsymbol{R}^N} L_P u^\varepsilon v^\varepsilon w^\varepsilon\,dx + \int_{\boldsymbol{R}^N} L_P v^\varepsilon v^\varepsilon v^\varepsilon\,dx + \int_{\boldsymbol{R}^N} L_P w^\varepsilon v^\varepsilon v^\varepsilon\,dx\,. \end{cases}$$

Nous allons passer successivement à la limite dans chacun des 4 termes du 2ème membre.

1*er terme.* Comme u^ε est à support dans le compact fixe K, on a:

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} L_P u^\varepsilon u^\varepsilon w^\varepsilon\,dx = \int_K L_P u^\varepsilon u^\varepsilon w^\varepsilon\,dx = \sum_{\gamma=1}^{l}\int_K\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}\,u^\varepsilon_\alpha\,u^\varepsilon_\beta\Big)w^\varepsilon_\gamma\,dx\,.$$

Considérons, pour chaque γ fixé, la suite $\sum_{\alpha,\beta=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha^\varepsilon u_\beta^\varepsilon$. Le polynôme Q_γ, de degré 2, défini par:

$$Q_\gamma(z) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma} z_\alpha z_\beta\,, \quad \forall z \in R^l\,, \tag{33}$$

vérifie la condition:

$$\forall \lambda \in \Lambda\,, \quad Q_\gamma(\lambda) = 0\,.$$

En effet, cette condition s'écrit:

$$\forall \lambda \in \Lambda\,, \quad \sum_{\alpha,\beta=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\alpha \lambda_\beta = 0\,,$$

et résulte de l'hypothèse faite sur le polynôme P en choisissant $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et $\lambda_3 = e^\gamma$ ($\gamma^{\text{ème}}$ vecteur de la base de $\boldsymbol{R}^l$) dans (21). Puisque, d'après (23),

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{dans } H(\boldsymbol{R}^N, \Lambda, 2) \text{ faible}\,,$$

le théorème 3.1. montre que $Q_\gamma(u^\varepsilon) \to Q_\gamma(u^0)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Etant donné que u^ε est borné dans $(L^3(\boldsymbol{R}^N))^m$, on a donc:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha^\varepsilon u_\beta^\varepsilon \rightharpoonup \sum_{\alpha,\beta=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha^0 u_\beta^0 \quad \text{dans } L^{\frac{3}{2}}(\boldsymbol{R}^N) \text{ faible}\,.$$

D'autre part, d'après (30):

$$w_\gamma^\varepsilon \to w_\gamma^0 \quad \text{dans } (L^3(K))^m \text{ fort}\,.$$

Nous pouvons donc passer à la limite dans ce premier terme et conclure que:

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} L_P u^\varepsilon u^\varepsilon w^\varepsilon\,dx \to \int_{\boldsymbol{R}^N} L_P u^0 u^0 w^0\,dx\,. \tag{34}$$

2ème terme. Puisque u^ε est à support dans K, on a:

$$\int_{\boldsymbol{R}^N} L_P u^\varepsilon v^\varepsilon w^\varepsilon\,dx = \int_K L_P u^\varepsilon v^\varepsilon w^\varepsilon\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left\{ \int_K L_P(u^\varepsilon + v^\varepsilon)(u^\varepsilon + v^\varepsilon) w^\varepsilon\,dx - \int_K L_P(u^\varepsilon - v^\varepsilon)(u^\varepsilon - v^\varepsilon) w^\varepsilon\,dx \right\}.$$

On peut alors appliquer à chacun de ces deux termes la démonstration précédente, puisque, d'après (27), $v^\varepsilon \rightharpoonup v^0$ dans $H(\boldsymbol{R}^N, A, 2)$ faible et v^ε est borné dans $(L^3(\boldsymbol{R}^N))^m$. On en conclut que:

(35) $$\int_{\boldsymbol{R}^N} L_P u^\varepsilon v^\varepsilon w^\varepsilon \, dx \to \int_{\boldsymbol{R}^N} L_P u^0 v^0 w^0 \, dx .$$

3ème terme. D'après l'identité de Plancherel-Parseval, et puisque $v^\varepsilon \in (L^4(\boldsymbol{R}^N))^m \cap (L^2(\boldsymbol{R}^N))^m$ d'après (26), on a:

(36) $$\left\{\begin{aligned} &\int_{\boldsymbol{R}^N} L_P v^\varepsilon v^\varepsilon v^\varepsilon \, dx = \int_{\boldsymbol{R}^N} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma} v_\alpha^\varepsilon (v_\beta^\varepsilon v_\gamma^\varepsilon) \, dx \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^N} \sum p_{\alpha\beta\gamma} \, \hat{v}_\alpha^\varepsilon \overline{(v_\beta^\varepsilon v_\gamma^\varepsilon)^\wedge} d\zeta \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^N} \sum p_{\alpha\beta\gamma} \, \hat{v}_\alpha^\varepsilon(\zeta) \left(\int_{\boldsymbol{R}^N} \overline{\hat{v}_\beta^\varepsilon(\zeta-\eta)} \, \overline{\hat{v}_\gamma^\varepsilon(\eta)} \, d\eta \right) d\zeta \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^N} \left(\int_{\boldsymbol{R}^N} \sum p_{\alpha\beta\gamma} \, \hat{v}_\alpha^\varepsilon(\zeta) \, \overline{\hat{v}_\beta^\varepsilon(\zeta-\eta)} \, \overline{\hat{v}_\gamma^\varepsilon(\eta)} \, d\eta \right) d\zeta . \end{aligned}\right.$$

Mais on déduit de (28) et de l'hypothèse (21) que:

$$\forall \zeta \in \boldsymbol{R}^N , \qquad \forall \eta \in \boldsymbol{R}^N , \qquad \sum p_{\alpha\beta\gamma} \hat{v}_\alpha^\varepsilon(\zeta) \, \overline{\hat{v}_\beta^\varepsilon(\zeta-\eta)} \, \overline{\hat{v}_\gamma^\varepsilon(\eta)} = 0 ,$$

et on a donc:

(37) $$\int_{\boldsymbol{R}^N} L_P v^\varepsilon v^\varepsilon v^\varepsilon \, dx = 0 \to 0 = \int_{\boldsymbol{R}^N} L_P v^0 v^0 v^0 \, dx .$$

Remarquons que dans (36) nous avons procédé avec beaucoup de soin, de manière à pouvoir écrire la dernière ligne sans utiliser le théorème de Fubini: en effet, la fonction des 2 variables ζ et η $\sum p_{\alpha\beta\gamma} \hat{v}_\alpha^\varepsilon(\zeta) \, \overline{\hat{v}_\beta^\varepsilon(\zeta-\eta)} \, \overline{\hat{v}_\gamma^\varepsilon(\eta)}$ est nulle, mais rien ne permet d'affirmer que chaque terme $\hat{v}_\alpha^\varepsilon(\zeta) \, \overline{\hat{v}_\beta^\varepsilon(\zeta-\eta)} \, \overline{\hat{v}_\gamma^\varepsilon(\eta)}$ de la somme est une fonction de $L^1(\boldsymbol{R}_\zeta^N \times \boldsymbol{R}_\eta^N)$.

Remarquons aussi que nous avons utilisé pour la première fois dans (36) le fait que u^ε est dans L^4 (jusqu'à présent la démonstration utilisait seulement $u^\varepsilon \in L^q$ avec $q > 3$). C'est l'identité de Plancherel-Parseval qui nous a conduit à cette hypothèse, que nous utiliserons également dans le traitement du 4ème terme (pour majorer la partie à l'infini).

4ème terme. Utilisant l'identité de Plancherel-Parseval comme dans le 3ème terme, on obtient:

$$(38)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{R^N} L_P w^\varepsilon v^\varepsilon v^\varepsilon\, dx = \int_{R^N} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}\, \hat{w}^\varepsilon_\alpha\, \overline{(v^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_\gamma)^\wedge}\, d\zeta \\ \displaystyle = \int_{|\zeta|<R} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}\, \hat{w}^\varepsilon_\alpha(\zeta)\, \overline{(v^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_\gamma)^\wedge(\zeta)}\, d\zeta + \int_{|\zeta|\geqslant R} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}\, \hat{w}^\varepsilon_\alpha(\zeta)\, \overline{(v^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_\gamma)^\wedge(\zeta)}\, d\zeta\,. \end{cases}$$

Nous allons traiter séparément chacun des deux termes de (38).

Terme à distance finie. Montrons que si R est fixé, nous pouvons passer à la limite en ε dans le terme $\int_{|\zeta|<R}$.

Pour α fixé, le terme $\sum_{\beta,\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma} \overline{(v^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_\gamma)^\wedge}$ n'est autre que le conjugué de la transformée de Fourier de $Q_\alpha(v^\varepsilon)$ où Q_α est le polynôme de degré 2 défini par (33). Par le même raisonnement que celui que nous avons utilisé pour passer à la limite dans le 1er terme, on obtient:

$$Q_\alpha(v^\varepsilon) \rightharpoonup Q_\alpha(v^0) \qquad \text{dans } L^{\frac{3}{2}}(\boldsymbol{R}^N) \text{ faible}\,.$$

On en déduit que les transformées de Fourier convergent dans $L^3(\boldsymbol{R}^N; \boldsymbol{C})$ faible.

D'autre part, (31) implique que:

$$\hat{w}^\varepsilon_\alpha \to \hat{w}^0_\alpha \qquad \text{dans } L^{\frac{3}{2}}(|\zeta|<R) \text{ fort}\,.$$

On a donc:

$$(39)\quad \begin{cases} \text{Pour tout } R \text{ fixé}\,, \\ \displaystyle\int_{|\zeta|<R} \sum p_{\alpha\beta\gamma}\, \hat{w}^\varepsilon_\alpha(\zeta)\, \overline{(v^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_\gamma)^\wedge(\zeta)}\, d\zeta \to \int_{|\zeta|<R} \sum p_{\alpha\beta\gamma}\, \hat{w}^0_\alpha(\zeta)\, \overline{(v^0_\beta v^0_\gamma)^\wedge(\zeta)}\, d\zeta\,. \end{cases}$$

Terme à l'infini. Montrons maintenant qu'étant donné $\delta > 0$ fixé, nous pouvons choisir R assez grand de façon à ce que le terme $\left|\int_{|\zeta|\geqslant R}\right|$ soit inférieur à δ, uniformément en ε. En effet, d'après (29):

$$\left|\int_{|\zeta|\geqslant R} \sum p_{\alpha\beta\gamma}\, \hat{w}^\varepsilon_\alpha(\zeta)\, \overline{(v^\varepsilon_\gamma v^\varepsilon_\beta)^\wedge(\zeta)}\, d\zeta\right| \leqslant \sum |p_{\alpha\beta\gamma}| \int_{|\zeta|\geqslant R} |\hat{w}^\varepsilon_\alpha(\zeta)|\, \left|\overline{(v^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_\gamma)^\wedge(\zeta)}\right| d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \sum |p_{\alpha\beta\gamma}| \int_{|\zeta|\geqslant R} \frac{c}{|\zeta|} |a(\zeta)\hat{u}^\varepsilon(\zeta)|\, |\overline{(v_\beta^\varepsilon v_\gamma^\varepsilon)^\wedge(\zeta)}|\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \sum |p_{\alpha\beta\gamma}| \int_{|\zeta|\geqslant R} \frac{c}{R} |a(\zeta)\hat{u}^\varepsilon(\zeta)|\, |\overline{(v_\beta^\varepsilon v_\gamma^\varepsilon)^\wedge(\zeta)}|\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{R} \sum |p_{\alpha\beta\gamma}|\ \|a(\cdot)\hat{u}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^N;\, \mathbf{C}^n)}\, \|(v_\beta^\varepsilon v_\gamma^\varepsilon)^\wedge\|_{L^2(\mathbf{R}^N;\, \mathbf{C})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{R} \sum |p_{\alpha\beta\gamma}| \left(\sum_k \left\| \sum_i \sum_j a_{ijk} \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^N)} \right)^{\frac{1}{2}} \|(v_\gamma^\varepsilon v_\beta^\varepsilon)\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \leqslant cste \frac{1}{R}.$$

De ce résultat et de (39), on déduit que:

$$\int_{\mathbf{R}^N} L_P\, w^\varepsilon v^\varepsilon v^\varepsilon\, dx \to \int_{\mathbf{R}^N} L_P\, w^0 v^0 v^0\, dx\,. \tag{40}$$

4ème étape: *conclusion.*

Revenant en arrière, nous constatons que nous avons démontré que si une suite u^ε vérifie (23), alors, grâce à la décomposition (32) et aux résultats de convergence (34), (35), (37) et (40), on a:

$$\int_{\mathbf{R}^N} P(u^\varepsilon)\, dx \to \int_{\mathbf{R}^N} P(u^0)\, dx\,,$$

c'est-à-dire (24). C'est le but que nous nous étions fixé, et que nous avons atteint, non sans efforts. ■

4. – Deux exemples.

On peut considérer de nombreux exemples d'espaces $H(\Omega, A, p)$ et chercher dans chaque cas particulier à résoudre le problème $(*)$, c'est-à-dire à expliciter quelles sont les fonctions f auxquelles sont associées des applications $u \to f(u)$ séquentiellement faiblement continues de $H(\Omega, A, p)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Un certain nombre de tels exemples sont donnés dans [19] et [12]; on y trouvera également des applications, la plupart rapidement évoquées, qui devraient, nous l'espérons, justifier notre étude dans l'esprit du lecteur.

Pour résoudre le problème $(*)$, nous avons l'outil que constitue le théorème principal de cet article. Encore faut-il, dans chaque cas particulier, *expliciter* quels sont les polynômes homogènes de degré r qui satisfont (5).

Cela conduit à des calculs algébriques qui sont parfois difficiles, voire inextricables. Quant aux conditions suffisantes, nous ne les avons établies que sous l'hypothèse que:

$$\operatorname{rang} a(\zeta) = \text{cste}\,, \qquad \forall \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\}\,;$$

lorsqu'on veut savoir si cette hypothèse est vérifiée, il est commode de remarquer que:

$$\tag{41} \begin{cases} \operatorname{rang} a(\zeta) = \operatorname{rang} {}^t a(\zeta)\,, \\ \operatorname{rang} {}^t a(\zeta) + \dim \operatorname{Ker} a(\zeta) = m\,, \\ V = \Big\{(\lambda, \zeta) | \lambda \in \boldsymbol{R}^m,\ \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\},\ a(\zeta)\,\lambda = 0\Big\}\,, \end{cases}$$

ce qui permet de se ramener à l'étude de V qui est souvent plus facile que celle du rang de $a(\zeta)$.

Traitons maintenant rapidement deux exemples. Dans chaque cas, nous donnerons une démonstration directe (et plus performante) du théorème 3.4.

Premier exemple.

Soient Ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^N$ et q un entier.

Considérons l'espace:

$$\tag{42} H(\Omega, A, p) = \Big\{(u^1, u^2, \dots, u^q) | u^\alpha \in \big(L^p(\Omega)\big)^N, \operatorname{rot} u^\alpha \in \big(L^2(\Omega)\big)^{N^2}, 1 \leqslant \alpha \leqslant q\Big\}\,,$$

où pour $\phi \in \big(\mathcal{D}'(\Omega)\big)^N$ on désigne par $\operatorname{rot} \phi$ la distribution appartenant à $\big(\mathcal{D}'(\Omega)\big)^{N^2}$ de composantes:

$$(\operatorname{rot} \phi)_{jk} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}\,, \qquad 1 \leqslant j\,, k \leqslant N\,.$$

Cette définition généralise la définition classique du rotationnel (qui considère le cas $N = 3$); en particulier, on a:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)\,, \qquad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0\,.$$

Si on explicite V on constate que:

$$V = \Big\{(\lambda^1, \dots, \lambda^q, \zeta) | \lambda^\alpha \in \boldsymbol{R}^N,\ \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\},\ \exists \theta^\alpha \in \boldsymbol{R},\ \lambda^\alpha = \theta^\alpha \zeta,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant q\Big\}\,.$$

Il est alors facile de voir que A engendre $\boldsymbol{R}^m$ tout entier (ici $l = m = N \times q$, $n = N^2 \times q$ et $\inf(N, l) = N$) et que (utiliser par exemple (41)):

$$\operatorname{rang} a(\zeta) = m - q\,, \qquad \forall \zeta \in \boldsymbol{R}^N - \{0\}\,.$$

Notre théorème principal s'applique donc à cet exemple.

PROPOSITION 4.1. *L'application $u \to f(u)$ est séquentiellement faiblement continue de $H(\Omega, A, 2N-2)$ défini par* (42) *dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si $f(y) = f(y^1, \ldots, y^q)$ est une somme (à coefficients constants) de déterminants extraits de la matrice des vecteurs $(y^1, \ldots, y^q) \in (\boldsymbol{R}^N)^q$.* ■

Remarquons que nous avons énoncé cette proposition pour l'espace $H(\Omega, A, 2N-2)$, (ce qui est un peu mieux que de l'énoncer pour $H(\Omega, A, \infty)$); cela tient au fait qu'ici $L = \boldsymbol{R}^m$, et les conditions nécessaires impliquent donc que f est un polynôme de degré au plus N en y_k^α, $(1 \leqslant \alpha \leqslant q$, $1 \leqslant k \leqslant N)$; pour les conditions suffisantes, on applique le théorème 3.4. à chaque partie homogène du polynôme; (il y a une petite difficulté si Ω est un ouvert non borné puisqu'on n'a pas alors $L^{2N-2}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ mais seulement $L^{2N-2}(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$ pour $p < 2N-2$; mais cette dernière propriété suffit car on considère toujours le produit de $f(u^\varepsilon)$ par une fonction φ à support compact).

DÉMONSTRATION. D'après le théorème principal, nous voyons que $u \to f(u)$ est séquentiellement faiblement continue de $H(\Omega, A, 2N-2)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ *si et seulement si* f est une somme finie (à coefficients constants) de polynômes P, chacun de ces polynômes étant homogène, à coefficients constants, de degré r (au plus égal à N), et vérifiant (5).

Un calcul simple, mais qu'il faut mener avec soin (on utilise notamment le fait qu'une forme r-linéaire définie sur $(\boldsymbol{R}^N)^r$ est alternée si et seulement si c'est une somme de déterminants d'ordre r extraits de la matrice $N \times r$), permet d'expliciter de tels polynômes et d'achever la démonstration de la proposition 4.1. ■

L'étude des fonctions séquentiellement faiblement continues sur $H(\Omega, A, p)$ défini par (42) est liée à l'étude du problème de calcul des variations suivant:

(43) Trouver les fonctions $F\colon \boldsymbol{R}^{N \times q} \to \boldsymbol{R}$, régulières, pour lesquelles l'intégrale

$$\int_\Omega F(\operatorname{grad} \varphi^1, \ldots, \operatorname{grad} \varphi^q)\, dx$$

atteint son minimum, quand $(\varphi^1, \ldots, \varphi^q)$ varie dans un fermé borné de $(W^{1,p}(\Omega))^q$.

Une condition raisonnable pour que le problème (43) ait une solution est bien évidemment que l'application

$$(\varphi^1, \ldots, \varphi^q) \to \int_\Omega F(\operatorname{grad} \varphi^1, \ldots, \operatorname{grad} \varphi^q)\, dx$$

soit faiblement semi-continue inférieurement sur $\big(W^{1,p}(\Omega)\big)^q$.

Ce problème a été étudié par de nombreux auteurs; parmi les plus anciens figure J. Hadamard, qui dans [4], [5], [6] a indiqué que si F est solution du problème (43), alors on a:

$$(44) \qquad \begin{cases} \forall (y^1, \ldots, y^q) \in \mathbf{R}^{N\times q}, \quad \forall \zeta \in \mathbf{R}^N, \quad \forall (\theta^1, \ldots, \theta^q) \in \mathbf{R}^q, \\ F''(y^1, \ldots, y^q)(\theta^1\zeta, \ldots, \theta^q\zeta)^2 \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Cette condition est connue sous le nom de « *Condition nécessaire de Legendre-Hadamard* » (8).

Il faut ensuite citer L. Van Hove [20], qui a montré que si F est un polynôme du 2ème degré sur $\mathbf{R}^{n\times q}$, la condition (44) de Legendre-Hadamard est nécessaire et suffisante pour que l'application

$$(\varphi^1, \ldots, \varphi^q) \to \int_\Omega F(\operatorname{grad} \varphi^1, \ldots, \operatorname{grad} \varphi^q)\, dx$$

soit faiblement s.c.i. (9), (voir aussi [9]), puis C. B. Morrey Jr., qui dans [9], [10] a introduit la notion de « *quasi-convexité* » pour résoudre le problème (43). Enfin, plus récemment, Y. G. Reshetnyak [13], [14] et J. M. Ball [1], [2], [3] ont démontré que les applications $(\varphi^1, \ldots, \varphi^q) \to \det(\operatorname{grad} p^1, \ldots, \operatorname{grad} \varphi^q)$

(8) Dans le cas où l'on s'intéresse, comme nous l'avons fait dans cet article, à des applications faiblement continues (et non pas seulement faiblement s.c.i.), il faut remplacer dans (44) l'inégalité par une égalité. La condition (44) ainsi modifiée n'est alors pas autre chose que la condition $(13)_2$ dans le cas particulier de l'espace $H(\Omega, A, p)$ défini par (42).

(9) Signalons que nous avons montré (voir [18], [19], [12]) que *si f est un polynôme du 2ème degré*, la condition (de Legendre-Hadamard):

$$f''(y)\lambda\,\lambda \geqslant 0\,, \qquad \forall y \in \mathbf{R}^m\,, \qquad \forall \lambda \in \Lambda\,,$$

est *nécessaire et suffisante* pour que l'application $u \to \int_\Omega \varphi(x) f(u(x))\, dx$ soit faiblement séquentiellement s.c.i. de $H(\Omega, A, 2)$ dans $\mathbf{R}$, quelque soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$. Ceci généralise le résultat de L. Van Hove au cas d'un espace $H(\Omega, A, 2)$ avec A quelconque.

(où det désigne n'importe quel déterminant extrait d'une matrice $N \times q$), sont séquentiellement faiblement continues de $(W^{1,N}(\Omega))^q$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Notre proposition 4.1. constitue donc, d'un certain point de vue, une généralisation de ce dernier résultat, puisque nous le démontrons pour des fonctions $(u^1, \dots, u^q)$ dont les rotationnels sont dans L^2 (rot $u^\alpha \in (L^2(\Omega))^{N^2}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant q$), alors que Y. G. Reshetnyak et J. M. Ball le donnent pour des fonctions $(\operatorname{grad} \varphi^1, \dots, \operatorname{grad} \varphi^q)$ dont les rotationnels sont nuls. Mais notre proposition 4.1. suppose que les fonctions u^α sont dans $(L^{2N-2}(\Omega))^N$ alors que les $\operatorname{grad} \varphi^\alpha$ sont seulement dans $(L^N(\Omega))^N$ dans les travaux de ces deux auteurs.

Supposons maintenant $N = q = 3$ pour pouvoir manier plus facilement les valeurs des indices. La proposition 4.1 conduit alors à travailler sur $H(\Omega, A, 4)$. Mais par un raffinement de démonstration, J. M. Ball montre qu'en fait l'application:

$$(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) \to \det(\operatorname{grad} \varphi^1, \operatorname{grad} \varphi^2, \operatorname{grad} \varphi^3)$$

est séquentiellement faiblement continue de $(W^{1,p}(\Omega))^3$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout p, $p > 9/4$. Reprenant sa méthode, nous allons montrer la:

PROPOSITION 4.2. *Si $N = q = 3$, les applications associées aux déterminants d'ordre 2 et 3 extraits d'une matrice 3×3 sont séquentiellement faiblement continues de $H(\Omega, A, p)$ défini par (42) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout p, $p > 12/5$.*

La différence $12/5 - 9/4$ est donc le prix à payer pour avoir rot $\in L^2$ au lieu de rot $= 0$.

La différence $4 - 12/5$ est, elle, la somme de deux « coûts »: le premier correspond à une application trop brutale de l'identité de Plancherel-Parseval dans la troisième étape de la démonstration du théorème 3.4. (on a pris u dans L^4 alors que le choix naturel serait L^3); le second correspond au fait que dans la démonstration de la proposition 4.2. nous utiliserons au maximum le théorème d'injection de Sobolev, ce qui permet d'économiser sur les indices.

DÉMONSTRATION. Elle suit les idées de [1], [2], [3] et nous n'en donnerons que les principaux points.

On commence en localisant, ce qui permet de se ramener au cas $\Omega = \boldsymbol{R}^3$, avec des fonctions à support dans un compact fixe. On décompose alors tout élément $u \in H(\boldsymbol{R}^3, A, p)$ $(p > 12/5)$ en:

$$u^\alpha = \operatorname{grad} p^\alpha + w^\alpha , \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant 3 ,$$

où w^α est défini par:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} w^\alpha = \operatorname{rot} u^\alpha \\ & \text{dans } \boldsymbol{R}^3\,, \\ \operatorname{div} w^\alpha = 0 \end{cases}$$

système qui est facile à résoudre (en appliquant la transformation de Fourier ou la formule $-\Delta = \operatorname{rot}\operatorname{rot} - \operatorname{grad}\operatorname{div}$) puisqu'ici $\operatorname{rot} u^\alpha \in \left(L^2(\boldsymbol{R}^3)\right)^3$. (Si $\operatorname{rot}\, u \in \left(L^{\tilde{p}}(\boldsymbol{R}^N)\right)^{N^2}$ avec $\tilde{p} \neq 2$, voir par exemple [11] pour un résultat analogue). Si u est borné dans $H(\boldsymbol{R}^3, A, p)$, où $p > 12/5$, on obtient, (grâce aux théorèmes d'injection de Sobolev et de compacité de Rellich-Kondrashov) w^α borné dans $\left(H^1_{\mathrm{Loc}}(\boldsymbol{R}^3)\right)^3$, donc compact dans $\left(L^{p_1}_{\mathrm{Loc}}(\boldsymbol{R}^3)\right)^3$, pour tout $p_1 < 6$; on a alors φ^α borné dans $W^{1,p_2}_{\mathrm{Loc}}(\boldsymbol{R}^3)$, donc compact dans $L^{p_2}_{\mathrm{Loc}}(\boldsymbol{R}^3)$, où $p_2 > 12$. (Notons que cette décomposition est la même que celle que nous avions effectuée dans la démonstration du théorème 3.4.).

On utilise ensuite les formules (cf. [1], [2], [3]): pour les déterminants d'ordre 2:

$$\begin{cases} \det(u^1, u^2) = u_1^1 u_2^2 - u_2^1 u_1^2 \\ \qquad = w_1^1 u_2^2 - w_2^1 u_1^2 + \dfrac{\partial}{\partial x_1}(\varphi^1 u_2^2) - \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\varphi^1 u_1^2) - \varphi^1\left(\dfrac{\partial u_2^2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1^2}{\partial x_2}\right), \end{cases}$$

et pour le déterminant d'ordre 3, en désignant par $\overline{\det}_k(u^2, u^3)$ le mineur du terme u_k^1:

$$\begin{cases} \det(u^1, u^2, u^3) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} w_k^1 \overline{\det}_k(u^2, u^3) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varphi^1 \overline{\det}_k(u^2, u^3)\right) \\ \qquad - \varphi_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\det}_k(u^2, u^3)\right); \end{cases}$$

dans cette dernière formule, on remarque que le dernier terme s'écrite (en développant et en regroupant) comme une somme de termes du type:

$$\varphi^1 u_i^\beta\left(\frac{\partial u_k^\alpha}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x_k}\right).$$

Il est alors facile de passer à la limite dans chacun des termes. ∎

Deuxième exemple.

Soit Ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^N$. Considérons l'espace:

$$(45)\quad \left| \begin{aligned} H(\Omega, A, p) = \Big\{(u_1, \ldots, u_N) | u_j \in L^p(\Omega)\,, &\quad 1 \leqslant j \leqslant N\,, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\,, &\quad 1 \leqslant i, j \leqslant N\,, \quad i \neq j\Big\}\,. \end{aligned} \right.$$

Si on explicite V, on constate que:

$$\begin{aligned} V = &\big\{(\lambda_1, 0, \ldots, 0)(\zeta_1, 0, \ldots, 0) | \lambda_1 \in \boldsymbol{R},\ \zeta_1 \in \boldsymbol{R} - \{0\}\big\} \\ &\cup \big\{(0, \lambda_2, 0, \ldots, 0)(0, \zeta_2, 0, \ldots, 0) | \lambda_2 \in \boldsymbol{R},\ \zeta_2 \in \boldsymbol{R} - \{0\}\big\} \\ &\cup \ldots \cup \big\{(0, \ldots, 0, \lambda_N)(0, \ldots, 0, \zeta_N) | \lambda_N \in \boldsymbol{R},\ \zeta_N \in \boldsymbol{R} - \{0\}\big\}\,. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que Λ engendre $\boldsymbol{R}^N$ (on a ici $m = l = N$, $n = N \times \times (N-1)$) et que (utiliser par exemple (41)):

$$\begin{cases} \operatorname{rang} a(\zeta) = N - 1 & \text{si une seule des composantes de } \zeta \text{ est non nulle,} \\ \operatorname{rang} a(\zeta) = N & \text{sinon .} \end{cases}$$

Nous ne pouvons donc appliquer que la partie « conditions nécessaires » de notre théorème principal. En explicitant, par un calcul facile, les polynômes homogènes qui vérifient (5), on montre la:

PROPOSITION 4.3. *Soit f: $\boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}$, une fonction à valeurs finies, telle que l'application $u \to f(u)$ soit séquentiellement faiblement continue de $H(\Omega, A, \infty)$ défini par* (45) *dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors f est une somme à coefficients constants de produits sans répétitions des fonctions coordonnées de $\boldsymbol{R}^N$, ces produits étant de degré inférieur ou égal à N, i.e.*:

$$(46)\qquad \forall y \in \boldsymbol{R}^N\,, \qquad f(y) = c_0 + \sum_{\substack{r=1,\ldots,N \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqslant N}} c_{j_1 j_2 \ldots j_r}\, y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_r}\,. \qquad \blacksquare$$

Mais quoique l'hypothèse (20) de rang constant ne soit pas vérifiée dans cet exemple, la conclusion de la partie « conditions suffisantes » de notre théorème principal est encore vraie, comme le montre la:

PROPOSITION 4.4. *Si f est de la forme* (46), *l'application $u \to f(u)$ est séquentiellement faiblement continue de $H(\Omega, A, p)$ défini par* (45) *dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout $p \geqslant 2$ si $N = 2$, et pour tout $p > N(N-2)$ si $N \geqslant 3$.* $\blacksquare$

DÉMONSTRATION. Nous allons nous limiter au cas $N \geqslant 3$ (le cas $N = 2$ est analogue).

1ère étape. Soit v une fonction telle que:

$$v \in L^p(\Omega)\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\,, \qquad 2 \leqslant i \leqslant N\,, \qquad (p > N(N-2))\,. \tag{47}$$

Sur $\omega = \prod_{i=1}^{N}]a_i, b_i[$, parallélépipède à côtés parallèles aux axes tel que $\omega \subset \Omega$, définissons φ par:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \int_{a_1}^{x_1} v(t, x_2, \ldots, x_N)\, dt\,.$$

On a alors dans ω:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = v\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_i}(t, x_2, \ldots, x_N)\, dt\,, \qquad 2 \leqslant i \leqslant N\,,$$

de sorte que si v est borné dans l'espace défini par (47), φ est borné dans $H^1(\omega)$ (puisque $N(N-2) > 2$) donc compact dans $L^q(\omega)$, $1/q > 1/2 - 1/N$.

Soit, d'autre part, w tel que:

$$w \in L^s(\Omega)\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_1} \in L^s(\Omega)\,, \qquad \left(\frac{1}{s} < \frac{1}{2} + \frac{1}{N}\right). \tag{48}$$

On peut alors écrire au sens de $\mathcal{D}'(\omega)$:

$$vw = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} w = \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi w) - \varphi \frac{\partial w}{\partial x_1}\,, \tag{49}$$

(chacun des produits vw, φw, $\varphi(\partial w/\partial x_1)$ appartient à $L^1(\omega)$).

De plus si v^ε et w^ε sont deux suites bornées dans les espaces définis par (47) et (48) et convergeant faiblement vers v^0 et w^0, la formule (49) implique que:

$$v^\varepsilon w^\varepsilon \rightharpoonup v^0 w^0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,. \tag{50}$$

2ème étape. Démontrons maintenant la proposition par récurrence sur le degré r des monômes intervenant dans (46): Supposons que, pour r fixé, $(1 \leqslant r < N)$, les applications $u \to u_{j_1} u_{j_2} \ldots u_{j_r}$ sont séquentiellement faiblement continues pour tous les $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqslant N$; ce résultat est évidemment vrai pour $r = 1$ puisque l'application est alors linéaire; considérons un monôme de degré $r + 1$, par exemple $u_1 u_2 \ldots u_{r+1}$, et montrons que l'application associée est séquentiellement faiblement continue.

Pour cela, posons:

$$v^\varepsilon = u_1^\varepsilon, \qquad w^\varepsilon = u_2^\varepsilon \dots u_{r+1}^\varepsilon .$$

On vérifie facilement que si u^ε est borné dans l'espace $H(\Omega, A, p)$ défini par (45) avec $p > N(N-2)$, alors v^ε et w^ε sont bornés dans les espaces définis par (47) et (48). Comme l'hypothèse de récurrence implique que w^ε converge vers $u_2^0 \dots u_{r+1}^0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (et donc dans $L^s(\Omega)$ faible) quand u^ε converge faiblement vers u^0 dans $H(\Omega, A, p)$, on déduit de (50) que:

$$u_1^\varepsilon(u_2^\varepsilon \dots u_{r+1}^\varepsilon) \rightharpoonup u_1^0(u_2^0 \dots . u_{r+1}^0) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) ,$$

c'est-à-dire le résultat cherché. ■

La proposition 4.4. montre que si f est donnée par (46), l'application correspondante est faiblement continue sur $H(\Omega, A, p)$, $p > N(N-2)$, alors qu'il suffit que $u \in (L^N(\Omega))^N$ pour que cette application soit correctement définie. Ce fait doit une nouvelle fois être compris comme la conséquence d'un manque de régularité sur les dérivées (qui sont seulement dans L^2) qu'il faut compenser par le fait que les fonctions sont dans $L^{N(N-2)}$ (au lieu d'être dans L^N). La même démonstration permettrait d'ailleurs de montrer que l'application $u \to f(u)$, où f est donnée par (46), est faiblement continue sur l'espace:

$$\left\{(u_1, \dots, u_N) | u_j \in L^p(\Omega) , \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \in L^N(\Omega) , \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N , \quad i \neq j \right\}$$

dès que $p > N$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Ball, *On the calculus of variations and sequentially weakly continuous maps*, in *Ordinary and Partial Differential Equations, Proceedings of the fourth conference held at Dundee* (march 1976), ed. by W. N. Everitt and B. D. Sleeman. Lecture Notes in Mathematics, No. 564, Springer, Berlin (1976), pp. 13-25,

[2] J. M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in non-linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **63** (1977), pp. 337-403.

[3] J. M. Ball, *Constitutive inequalities and existence theorems in non-linear elastostatics*, in *Non-linear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium*, Vol. I, ed. by R. J. Knops, Research Notes in Mathematics, No. 17, Pitman, Londres (1977), pp. 187-241.

[4] J. Hadamard, *Sur une question de calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France, **30** (1902), pp. 253-256. Réédité in *Oeuvres de Jacques Hadamard*, Editions du CNRS, Paris (1968), Tome 2, pp. 467-470.

[5] J. Hadamard, *Sur quelques questions de calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France, **33** (1905), pp. 73-80. Réédité in *Oeuvres de Jacques Hadamard*, Editions du CNRS, Paris (1968), Tome 2, pp. 471-478.

[6] J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Herman, Paris (1903). Réédité par Chelsea, New York (1949).

[7] T. Kato, *On a coerciveness theorem by Schulenberger and Wilcox*, Indiana Univ. Math. J., **24**, (1975), pp. 979-985.

[8] S. G. Mikhlin, *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Pergamon Press, Oxford (1965).

[9] C. B. Morrey Jr., *Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals*, Pacific J. Math., **2** (1952), pp. 25-53.

[10] C. B. Morrey Jr., *Multiple integrals in the calculus of variations*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 130, Springer, Berlin (1966).

[11] F. Murat, *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **5**, (1978), pp. 489-507.

[12] F. Murat, *Compacité par compensation II*, in *Proceedings of the international meeting on recent methods in non-linear analysis* (Rome, may 1978), ed. by E. De Giorgi, E. Magenes and U. Mosco, Pitagora Editrice, Bologna (1979), pp. 245-256.

[13] Y. G. Reshetnyak, *On the stability of conformal mappings in multidimensional spaces*, Siberian Math. J., **8** (1967), pp. 69-85.

[14] Y. G. Reshetnyak, *Stability theorems for mappings with bounded excursions*, Siberian Math. J., **9** (1968), pp. 499-512.

[15] L. Sarason, *Remarks on an inequality by Schulenberger and Wilcox*, Ann .Mat. Pura Appl., **92** (1972), pp. 23-28.

[16] J. R. Schulenberger - C. H. Wilcox, *Coerciveness inequalities for nonelliptic systems of partial differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl., **88** (1971), pp. 229-306.

[17] J. R. Schulenberger - C. H. Wilcox, *A coerciveness inequality for a class of nonelliptic operators of constant deficit*, Ann. Mat. Pura Appl., **92** (1972), pp. 77-84.

[18] L. Tartar, *Cours Peccot*, Collège de France, Paris, mars 1977, non publié.

[19] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to p.d.e.*, in *Non-linear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium*, Vol. IV, ed. by R. J. Knops, Research Notes in Mathematics, No. 39, Pitman, Londres (1979), pp. 136-212.

[20] L. Van Hove, *Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues*, Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Proc. of the section of Sc., **50** (1947), pp. 18-23.

Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire d'Analyse Numérique
Tour 55-65, 4 Place Jussieu
75230 Paris (France)